Progress in Mathematics
286

Ahmed Abbes

Éléments de Géométrie Rigide

Volume I.
Construction et Étude Géométrique des Espaces Rigides

Birkhäuser

Birkhäuser

Progress in Mathematics
Volume 286

Ahmed Abbes

Éléments de Géométrie Rigide

Volume I
Construction et Étude Géométrique des Espaces Rigides

Birkhäuser

Ahmed Abbes
Université de Rennes
IRMAR
Campus de Beaulieu
35042 Rennes cedex
France
ahmed.abbes@univ-rennes1.fr

ISBN 978-3-0348-0011-2 e-ISBN 978-3-0348-0012-9
DOI 10.1007/978-3-0348-0012-9

Mathematics Subject Classification (2010): 14G22

Cover design: deblik, Berlin

Printed on acid-free paper

Springer Basel AG is part of Springer Science+Business Media

www.birkhauser-science.com

A mes parents

Je ne publie qu'un volume, Du côté de chez Swann, *d'un roman qui aura pour titre général* À la recherche du temps perdu. *J'aurais voulu publier le tout ensemble ; mais on n'édite plus d'ouvrage en plusieurs volumes. Je suis comme quelqu'un qui a une tapisserie trop grande pour les appartements actuels et qui a été obligé de la couper.*

De jeunes écrivains, avec qui je suis d'ailleurs en sympathie, préconisent au contraire une action brève avec peu de personnages. Ce n'est pas ma conception du roman. Comment vous dire cela ? Vous savez qu'il y a une géométrie plane et une géométrie dans l'espace. Eh bien, pour moi, le roman ce n'est pas seulement de la psychologie plane, mais de la psychologie dans le temps. Cette substance invisible du temps, j'ai tâché de l'isoler, mais pour cela il fallait que l'expérience pût durer. J'espère qu'à la fin de mon livre, tel petit fait social sans importance, tel mariage entre deux personnes qui dans le premier volume appartiennent à des mondes bien différents, indiquera que du temps a passé et prendra cette beauté de certains plombs patinés de Versailles, que le temps a engainés dans un fourreau d'émeraude.

Marcel Proust
Le Temps du 12 novembre 1913

Table des matières

Préface par Michel Raynaud

En 1961, John Tate pose les bases d'une géométrie analytique globale sur un corps valué non archimédien. Par opposition à la géométrie analytique "molle" (wobbly spaces), il va l'appeler *géométrie analytique rigide.*

Tate se place sur un corps valué K, corps des fractions d'un anneau de valuation complet R, de hauteur 1. Soient Γ le groupe de la valuation de K et k le corps résiduel de R. On note $K\langle \underline{T} \rangle$ l'algèbre de Banach noethérienne des séries entières convergentes sur un polydisque unité fermé. Les pièces élémentaires, qui vont constituer ces espaces rigides, sont les affinoïdes. Ils sont définis par leur algèbre A de fonctions holomorphes, algèbre de Banach quotient de l'algèbre $K\langle \underline{T} \rangle$ et par leur ensemble de points qui est le spectre maximal de A. La nouveauté consiste à introduire certains recouvrements ouverts *admissibles* de ces affinoïdes qui se chevauchent suffisamment pour que leurs espaces de fonctions holomorphes se recollent. Le prototype de tels recouvrements consiste à prendre une fonction holomorphe f sur un affinoïde X, un élément γ de Γ et à recouvrir X par les deux ouverts affinoïdes où f prend des valuations $\geq \gamma$ et $\leq \gamma$. Plus généralement, Tate étudie les recouvrements d'un affinoïde par des ouverts affinoïdes spéciaux et montre qu'ils sont acycliques. Il faut toute l'autorité de Serre et la complicité de l'IHÉS pour que le texte de Tate soit disponible dès 1962. Plus tard (en 1971), viendra une publication en bonne et due forme dans Inventiones [43].

La théorie de Tate est reprise et complétée par R. Kiehl en 1967 dans [34, 35]. Kiehl présente les recouvrements qui donnent lieu à recollement dans le cadre d'une topologie de Grothendieck (comme celui-ci l'avait d'ailleurs suggéré à Tate), obtient les énoncés de recollement et de nullité de la cohomologie pour les faisceaux cohérents sur les affinoïdes, introduit les espaces rigides propres et prouve les énoncés de finitude de la cohomologie afférents.

Les premières applications de la géométrie rigide mettent en jeu des revêtements analytiques de degré infini. C'est d'abord la réalisation de la courbe elliptique dite de Tate, comme quotient du groupe multiplicatif par un réseau, qui a été une profonde motivation pour le fondement de la théorie. Ce résultat est étendu par Mumford en genre supérieur : une courbe propre et lisse sur K, qui admet sur R une réduction semi-stable ayant une fibre spéciale à composantes irréductibles rationnelles, possède une uniformisation « à la Schottky » : elle est le quotient par un groupe libre de type fini, d'un ouvert rigide de la droite projective sur K.

A partir des années 70, la géométrie analytique rigide va s'égailler, de façon un peu anarchique, dans des directions variées que nous allons rapidement évoquer.

Géométrie rigide et géométrie formelle. A un R-schéma formel $\mathfrak{X}$ localement de présentation finie, on associe un K-espace rigide X, sa "fibre générique" : un ouvert affine formel de $\mathfrak{X}$ de R-algèbre $\mathscr{A}$ correspond à l'ouvert affinoïde de X, de K-algèbre $A = \mathscr{A} \otimes_R K$. Pour X, le schéma formel $\mathfrak{X}$ joue alors le rôle d'un modèle R-entier et on dispose d'une spécialisation de X vers la fibre résiduelle $\underline{\mathfrak{X}}$ de $\mathfrak{X}$. Réciproquement, si l'on part d'un K-espace rigide X, séparé de type fini, il est la fibre générique d'un R-schéma formel de présentation finie $\mathfrak{X}$. De plus, deux modèles entiers de X sont comparables par éclatement formel *permis*, c'est-à-dire de centre dans la fibre fermée. Vue ainsi, la géométrie rigide apparaît comme étroitement liée à la géométrie formelle et il existe souvent des modèles entiers naturels, comme dans la théorie de Mumford-Schottky. Ce point de vue est esquissé en 74 dans [41]. Un rôle clé est joué par une technique de platification par éclatement dont la version algébrique est présentée dans [42]. La version formelle paraît quelques années plus tard (Mehlmann [39], Bosch, Lütkebohmert [9]). Partant d'un morphisme $u\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ entre R-schémas formels de type fini, qui est plat sur les fibres génériques, on peut modifier les modèles entiers par éclatement permis de façon à obtenir un morphisme plat entre modèles formels $u'\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{X}'$.

Le point de vue de Berkovich. Celui-ci considère pour tout n-uple de nombres réels > 0 $r = (r_1, \dots, r_n)$, l'algèbre de Banach noethérienne $K\langle r^{-1}\underline{T}\rangle$ des séries convergentes dans le polydisque fermé $|T_i| \leq r_i$ et les affinoïdes ont encore pour algèbre de fonctions holomorphes les algèbres de Banach A, quotient de $K\langle r^{-1}\underline{T}\rangle$. Mais, au lieu de se limiter aux points à valeurs dans les extensions finies de K, Berkovich évalue les éléments de A dans des corps valués L, complets pour une valeur absolue réelle arbitraire qui prolonge celle de K. La topologie des réels retrouve sa place : l'espace des points d'un affinoïde, muni de la topologie produit, est compact et localement connexe par arcs. Durant les années 90, Berkovich développe la cohomologie étale des espaces rigides et celle des cycles évanescents sur les schémas formels, pour des coefficients ℓ-adiques, où ℓ est un nombre premier distinct de la caractéristique de k [2, 3, 4].

L'approche de Fujiwara. On part du point de vue des R-schémas formels, à éclatements permis près. Considérons un K-espace rigide de type fini, séparé X. Ses modèles entiers $\mathfrak{X}$ forment un système projectif filtrant de R-schémas formels qui, par passage à la limite, donnent un espace annelé quasi-compact. Cette construction, qui rappelle celle de la voûte étoilée (Riemann space) introduite en géométrie algébrique par Zariski, conduit à des "modèles entiers limites" lointains mais canoniques. La platitude, après éclatement permis, devient une platitude au niveau des modèles limites. Cette présentation est esquissée dans [20] et devrait être développée dans un ouvrage à venir.

Ainsi, depuis sa naissance, la géométrie rigide a oscillé entre le point de vue des K-séries convergentes qui l'apparente à la géométrie analytique complexe et celui des R-modèles entiers formels qui la relie à la géométrie algébrique sur k.

Le but de ce livre est de présenter les fondements d'une géométrie rigide-formelle relative. Le point de vue adopté est celui des schémas formels à éclatements permis près, mais est abordé dans une situation relative. Les tentatives faites jusqu'à présent (confer [8]) devaient distinguer deux cas : la base $\mathscr{S}$ était soit un schéma formel noethérien, soit un R-schéma formel localement de présentation finie. Trouver une approche uniforme qui englobe ces deux cas particuliers, requiert de dégager une classe d'anneaux topologiques, qui satisfont à certaines propriétés de cohérence et ont un bon comportement vis-à-vis de la platitude, par complétion.

Michel Raynaud
mars 2009

Avant-propos

Il n'est guère possible d'aborder la lecture de ce traité sans avoir une bonne connaissance des oeuvres suivantes d'A. Grothendieck :

a) Éléments de Géométrie Algébrique [28, 29, 30, 31] ;
b) Séminaires de Géométrie Algébrique 1 et 4 [26, 1].

Le lecteur prendra garde que nos références à EGA I [28] se rapportent à la seconde édition (Springer-Verlag, 1971).

Nous suivons d'une manière générale la terminologie introduite par Grothendieck dans les traités mentionnés ci-dessus. Nous nous en écartons à de rares exceptions près, bien mentionnées dans le texte, afin de mettre l'accent sur les concepts fondamentaux pour ce traité. Ainsi, nous renforçons la définition d'anneau *adique* et les notions géométriques qui en découlent.

Suivant les conventions de ([1] VI), nous utilisons l'adjectif *cohérent* comme synonyme de quasi-compact et quasi-séparé.

Introduction

1. La géométrie rigide est devenue, au fil des ans, un outil indispensable dans un grand nombre de questions en géométrie arithmétique. Depuis ses premières fondations, posées par J. Tate en 1961, la théorie s'est développée dans des directions variées. Il est hors de notre propos de présenter ici ces diverses approches. Ce traité se concentrera donc sur celle de M. Raynaud, esquissée en 1974 dans [41], que nous exposerons dans une situation relative et d'une façon systématique. Il y a plusieurs raisons à ce choix. D'une part, plusieurs applications importantes de la géométrie rigide passent par les schémas formels et utilisent, si ce n'est explicitement, du moins implicitement, l'approche de M. Raynaud. D'autre part, de par son essence même, cette approche est particulièrement bien adaptée aux questions de nature algébrique et semble tout à fait incontournable pour les problèmes de platitude.

2. Ce traité sera constitué de deux volumes. Ce premier volume est consacré à la construction des espaces rigides et à l'étude de leurs propriétés géométriques. On trouvera plus loin un résumé détaillé de son contenu. Plusieurs aspects de la théorie de Raynaud ont été développés par Mehlmann dans sa thèse [39] et dans une série d'articles par Lütkebohmert [38], Bosch et Lütkebohmert [8, 9] et Bosch, Lütkebohmert et Raynaud [10, 11]. Mais le besoin de consolider et compléter les fondations s'est fait sentir en particulier pour développer la théorie associée de la cohomologie étale, qui fera l'objet du second volume. Le plan prévu pour ce dernier est le suivant. Nous établirons d'abord des énoncés de comparaison du type GAGA entre la topologie algébrique-étale et la topologie rigide-étale, dont le plus important est du à Gabber et Fujiwara [19]. Celui-ci nous permettra de ramener certaines propriétés du topos rigide-étale à leurs analogues algébriques. Nous démontrerons ensuite les principales propriétés de la cohomologie rigide-étale suivant le plan général de SGA 4 [1] (faisceaux constructibles, théorème de changement de base propre, théorème de changement de base lisse, dimension cohomologique, cohomologie à support compact, dualité de Poincaré...). Nous donnerons enfin quelques applications à la cohomologie étale des schémas comme le théorème d'acyclicité locale des morphismes réguliers ([1] XIX 4.1).

3. Dans la théorie de Raynaud, les espaces rigides sont les "fibres génériques" des schémas formels. Avant de préciser cette notion, il nous faut fixer ses limites, c'est à dire les conditions de finitude requises sur les schémas formels. Initialement, la théorie présentait à ce niveau une dichotomie : on pouvait considérer soit des schémas formels de présentation finie sur un anneau de valuation complet de hauteur 1, soit des schémas formels noethériens. Si le premier cas permet de retrouver la théorie originelle de Tate, le second introduit de nouveaux espaces rigides et donne à cette approche l'un de ses points forts. Nous unifions ces deux cas en introduisant une nouvelle classe d'anneaux topologiques que nous qualifions d'*idylliques*. La première propriété importante de ces anneaux, à la base de beaucoup d'autres, est la propriété d'*Artin-Rees* (1.8.25). Nous la déduisons dans le cas non noethérien d'un résultat de Raynaud-Gruson (1.9.18). La seconde propriété importante est due à Gabber et n'était pas connue en général dans [8, 9, 39] : si A est un anneau idyllique et B est une A-algèbre de type fini, le séparé complété de B pour la topologie déduite de celle de A est B-plat (1.12.17). On dit qu'un schéma formel affine est *globalement idyllique* s'il est de la forme $\mathrm{Spf}(A)$, où A est un anneau idyllique, et qu'un schéma formel est *idyllique* s'il est adique[1] et si tout point admet un voisinage ouvert formel affine globalement idyllique. Nous étendons à ces objets certains résultats de Grothendieck initialement établis pour les schémas formels noethériens [28, 30], entre autres ceux qui portent sur les faisceaux cohérents (2.7.2 et 2.8.5) et leurs cohomologies (théorème de finitude (2.11.5), comparaison de la théorie “algébrique” à la théorie “formelle” (2.12.2)...).

4. Pour définir la “fibre générique” d'un schéma formel idyllique, nous avons besoin de sortir du cadre des schémas formels (et même des espaces annelés). Le sens que nous donnons à cette notion est celui des catégories quotients. Il est naturel d'inverser dans la catégorie des schémas formels idylliques les *éclatements admissibles*, c'est à dire de centre un idéal ouvert de type fini (appelés aussi éclatements permis dans la préface). Raynaud [41] a montré que cette opération suffit pour retrouver la théorie de Tate au-dessus d'un anneau de valuation complet de hauteur 1. Nous l'utiliserons donc comme définition générale. Mais avant d'introduire la bonne catégorie quotient, nous étudions certains objets et propriétés *rigides* relatifs aux schémas formels idylliques, c'est à dire des objets et propriétés stables par éclatements admissibles. Nous donnons ici deux exemples :

(i) On appelle *ordre* 1-*valuatif* un anneau idyllique, local, intègre, de dimension 1 et dont la topologie n'est pas discrète. Un *point rigide* (resp. un *point rigide fermé*) d'un schéma formel idyllique est un sous-schéma (resp. un sous-schéma fermé) affine dont l'anneau est un ordre 1-valuatif. L'ensemble des points rigides d'un schéma formel idyllique $\mathfrak{X}$ est noté $\langle\mathfrak{X}\rangle$. Si A est un anneau idyllique et J est un idéal de définition de A, alors l'ensemble des points rigides fermés de $\mathrm{Spf}(A)$ est en bijection avec l'ensemble des points fermés de $\mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$ (3.3.2). Tout morphisme localement de type fini de schémas formels idylliques $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ induit une application que l'on note encore

[1] On prendra garde que notre notion de schéma formel adique est plus forte que celle de [28].

$f\colon \langle\mathfrak{X}\rangle \to \langle\mathfrak{Y}\rangle$. Nous montrons que si $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ est un éclatement admissible, alors l'application $f\colon \langle\mathfrak{X}\rangle \to \langle\mathfrak{Y}\rangle$ est bijective (3.3.8).

(ii) Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module. On appelle *clôture rigide* de $\mathscr{F}$, et l'on note $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ (cf. [31] 5.9), le $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module

$$\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) = \varinjlim_{n} \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{J}^n, \mathscr{F}).$$

Cette définition ne dépend pas de l'idéal de définition $\mathscr{J}$. Si $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ est un morphisme adique de schémas formels idylliques, on a un morphisme canonique fonctoriel

$$\beta_f(\mathscr{F})\colon \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) \to f_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(f^*\mathscr{F})).$$

Nous montrons que si $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ est un éclatement admissible de présentation finie et $\mathscr{F}$ est cohérent, alors $\beta_f(\mathscr{F})$ est un isomorphisme (3.5.5). C'est une version formelle du théorème d'*acyclicité de Tate* (cf. 3.5.7 et 4.7.9).

5. On désigne par $\mathbf{S}$ la catégorie dont les objets sont les schémas formels idylliques quasi-compacts et les morphismes sont les morphismes localement de présentation finie, et par $\mathbf{B}$ l'ensemble des éclatements admissibles de $\mathbf{S}$. On définit la catégorie des *espaces rigides cohérents*, baptisée catégorie de Raynaud et notée $\mathbf{R}$, comme la catégorie localisée de $\mathbf{S}$ par rapport à $\mathbf{B}$. On note $\mathbf{S} \to \mathbf{R}$, $\mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ le foncteur de localisation. Nous illustrons cette construction par des exemples classiques de disques et couronnes fermés relatifs (cf. 4.1.9 et 4.3.11). On appelle *point rigide* de $\mathbf{R}$ l'image canonique du spectre formel d'un ordre 1-valuatif. Cette notion correspond aux points de la théorie de Tate. Certaines propriétés des morphismes de $\mathbf{S}$ passent au quotient. Ainsi, on dit qu'un morphisme de $\mathbf{R}$ est une immersion (resp. une immersion ouverte, resp. une immersion fermée, resp. fini, resp. propre) s'il admet un modèle formel vérifiant la propriété analogue dans $\mathbf{S}$.

6. La nouveauté par rapport à [8, 9] consiste à développer l'aspect topologique des espaces rigides cohérents. Pour ce faire, nous généralisons la notion de *recouvrement admissible* de Tate : une famille $(X_i \to X)_{i\in I}$ d'immersions ouvertes de $\mathbf{R}$ est un recouvrement admissible si elle admet une sous famille *finie* couvrante pour les points rigides, c'est à dire, s'il existe une partie finie J de I telle que tout point rigide P au-dessus de X majore un point rigide P_j au-dessus de l'un des X_j, $j \in J$ (*i.e.*, $\mathrm{Hom}_X(P_j, P) \neq \emptyset$). La topologie de $\mathbf{R}$ engendrée par les recouvrements admissibles est appelée topologie admissible. Elle donne naissance au *gros topos admissible*, noté $\widetilde{\mathbf{R}}$, que nous utiliserons pour définir les espaces rigides quasi-séparés (mais pas nécessairement quasi-compacts). Il est commode d'associer à tout espace rigide cohérent X la sous-catégorie $\mathbf{Ad}_{/X}$ de $\mathbf{R}_{/X}$ formée des immersions ouvertes $U \to X$. Nous la munirons de la topologie induite par la topologie admissible de $\mathbf{R}$, appelée encore topologie admissible de X. Le topos

X_{ad} des faisceaux d'ensembles sur $\mathbf{Ad}_{/X}$ est le *topos admissible* de X. Tout morphisme $f\colon X \to Y$ de $\mathbf{R}$ induit par changement de base un morphisme de topos admissibles que l'on note encore $f\colon X_{\mathrm{ad}} \to Y_{\mathrm{ad}}$.

7. Soit $\mathfrak{X}$ un objet de $\mathbf{S}$. Notons $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{S}_{/\mathfrak{X}}$ formée des éclatements admissibles ; c'est une catégorie cofiltrante. Nous démontrons dans 4.5.12 que le topos $\mathfrak{X}_{\mathrm{ad}}^{\mathrm{rig}}$ est canoniquement équivalent à la limite projective du topos fibré

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}} \to \mathbf{B}_{\mathfrak{X}},$$

obtenu en associant à tout objet $(\mathfrak{X}', \varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ le topos de Zariski $\mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}}$ et à tout morphisme $f\colon (\mathfrak{X}'', \psi) \to (\mathfrak{X}', \varphi)$ le foncteur $f^*\colon \mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}} \to \mathfrak{X}''_{\mathrm{zar}}$ image inverse par le morphisme de topos déduit de f (cf. [1] VI 8.1.1). Ce théorème ramène l'étude du topos $\mathfrak{X}_{\mathrm{ad}}^{\mathrm{rig}}$ à celle des topos bien connus $\mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}}$, $(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$. Grâce aux résultats généraux de ([1] VI §8), nous en déduisons quelques corollaires importants :

(a) Le topos $\mathfrak{X}_{\mathrm{ad}}^{\mathrm{rig}}$ a mêmes points que la voûte étoilée de $\mathfrak{X}$ (ou l'espace de Zariski-Riemann), c'est à dire, la limite projective d'espaces topologiques

$$\varprojlim_{(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathbf{B}_{\mathfrak{X}}} |\mathfrak{X}'|,$$

où $|\mathfrak{X}'|$ désigne l'espace topologique sous-jacent au schéma formel $\mathfrak{X}'$ (4.5.15). Tout point rigide de $\mathfrak{X}$ définit un point de la voûte étoilée, mais cette application est loin d'être surjective en général.

(b) La catégorie $\mathfrak{X}_{\mathrm{ad}}^{\mathrm{rig}}$ est canoniquement équivalente à la catégorie des sections cartésiennes de la catégorie fibrée

$$\mathfrak{F}'_{\mathfrak{X}} \to \mathbf{B}^{\circ}_{\mathfrak{X}},$$

obtenue en associant à tout objet $(\mathfrak{X}', \varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ le topos de Zariski $\mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}}$ et à tout morphisme $f\colon (\mathfrak{X}'', \psi) \to (\mathfrak{X}', \varphi)$ le foncteur $f_*\colon \mathfrak{X}''_{\mathrm{zar}} \to \mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}}$ image directe par le morphisme de topos déduit de f (4.5.22). La donnée d'une section de $\mathfrak{F}'_{\mathfrak{X}} \to \mathbf{B}^{\circ}_{\mathfrak{X}}$ équivaut à la donnée pour tout objet $(\mathfrak{X}', \varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ d'un faisceau F_{φ} de $\mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}}$ et pour tout morphisme $f\colon (\mathfrak{X}'', \psi) \to (\mathfrak{X}', \varphi)$ d'un morphisme $\gamma_f(F)\colon F_{\varphi} \to f_*(F_{\psi})$, ces morphismes étant soumis à des relations de compatibilité. Une telle section est notée $\{(\mathfrak{X}', \varphi) \mapsto F_{\varphi}\}$. Les sections cartésiennes sont caractérisées par la propriété que les morphismes $\gamma_f(F)$ sont des isomorphismes.

(c) Nous associons fonctoriellement à tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module $\mathscr{F}$ une section $\{(\mathfrak{X}', \varphi) \mapsto \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F})\}$ de $\mathfrak{F}'_{\mathfrak{X}} \to \mathbf{B}^{\circ}_{\mathfrak{X}}$. Le théorème d'acyclicité de Tate implique que cette section est cartésienne lorsque $\mathscr{F}$ est cohérent. Elle définit donc un faisceau $\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ de $\mathfrak{X}_{\mathrm{ad}}^{\mathrm{rig}}$, appelé *fibre rigide* de $\mathscr{F}$. En fait, nous définirons le faisceau $\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module $\mathscr{F}$ (pas nécessairement cohérent) (cf. 4.7.4). Le faisceau $(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})^{\mathrm{rig}}$ est un anneau ; on le note aussi $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$. La correspondance $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ est un foncteur de la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules dans celle des

$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$-modules. Nous étudions les principales propriétés de ce foncteur sur la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents. Nous associons à tout morphisme adique $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ entre objets de $\mathbf{S}$ (en particulier, à tout morphisme de $\mathbf{S}$) un morphisme de topos annelés $\underline{f}\colon (\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}) \to (\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}})$ (cf. 4.7.20). Si f est un morphisme de $\mathbf{S}$, le morphisme de topos sous-jacent à $\underline{f}$ est le morphisme f^{rig}.

(d) Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme propre de $\mathbf{S}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Pour tout $q \geq 0$, le $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module $\mathrm{R}^q f_*\mathscr{F}$ est cohérent, et on a un morphisme fonctoriel
$$\kappa^q\colon (\mathrm{R}^q f_*\mathscr{F})^{\mathrm{rig}} \to \mathrm{R}^q \underline{f}_*(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}).$$
Nous montrons que κ^0 est un isomorphisme ; si de plus, $\mathfrak{Y}$ admet localement un idéal de définition monogène, alors κ^q est un isomorphisme pour tout $q \geq 0$ (4.7.36). On notera que la condition supplémentaire pour $q \geq 1$ est suffisante pour les applications rigides puisqu'il est loisible d'éclater un idéal de définition cohérent.

8. Nous associons à tout objet X de $\mathbf{R}$ un anneau $\mathscr{O}_X$ de X_{ad} et à tout morphisme $f\colon X \to Y$ de $\mathbf{R}$ un homomorphisme $\theta_f\colon \mathscr{O}_Y \to f_*(\mathscr{O}_X)$ vérifiant des relations de compatibilité, tels que pour tout objet $\mathfrak{X}$ de $\mathbf{S}$, $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$ soit l'anneau défini dans la section précédente et pour tout morphisme $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ de $\mathbf{S}$, $\theta_{f^{\mathrm{rig}}}$ soit l'homomorphisme déduit de $\underline{f}$. On note encore $f\colon (X_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_X) \to (Y_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_Y)$ le morphisme de topos annelés déduit de f et θ_f. Nous montrons les résultats suivants :

(i) Si X est un espace rigide cohérent, alors le topos $(X_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_X)$ est localement annelé (4.8.6). De plus, les fibres de $\mathscr{O}_X$ en les points rigides de X sont des anneaux locaux noethériens (4.8.10). Cette dernière propriété nous permet de définir la dimension d'un $\mathscr{O}_X$-module de type fini.

(ii) Soit $\mathfrak{X}$ un objet de $\mathbf{S}$. Pour qu'un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$-module soit cohérent, il faut et il suffit qu'il soit de la forme $\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ pour un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathscr{F}$ (4.8.18). En particulier, pour tout espace rigide cohérent X, l'anneau $\mathscr{O}_X$ est cohérent.

(iii) Soient $f\colon X \to Y$ un morphisme propre d'espaces rigides cohérents, F un $\mathscr{O}_X$-module cohérent. Alors pour tout entier $q \geq 0$, $\mathrm{R}^q f_* F$ est un $\mathscr{O}_Y$-module cohérent (4.8.22).

(iv) On appelle *affinoïde* un espace rigide cohérent qui admet un modèle formel affine globalement idyllique et ayant localement un idéal de définition monogène. Nous montrons que si X est un affinoïde et F est un $\mathscr{O}_X$-module cohérent, alors F est engendré par ses sections globales et $\mathrm{H}^q(X_{\mathrm{ad}}, F) = 0$ pour tout $q \geq 1$ (4.8.26).

9. Nous présentons des versions formelles idylliques de certains résultats de platitude de Raynaud-Gruson, initialement établis dans le cadre algébrique [42]. La plupart de ces énoncés sont parus dans [9] dans le cas général[2] et dans [39] pour

[2]On prendra garde cependant que le traitement de [9] est légèrement incomplet.

les schémas formels de présentation finie au-dessus d'un anneau de valuation de hauteur 1.

Nous étudions en premier lieu les modules cohérents plats sur les schémas formels idylliques. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme de $\mathbf{S}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, $x \in \mathfrak{X}$, $s = f(x)$. Nous introduisons la notion de $\mathscr{S}$-dévissage de $\mathscr{F}$ en x, qui permet de raisonner par récurrence sur la dimension relative $\dim_x(\mathscr{F}/\mathscr{S})$. Quitte à remplacer $(\mathfrak{X}, x)$ et $(\mathscr{S}, s)$ par des voisinages étales élémentaires, on peut toujours construire de tels dévissages. Nous donnons un critère important pour que $\mathscr{F}$ soit $\mathscr{S}$-plat en x en termes de dévissages relatifs (5.3.6). Nous en déduisons de nombreux corollaires, entre autres le fait que l'ensemble des points x de $\mathfrak{X}$ tels que $\mathscr{F}$ soit $\mathscr{S}$-plat en x est ouvert (5.3.10).

Il y a deux façons d'introduire les modules plats sur les espaces rigides cohérents. La façon la plus directe mais la moins explicite est la définition générale de la platitude pour les topos annelés. Nous présentons aussi une autre notion plus *ad hoc*, celle des modules cohérents rig-plats sur les schémas formels idylliques. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme localement de type fini entre schémas formels idylliques, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, $\mathscr{P}$ un point rigide de $\mathfrak{X}$. Supposons d'abord que $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B)$ et $\mathscr{S} = \mathrm{Spf}(A)$ soient formels affines globalement idylliques, que $\mathscr{P}$ soit fermé dans $\mathfrak{X}$ et que $f(\mathscr{P})$ soit fermé dans $\mathscr{S}$. Soit K un idéal de définition de B. On a $\mathscr{F} = M^{\Delta}$, où M est un B-module cohérent, et $\mathscr{P}$ correspond à un point fermé $\mathfrak{p}$ de $\mathrm{Spec}(B) - \mathrm{V}(K)$. On dit que $\mathscr{F}$ est *rig-f-plat* en $\mathscr{P}$ si $M_{\mathfrak{p}}$ est A-plat. Cette notion se localise bien (c'est pour cela que l'on suppose $f(\mathscr{P})$ fermé dans $\mathscr{S}$). Par suite, on peut la globaliser. On dit que $\mathscr{F}$ est *rig-f-plat* s'il est rig-f-plat en tout point rigide de $\mathfrak{X}$. Nous montrons que si f est un morphisme de $\mathbf{S}$, pour que $\mathscr{F}$ soit rig-f-plat, il faut et il suffit que $\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ soit f^{rig}-plat dans le sens des topos annelés (5.5.8).

Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme de $\mathbf{S}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent rig-$f$-plat. Nous montrons qu'il existe un éclatement admissible de présentation finie $\varphi\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ tel que le transformé strict de $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}'}$ soit $\mathscr{S}'$-plat (5.8.1). Comme corollaire, nous en déduisons que la platitude pour les modules cohérents sur les espaces rigides cohérents est stable par changement de base (5.8.9).

Nous étudions aussi les modules cohérents fidèlement plats sur les espaces rigides cohérents. Nous établissons des énoncés de descente fidèlement plate pour les modules cohérents sur les espaces rigides cohérents (5.11.11) et pour les morphismes d'espaces rigides cohérents (5.12.4), dus essentiellement à Gabber, Bosch et Görtz [6].

10. Nous développons les propriétés différentielles des espaces rigides cohérents. Nous introduisons d'abord les invariants normaux d'une immersion et les invariants différentiels fondamentaux d'un morphisme. Nous définissons ensuite les morphismes lisses, non ramifiés et étales par les critères infinitésimaux, et nous étudions leurs principales propriétés. Nous donnons enfin quelques critères de lissité, entre autres le *critère jacobien* (6.4.21).

11. La dernière partie de ce volume est consacrée aux espaces rigides quasi-séparés (mais pas nécessairement quasi-compacts). La notion de recouvrement admissible s'étend naturellement aux préfaisceaux sur $\mathbf{R}$. On appelle *espace rigide quasi-séparé* un faisceau du gros topos admissible $\widetilde{\mathbf{R}}$ qui admet un recouvrement admissible par des objets de $\mathbf{R}$. Nous donnons une caractérisation simple de ces espaces (7.1.12) qui permet de retrouver des exemples classiques, comme le disque unité ouvert relatif (7.1.20). Nous étudions ensuite leurs propriétés géométriques, puis leurs structures héritées des espaces rigides cohérents (site et topos admissibles, structure annelée...).

12. Soient S un schéma cohérent, T un sous-schéma fermé, U l'ouvert $S - T$ de S. Supposons la paire (S, T) idyllique (*i.e.*, soit S est noethérien, soit S est localement de présentation fini au-dessus d'un anneau idyllique A et l'idéal de T dans S est l'image réciproque d'un idéal de définition de type fini de A). Notons $\mathscr{S} = S_{/T}$ le schéma formel complété de S le long de T, qui est alors un objet de $\mathbf{S}$, et posons $\Theta = \mathscr{S}^{\mathrm{rig}}$. Nous associons fonctoriellement à tout U-schéma de type fini V un préfaisceau $\mathfrak{A}(V)$ sur la catégorie $\mathbf{R}_{/\Theta}$. Nous montrons que si V est séparé de type fini sur U, alors $\mathfrak{A}(V)$ est un Θ-espace rigide quasi-séparé (7.4.11) ; on le note V^{an}. Le foncteur $V \mapsto V^{\mathrm{an}}$ ainsi défini est appelé *foncteur GAGA* relatif à (S, T). Nous l'étudions et montrons qu'il préserve certaines propriétés des morphismes (*e.g.*, être propre, fini, lisse, étale, une immersion, une immersion ouverte, une immersion fermée).

Soit V un U-schéma séparé de type fini. Le foncteur GAGA induit un morphisme de topos annelés

$$\Phi_V \colon (V^{\mathrm{an}}_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_{V^{\mathrm{an}}}) \to (V_{\mathrm{zar}}, \mathscr{O}_V).$$

Nous montrons qu'il est plat (7.6.8). Si F est un $\mathscr{O}_V$-module, on pose $F^{\mathrm{an}} = \Phi_V^*(F)$ (l'image réciproque étant prise au sens des modules). Soient $f \colon V' \to V$ un morphisme séparé de type fini, F' un $\mathscr{O}_{V'}$-module. On a pour tout $q \geq 0$, un morphisme de changement de base (ou de comparaison)

$$\mathsf{c}^q \colon (\mathrm{R}^q f_* F')^{\mathrm{an}} \to \mathrm{R}^q f^{\mathrm{an}}_*(F'^{\mathrm{an}}).$$

Nous montrons que si f est propre et F' est cohérent, alors c^q est un isomorphisme pour tout $q \geq 0$ (7.6.11).

Remerciements. Voila des années que j'ai été séduit par l'approche de la géométrie rigide proposée par Michel Raynaud. Ce livre, qu'il me fait l'honneur de préfacer, en est l'illustration. Je l'ai conçu comme un témoignage de reconnaissance et d'admiration. Ce travail a germé durant ma longue collaboration avec Takeshi Saito sur la théorie de la ramification. Il n'aurait peut-être pas vu le jour sans son soutien et ses encouragements. Je suis heureux de lui exprimer ici ma reconnaissance et ma sincère amitié. L'influence de Siegfried Bosch, Ofer Gabber et Werner Lütkebohmert sur ce traité est évidente. Je leurs exprime mes vifs remerciements. Je remercie également Pierre Berthelot, Jean-François Dat, Michel Gros, Luc Illusie et Farid Mokrane pour leurs conseils et encouragements. Ce projet a bénéficié de l'hospitalité de l'Université de Tokyo durant de nombreux séjours entre 2004 et 2008 et de l'Université de Bielefeld ainsi que de l'Université de Padoue en 2006. Je remercie les auditeurs d'un cours que j'ai donné sur ce sujet à l'Université de Tokyo durant le printemps 2008 et dont les questions et remarques ont été précieuses pour mettre au point ce travail.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre contient des rappels et compléments d'algèbre commutative, de géométrie algébrique et de topologie. Nous introduisons les anneaux *idylliques* et nous établissons leurs principales propriétés. Certains compléments de géométrie algébrique ne serviront qu'au second volume. C'est le cas du théorème 1.13.21, dû à Gabber, qui donne un complément au résultat de platification par éclatement admissible de Raynaud-Gruson ([42] 5.2.2), et de la section 1.16 qui généralise au cadre idyllique des résultats d'algébrisation d'Elkik [17].

> *Tous les anneaux considérés dans ce traité possèdent un élément unité ; les homomorphismes d'anneaux sont toujours supposés transformer l'élément unité en l'élément unité ; un sous-anneau d'un anneau A est supposé contenir l'élément unité de A. Nous considérons surtout des anneaux commutatifs, et lorsque nous parlons d'anneau sans préciser, il est sous-entendu qu'il s'agit d'un anneau commutatif ; en particulier, il est sous-entendu, lorsque nous parlons d'un topos annelé (E, A) sans préciser, que A est commutatif.*

1.1 Des catégories et des topos

1.1.1. Pour une catégorie $\mathscr{C}$, nous notons $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ l'ensemble de ses objets, $\mathscr{C}^\circ$ la catégorie opposée, et pour $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ (ou $\mathrm{Hom}(X, Y)$ lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté) l'ensemble des morphismes de X dans Y.

Si $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont deux catégories, nous désignons par $\mathrm{Hom}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ l'ensemble des foncteurs de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$, et par $\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ la catégorie des foncteurs de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$.

Soient $\mathscr{E}$ une catégorie, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux catégories sur $\mathscr{E}$ ([26] VI 2). Nous notons $\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ l'ensemble des $\mathscr{E}$-foncteurs de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$ et $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cart}/\mathscr{E}}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ l'ensemble des foncteurs cartésiens ([26] VI 5.2). Nous désignons par $\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ la catégorie des $\mathscr{E}$-foncteurs de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$ et par $\mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}/\mathscr{E}}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ la sous-catégorie pleine formée des foncteurs cartésiens.

A. Abbes, *Éléments de Géométrie Rigide*, Progress in Mathematics 286,
DOI 10.1007/978-3-0348-0012-9_1,

1.1.2. Soient $\mathbb{U}$ un univers, **Cat** la catégorie des catégories qui se trouvent dans $\mathbb{U}$, $\mathscr{C} \to \mathscr{E}$ un morphisme de **Cat** (*i.e.*, un foncteur). Si $\mathscr{C}$ est *clivée normalisée* sur $\mathscr{E}$ ([26] VI 7.1), elle donne naissance aux objets suivants :

($\mathtt{C}_1$) une application $S \mapsto \mathscr{C}_S$ de $\mathrm{Ob}(\mathscr{E})$ dans **Cat** ;
($\mathtt{C}_2$) une application $f \mapsto f^*$ associant à toute flèche $f\colon T \to S$ de $\mathscr{E}$ un foncteur $f^*\colon \mathscr{C}_S \to \mathscr{C}_T$;
($\mathtt{C}_3$) une application $(f,g) \mapsto c_{g,f}$, associant à tout couple de flèches composables (f,g) de $\mathscr{E}$, un homomorphisme fonctoriel $c_{g,f}\colon g^*f^* \to (fg)^*$.

Ces données satisfont aux conditions suivantes :

($\mathtt{C}_4$) pour tout objet S de $\mathscr{E}$, $f = \mathrm{id}_S$ implique $f^* = \mathrm{id}_{\mathscr{C}_S}$;
($\mathtt{C}_5$) pour tout morphisme $f\colon T \to S$ de $\mathscr{E}$, on a $c_{\mathrm{id}_T,f} = \mathrm{id}_{f^*}$ et $c_{f,\mathrm{id}_S} = \mathrm{id}_{f^*}$;
($\mathtt{C}_6$) pour tout triplet $h\colon V \to U$, $g\colon U \to T$, $f\colon T \to S$ de morphismes de $\mathscr{E}$, on a

$$c_{gh,f} \circ (c_{h,g} * f^*) = c_{h,fg} \circ (h^* * c_{g,f}). \tag{1.1.2.1}$$

Suivant ([26] VI 8), nous appelons *pseudo-foncteur* de $\mathscr{E}^\circ$ dans **Cat** un ensemble de données ($\mathtt{C}_1$), ($\mathtt{C}_2$) et ($\mathtt{C}_3$) satisfaisant aux conditions ($\mathtt{C}_4$), ($\mathtt{C}_5$) et ($\mathtt{C}_6$). On renvoie à loc. cit. pour la construction inverse qui associe à un pseudo-foncteur de $\mathscr{E}^\circ$ dans **Cat** une catégorie clivée normalisée sur $\mathscr{E}$. Les catégories fibrées sur $\mathscr{E}$ sont caractérisées par la propriété que les homomorphismes $c_{g,f}$ sont des isomorphismes.

Un $\mathscr{E}$-foncteur $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ de catégories clivées normalisées sur $\mathscr{E}$ donne naissance aux données suivantes ([26] VI 12) :

($\mathtt{F}_1$) un foncteur $F_S\colon \mathscr{C}_S \to \mathscr{D}_S$ pour tout $S \in \mathrm{Ob}(\mathscr{E})$;
($\mathtt{F}_2$) un homomorphisme fonctoriel $\varphi_f\colon F_T f^*_{\mathscr{C}} \to f^*_{\mathscr{D}} F_S$ pour tout morphisme $f\colon T \to S$ de $\mathscr{E}$.

Ces données satisfont aux conditions suivantes :

($\mathtt{F}_3$) $\varphi_{\mathrm{id}_S} = \mathrm{id}_{F_S}$ pour tout $S \in \mathrm{Ob}(\mathscr{E})$;
($\mathtt{F}_4$) pour deux morphismes $g\colon U \to T$ et $f\colon T \to S$ de $\mathscr{E}$, on a

$$\varphi_{fg} \circ (F_U * c^{\mathscr{C}}_{g,f}) = (c^{\mathscr{D}}_{g,f} * F_S) \circ (g^*_{\mathscr{D}} * \varphi_f) \circ (\varphi_g * f^*_{\mathscr{C}}). \tag{1.1.2.2}$$

On obtient ainsi une correspondance biunivoque entre l'ensemble des $\mathscr{E}$-foncteurs de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{D}$, et l'ensemble des données ($\mathtt{F}_1$) et ($\mathtt{F}_2$) satisfaisant aux conditions ($\mathtt{F}_3$) et ($\mathtt{F}_4$). Les foncteurs cartésiens sont caractérisés par la propriété que les homomorphismes φ_f sont des isomorphismes.

1.1.3. Soient $\mathbb{U}$ un univers, $\mathscr{C}$ une catégorie. On note $\mathbb{U}$-**Ens**, et l'on appelle catégorie des $\mathbb{U}$-ensembles, la catégorie des ensembles qui se trouvent dans $\mathbb{U}$. On désigne par $\widehat{\mathscr{C}}_{\mathbb{U}}$ la catégorie des préfaisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur $\mathscr{C}$, c'est à dire la catégorie des foncteurs contravariants sur $\mathscr{C}$ à valeurs dans $\mathbb{U}$-**Ens** ([1] I 1.2). Si $\mathscr{C}$ est munie d'une topologie ([1] II 1.1), on désigne par $\widetilde{\mathscr{C}}_{\mathbb{U}}$ le topos des faisceaux de

$\mathbb{U}$-ensembles sur $\mathscr{C}$ ([1] II 2.1). Lorsqu'aucune ambiguïté n'en résultera, on omettra $\mathbb{U}$ des notations $\mathbb{U}$-**Ens**, $\widehat{\mathscr{C}}_{\mathbb{U}}$ et $\widetilde{\mathscr{C}}_{\mathbb{U}}$.

On dit que $\mathscr{C}$ est une $\mathbb{U}$-catégorie si pour tout couple d'objets (X, Y) de $\mathscr{C}$, l'ensemble $\mathrm{Hom}(X, Y)$ est isomorphe à un élément de $\mathbb{U}$ ([1] I 1.1).

Supposons que $\mathscr{C}$ soit une $\mathbb{U}$-catégorie. On a un foncteur canonique ([26, I 1.3]) :

$$\mathrm{h}_{\mathscr{C}} \colon \mathscr{C} \to \widehat{\mathscr{C}}_{\mathbb{U}}. \tag{1.1.3.1}$$

Rappelons que pour un objet X de $\mathscr{C}$, le préfaisceau $\mathrm{h}_{\mathscr{C}}(X)$ est défini comme suit. Soit $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$.

(a) Si $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X)$ est un élément de $\mathbb{U}$, alors $\mathrm{h}_{\mathscr{C}}(X)(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X)$.

(b) Supposons que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X)$ ne soit pas un élément de $\mathbb{U}$ et soit $\mathrm{R}(Z, X, Y)$ la relation : *l'ensemble Z est but d'un isomorphisme* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X) \xrightarrow{\sim} Z$. On pose alors $\mathrm{h}_{\mathscr{C}}(X)(Y) = \tau_Z \mathrm{R}(Z, X, Y)$, où τ est le symbole de Bourbaki-Hilbert.

Le foncteur $\mathrm{h}_{\mathscr{C}}$ est pleinement fidèle ([1] I 1.4).

Pour F un objet de $\widehat{\mathscr{C}}_{\mathbb{U}}$, on note $\mathscr{C}_{/F}$ la catégorie suivante ([1] I 3.4.0). Les objets de $\mathscr{C}_{/F}$ sont les couples formés d'un objet X de $\mathscr{C}$ et d'un morphisme u de X dans F. Si (X, u) et (Y, v) sont deux objets, un morphisme de (X, u) vers (Y, v) est un morphisme $g \colon X \to Y$ tel que $u = v \circ g$.

1.1.4. Rappelons que la donnée d'une topologie sur une catégorie où les produits fibrés sont représentables est complètement déterminée par la donnée de ses familles couvrantes de morphismes ([1] II 1.3.1).

1.1.5. Soient $\mathbb{U}$ un univers, $\mathscr{C}$ un $\mathbb{U}$-site ([1] II 3.0.2), $\widetilde{\mathscr{C}}$ le topos des faisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur $\mathscr{C}$, X un objet de $\widehat{\mathscr{C}}$. On munit $\mathscr{C}_{/X}$ de la topologie induite par la topologie de $\mathscr{C}$ au moyen du foncteur "source" $j_X \colon \mathscr{C}_{/X} \to \mathscr{C}$ ([1] III 3.1). D'après ([1] III 5.2), j_X est un foncteur continu et cocontinu. Il définit donc une suite de trois foncteurs adjoints :

$$j_{X!} \colon (\mathscr{C}_{/X})^{\sim} \to \widetilde{\mathscr{C}}, \quad j_X^* \colon \widetilde{\mathscr{C}} \to (\mathscr{C}_{/X})^{\sim}, \quad j_{X*} \colon (\mathscr{C}_{/X})^{\sim} \to \widetilde{\mathscr{C}}, \tag{1.1.5.1}$$

dans le sens que pour deux foncteurs consécutifs de la suite, celui de droite est adjoint à droite de l'autre. Le foncteur $j_{X!}$ se factorise par la catégorie $\widetilde{\mathscr{C}}_{/X^{\mathrm{a}}}$, où X^{a} est le faisceau associé à X, et le foncteur induit $(\mathscr{C}_{/X})^{\sim} \to \widetilde{\mathscr{C}}_{/X^{\mathrm{a}}}$ est une équivalence de catégories ([1] III 5.4). Le couple de foncteurs (j_X^*, j_{X*}) définit un morphisme de topos $j_X \colon \widetilde{\mathscr{C}}_{/X^{\mathrm{a}}} \to \widetilde{\mathscr{C}}$.

1.1.6. Soient $\mathscr{E}$ un topos, X un objet de $\mathscr{E}$. D'après 1.1.5, $\mathscr{E}_{/X}$ est un topos et on a un morphisme canonique

$$j_X \colon \mathscr{E}_{/X} \to \mathscr{E}, \tag{1.1.6.1}$$

dit *morphisme de localisation* ([1] IV 5.2). Pour tout objet F de $\mathscr{E}$, on pose $F|X = j_X^* F$.

Soient $u\colon \mathscr{E}' \to \mathscr{E}$ un morphisme de topos, $\psi\colon X' \to u^*(X)$ un morphisme de $\mathscr{E}'$. On peut alors considérer le morphisme de topos

$$u_\psi\colon \mathscr{E}'_{/X'} \quad \to \quad \mathscr{E}_{/X} \tag{1.1.6.2}$$

composé de

$$\mathscr{E}'_{/X'} \longrightarrow \mathscr{E}'_{/u^*(X)} \xrightarrow{u_{/X}} \mathscr{E}_{/X}\ ,$$

où la première flèche est le morphisme de localisation associé à ψ ([1] IV 5.5) et la seconde flèche est le morphisme déduit de u par ([1] IV 5.10). Il résulte aussitôt que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E}'_{/X'} \arrow[r, "u_\psi"] \arrow[d, "j_{X'}"'] & \mathscr{E}_{/X} \arrow[d, "j_X"] \\ \mathscr{E}' \arrow[r, "u"] & \mathscr{E} \end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme canonique près.

1.1.7. Soit $\mathbb{U}$ un univers. Si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ sont deux $\mathbb{U}$-topos ([1] IV 1.1), nous désignons par $\mathbf{Homtop}(\mathscr{E}, \mathscr{E}')$ la catégorie des morphismes de topos de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}'$. On a alors un foncteur pleinement fidèle

$$\mathbf{Homtop}(\mathscr{E}, \mathscr{E}') \to \mathbf{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{E}'), \quad u \mapsto u_*.$$

Si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ sont deux $\mathbb{U}$-topos fibrés sur une catégorie $\mathscr{C}$ ([1] VI 7.1), nous désignons par $\mathbf{Homtop}_{\mathscr{C}}(\mathscr{E}, \mathscr{E}')$ la catégorie des morphismes de topos fibrés et par $\mathbf{Homtop}_{\mathrm{cart}/\mathscr{C}}(\mathscr{E}, \mathscr{E}')$ la sous-catégorie pleine formée des morphismes m tels que m_* soit un foncteur cartésien ([1] VI 7.1.7).

1.1.8. Soient $\mathbb{U}$ un univers, $\mathscr{C}$ un $\mathbb{U}$-site, $\mathscr{E}$ le topos des faisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur $\mathscr{C}$. On sait que la catégorie $\mathbb{U}$-**Ens** des $\mathbb{U}$-ensembles est un $\mathbb{U}$-topos ([1] IV 2.2). On désigne par $\mathbf{Pt}(\mathscr{E}) = \mathbf{Homtop}(\mathbb{U}\text{-}\mathbf{Ens}, \mathscr{E})$ la catégorie des points de $\mathscr{E}$ ([1] IV 6.1).

Soient p un point de $\mathscr{E}$, $\varphi_p\colon \mathscr{E} \to \mathbb{U}$-**Ens** le foncteur fibre correspondant ([1] IV 6.2). On rappelle qu'un voisinage du point p du topos $\mathscr{E}$ est un couple (X, ξ), où $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{E})$ et $\xi \in X_p$ ([1] IV 6.8). D'après ([1] IV 6.7.2), on peut aussi interpréter ξ comme un relèvement de p en un point du topos $\mathscr{E}_{/X}$. Ces voisinages forment une catégorie cofiltrante que l'on note $\mathbf{V}(p)$ ([1] IV 6.8). On a un isomorphisme canonique fonctoriel ([1] IV 6.8.1)

$$\varphi_p(F) = F_p \simeq \varinjlim_{\mathbf{V}(p)^\circ} F(X). \tag{1.1.8.1}$$

On désigne encore, par abus de notations, par φ_p le composé $\varphi_p \circ \varepsilon$, où $\varepsilon\colon \mathscr{C} \to \mathscr{E}$ est le foncteur canonique ([1] II 4.4.0). On rappelle qu'un voisinage du point p dans le site $\mathscr{C}$ est un couple (X,ξ), où $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ et $\xi \in \varphi_p(X)$. Ces voisinages forment encore une catégorie cofiltrante que l'on note $\mathbf{V}_{\mathscr{C}}(p)$ ([1] IV 6.8.2). On a un isomorphisme canonique fonctoriel ([1] IV 6.8.3)

$$F_p \simeq \varinjlim_{\mathbf{V}_{\mathscr{C}}(p)^\circ} F(X). \tag{1.1.8.2}$$

1.1.9. Soit $(\mathscr{E},A)$ un topos annelé. Nous notons $\mathbf{Mod}(A)$ la catégorie des A-modules, $\mathbf{D}(A)$ sa catégorie dérivée, $\mathbf{D}^-(A)$, $\mathbf{D}^+(A)$ et $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(A)$ les sous-catégories pleines de $\mathbf{D}(A)$ formées des complexes à cohomologie bornée supérieurement, inférieurement et des deux côtés, respectivement.

1.1.10. Soit $(\mathscr{E},A)$ un topos annelé, M un A-module. On rappelle que M est dit *plat* si le foncteur $N \mapsto N \otimes_A M$ est exact sur la catégorie des A-modules. On a alors les propositions suivantes ([1] V 1.6) :

1.1.10.1. Lorsque M est plat, pour tout point p de $\mathscr{E}$, le A_p-module M_p est plat.

1.1.10.2. Soit $(p_i)_{i\in I}$ une famille conservative de points de $\mathscr{E}$ telle que pour tout $i \in I$, M_{p_i} soit un A_{p_i}-module plat. Alors M est plat.

1.1.11. Étant donné un morphisme $u\colon (\mathscr{E}',A') \to (\mathscr{E},A)$ de topos annelés, nous utilisons pour les modules la notation u^{-1} pour désigner l'image inverse au sens des faisceaux abéliens et nous réservons la notation u^* pour l'image inverse aux sens des modules.

1.1.12. Soient $u\colon (\mathscr{E}',A') \to (\mathscr{E},A)$ un morphisme de topos annelés, M un A'-module.

1.1.12.1. On dit que M est *u-plat en un point p* de $\mathscr{E}'$ si M_p est un $(A_{u\circ p})$-module plat.

1.1.12.2. On dit que M est *u-plat* si le $u^{-1}(A)$-module M est plat. Il revient au même de demander que le foncteur $N \mapsto u^*(N) \otimes_{A'} M$ de la catégorie des A-modules dans la catégorie des A'-modules soit exact ([1] V 1.7).

1.1.12.3. On dit que u est *plat en un point p* de $\mathscr{E}'$ (resp. *plat*) si A' est u-plat en p (resp. u-plat).

1.1.12.4. Si M est u-plat, il est u-plat en tout point de $\mathscr{E}'$. Si $\mathscr{E}'$ a suffisamment de points, pour que M soit u-plat, il faut et il suffit qu'il soit u-plat en tout point de $\mathscr{E}'$.

1.1.12.5. Soient X un objet de $\mathscr{E}$, $\psi : X' \to u^*(X)$ un morphisme de $\mathscr{E}'$. D'après 1.1.6, on a un diagramme commutatif à isomorphisme canonique près de morphismes de topos annelés

$$\begin{tikzcd}
(\mathscr{E}'_{/X'}, A'|X') \arrow[r, "u_\psi"] \arrow[d, "j_{X'}"'] & (\mathscr{E}_{/X}, A|X) \arrow[d, "j_X"] \\
(\mathscr{E}', A') \arrow[r, "u"] & (\mathscr{E}, A)
\end{tikzcd}$$

où $u_\psi \colon \mathscr{E}'_{/X'} \to \mathscr{E}_{/X}$ est le morphisme de topos associé à (u, ψ) (1.1.6.2). Si M est u-plat, alors $M|X'$ est u_ψ-plat ([1] V 1.6.1).

1.2 Scholie sur le morphisme de changement de base

1.2.1. Si $f \colon (E, A) \to (F, B)$ est un morphisme de topos annelés, nous notons $\theta_f \colon B \to f_*(A)$ l'homomorphisme canonique. Suivant la convention (1.1.11), nous utilisons pour les modules la notation f^{-1} pour désigner l'image réciproque au sens des faisceaux abéliens en réservant la notation f^* pour l'image réciproque au sens des modules. Nous désignons par $\mathrm{R}^q f_*$, $q \in \mathbb{N}$, les foncteurs dérivés du foncteur $f_* \colon \mathbf{Mod}(A) \to \mathbf{Mod}(B)$ pour les modules.

1.2.2. Soit

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"'] & E \arrow[d, "f"] \\ F' \arrow[r, "\beta"] & F \end{tikzcd}$$

un diagramme de morphismes de topos, commutatif à isomorphisme canonique près ; autrement dit, on a un isomorphisme

$$f_*\alpha_* \xrightarrow{\sim} \beta_* f'_*. \tag{1.2.2.1}$$

On définit un morphisme de foncteurs

$$\beta^* f_* \to f'_*\alpha^*, \tag{1.2.2.2}$$

appelé *morphisme de changement de base*, de la manière suivante : se donner un tel morphisme équivaut à se donner un morphisme

$$f_* \to \beta_* f'_* \alpha^*.$$

On prend pour ce morphisme le morphisme composé

$$f_* \to f_*\alpha_*\alpha^* \xrightarrow{\sim} \beta_* f'_* \alpha^*,$$

où le premier morphisme est induit par le morphisme d'adjonction $\mathrm{id} \to \alpha_*\alpha^*$ et le second par (1.2.2.1).

En restreignant (1.2.2.2) aux faisceaux abéliens (resp. de groupes), on déduit un morphisme pour tout $q \geq 0$ (resp. pour $q = 0, 1$)

$$\beta^*(\mathrm{R}^q f_*) \to (\mathrm{R}^q f'_*)\alpha^*. \tag{1.2.2.3}$$

En effet, cela revient à donner un morphisme

$$\mathrm{R}^q f_* \to \beta_*(\mathrm{R}^q f'_*)\alpha^*,$$

et on prend le morphisme composé

$$\mathrm{R}^q f_* \to (\mathrm{R}^q f_*)\alpha_*\alpha^* \to \mathrm{R}^q(f\alpha)_*\alpha^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^q(\beta f')_*\alpha^* \to \beta_*(\mathrm{R}^q f'_*)\alpha^*,$$

où le premier morphisme provient du morphisme d'adjonction id $\to$ $\alpha_*\alpha^*$, le deuxième et le dernier de la suite spectrale de Cartan-Leray ([1] V 5.4) et le troisième de (1.2.2.1).

1.2.3. Soit

$$\begin{tikzcd}
(E', A') \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"'] & (E, A) \arrow[d, "f"] \\
(F', B') \arrow[r, "\beta"] & (F, B)
\end{tikzcd}$$

un diagramme de morphismes de topos annelés, commutatif à isomorphisme canonique près ; autrement dit, on a un isomorphisme

$$f_*\alpha_* \xrightarrow{\sim} \beta_* f'_* \tag{1.2.3.1}$$

et le diagramme

$$\begin{tikzcd}
f_*A \arrow[d, "f_*(\theta_\alpha)"'] & B \arrow[l, "\theta_f"'] \arrow[r, "\theta_\beta"] & \beta_*B' \arrow[d, "\beta_*(\theta_{f'})"] \\
f_*(\alpha_*A') \arrow[rr, "(1.2.3.1)", "\sim"'] & & \beta_*(f'_*A')
\end{tikzcd} \tag{1.2.3.2}$$

est commutatif. Si M est un A-module, on a, pour tout $q \geq 0$, un morphisme B'-linéaire canonique

$$\beta^*(\mathrm{R}^q f_* M) \to \mathrm{R}^q f'_*(\alpha^* M), \tag{1.2.3.3}$$

appelé *morphisme de changement de base.* En effet, cela revient à donner un morphisme

$$\mathrm{R}^q f_* M \to \beta_*(\mathrm{R}^q f'_*(\alpha^* M)),$$

et on prend le morphisme composé

$$\mathrm{R}^q f_* M \to \mathrm{R}^q f_*(\alpha_*\alpha^* M) \to \mathrm{R}^q(f\alpha)_*(\alpha^* M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^q(\beta f')_*(\alpha^* M) \to \beta_*(\mathrm{R}^q f'_*(\alpha^* M)),$$

où le premier morphisme provient du morphisme d'adjonction id $\to$ $\alpha_*\alpha^*$, le deuxième et le dernier de la suite spectrale de Cartan-Leray ([1] V 5.4) et le troisième de (1.2.3.1).

Proposition 1.2.4 ([1] XII 4.4).

(i) *Soit*

$$\begin{tikzcd}
E'' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "f''"'] & E' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"'] & E \arrow[d, "f"'] \\
F'' \arrow[r, "\beta'"] & F' \arrow[r, "\beta"] & F
\end{tikzcd}$$

un diagramme de morphismes de topos tel que chaque carré soit commutatif à isomorphisme canonique près. Alors le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(\beta\beta')^* f_* \arrow[rr] \arrow[d, equal] & & f''_*(\alpha\alpha')^* \arrow[d, equal] \\
\beta'^*\beta^* f_* \arrow[r] & \beta'^* f'_*\alpha^* \arrow[r] & f''_*\alpha'^*\alpha^*
\end{tikzcd}$$

où les morphismes horizontaux proviennent des morphismes de changement de base est commutatif. De plus, le diagramme obtenu en remplaçant f_*, f'_*, f''_* *par* $\mathrm{R}^1 f_*, \mathrm{R}^1 f'_*, \mathrm{R}^1 f''_*$ *pour les faisceaux de groupes est aussi commutatif.*

(ii) *Soit*

$$\begin{tikzcd}
(E'', A'') \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "f''"'] & (E', A') \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"'] & (E, A) \arrow[d, "f"'] \\
(F'', B'') \arrow[r, "\beta'"] & (F', B') \arrow[r, "\beta"] & (F, B)
\end{tikzcd}$$

un diagramme de morphismes de topos annelés tel que chaque carré soit commutatif à isomorphisme canonique près. Alors pour tout A*-module* M *et tout entier* $q \geq 0$*, le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
(\beta\beta')^*(\mathrm{R}^q f_* M) \arrow[rr] \arrow[d, equal] & & \mathrm{R}^q f''_*((\alpha\alpha')^* M) \arrow[d, equal] \\
\beta'^*(\beta^*(\mathrm{R}^q f_* M)) \arrow[r] & \beta'^*(\mathrm{R}^q f'_*(\alpha^* M)) \arrow[r] & \mathrm{R}^q f''_*(\alpha'^*(\alpha^* M))
\end{tikzcd}$$

où les morphismes horizontaux proviennent des morphismes de changement de base est commutatif.

(iii) *Soit*

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"'] & E \arrow[d, "f"] \\
F' \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g'"'] & F \arrow[d, "g"] \\
G' \arrow[r, "\gamma"] & G
\end{tikzcd}$$

un diagramme de morphismes de topos tel que chaque carré soit commutatif à isomorphisme canonique près. Alors le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\gamma^*(gf)_* \arrow[rr] \arrow[d, equal] & & (g'f')_*\alpha^* \arrow[d, equal] \\
\gamma^* g_* f_* \arrow[r] & g'_*\beta^* f_* \arrow[r] & g'_* f'_*\alpha^*
\end{tikzcd}$$

où les morphismes horizontaux proviennent des morphismes de changement de base est commutatif.

(iv) *Sous les hypothèses de* (iii), *pour tout faisceau de groupes B, on a un morphisme de suites spectrales*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \gamma^*(\mathrm{R}^1 g_*(f_* B)) \arrow[r] \arrow[d] & \gamma^*(\mathrm{R}^1 (gf)_* B) \arrow[r] \arrow[d] & \gamma^*(g_*(\mathrm{R}^1 f_* B)) \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{R}^1 g'_*(f'_*(\alpha^* B)) \arrow[r] & \mathrm{R}^1 (g'f')_*(\alpha^* B) \arrow[r] & g'_*(\mathrm{R}^1 f'_*(\alpha^* B)) \end{tikzcd}$$

où les morphismes verticaux proviennent des morphismes de changement de base.

(v) *Soit*

$$\begin{tikzcd} (E', A') \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"'] & (E, A) \arrow[d, "f"] \\ (F', B') \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g'"'] & (F, B) \arrow[d, "g"] \\ (G', C') \arrow[r, "\gamma"] & (G, C) \end{tikzcd}$$

un diagramme de morphismes de topos annelés tel que chaque carré soit commutatif à isomorphisme canonique près. Alors pour tout A-modules M, le morphisme de changement de base pour gf est induit par un morphisme de suites spectrales

$$\begin{tikzcd} E_2^{p,q} = \gamma^*(\mathrm{R}^p f_*(\mathrm{R}^q g_* M)) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d] & \gamma^*(\mathrm{R}^{p+q}(gf)_* M) \arrow[d] \\ F_2^{p,q} = \mathrm{R}^p f'_*(\mathrm{R}^q g'_*(\alpha^* M)) \arrow[r, Rightarrow] & \mathrm{R}^{p+q}(g'f')_*(\alpha^* M) \end{tikzcd}$$

qui, pour les termes initiaux, est induit par les morphismes de changement de base pour f et g.

Nous laissons la démonstration au lecteur.

Proposition 1.2.5. *Soient*

$$\begin{tikzcd} (E', A') \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"'] & (E, A) \arrow[d, "f"] \\ (F', B') \arrow[r, "\beta"] & (F, B) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (E', A') \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "f'"'] & (E, A) \arrow[d, "f"] \\ (F', B') \arrow[r, "\beta'"] & (F, B) \end{tikzcd}$$

deux diagrammes de morphismes de topos annelés, commutatifs à isomorphismes canoniques près, et soient $i\colon \alpha_* \to \alpha'_*$, $j\colon \beta_* \to \beta'_*$ *deux morphismes de foncteurs tels que les diagrammes*

$$\begin{tikzcd} f_*\alpha_* \arrow[r, "f_* * i"] \arrow[d, equal] & f_*\alpha'_* \arrow[d, equal] \\ \beta_* f'_* \arrow[r, "j * f'_*"] & \beta'_* f'_* \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\theta_\alpha"] \arrow[dr, "\theta_{\alpha'}"'] & \alpha_* A' \arrow[d, "i(A')"] \\ & \alpha'_* A' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "\theta_\beta"] \arrow[dr, "\theta_{\beta'}"'] & \beta_* B' \arrow[d, "j(B')"] \\ & \beta'_* B' \end{tikzcd}$$

soient commutatifs. Notons $i^\sharp\colon \alpha'^* \to \alpha^*$ *et* $j^\sharp\colon \beta'^* \to \beta^*$ *les morphismes adjoints de* i *et* j *respectivement. Alors :*

(i) *Pour tout* A*-module* M*, le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \beta'^*(f_*M) \arrow[r] \arrow[d, "j^\sharp * f_*"'] & f'_*(\alpha'^*M) \arrow[d, "f'_* * i^\sharp"] \\ \beta^*(f_*M) \arrow[r] & f'_*(\alpha^*M) \end{tikzcd} \tag{1.2.5.1}$$

où les morphismes horizontaux sont les morphismes de changement de base est commutatif.

(ii) *Supposons* α, α', β *et* β' *plats. Alors pour tout* A*-module* M *et tout* $q \geq 0$*, le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \beta'^*(\mathrm{R}^q f_*M) \arrow[r] \arrow[d, "j^\sharp * (\mathrm{R}^q f_*)"'] & \mathrm{R}^q f'_*(\alpha'^*M) \arrow[d, "(\mathrm{R}^q f'_*) * i^\sharp"] \\ \beta^*(\mathrm{R}^q f_*M) \arrow[r] & \mathrm{R}^q f'_*(\alpha^*M) \end{tikzcd} \tag{1.2.5.2}$$

où les morphismes horizontaux sont les morphismes de changement de base est commutatif.

(i) D'après ([1] XVII 2.1.3), le morphisme de changement de base $\beta^* f_* \to f'_*\alpha^*$ est l'adjoint du morphisme

$$f'^*\beta^* f_* = \alpha^* f^* f_* \to \alpha^*$$

déduit du morphisme canonique $f^* f_* \to \mathrm{id}$. D'autre part, les hypothèses entraînent par adjonction que le diagramme

$$\begin{tikzcd} f'^*\beta'^* f_* \arrow[r, equal] \arrow[d, "f'^* * j^\sharp * f_*"'] & \alpha'^* f^* f_* \arrow[r] \arrow[d, "i^\sharp * f^* * f_*"'] & \alpha'^* \arrow[d, "i^\sharp"'] \\ f'^*\beta^* f_* \arrow[r, equal] & \alpha^* f^* f_* \arrow[r] & \alpha^* \end{tikzcd} \tag{1.2.5.3}$$

est commutatif. Il en est donc de même du diagramme (1.2.5.1).

(ii) Si C est un anneau d'un topos T, on note $\mathbf{K}^+(C)$ la catégorie des complexes de C-modules bornés inférieurement, à homotopie près, et $\mathbf{D}^+(C)$ la catégorie dérivée des complexes de C-modules à cohomologie bornée inférieurement. Comme α est plat, il définit un foncteur dérivé $\mathrm{L}\alpha^*\colon \mathbf{D}^+(A) \to \mathbf{D}^+(A')$ et de même pour α', β et β'. Notons $\mathrm{L}i^\sharp\colon \mathrm{L}\alpha'^* \to \mathrm{L}\alpha^*$ et $\mathrm{L}j^\sharp\colon \mathrm{L}\beta'^* \to \mathrm{L}\beta^*$ les morphismes déduits de $i^\sharp$ et $j^\sharp$.

D'après ([1] XVII 4.1.5, (i)), pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D}^+(A))$, on a un morphisme de changement de base

$$\mathrm{L}\beta^*(\mathrm{R}f_*X) \quad \to \quad \mathrm{R}f'_*(\mathrm{L}\alpha^*X), \tag{1.2.5.4}$$

défini par ([1] XVII 2.1.3). De plus, comme les images directes $\mathrm{R}\alpha_*(\mathrm{L}\alpha^*X)$ et $\mathrm{R}\beta_*(\mathrm{R}f'_*(\mathrm{L}\alpha^*X))$ existent au sens strict ([1] XVII 4.1.3), celui ci est l'adjoint du morphisme

$$\mathrm{R}f_*X \to \mathrm{R}f_*(\mathrm{R}\alpha_*(\mathrm{L}\alpha^*X)) = \mathrm{R}\beta_*(\mathrm{R}f'_*(\mathrm{L}\alpha^*X))$$

déduit du morphisme canonique $X \to \mathrm{R}\alpha_*(\mathrm{L}\alpha^*X)$. Mais en général, comme les images réciproques $\mathrm{L}f^*(\mathrm{R}f_*X)$ et $\mathrm{L}f'^*(\mathrm{L}\beta^*(\mathrm{R}f_*X))$ n'existent pas, le morphisme (1.2.5.4) n'a pas de description analogue à celle utilisée dans la preuve de (i). On notera que comme α et β sont plats, pour tout A-module M, le morphisme (1.2.5.4) pour le complexe $M[0]$, formé de M concentré en degré 0, redonne sur les groupes de cohomologie les morphismes de changement de base définis dans (1.2.3.3).

Soient X un objet de $\mathbf{D}^+(A)$, $\widetilde{X}$ l'objet de $\mathrm{K}^+(A)$ au dessus de X. On désigne par $\widetilde{X}/\mathrm{Qis}^+$ la catégorie des quasi-isomorphismes de source $\widetilde{X}$ et de but dans $\mathbf{K}^+(A)$. On a un isomorphisme fonctoriel ([15] C.D. 2.1 page 40)

$$\mathrm{R}f_*(X) \simeq \varinjlim_{\widetilde{X}/\mathrm{Qis}^+} f_*(\cdot).$$

Comme α et β sont plats et que $\mathrm{L}\beta^*$ commute aux limites inductives (car il admet un adjoint à droite), le morphisme de changement de base $\beta^*f_* \to f'_*\alpha^*$ (1.2.3.1) induit par passage à la limite inductive un morphisme

$$\mathrm{L}\beta^*(\mathrm{R}f_*X) \to \mathrm{R}f'_*(\mathrm{L}\alpha^*X). \tag{1.2.5.5}$$

Il est facile de voir qu'avec les conventions de ([1] XVII 2.1), le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{L}\alpha^*X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] & \mathrm{R}f_*X \\
\mathrm{R}f'_*(\mathrm{L}\alpha^*X) \arrow[rr, "(1.2.5.5)^\circ"] & & \mathrm{L}\beta^*(\mathrm{R}f_*X) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Par suite, les morphismes (1.2.5.4) et (1.2.5.5) sont égaux ([1] XVII 2.1.3).

Le diagramme (1.2.5.1) induit par passage à la limite inductive un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{L}\beta'^*(\mathrm{R}f_*X) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{L}j^\sharp*(\mathrm{R}f_*)"'] & \mathrm{R}f'_*(\mathrm{L}\alpha'^*X) \arrow[d, "(\mathrm{R}f'_*)*\mathrm{L}i^\sharp"] \\ \mathrm{L}\beta^*(\mathrm{R}f_*X) \arrow[r] & \mathrm{R}f'_*(\mathrm{L}\alpha^*X) \end{tikzcd}$$

Par suite, le diagramme (1.2.5.2) est aussi commutatif.

1.3 Rappels sur les modules cohérents

1.3.1. Dans cette section, $\mathbb{U}$ désigne un univers, $\mathscr{C}$ un $\mathbb{U}$-site ayant un objet final $\mathrm{e}_{\mathscr{C}}$, $\mathscr{E}$ le topos des faisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur $\mathscr{C}$ et A un anneau commutatif de $\mathscr{E}$. Pour tout objet X de $\widehat{\mathscr{C}}$ (1.1.3), si l'on note X^{a} le faisceau associé à X, le topos $\mathscr{E}_{/X^{\mathrm{a}}}$ sera annelé par l'anneau $A|X$ (1.1.5 et [1] IV 11.2.1).

1.3.2. Soit F un A-module. On dit que F est *de $\mathscr{C}$-type fini* si la sous-catégorie pleine de $\mathscr{C}$ formée des objets X tels qu'il existe un épimorphisme $E \to (F|X)$ avec E un $(A|X)$-module libre de type fini, est un raffinement de $\mathrm{e}_{\mathscr{C}}$. On dit que F est *$\mathscr{C}$-cohérent* si les conditions suivantes sont vérifiées ([5] I 3.1) :

(a) F est de $\mathscr{C}$-type fini ;

(b) pour tout objet X de $\mathscr{C}$ et tout morphisme $u\colon E \to (F|X)$ où E est un $(A|X)$-module libre de type fini, $\ker(u)$ est de $(\mathscr{C}_{/X})$-type fini.

On dit que A est un *anneau $\mathscr{C}$-cohérent* s'il est $\mathscr{C}$-cohérent en tant que A-module. On dit qu'une A-algèbre est *$\mathscr{C}$-cohérente* si le A-module sous-jacent est cohérent.

On désigne par $\mathbf{Mod}_{\mathscr{C}\text{-coh}}(A)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Mod}(A)$ (1.1.9) formée des A-modules $\mathscr{C}$-cohérents.

Remarques 1.3.3.

(i) Si $\mathscr{C}$ est le site ponctuel et A est un anneau, un A-module est de $\mathscr{C}$-type fini si et seulement s'il est de type fini au sens ordinaire.

(ii) Nous laisserons tomber le site dans les notations $\mathscr{C}$-type fini, $\mathscr{C}$-cohérent, $\mathbf{Mod}_{\mathscr{C}\text{-coh}}$... lorsque cela n'entraîne aucune confusion. Nous ferons cet abus en particulier lorsque $(\mathscr{C}, A)$ est associé à un espace annelé (e.g., schémas, schémas formels...).

Proposition 1.3.4 ([5] I 3.4). *La catégorie $\mathbf{Mod}_{\mathscr{C}\text{-coh}}(A)$ est stable par limites projectives et inductives finies. En particulier, le noyau, le conoyau, l'image d'une flèche entre deux A-modules $\mathscr{C}$-cohérents sont $\mathscr{C}$-cohérents. Soit*

$$F^0 \to F^1 \to F^2 \to F^3 \to F^4$$

une suite exacte de A-modules. Si F^0, F^1, F^3 et F^4 sont $\mathscr{C}$-cohérents, il en est de même de F^2.

Corollaire 1.3.5 ([28] 0.5.3.7). *Si F et G sont des A-modules $\mathscr{C}$-cohérents, il en est de même de $F \otimes_A G$ et de $\mathscr{H}om_A(F, G)$.*

Proposition 1.3.6 ([28] 0.5.3.13). *Supposons que A soit un anneau $\mathscr{C}$-cohérent, et soit J un idéal $\mathscr{C}$-cohérent de A. Pour qu'un (A/J)-module F soit $\mathscr{C}$-cohérent, il faut et il suffit qu'en tant que A-module, F soit $\mathscr{C}$-cohérent. En particulier, A/J est un anneau $\mathscr{C}$-cohérent.*

1.3.7. Soient E un complexe de A-modules, $n \in \mathbb{Z}$. On dit que E est *strictement n-$\mathscr{C}$-pseudo-cohérent* (resp. *strictement $\mathscr{C}$-pseudo-cohérent*) si $E^i = 0$ pour i assez grand et E^i est un A-module libre de type fini pour $i \geq n$ (resp. pour tout i) ([5] I 2.1).

1.3.8. Soient F un objet de $\mathbf{D}(A)$ (1.1.9), $n \in \mathbb{Z}$. On dit que F est *n-$\mathscr{C}$-pseudo-cohérent* si la sous-catégorie pleine de $\mathscr{C}$ formée des objets X tels qu'il existe un quasi-isomorphisme $E \to (F|X)$ avec E un complexe de $(A|X)$-modules strictement n-$(\mathscr{C}_{/X})$-pseudo-cohérent, est un raffinement de $\mathrm{e}_{\mathscr{C}}$ ([5] 2.3). On dit que F est *$\mathscr{C}$-pseudo-cohérent* si F est n-$\mathscr{C}$-pseudo-cohérent pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

1.3.9. Soient F un A-module, $n \in \mathbb{N}$. On dit que F est *de n-$\mathscr{C}$-présentation finie* si la sous-catégorie pleine de $\mathscr{C}$ formée des objets X tels qu'il existe une suite exacte

$$E^{-n} \to \cdots \to E^0 \to (F|X) \to 0,$$

où E^i est un $(A|X)$-module libre de type fini pour $-n \leq i \leq 0$, est un raffinement de $\mathrm{e}_{\mathscr{C}}$. On dit que F est *d'∞-$\mathscr{C}$-présentation finie* si F est de n-$\mathscr{C}$-présentation finie pour tout $n \in \mathbb{N}$ ([5] I 2.8). On dira aussi que F est de *$\mathscr{C}$-présentation finie* lorsqu'il est de 1-$\mathscr{C}$-présentation finie.

Pour que F soit de n-$\mathscr{C}$-présentation finie, il faut et il suffit que le complexe $F[0]$, formé du A-module F concentré en degré 0, soit $(-n)$-$\mathscr{C}$-pseudo-cohérent ([5] I 2.9).

Proposition 1.3.10 ([5] I 3.5). *Supposons que A soit un anneau $\mathscr{C}$-cohérent.*

(a) *Soit F un A-module. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

  (i) *F est de $\mathscr{C}$-présentation finie.*
  (ii) *F est $\mathscr{C}$-cohérent.*
  (iii) *F est d'∞-$\mathscr{C}$-présentation finie.*

(b) *Soient F un objet de $\mathbf{D}^-(A)$, $n \in \mathbb{Z}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

  (i) *F est n-$\mathscr{C}$-pseudo-cohérent.*
  (ii) *$\mathrm{H}^i(F)$ est $\mathscr{C}$-cohérent pour tout $i \geq n+1$ et $\mathrm{H}^n(F)$ est de $\mathscr{C}$-type fini.*

En particulier, pour que F soit $\mathscr{C}$-pseudo-cohérent, il faut et il suffit que $\mathrm{H}^n(F)$ soit $\mathscr{C}$-cohérent pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Proposition 1.3.11 ([28] 0.5.2.2). *Soient F un A-module de $\mathscr{C}$-type fini, p un point de $\mathscr{E}$.*

(i) *Si (X,ξ) est un voisinage de p dans $\mathscr{C}$ (1.1.8), s_i ($1 \leq i \leq n$) des sections de F sur X telles que les $(s_i)_p$ engendrent F_p, il existe un morphisme $(X',\xi') \to (X,\xi)$ de la catégorie des voisinages de p dans $\mathscr{C}$ tel que les $(s_i|X')$ engendrent $F|X'$.*

(ii) *Si G est un A-module, $u\colon F \to G$ un homomorphisme tel que $u_p = 0$, il existe un voisinage (X,ξ) de p dans $\mathscr{C}$ tel que $u|X = 0$.*

(iii) *Si G est un A-module, $v\colon G \to F$ un homomorphisme tel que v_p soit surjectif, il existe un voisinage (X,ξ) de p dans $\mathscr{C}$ tel que $v|X$ soit un épimorphisme.*

(iv) *Si $F_p = 0$, il existe un voisinage (X,ξ) de p dans $\mathscr{C}$ tel que $F|X = 0$.*

Il suffit de calquer la preuve de ([28] 0.5.2.2) en tenant compte de (1.1.8.2).

1.3.12. Soient F un A-module de $\mathscr{C}$-présentation finie, p un point de $\mathscr{E}$; alors, pour tout A-module G, l'homomorphisme canonique fonctoriel

$$(\mathscr{H}om_A(F,G))_p \to \mathrm{Hom}_{A_p}(F_p,G_p) \tag{1.3.12.1}$$

est bijectif. En effet, il existe un voisinage (X,ξ) de p dans $\mathscr{C}$ et une suite exacte de $(A|X)$-modules

$$(A|X)^n \to (A|X)^m \to (F|X) \to 0. \tag{1.3.12.2}$$

Pour tout A-module H, on a $(H|X)_\xi = H_p$ et ([1] IV 12.3)

$$j_X^*(\mathscr{H}om_A(H,G)) = \mathscr{H}om_{(A|X)}(H|X, G|X).$$

Appliquant les foncteurs $(\mathscr{H}om_{(A|X)}(-,G|X))_\xi$ et $\mathrm{Hom}_{(A|X)_\xi}((-)_\xi,(G|X)_\xi)$ à la suite (1.3.12.2), on obtient alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\mathscr{H}om_A(F,G))_p \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & (\mathscr{H}om_A(A^m,G))_p \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & (\mathscr{H}om_A(A^n,G))_p \arrow[d, "\gamma"'] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{A_p}(F_p,G_p) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{A_p}(A_p^m,G_p) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{A_p}(A_p^n,G_p)
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes. Il est immédiat de vérifier que β et γ sont des isomorphismes, d'où la conclusion.

1.3.13. Soient F,G deux A-modules de $\mathscr{C}$-présentation finie. Si, pour un point p de $\mathscr{E}$, F_p et G_p sont deux A_p-modules isomorphes, alors il existe un voisinage (X,ξ) de p dans $\mathscr{C}$ tel que $F|X$ et $G|X$ soient isomorphes. En effet, si $a\colon F_p \to G_p$ et $b\colon G_p \to F_p$ sont deux isomorphismes réciproques, il existe, d'après 1.3.12 et (1.1.8.2), un voisinage (Y,ζ) de p dans $\mathscr{C}$ et une section s (resp. t) de $\mathscr{H}om_A(F,G)$ (resp. $\mathscr{H}om_A(F,G)$) au-dessus de Y telle que $s_\zeta = a$ (resp. $t_\zeta = b$). Comme $(s\circ t)_\zeta$ et $(t\circ s)_\zeta$ sont les automorphismes identiques, il existe un voisinage (X,ξ) de p dans $\mathscr{C}$ au-dessus du voisinage (Y,ζ) (1.1.8) tel que $(s\circ t)|X$ et $(t\circ s)|X$ soient les automorphismes identiques (1.3.12), d'où la proposition.

1.3.14. Soient p un point de $\mathscr{E}$, M un A_p-module de présentation finie, donc isomorphe au conoyau d'un homomorphisme $a\colon A_p^m \to A_p^n$; alors il existe un voisinage (X, ξ) de p dans $\mathscr{C}$ et un $(A|X)$-module de $(\mathscr{C}_{/X})$-présentation finie F tel que F_ξ soit isomorphe à M. En effet, en vertu de 1.3.12 et (1.1.8.2), il existe un voisinage (X, ξ) de p dans $\mathscr{C}$ et une section s de $\mathscr{H}om_A(A^m, A^n)$ au-dessus de X telle que $s_\xi = a$; le conoyau F de l'homomorphisme $s : (A|X)^m \to (A|X)^n$ répond à la question.

Proposition 1.3.15. *Soient E un A-module de $\mathscr{C}$-type fini, F un A-module localement libre de type fini, $u\colon E \to F$ un homomorphisme, p un point de $\mathscr{E}$. Supposons l'anneau A_p local et notons $\kappa(p)$ son corps résiduel. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *u_p est inversible à gauche (autrement dit, u_p est injectif et son image est facteur direct de F_p).*

(ii) *L'homomorphisme $E_p \otimes_{A_p} \kappa(p) \to F_p \otimes_{A_p} \kappa(p)$ déduit de u_p par passage aux quotients, est injectif.*

(iii) *Il existe un voisinage (X, ξ) de p dans $\mathscr{C}$ tel que $u|X$ soit inversible à gauche.*

Il suffit de calquer la preuve de ([28] 0.5.5.4) en tenant compte de 1.3.12 et 1.3.13.

Remarque 1.3.16 ([5] I 2.15.1). Supposons $(\mathscr{C}, A)$ localement annelé au sens de ([31] IV 13.9), ce qui signifie que pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ et tout $f \in \Gamma(X, A)$, on a $X = X_f \cup X_{1-f}$, où X_f (resp. X_{1-f}) désigne le sous-objet de X où f (resp. $1 - f$) est inversible. Alors tout facteur direct d'un module libre de type fini est localement libre de type fini.

Proposition 1.3.17 ([28] 0.5.7.3). *Soient $u\colon (\mathscr{E}', A') \to (\mathscr{E}, A)$ un morphisme de $\mathbb{U}$-topos annelés, M un A'-module, p un point de $\mathscr{E}'$, $q = u \circ p$. Supposons que l'anneau A soit $\mathscr{C}$-cohérent, et notons $\varepsilon\colon \mathscr{C} \to \mathscr{E}$ le foncteur canonique* ([1] II 4.4.0)*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *M est u-plat en p.*

(ii) *Pour tout voisinage (X, ξ) de q dans $\mathscr{C}$* (1.1.8)*, il existe un voisinage (X', ξ') de p dans $\mathscr{E}'$ et un morphisme $\psi\colon X' \to u^*(\varepsilon(X))$ tels que l'on ait $\psi_p(\xi') = \xi$, et si l'on note $u_\psi\colon (\mathscr{E}'_{/X'}, A'|X') \to (\mathscr{E}_{/\varepsilon(X)}, A|X)$ le morphisme de topos annelés déduit de u et ψ* (1.1.6.2)*, le foncteur*
$$N \mapsto (u_\psi^*(N) \otimes_{(A'|X')} (M|X'))_{\xi'} \tag{1.3.17.1}$$
soit exact sur la catégorie des $(A|X)$-modules cohérents.

(iii) *Il existe une petite catégorie $\mathscr{C}'$ et un foncteur pleinement fidèle $\mathscr{C}' \to \mathscr{C}$ tels que tout objet de $\mathscr{C}$ puisse être recouvert par des objets provenant de $\mathscr{C}'$ et la condition* (ii) *soit satisfaite pour tout voisinage (X, ξ) de q dans $\mathscr{C}$ avec X provenant de $\mathscr{C}'$.*

Il est clair que l'on a (i)⇒(ii)⇒(iii). Pour montrer (iii)⇒(i), il suffit de montrer que si $\mathscr{I}$ est un idéal de type fini de A_q, l'homomorphisme canonique $\mathscr{I} \otimes_{A_q} M_p \to M_p$ est injectif ([12] chap. I §2.3 rem. 1). On sait qu'il existe un voisinage (X, ξ) de p dans $\mathscr{C}$ et un $(A|X)$-module de $(\mathscr{C}_{/X})$-présentation finie F tel que $F_\xi \simeq A_q/\mathscr{I}$ (1.3.14). Quitte à changer (X, ξ), on peut supposer que X provient de $\mathscr{C}'$ et qu'on a un homomorphisme $r : (A|X) \to (F|X)$ dont la fibre en ξ est la flèche canonique $A_q \to F_\xi$ (1.3.12.1). Le noyau I de r est un $(A|X)$-module cohérent (1.3.4) tel que $I_\xi = \mathscr{I}$. Notre assertion résulte alors de l'exactitude du foncteur (1.3.17.1).

1.4 Modules cohérents sur un schéma

Définition 1.4.1. On dit qu'un anneau A est *universellement cohérent* si l'anneau de polynômes $A[t_1, \dots, t_n]$ est cohérent pour tout entier $n \geq 0$.

Proposition 1.4.2. *Soit A un anneau. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est universellement cohérent.*
(ii) *Toute A-algèbre de présentation finie est un anneau universellement cohérent.*
(iii) *Toute A-algèbre de présentation finie est un anneau cohérent.*

Il suffit de prouver que (i) entraîne (iii). Soit B une A-algèbre de présentation finie, quotient de l'anneau des polynômes $A[t_1, \dots, t_n]$ par un idéal de type fini I. Par hypothèse, $A[t_1, \dots, t_n]$ est un anneau cohérent. Il en résulte que l'idéal I est de présentation finie ; il est donc cohérent (1.3.10). Par suite B est un anneau cohérent (1.3.6).

Proposition 1.4.3. *Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma affine. Alors le foncteur $M \mapsto \widetilde{M}$, de la catégorie des A-modules vers celle des $\mathscr{O}_X$-modules, induit une équivalence entre les sous-catégories pleines d'objets cohérents. En particulier, pour que A soit un anneau cohérent, il faut et il suffit que $\mathscr{O}_X$ soit un anneau cohérent.*

Cela résulte de ([28] 1.4.2 et 1.4.3), quand on observe que, pour tout A-module cohérent M et tout $f \in A$, M_f est un A_f-module cohérent.

1.4.4. Soient $n \in \mathbb{Z}$, $f : X \to Y$ un morphisme localement de type fini de schémas, E un objet de $\mathbf{D}(\mathscr{O}_X)$ (1.1.9). On dit que E est *n-pseudo-cohérent relativement à f* si, localement sur X, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & Z \arrow[d, "g"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

avec h une immersion fermée et g un morphisme lisse, tel que $h_*(E)$ soit n-pseudo-cohérent en tant qu'objet de $\mathbf{D}(\mathscr{O}_Z)$ (1.3.8) (cf. [5] III 1.2). On dit que E est *pseudo-cohérent relativement à* f si E est n-pseudo-cohérent relativement à f pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

On dit que f est *n-pseudo-cohérent* (resp. *pseudo-cohérent*) si $\mathscr{O}_X$ est n-pseudo-cohérent (resp. pseudo-cohérent) relativement à f.

Proposition 1.4.5 ([5] III 1.12). *Soient $n \in \mathbb{Z}$, $f\colon X \to Y$ un morphisme localement de type fini de schémas, E un objet de $\mathbf{D}^-(\mathscr{O}_X)$. Si f est pseudo-cohérent, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *E est n-pseudo-cohérent relativement à f.*
(ii) *E est n-pseudo-cohérent sur X.*

Proposition 1.4.6. *Soient $Y = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma affine, $f\colon X \to Y$ un morphisme localement de présentation finie de schémas, F un $\mathscr{O}_X$-module. Si A est universellement cohérent, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *F est pseudo-cohérent relativement à f.*
(ii) *F est d'∞-présentation finie sur X.*
(iii) *F est cohérent en tant que $\mathscr{O}_X$-module.*

La question étant locale sur X, on peut se borner au cas où $X = \mathrm{Spec}(B)$ est affine. Compte tenu de 1.3.10 et 1.4.5, il suffit de montrer que $\mathscr{O}_X$ est un anneau cohérent et qu'il est pseudo-cohérent relativement à f. En vertu de ([28] 6.2.9), B est une A-algèbre de présentation finie ; donc il existe un homomorphisme surjectif $u\colon A' = A[t_1, \dots, t_n] \to B$ de A-algèbres dont le noyau I est de type fini. Par hypothèse, A' est un anneau cohérent. Il résulte que I est de présentation finie sur A' ; il est donc cohérent (1.3.10). On en déduit que B est un A'-module cohérent et un anneau cohérent (1.3.6). Par suite $\mathscr{O}_X$ est un anneau cohérent (1.4.3). Soit $h\colon X \to Z = \mathrm{Spec}(A')$ l'immersion fermée définie par u. On a $h_*(\mathscr{O}_X) = \widetilde{B}$, qui est donc un $\mathscr{O}_{X'}$-module cohérent (1.4.3). Utilisant de nouveau le fait que A' est un anneau cohérent, on conclut que $h_*(\mathscr{O}_X)$ est pseudo-cohérent sur Z (1.3.10) ; autrement dit $\mathscr{O}_X$ est pseudo-cohérent relativement à f.

Théorème 1.4.7 ([36] 2.9'a). *Soient S un schéma, $f\colon X \to Y$ un S-morphisme propre de schémas localement de type fini sur S, E un objet de $\mathbf{D}^+(\mathscr{O}_X)$. Alors si E est pseudo-cohérent relativement à S, il en est de même de $\mathrm{R}f_*(E)$.*

Ce théorème est aussi démontré dans ([5] III 2.2) si f est un morphisme projectif ou si S est localement noethérien (comme conséquence de [30] 3.2.1).

Corollaire 1.4.8. *Soient Y un schéma, $f\colon X \to Y$ un morphisme propre de présentation finie. Si Y admet un recouvrement par des ouverts affines (U_α) tels que $\Gamma(U_\alpha, \mathscr{O}_Y)$ soit universellement cohérent pour tout α, alors pour tout $\mathscr{O}_X$-module cohérent $\mathscr{F}$ et tout entier $q \geq 0$, $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})$ est un $\mathscr{O}_Y$-module cohérent.*

La question étant locale sur Y, on peut se borner au cas où $Y = \mathrm{Spec}(A)$ est affine et A est universellement cohérent. Le complexe $\mathrm{R}f_*(\mathscr{F})$ est un objet de $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathscr{O}_X)$ ([30] 1.4.12), et il est pseudo-cohérent sur Y (1.4.6 et 1.4.7). Donc les $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})$ sont des $\mathscr{O}_Y$-modules cohérents (1.3.10).

Théorème 1.4.9 ([5] 2.3). *Soient S un schéma quasi-compact, $f\colon X \to Y$ un S-morphisme projectif de schémas localement de type fini sur S, $\mathscr{L} = i^*\mathscr{O}_P(1)$ le faisceau inversible défini par un plongement $i : X \to P = \mathbf{P}(\mathscr{E})$, où $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{O}_Y$-module quasi-cohérent de type fini. Pour $E \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D}(\mathscr{O}_X))$ et $n \in \mathbb{Z}$, posons $E(n) = E \otimes^L \mathscr{L}^{\otimes n}$. Alors, si $E \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D}^+(\mathscr{O}_X))$ est pseudo-cohérent relativement à S et acyclique en degré $> a$ ($a \in \mathbb{Z}$), il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $\mathrm{R}f_*(E(n))$ vérifie les mêmes conditions.*

Corollaire 1.4.10. *Soient Y un schéma, $f\colon X \to Y$ un morphisme propre de présentation finie, $\mathscr{L}$ un $\mathscr{O}_X$-module inversible ample pour f ; pour tout $\mathscr{O}_X$-module cohérent $\mathscr{F}$ et tout entier n, posons $\mathscr{F}(n) = \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}$. Si Y admet un recouvrement fini par des ouverts affines (U_α) tels que $\Gamma(U_\alpha, \mathscr{O}_Y)$ soit universellement cohérent pour tout α, alors pour tout $\mathscr{O}_X$-module cohérent $\mathscr{F}$, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$ et tout $q > 0$, $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}(n)) = 0$.*

Notons d'abord que si le corollaire est vrai lorsque l'on remplace $\mathscr{L}$ par $\mathscr{L}^{\otimes d}$ ($d > 0$), il est vrai sous sa forme initiale. On peut donc supposer $\mathscr{L}$ très ample relativement à f ([29] 4.6.11). Il résulte de 1.4.8 que $f_*(\mathscr{L})$ est un $\mathscr{O}_Y$-module cohérent. Donc f est projectif ([29] 5.5.4(i)), et il existe un plongement $i : X \to P = \mathbf{P}(f_*(\mathscr{L}))$ tel que $\mathscr{L} = i^*\mathscr{O}_P(1)$ ([29] 4.4.4). Le corollaire résulte alors de 1.4.6 et 1.4.9.

1.5 Rappels sur l'assassin et la pureté

1.5.1. Soient S un schéma, X un S-schéma. La fibre de X au-dessus d'un point s de S, c'est à dire le schéma $X \times_S \mathrm{Spec}(\kappa(s))$, sera aussi notée $X \otimes_S \kappa(s)$.

1.5.2. Soient S un schéma, X un S-schéma, $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ deux $\mathscr{O}_X$-modules quasi-cohérents, $u\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme $\mathscr{O}_X$-linéaire. On dit que u est *S-universellement injectif* si le morphisme $u \otimes_S \mathscr{O}_{S'} : \mathscr{F} \otimes_S \mathscr{O}_{S'} \to \mathscr{G} \otimes_S \mathscr{O}_{S'}$ est injectif pour tout changement de base $S' \to S$. Il revient au même de demander que pour tout $x \in X$ d'image s dans S, l'homomorphisme $u_x\colon \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ est $\mathscr{O}_s$-universellement injectif. Lorsque $\mathscr{G}$ est S-plat, cette condition équivaut à demander que u soit injectif et que son conoyau soit S-plat ([12] chap. I §2.5 prop. 4).

1.5.3. Soient $\rho\colon A \to B$ un homomorphisme local d'anneaux locaux noethériens, k le corps résiduel de A, M, N deux B-modules de type fini, N étant supposé A-plat. Soit $u\colon M \to N$ un B-homomorphisme. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) u est injectif et coker(u) est un A-module plat ;

(i′) u est A-universellement injectif ;

(ii) $u \otimes_A k$ est injectif.

Cela résulte de ([12] chap. III §5.2 théo. 1).

Définition 1.5.4 ([37] II 1.1). Soient A un anneau, M un A-module. On dit qu'un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A est *associé* à M, s'il existe $f \in M$ tel que $\mathfrak{p}$ soit minimal parmi les idéaux premiers contenant l'annulateur de f. On appelle *assassin* de M, et l'on note $\mathrm{Ass}_A(M)$ ou simplement $\mathrm{Ass}(M)$, l'ensemble des idéaux premiers associés à M.

Bourbaki ([12] chap. IV §1 exerc. 17) ajoute le qualificatif "faible" à cette notion. Cela est inutile, car, dans le cas noethérien, elle redonne la notion classique, et dans le cas général, la notion classique a très peu d'intérêt. Pour les propriétés usuelles de l'assassin, on renvoie à *loc. cit.*

Définition 1.5.5 ([42] 3.2.1). Soient X un schéma, x un point de X, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent. On dit que x est *associé* à $\mathscr{F}$ s'il existe un élément f de $\mathscr{F}_x$ dont l'annulateur I dans $\mathscr{O}_x$ a pour radical l'idéal maximal de $\mathscr{O}_x$. On appelle *assassin* de $\mathscr{F}$ dans X, et l'on note $\mathrm{Ass}_X(\mathscr{F})$ ou simplement $\mathrm{Ass}(\mathscr{F})$, l'ensemble des points de X associés à $\mathscr{F}$. On appelle assassin de X, et l'on note $\mathrm{Ass}(X)$, l'ensemble $\mathrm{Ass}_X(\mathscr{O}_X)$.

On notera que cette notion diffère en général de celle de Grothendieck ([31] 3.1.1), et que les deux notions coïncident lorsque X est localement noethérien. Notons ici quelques propriétés élémentaires de l'assassin (cf. [31] 3.1 pour le cas localement noethérien).

1.5.5.1. Il est clair que $\mathrm{Ass}(\mathscr{F}) \subset \mathrm{Supp}(\mathscr{F})$.

1.5.5.2. Supposons $X = \mathrm{Spec}(A)$ affine, $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, où M est un A-module ; pour qu'un point $x \in X$ soit associé à $\mathscr{F}$, il faut et il suffit que l'idéal premier correspondant $\mathfrak{p}$ de A soit associé à M. Cela résulte de la définition et de ([12] chap. IV §1 exerc. 17(d)).

1.5.5.3. Pour que $\mathscr{F} = 0$, il faut et il suffit que $\mathrm{Ass}(\mathscr{F}) = \emptyset$. En effet, la question étant locale, on est ramené au cas où X est affine, et la conclusion résulte de 1.5.5.2 et ([12] chap. IV §1 exerc. 17(a)).

1.5.5.4. Soit $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ une suite exacte de $\mathscr{O}_X$-modules quasi-cohérents. Alors $\mathrm{Ass}(\mathscr{F}') \subset \mathrm{Ass}(\mathscr{F}) \subset \mathrm{Ass}(\mathscr{F}') \cup \mathrm{Ass}(\mathscr{F}'')$. En effet, cela résulte aussitôt de l'assertion correspondante pour les modules ([12] chap. IV §1 exerc. 17(c)).

1.5.5.5. Soient $\mathscr{J}$ un idéal quasi-cohérent de type fini de $\mathscr{O}_X$, X' le sous-schéma fermé de X défini par $\mathscr{J}$, U l'ouvert $X - X'$ de X. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\mathrm{Ass}(\mathscr{F}) \subset U$.

(b) Pour tout ouvert affine V de X, toute section de $\mathscr{F}$ au-dessus de V, dont la restriction à $V \cap U$ est nulle, est égale à 0.

(c) L'homomorphisme canonique $\mathscr{F} \to \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{J}, \mathscr{F})$ est injectif.

La question étant locale, on peut supposer $X = \mathrm{Spec}(A)$ affine, $\mathscr{F} = \widetilde{M}$ et $\mathscr{J} = \widetilde{J}$, où M est un A-module et J est un idéal de type fini de A. D'abord (a) est équivalent à (c) d'après ([37] II 1.14). Ensuite (b) implique (c) : en effet, si on a $Jm = 0$ pour un élément non nul m de M, pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$, il existe $a \in J - \mathfrak{p}$; la relation $am = 0$ entraîne que l'image canonique de m dans $M_\mathfrak{p}$ est nulle, autrement dit m est une section non nulle de $\mathscr{F}$ au-dessus de X dont la restriction à U est nulle. Enfin (a) entraîne (b) car l'homomorphisme canonique $M \to \prod_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Ass}(M)} M_\mathfrak{p}$ est injectif ([12] chap. IV §1 exerc. 17(i)).

Définition 1.5.6 ([42] 3.2.2). Soient S un schéma, X un S-schéma, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent. On appelle *assassin de $\mathscr{F}$ dans X relativement à S*, et l'on note $\mathrm{Ass}_{X/S}(\mathscr{F})$ ou simplement $\mathrm{Ass}(\mathscr{F}/S)$, l'ensemble

$$\bigcup_{s\in S} \mathrm{Ass}_{X\otimes_S\kappa(s)}(\mathscr{F}\otimes_S \kappa(s)).$$

Si $S = \mathrm{Spec}(A)$ et $X = \mathrm{Spec}(B)$ sont affines, $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, où M est un B-module, on note $\mathrm{Ass}_{X/S}(\widetilde{M})$ aussi par $\mathrm{Ass}_{B/A}(M)$.

Lemme 1.5.7. *Soient A un anneau local de corps résiduel k, B une A-algèbre de type fini, M un B-module projectif sur A. On note Σ la partie multiplicative de B formée des éléments non diviseurs de zéro dans $M \otimes_A k$. Alors :*

(i) *$B[\Sigma^{-1}]$ est un anneau semi-local dont le spectre est formé des générisations dans* $\mathrm{Spec}(B)$ *de* $\mathrm{Ass}_{B\otimes_A k}(M \otimes_A k)$.

(ii) *Le morphisme de localisation $M \to M[\Sigma^{-1}]$ est A-universellement injectif; a fortiori, tout élément de* $\mathrm{Ass}_{B/A}(M)$ *est une générisation de*

$$\mathrm{Ass}_{B\otimes_A k}(M \otimes_A k).$$

La première assertion est immédiate ([12] chap. IV §1 exerc. 17(b)), et la seconde résulte de ([42] 3.1.6).

Lemme 1.5.8 ([42] 3.2.5). *Soient $f\colon (X, x) \to (S, s)$ un morphisme localement de présentation finie de schémas pointés, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module de présentation finie et S-plat, Σ la partie multiplicative de $\mathscr{O}_x$ formée des éléments non diviseurs de zéro dans $\mathscr{F}_x \otimes \kappa(s)$. Alors,*

(i) *$\mathscr{O}_x[\Sigma^{-1}]$ est un anneau semi-local dont le spectre est formé des générisations dans* $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_x)$ *de* $\mathrm{Ass}_{\mathscr{O}_x\otimes\kappa(s)}(\mathscr{F}_x \otimes \kappa(s))$.

(ii) *Le morphisme de localisation $\mathscr{F}_x \to \mathscr{F}_x[\Sigma^{-1}]$ est $\mathscr{O}_s$-universellement injectif; a fortiori, tout élément de* $\mathrm{Ass}_{\mathscr{O}_x/\mathscr{O}_s}(\mathscr{F}_x)$ *est une générisation de* $\mathrm{Ass}_{\mathscr{O}_x\otimes\kappa(s)}(\mathscr{F}_x \otimes \kappa(s))$.

Pour montrer (ii), on se ramène par passage à la limite inductive au cas où (S, s) est local noethérien. L'assertion résulte alors de 1.5.3 par passage à la limite inductive.

Proposition 1.5.9 ([42] 3.2.6). *Soient A un anneau, B une A-algèbre de présentation finie, M un B-module de présentation finie, plat sur A. Soit B' une B-algèbre plate telle que l'image de* $\mathrm{Spec}(B')$ *dans* $\mathrm{Spec}(B)$ *contienne* $\mathrm{Ass}_{B/A}(M)$. *Alors l'homomorphisme canonique $M \to M \otimes_B B'$ est A-universellement injectif.*

Signalons l'application de 1.5.9 suivante :

Proposition 1.5.10 ([42] 3.3.1). *Soient A un anneau, B une A-algèbre lisse, à fibres géométriquement intègres. Alors B est un A-module projectif.*

Définition 1.5.11 ([42] 3.3.3). Soient S un schéma, X un S-schéma localement de type fini, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent de type fini.

(i) Soit s un point de S ; notons $(\widetilde{S}, \widetilde{s})$ un hensélisé de (S, s), $\widetilde{X} = X \times_S \widetilde{S}$, $\widetilde{\mathscr{F}} = \mathscr{F} \otimes_S \mathscr{O}_{\widetilde{S}}$. On dit que $\mathscr{F}$ est *pur le long de $X \otimes_S \kappa(s)$* si $\mathrm{Ass}(\widetilde{\mathscr{F}}/\widetilde{S})$ est contenu dans le générisé de $X \otimes_S \kappa(\widetilde{s})$, autrement dit, si pour tout point $\widetilde{x}$ de $\mathrm{Ass}(\widetilde{\mathscr{F}}/\widetilde{S})$, l'adhérence de $\widetilde{x}$ dans $\widetilde{X}$ rencontre $X \otimes_S \kappa(\widetilde{s})$.

(ii) On dit que $\mathscr{F}$ est *S-pur* ou *pur relativement à S* s'il est pur le long de $X \otimes_S \kappa(s)$ pour tout point s de S. On dit que X est *S-pur* ou *pur relativement à S* si $\mathscr{O}_X$ est S-pur.

Si $S = \mathrm{Spec}(A)$ et $X = \mathrm{Spec}(B)$ sont affines, $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, où M est un B-module de type fini, on dira que M est *A-pur* lorsque $\mathscr{F}$ est S-pur.

Exemples 1.5.12. Soit $f\colon X \to S$ un morphisme localement de type fini.

(i) Si f est propre, tout $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent de type fini est S-pur.

(ii) Supposons f séparé, de type fini, à fibres finies. Pour que X soit S-pur, il faut et il suffit que f soit fini.

(iii) Si f est fidèlement plat, à fibres géométriquement irréductibles et sans composantes immergées, alors X est S-pur.

Théorème 1.5.13 ([42] 3.3.5). *Soient A un anneau, B une A-algèbre de présentation finie, M un B-module de présentation finie, plat sur A. Pour que M soit un A-module projectif, il faut et il suffit qu'il soit A-pur.*

On notera que la nécessité de la condition est immédiate (1.5.7).

Corollaire 1.5.14 ([42] 3.3.11). *Sous les hypothèses de* (1.5.13), *supposons que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, on ait* $\dim_{B\otimes\kappa(\mathfrak{p})}(M \otimes \kappa(\mathfrak{p})) \geq 1$. *Alors si M est un A-module A-plat et A-pur, M est un A-module libre.*

Corollaire 1.5.15. *Soient A un anneau, B une A-algèbre lisse, à fibres géométriquement intègres de dimension constante. Alors B est libre sur A.*

D'après 1.5.12(iii), B est A-pur. Le corollaire résulte alors de 1.5.14 lorsque la dimension des fibres de B sur A est ≥ 1. Supposons B étale sur A. Alors B est un A-module projectif de type fini (1.5.10 et 1.5.12(ii)), et compte tenu des hypothèses, il est inversible ; par suite $B = A$.

Théorème 1.5.16 ([42] 3.4.6). *Soient $f\colon X \to S$ un morphisme localement de présentation finie, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent de type fini. On suppose que* $\mathrm{Ass}(S)$ *est localement fini. Alors, l'ensemble U des points de X où $\mathscr{F}$ est S-plat est ouvert et $\mathscr{F}|U$ est un $\mathscr{O}_U$-module de présentation finie.*

Corollaire 1.5.17 ([42] 3.4.7). *Soient A un anneau intègre, B une A-algèbre de type finie, plate sur A. Alors B est de présentation finie.*

1.6 Rappels sur les idéaux de coefficients

1.6.1. Il sera sous-entendu dans cette section que les schémas envisagés appartiennent à un univers donné $\mathbb{U}$. On désigne par **Sch** la catégorie des schémas (éléments de l'univers $\mathbb{U}$) et par $\widehat{\mathbf{Sch}}$ la catégorie des préfaisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur **Sch**.

1.6.2. Soient S un schéma, X un S-schéma, $\mathscr{F},\mathscr{G}$ deux $\mathscr{O}_X$-modules, $u\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme $\mathscr{O}_X$-linéaire. On désigne par $\mathscr{E}_u$ le sous-objet de S dans $\widehat{\mathbf{Sch}}$ défini, pour tout schéma T, par l'ensemble des morphismes $T \to S$ tels que $u \otimes_S \mathscr{O}_T$ soit un isomorphisme (cf. [1] IV 8.5.1).

On dit qu'un idéal quasi-cohérent $\mathscr{C}$ de $\mathscr{O}_S$ est un *idéal de coefficients* pour u si $\mathscr{E}_u$ est représentable par le sous-schéma fermé de S défini par $\mathscr{C}$. Lorsqu'un tel idéal existe, il est unique. On dit alors que u admet un idéal de coefficients relativement à S.

Le fait que u admette un idéal de coefficients relativement à S est une question locale sur S.

Si u admet un idéal de coefficients $\mathscr{C}$ relativement à S, alors pour tout morphisme $S' \to S$, $\mathscr{C}\mathscr{O}_{S'}$ est un idéal de coefficients pour $u \otimes_S \mathscr{O}_{S'} : \mathscr{F} \otimes_S \mathscr{O}_{S'} \to \mathscr{G} \otimes_S \mathscr{O}_{S'}$.

Définition 1.6.3. Soient S un schéma, X un S-schéma, $\mathscr{A}$ un idéal quasi-cohérent de $\mathscr{O}_X$. On dit qu'un idéal quasi-cohérent $\mathscr{C}$ de $\mathscr{O}_S$ est un *idéal de coefficients* de $\mathscr{A}$ si $\mathscr{C}$ est un idéal de coefficients pour l'homomorphisme surjectif canonique $\mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X/\mathscr{A}$. Lorsqu'un tel idéal existe, il est unique et $\mathscr{A} \subset \mathscr{C}\mathscr{O}_X$. On dit alors que $\mathscr{A}$ admet un idéal de coefficients relativement à S.

Notons deux conséquences immédiates de la définition :

1.6.4. Soient S un schéma, X un S-schéma fidèlement plat, $\mathscr{C}$ un idéal quasi-cohérent de $\mathscr{O}_S$. Alors $\mathscr{C}$ est l'idéal de coefficients de $\mathscr{C}\mathscr{O}_X$.

1.6.5. Soient S un schéma, Y un S-schéma, X un Y-schéma, $\mathscr{A}$ (resp. $\mathscr{B}$) un idéal quasi-cohérent de $\mathscr{O}_X$ (resp. $\mathscr{O}_Y$) tels que $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}\mathscr{O}_X$, $u\colon \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X/\mathscr{A}$, $v\colon \mathscr{O}_Y \to \mathscr{O}_Y/\mathscr{B}$ les homomorphismes surjectifs canoniques, $\mathscr{E}_u$ (resp. $\mathscr{E}_v$) le sous-objet de S dans $\widehat{\mathbf{Sch}}$ où u (resp. v) est un isomorphisme. Alors :

(i) $\mathscr{E}_v$ est un sous-objet de $\mathscr{E}_u$. En particulier, si $\mathscr{A}$ (resp. $\mathscr{B}$) admet un idéal de coefficients $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{D}$) relativement à S, alors $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$.

(ii) Supposons que $\mathscr{B}$ soit l'idéal de coefficients de $\mathscr{A}$. Alors $\mathscr{E}_v = \mathscr{E}_u$. En particulier, pour qu'un idéal quasi-cohérent de $\mathscr{O}_S$ soit l'idéal de coefficients de $\mathscr{A}$, il faut et il suffit qu'il soit l'idéal de coefficients de $\mathscr{B}$.

Théorème 1.6.6 ([42] 4.1.1). *Soient S un schéma, X un S-schéma de présentation finie, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module de présentation finie, S-plat et S-pur, $\mathscr{G}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent, $u\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme $\mathscr{O}_X$-linéaire surjectif. Alors u admet un idéal de coefficients relativement à S, qui est de type fini si $\mathscr{G}$ est de présentation finie.*

Corollaire 1.6.7. *Soit $X \to S$ un morphisme lisse, de présentation finie, à fibres géométriquement intègres de dimension constante. Alors tout idéal quasi-cohérent $\mathscr{A}$ de $\mathscr{O}_X$ admet un idéal de coefficients relativement à S, qui est de type fini si $\mathscr{A}$ est de présentation finie.*

En effet, X est S-pur (1.5.12).

1.6.8. Soient A un anneau, B une A-algèbre lisse, à fibres géométriquement intègres de dimension constante. Alors B est libre sur A (1.5.15). Soient $\mathfrak{b}$ un idéal de B, $\mathfrak{a}$ son idéal de coefficients relativement à A (1.6.7). Il est immédiat de voir que $\mathfrak{a}$ est l'idéal de A engendré par les coordonnées des éléments de $\mathfrak{b}$ par rapport à une base de B.

Proposition 1.6.9. *Soient $X \to S$ un morphisme affine, lisse, à fibres géométriquement intègres de dimension constante, $\mathscr{A}$ un idéal quasi-cohérent de $\mathscr{O}_X$, $\mathscr{C}$ l'idéal de coefficients de $\mathscr{A}$ relativement à S* (1.6.7)*, $\mathscr{L}$ un idéal localement monogène de $\mathscr{O}_S$. Alors $\mathscr{L}\mathscr{C}$ est l'idéal de coefficients de $\mathscr{L}\mathscr{A}$.*

La question étant locale sur S, elle résulte facilement de 1.6.8.

1.7 Rappels sur les idéaux de Fitting

1.7.1. Soient X un schéma, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module, $\mathscr{A}$ un idéal de $\mathscr{O}_X$. On note $\mathrm{Ann}_{\mathscr{F}}(\mathscr{A})$ le plus grand sous-module de $\mathscr{F}$ annulé par $\mathscr{A}$, c'est à dire le noyau de l'homomorphisme canonique $\mathscr{F} \to \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{A}, \mathscr{F})$.

1.7.2. Soient X un schéma, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent de type fini, r un entier ≥ 0. Rappelons la définition du r-ième idéal de Fitting de $\mathscr{F}$.

Supposons d'abord X affine d'anneau A et considérons une présentation

$$A^{(I)} \xrightarrow{u} A^n \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{F}) \longrightarrow 0\,. \tag{1.7.2.1}$$

Alors l'idéal de A engendré par les coefficients de la matrice de $\wedge^{n-r}(u)$ ne dépend pas du choix de la suite exacte (1.7.2.1) ; c'est le r-ième idéal de Fitting de $\mathscr{F}$; on le note $\mathrm{F}_r(\mathscr{F})$.

Dans le cas général, lorsque U parcourt l'ensemble des ouverts affines de X, les idéaux $\mathrm{F}_r(\mathscr{F}|U)$ de $\mathscr{O}_X|U$ se recollent et définissent le r-ième idéal de Fitting $\mathrm{F}_r(\mathscr{F})$ de $\mathscr{F}$.

Si $\mathscr{F}$ est de présentation finie, $\mathrm{F}_r(\mathscr{F})$ est de type fini.

Pour tout X-schéma Y, on a $\mathrm{F}_r(\mathscr{F} \otimes_X \mathscr{O}_Y) = \mathrm{F}_r(\mathscr{F}).\mathscr{O}_Y$.

Un point x de X est dans $\mathrm{V}(\mathrm{F}_r(\mathscr{F}))$ si et seulement si $\dim_{\kappa(x)}(\mathscr{F} \otimes \kappa(x)) > r$, et l'ouvert complémentaire de $\mathrm{V}(\mathrm{F}_r(\mathscr{F}))$ dans X est le plus grand ouvert de X au-dessus duquel $\mathscr{F}$ peut être localement engendré par r éléments.

Lemme 1.7.3 ([42] 5.4.2). *Si $\mathrm{F}_r(\mathscr{F})$ est localement monogène, $\mathscr{F}/\mathrm{Ann}_{\mathscr{F}}(\mathrm{F}_r(\mathscr{F}))$ est localement engendré par r éléments.*

Lemme 1.7.4 ([42] 5.4.3). *Si $\mathrm{F}_r(\mathscr{F})$ est inversible et si $\mathscr{F}$ est libre de rang r aux points de $\mathrm{Ass}(X)$, alors $\mathscr{F}/\mathrm{Ann}_{\mathscr{F}}(\mathrm{F}_r(\mathscr{F}))$ est localement libre de rang r.*

Proposition 1.7.5 (Raynaud-Gruson). *Soit $f \colon X \to S$ un morphisme de schémas, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent de type fini, $\mathscr{J}$ un idéal quasi-cohérent de type fini de $\mathscr{O}_S$, $\mathscr{C}$ un idéal inversible de $\mathscr{O}_S$, r un entier ≥ 0. Supposons que les conditions suivantes soient remplies :*

(i) *f est plat à fibres intègres.*

(ii) *L'ouvert $U = S - \mathrm{V}(\mathscr{J})$ de S est schématiquement dense dans S, et pour tout $s \in U$, si l'on note x le point générique de $X \otimes_S \kappa(s)$, $\mathscr{F}_x$ est un $\mathscr{O}_x$-module libre de rang r.*

(iii) *$\mathrm{F}_r(\mathscr{F}) \subset \mathscr{C}\mathscr{O}_X$; donc $\mathscr{B} = (\mathscr{C}\mathscr{O}_X)^{-1}\mathrm{F}_r(\mathscr{F})$ est un idéal quasi-cohérent de $\mathscr{O}_X$; soit W l'ouvert $X - \mathrm{V}(\mathscr{B})$ de X.*

On suppose aussi vérifiée au moins l'une des deux conditions suivantes :

(iv) *f est localement de présentation finie.*

(iv′) *Le schéma U est noethérien et le schéma $f^{-1}(U)$ est localement noethérien.*

Alors $\mathscr{F}/\mathrm{Ann}_{\mathscr{F}}(\mathscr{C}\mathscr{O}_X)$ est localement libre de rang r sur W.

Comme f est plat, $\mathscr{C}\mathscr{O}_X$ est inversible ; donc $\mathrm{F}_r(\mathscr{F})$ est inversible sur W. Il suffit alors de montrer que $\mathscr{F}$ est libre de rang r aux points de $\mathrm{Ass}(X)$ (1.7.4). La condition (ii) entraîne que $\mathrm{Ass}(S) \subset U$ (1.5.5.5). De même, on a $\mathrm{Ass}(X) \subset f^{-1}(U)$, car $f^{-1}(U)$ est schématiquement dense dans X ([31] 11.10.5) ; on notera dans le cas (iv') que U est un ouvert retro-compact de S ([28] 6.1.5). D'autre part, on a

$$\mathrm{Ass}(X) = \cup_{s \in \mathrm{Ass}(S)} \mathrm{Ass}(X \otimes_S \kappa(s)),$$

en vertu de ([42] 3.4.3) dans le cas (iv), et de ([31] 3.3.1) dans le cas (iv'). Comme $\mathrm{Ass}(X \otimes_S \kappa(s))$ est le point générique de $X \otimes_S \kappa(s)$, notre assertion résulte de la condition (ii).

Remarque 1.7.6. La proposition 1.7.5 est extraite de la démonstration du théorème ([42] 5.2.2) dans un cas particulier (*loc. cit.* 5.4). Soient $s \in S$, x le point générique de $X \otimes_S \kappa(s)$. Si $s \in U$, $\mathrm{F}_r(\mathscr{F})_x = \mathscr{O}_x$, et par suite $x \in W$. L'intérêt de la proposition réside dans le choix de l'idéal $\mathscr{C}$, de sorte que $x \in W$ pour tout $s \in S$.

1.8 Rappels d'algèbre topologique

La terminologie de Grothendieck pour certaines notions d'algèbre topologique est essentiellement adaptée au cadre noethérien, qui n'est pas le cadre exclusif de ce traité. Nous nous en écartons à certains endroits pour mettre l'accent sur les concepts fondamentaux pour la suite. Pour éviter toute confusion, nous reformulons toutes les définitions, même celles que nous conservons identiques à ([28] §0.7).

1.8.1. On dit qu'un anneau topologique A est *linéairement topologisé* (et sa topologie est *linéaire*) s'il existe un système fondamental de voisinages de 0 dans A formé d'*idéaux* (nécessairement ouverts).

Si A et B sont deux anneaux topologiques, $\rho\colon A \to B$ un homomorphisme d'anneaux définissant sur B une structure de A-algèbre, on dit que B est une A-*algèbre topologique* si ρ est *continu* pour les topologies envisagées.

Si A est un anneau linéairement topologisé, M un A-module topologique, on dit que M est *linéairement topologisé* s'il existe un système fondamental de voisinages de 0 dans M formé de *sous-modules* de M ; pour abréger, nous dirons "*système fondamental d'idéaux* (*resp. de sous-modules*) *ouverts*" au lieu "système fondamental de voisinages de 0 formé d'idéaux (resp. de sous-modules)".

Etant donnés un anneau linéairement topologisé A et un A-module M, les ensembles JM, où J parcourt un système fondamental d'idéaux ouverts, forment un système fondamental de sous-modules ouverts pour une topologie sur M faisant de M un A-module topologique, et que l'on dit *déduite* de la topologie de A.

Soit M un A-module topologique dont la topologie est moins fine que la topologie déduite de celle de A ; alors, si N est un sous-module ouvert de M, le A-module discret M/N est annulé par un idéal ouvert de A, car par hypothèse il existe un idéal ouvert J tel que $JM \subset N$.

Lorsque B est une A-algèbre topologique, linéairement topologisée, la topologie sur B déduite de celle de A est plus fine que la topologie donnée, car pour tout idéal ouvert I de B, il y a par hypothèse un idéal ouvert J de A tel que $JB \subset I$.

Lemme 1.8.2. *Soient A un anneau linéairement topologisé, B une A-algèbre topologique. Supposons que l'homomorphisme canonique $\varphi\colon A \to B$ soit surjectif. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *φ est un morphisme strict* ([13] chap. III §2.8 déf. 1).
(ii) *La topologie de B est déduite de celle de A.*

En effet, la condition (i) est équivalente à dire que l'image par φ de tout idéal ouvert de A est un idéal ouvert de B ([13] chap. III §2.8 prop. 24). Si (J_λ) est un système fondamental d'idéaux ouverts de A, la condition (ii) revient à dire que $(\varphi(J_\lambda))$ est un système fondamental d'idéaux ouverts de B. Donc l'équivalence en question résulte immédiatement du fait que φ est continu et surjectif.

Définition 1.8.3 ([28] 7.1.2). Dans un anneau linéairement topologisé A, on dit qu'un idéal J est un *idéal de définition* si J est ouvert et si, pour tout voisinage V de 0, il existe un entier $n > 0$ tel que $J^n \subset V$ (ce qu'on exprime, par abus de langage, en disant que la suite J^n tend vers 0). On dit qu'un anneau linéairement topologisé A est *préadmissible* s'il existe dans A un idéal de définition ; on dit que A est *admissible* s'il est préadmissible et si en outre il est séparé et complet.

On peut faire les remarques suivantes :

1.8.3.1. Si A est un anneau préadmissible, J un idéal de définition, L un idéal ouvert, $J \cap L$ est encore un idéal de définition ; les idéaux de définition d'un anneau préadmissible forment donc un système fondamental d'idéaux ouverts (mais on notera que les puissances J^n ne sont pas nécessairement des idéaux ouverts).

1.8.3.2. Si A est un anneau préadmissible, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre topologique dont la topologie est déduite de celle de A, alors B est un anneau préadmissible et JB est un idéal de définition de B.

1.8.3.3. Si un anneau préadmissible A est tel que, pour un idéal de définition J, les puissances J^n $(n > 0)$ forment un système fondamental de voisinages de 0, il en est de même des puissances J'^n de tout idéal de définition J' de A ([28] 7.1.8).

Définition 1.8.4. On dit qu'un anneau préadmissible A est *préadique* s'il existe un idéal de définition J de A tel que les J^n forment un système fondamental de voisinage de 0 dans A (ou, ce qui revient au même, tel que les J^n soient ouverts). On appelle anneau *adique* un anneau préadique séparé, complet et ayant un idéal de définition de type fini.

On peut préciser la terminologie et faire les remarques suivantes :

1.8.4.1. Nous nous écartons ici de la terminologie de Grothendieck ([28] 7.1.9) : notre notion d'anneau adique est plus forte que la sienne (les deux notions coïncident évidemment dans le cas noethérien). La notion de Grothendieck n'est pas en général stable par localisation et complétion.

1.8.4.2. Si J est un idéal de définition d'un anneau préadique A, on dit encore que A est un anneau J-préadique, et que sa topologie est la topologie J-préadique. Plus généralement, si M est un A-module, la topologie sur M déduite de celle de A (*i.e.*, la topologie ayant pour système fondamental de voisinages de 0 les sous-modules J^nM) est dite topologie J-préadique et la filtration (J^nM) est dite filtration J-préadique.

1.8.4.3. Si J est un idéal de définition de type fini d'un anneau adique A, on dit encore que A est un anneau J-adique, et que sa topologie est la topologie J-adique. Plus généralement, si M est un A-module, la topologie sur M déduite de A est dite topologie J-adique.

1.8.4.4. Lorsque A est un anneau préadique et B est une A-algèbre topologique dont la topologie est déduite de celle de A, on dit que B est une A-algèbre *préadique* (ou *préadique* sur A) et que l'homomorphisme canonique $\rho\colon A \to B$ est *préadique.*

1.8.4.5. Lorsque A est un anneau adique et B est une A-algèbre préadique, séparée et complète, on dit que B est une A-algèbre *adique* (ou *adique* sur A) et que l'homomorphisme canonique $\rho\colon A \to B$ est *adique.*

1.8.4.6. Soient A un anneau préadique, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre topologique. Pour que B soit une A-algèbre préadique, il faut et il suffit que B soit un anneau JB-préadique. En outre, si A est adique et J est de type fini, pour que B soit une A-algèbre adique, il faut et il suffit que B soit un anneau JB-adique.

Proposition 1.8.5. *Soient A un anneau, J un idéal de A, M un A-module complet pour la topologie J-préadique, N un A-module séparé pour la topologie J-préadique, $u\colon M \to N$ un morphisme A-linéaire. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *u est surjectif.*
(ii) *Le morphisme $u_0\colon M/JM \to N/JN$ déduit de u par le changement d'anneaux $A \to A/J$ est surjectif.*

Posons $\mathrm{gr}(A) = \oplus_{n\in\mathbb{N}} J^n/J^{n+1}$, et considérons le foncteur

$$P \mapsto \mathrm{gr}(P) = \oplus_{n\in\mathbb{N}}(J^nP/J^{n+1}P)$$

de la catégorie des A-modules vers la catégorie des $\mathrm{gr}(A)$-modules. Comme le morphisme canonique $\mathrm{gr}(A) \otimes_{A/J} (P/JP) \to \mathrm{gr}(P)$ est surjectif, la condition (ii) entraîne que $\mathrm{gr}(u)$ est surjectif. Le proposition résulte alors de ([12] chap. III §2.8 théo. 1 et cor. 2).

Corollaire 1.8.6. *Soient A un anneau préadique séparé et complet, J un idéal de définition de A, $\mathfrak{a}$ un idéal de A. Pour que $\mathfrak{a}$ soit un A-module de type fini, il faut et il suffit que $\mathfrak{a}/J\mathfrak{a}$ soit un A-module de type fini.*

En effet, en tant que sous-module de A, $\mathfrak{a}$ est séparé pour la topologie J-préadique, et le corollaire résulte de 1.8.5.

Proposition 1.8.7. *Soient A un anneau, J un idéal de A tel que J/J^2 soit un A-module de type fini, M un A-module tel que M/JM soit un A-module de type fini, $\mathfrak{a}$ un idéal ouvert pour la topologie J-préadique de A tel que $\mathfrak{a}/J\mathfrak{a}$ soit un A-module de type fini.*

(i) *L'anneau $\widehat{A} = \varprojlim(A/J^{n+1})$ est adique. Si $\widehat{J}$ est l'adhérence dans $\widehat{A}$ de l'image canonique de J, qui s'identifie aussi à $\varprojlim(J/J^{n+1})$, $\widehat{J}$ est un idéal de définition de type fini de $\widehat{A}$, $\widehat{J}^n$ est l'adhérence dans $\widehat{A}$ de l'image canonique de J^n, $\widehat{A}/\widehat{J}^n$ est isomorphe à A/J^n et $\widehat{J}/\widehat{J}^2$ à J/J^2.*
(ii) *Soient $\widehat{M} = \varprojlim(M/J^{n+1}M)$ le séparé complété de M, $i\colon M \to \widehat{M}$ l'application canonique. Alors $\widehat{M}$ est un $\widehat{A}$-module de type fini, $\widehat{M} = \widehat{A}.i(M)$,*

$\widehat{J}^n\widehat{M}$ est l'adhérence dans $\widehat{M}$ de l'image canonique de J^nM, et $\widehat{M}/\widehat{J}^n\widehat{M}$ est isomorphe à M/J^nM.

(iii) *Soit $\widehat{\mathfrak{a}} = \varprojlim(\mathfrak{a}/J^{n+1}\mathfrak{a})$ le séparé complété de $\mathfrak{a}$. Alors $\widehat{\mathfrak{a}}$ est un idéal ouvert de type fini de $\widehat{A}$, et on a $\widehat{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}\widehat{A}$; en particulier, on a $\widehat{J} = J\widehat{A}$.*

Les propositions (i) et (ii) résultent de ([12] chap. III §2.11 prop. 14 et cor. 1). Si $J^m \subset \mathfrak{a}$, alors $\widehat{\mathfrak{a}}$ s'identifie à $\varprojlim_{n\geq m}(\mathfrak{a}/J^{n+1})$, qui est un idéal ouvert de $\widehat{A}$. Les autres assertions de la proposition (iii) résultent de (ii).

1.8.8. Soient A un anneau préadique, B une A-algèbres préadique, C une A-algèbre topologique. Supposons C un anneau préadique (mais pas forcement une A-algèbre préadique). La topologie sur C déduite de celle de A étant plus finie que la topologie donnée, pour tout idéal de définition K de C, il existe un idéal de définition J de A tel que $JC \subset K$; donc le produit tensoriel complété $B\widehat{\otimes}_AC$, qui est par définition ([28] 0.7.7.1) la limite projective des anneaux

$$(B/J^nB) \otimes_{A/J^n} (C/K^n) \simeq (B \otimes_A C)/K^n(B \otimes_A C),$$

est isomorphe au séparé complété de $B \otimes_A C$ pour la topologie $K(B \otimes_A C)$-préadique. Si K est de type fini sur C, il résulte de 1.8.7 que $B\widehat{\otimes}_AC$ est un anneau $K(B\widehat{\otimes}_AC)$-adique et

$$(B\widehat{\otimes}_AC)/K^n(B\widehat{\otimes}_AC) \simeq (B \otimes_A C)/K^n(B \otimes_A C) \simeq (B/J^nB) \otimes_{A/J^n} (C/K^n). \tag{1.8.8.1}$$

1.8.9. Soient A un anneau linéairement topologisé, (J_λ) un système fondamental d'idéaux ouverts de A, S une partie multiplicative de A. Notons S_λ l'image canonique de S dans A/J_λ. Les anneaux $S_\lambda^{-1}(A/J_\lambda)$ forment un système projectif. On désigne par $A\{S^{-1}\}$ la limite projective de ce système et on l'appelle *anneau complet de fractions* de A ayant leurs dénominateurs dans S. Cette définition ne dépend pas du système fondamental (J_λ) choisi. L'anneau $A\{S^{-1}\}$ est topologiquement isomorphe au séparé complété de $S^{-1}A$ pour la topologie dont un système fondamental de voisinages de 0 est formé des $S^{-1}J_\lambda$ ([28] 0.7.6.2). Plus généralement, si M est un A-module, on désigne par $M\{S^{-1}\}$ le séparé complété de $S^{-1}M$ pour la topologie déduite de celle de $S^{-1}A$.

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal ouvert de A ; on peut supposer que $J_\lambda \subset \mathfrak{a}$ pour tout λ, et par suite $S^{-1}J_\lambda \subset S^{-1}\mathfrak{a}$ dans $S^{-1}A$, autrement dit, $S^{-1}\mathfrak{a}$ est un idéal ouvert de $S^{-1}A$. Donc $\mathfrak{a}\{S^{-1}\}$ est un idéal ouvert de $A\{S^{-1}\}$, et l'anneau discret $A\{S^{-1}\}/\mathfrak{a}\{S^{-1}\}$ est isomorphe à $S^{-1}(A/\mathfrak{a})$. Inversement, tout idéal ouvert de $A\{S^{-1}\}$ est de cette forme ([28] 0.7.6.9).

Proposition 1.8.10 ([28] 0.7.6.11). *Si A est un anneau admissible, il en est de même de $A\{S^{-1}\}$, et pour tout idéal de définition J de A, $J\{S^{-1}\}$ est un idéal de définition de $A\{S^{-1}\}$.*

Proposition 1.8.11. *Soient A un anneau adique, S une partie multiplicative de A, J un idéal de définition de type fini de A, $\mathfrak{a}$ un idéal ouvert de type fini de A. Alors $A\{S^{-1}\}$ est un anneau adique, $J\{S^{-1}\}$ est un idéal de définition de type fini de $A\{S^{-1}\}$, et on a $\mathfrak{a}\{S^{-1}\} = \mathfrak{a}(A\{S^{-1}\})$; en particulier, on a $J\{S^{-1}\} = J(A\{S^{-1}\})$ et $J^n\{S^{-1}\} = (J\{S^{-1}\})^n = J^n(A\{S^{-1}\})$ pour tout $n \geq 1$.*

Cela résulte de 1.8.7.

1.8.12. Soient A un anneau linéairement topologisé, M un A-module. Pour tout élément f de A, on désigne par $A_{\{f\}}$ l'anneau complet des fractions $A\{S_f^{-1}\}$ et par $M_{\{f\}}$ le $A_{\{f\}}$-module $M\{S_f^{-1}\}$, où S_f est l'ensemble multiplicatif des f^n ($n \geq 0$). Lorsque f parcourt une partie multiplicative S de A, les $A_{\{f\}}$ forment un système inductif filtrant d'anneaux ([28] 0.7.6.15), et les $M_{\{f\}}$ forment un système inductif filtrant de modules. On pose $A_{\{S\}} = \varinjlim_{f \in S} A_{\{f\}}$ et $M_{\{S\}} = \varinjlim_{f \in S} M_{\{f\}}$. On a un homomorphisme canonique d'anneaux $A_{\{S\}} \to A\{S^{-1}\}$, et un morphisme canonique $A_{\{S\}}$-linéaire $M_{\{S\}} \to M\{S^{-1}\}$.

Proposition 1.8.13 ([28] 0.7.6.17). *Soient A un anneau admissible, $\mathfrak{p}$ un idéal premier ouvert de A, $S = A - \mathfrak{p}$. Alors les anneaux $A_{\{S\}}$ et $A\{S^{-1}\}$ sont locaux, l'homomorphisme canonique $A_{\{S\}} \to A\{S^{-1}\}$ est local et les corps résiduels de $A_{\{S\}}$ et $A\{S^{-1}\}$ sont canoniquement isomorphes au corps des fractions de $A/\mathfrak{p}$.*

Proposition 1.8.14 ([28] 0.7.6.18). *Sous les hypothèses de* (1.8.13)*, si on suppose de plus que A est un anneau adique noethérien, les anneaux locaux $A\{S^{-1}\}$ et $A_{\{S\}}$ sont noethériens, et $A\{S^{-1}\}$ est un $A_{\{S\}}$-module fidèlement plat.*

Remarque 1.8.15. L'énoncé 1.8.14 sera étendu à un cas non noethérien (1.12.7).

1.8.16. Soient A un anneau linéairement topologisé, $\mathscr{B}$ un système fondamental d'idéaux ouverts de A. On désigne par $A\langle\xi_1, \ldots, \xi_n\rangle$ le sous-anneau des séries formelles restreintes de $A[[\xi_1, \ldots, \xi_n]]$ ([12] chap. III §4.2 déf. 2). Pour tout $J \in \mathscr{B}$, on a un homomorphisme canonique

$$u_J \colon A\langle\xi_1, \ldots, \xi_n\rangle \to (A/J)[\xi_1, \ldots, \xi_n]. \qquad (1.8.16.1)$$

On munit $A\langle\xi_1, \ldots, \xi_n\rangle$ de la topologie linéaire dont les noyaux des u_J (pour $J \in \mathscr{B}$) forment un système fondamental d'idéaux ouverts. Si A est complet et séparé, l'homomorphisme

$$\varprojlim_{\mathscr{B}} u_J \colon A\langle\xi_1, \ldots, \xi_n\rangle \to \varprojlim_{\mathscr{B}} (A/J)[\xi_1, \ldots, \xi_n] \qquad (1.8.16.2)$$

est un isomorphisme d'anneaux topologiques ([12] chap. III §4.2 prop. 3).

Proposition 1.8.17 ([28] 0.7.5.2).

(i) *Si A est un anneau admissible, il en est de même de $A' = A\langle\xi_1, \ldots, \xi_n\rangle$.*

(ii) *Soient A un anneau adique, J un idéal de définition de type fini de A. Si l'on pose $J' = JA'$, alors A' est un anneau J'-adique, et J' est le noyau de l'homomorphisme u_J* (1.8.16.1). *Si, en outre, A est noethérien, il en est de même de A'.*

Définition 1.8.18. Soient A un anneau admissible, B une A-algèbre topologique. On dit que B est une A-algèbre *topologiquement de type fini* (ou *topologiquement de type fini* sur A) et que l'homomorphisme canonique $\rho\colon A \to B$ est *topologiquement de type fini* si B est admissible et est isomorphe en tant que A-algèbre topologique à un quotient d'une algèbre de séries restreintes $A\langle\xi_1, \dots, \xi_n\rangle$.

On dit que B est une A-algèbre *topologiquement de présentation finie* (ou *topologiquement de présentation finie* sur A) et que l'homomorphisme canonique $\rho\colon A \to B$ est *topologiquement de présentation finie* si B est admissible et est isomorphe en tant que A-algèbre topologique à un quotient d'une algèbre de séries restreintes $A\langle\xi_1, \dots, \xi_n\rangle$ par un idéal de *type fini.*

On peut faire les remarques suivantes :

1.8.18.1. Soient A un anneau admissible, B une A-algèbre topologique. Dire que B est topologiquement de type fini sur A équivaut aux conditions suivantes :

(i) B est un anneau admissible.

(ii) Il existe un homomorphisme continu, strict ([13] chap. III §2.8 déf. 1) et surjectif de A-algèbres topologiques

$$\varphi\colon A\langle\xi_1, \dots, \xi_n\rangle \to B. \tag{1.8.18.1}$$

Dire que B est topologiquement de présentation finie sur A équivaut aux mêmes conditions avec en plus $\ker(\varphi)$ un idéal de type fini.

1.8.18.2. Soient A un anneau adique, B une A-algèbre topologique, $\varphi\colon A\langle\xi_1, \dots, \xi_n\rangle \to B$ un homomorphisme surjectif de A-algèbres. Pour que φ soit continu et strict, il faut et il suffit que B soit une A-algèbre préadique. Cela résulte de 1.8.2 et 1.8.17(ii).

Proposition 1.8.19. *Soient A un anneau adique, J un idéal de définition de type fini de A, B une A-algèbre topologique. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *B est une A-algèbre adique, et B/JB est une (A/J)-algèbre de type fini.*

(ii) *B est topologiquement de type fini sur A.*

En effet, (ii) entraîne (i) en vertu de 1.8.17(ii) et 1.8.18.2. Montrons que (i) entraîne (ii). Soient $(b_1, \dots, b_n)$ des éléments de B dont les classes modulo JB forment un système de générateurs de la (A/J)-algèbre B/JB, $\varphi\colon A\langle\xi_1, \dots, \xi_n\rangle \to B$ l'homomorphisme continu associé ([12] chap. III §4.2 prop. 4). Alors φ est surjectif (1.8.5) et strict (1.8.18.2), d'où la conclusion.

Corollaire 1.8.20. *Soient A un anneau adique, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre de type fini. Alors $\widehat{B} = \varprojlim(B/J^{n+1}B)$ est topologiquement de type fini sur A.*

En effet, on peut supposer J de type fini sur A, et la conclusion résulte de 1.8.7 et 1.8.19.

Corollaire 1.8.21. *Soient A un anneau adique, B une A-algèbre topologiquement de type fini, C une B-algèbre topologiquement de type fini. Alors C est topologiquement de type fini sur A.*

Corollaire 1.8.22. *Soient A un anneau adique, B une A-algèbre topologiquement de type fini, A' une A-algèbre topologique. Supposons A' un anneau adique (mais pas forcement une A-algèbre adique). Alors $B\widehat{\otimes}_A A'$ est topologiquement de type fini sur A'.*

Cela résulte de 1.8.8 et 1.8.19.

Proposition 1.8.23. *Soient A un anneau adique, J un idéal de définition de type fini de A, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie. Alors B est une A-algèbre adique, et B/JB est une (A/J)-algèbre de présentation finie.*

En effet, cela résulte de 1.8.17(ii) et 1.8.18.2.

Remarque 1.8.24. La proposition 1.8.23 sera renforcée dans 1.10.4.

Définition 1.8.25. Soient A un anneau, J un idéal de A. On dit que (A, J) vérifie :

(a) la condition d'*Artin-Rees* (en abrégé AR), si J est de type fini et si pour tout A-module de type fini M et tout sous-A-module N de M, la filtration induite sur N par la filtration J-préadique sur M est J-bonne ([12] chap. III §3.1 déf. 1) ; autrement dit, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait

$$J((J^n M) \cap N) = (J^{n+1}M) \cap N. \tag{1.8.25.1}$$

(b) la condition de *Krull* (en abrégé Kr), si pour tout A-module de type fini M et tout sous-A-module N de M, la topologie J-préadique de N est induite par la topologie J-préadique de M.

On peut faire les remarques suivantes :

1.8.25.2. La condition (AR) est clairement plus forte que (Kr).

1.8.25.3. Si (A, J) vérifie (Kr), il en est de même de (A, K), pour tout idéal de définition K de la topologie J-préadique sur A.

1.8.25.4. D'après le lemme d'Artin-Rees ([12] chap. III §3.1 prop. 1 et cor. 1), pour tout anneau noethérien A et tout idéal J de A, (A, J) vérifie (AR). On donnera dans 1.9.18 un exemple important d'anneaux non noethériens qui vérifient (AR).

Proposition 1.8.26. *Soient A un anneau, J un idéal de A tels que (A, J) vérifie* (Kr). *Pour tout A-module M, on note $\widehat{M}$ le séparé complété de M pour la topologie J-préadique.*

(i) *Pour toute suite exacte de A-modules $0 \to N \to L \to M \to 0$ telle que L soit de type fini, la suite $0 \to \widehat{N} \to \widehat{L} \to \widehat{M} \to 0$ est exacte.*

(ii) *Pour tout A-module de présentation finie M, la flèche canonique $M \otimes_A \widehat{A} \to \widehat{M}$ est un isomorphisme.*

(i) Le morphisme surjectif $L \to M$ est toujours strict pour les topologies J-préadiques. Comme (A, J) vérifie (Kr), le morphisme $N \to L$ est strict pour les topologies J-préadiques ([13] chap. III §2.8 prop. 24). La proposition résulte alors de ([12] chap. III §2.12 lem. 2).

(ii) Soit $0 \to N \to L \to M \to 0$ une suite exacte de A-modules, où $L = A^n$ et N est de type fini. Compte tenu de (i), on a un diagramme commutatif de $\widehat{A}$-modules

$$\begin{tikzcd}
 & N \otimes_A \widehat{A} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & L \otimes_A \widehat{A} \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & M \otimes_A \widehat{A} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widehat{N} \arrow[r] & \widehat{L} \arrow[r] & \widehat{M} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes et β est un isomorphisme. Comme α est surjectif ([12] chap. III §2.12 prop. 16), γ est un isomorphisme ([12] chap. I §1.4 prop. 2).

Lemme 1.8.27. *Soient A un anneau, J un idéal de type fini de A, M un A-module de type fini. Si (A, J) vérifie* (AR), *la fermeture $\bigcap_{n\geq 0} J^n M$ de $\{0\}$ dans M pour la topologie J-préadique est l'ensemble des $x \in M$ pour lesquels il existe $t \in J$ tel que $(1-t)x = 0$.*

Il suffit de calquer la démonstration de ([12] chap. III §3.2 prop. 5). Si $x = tx$, où $t \in J$, alors $x = t^n x \in J^n M$ pour tout $n \geq 0$, et donc $x \in F = \cap_{n\in\mathbb{N}} J^n M$. Inversement, si $x \in F$, il existe un entier n tel que

$$Jx = J((J^n M) \cap Ax) = (J^{n+1} M) \cap Ax = Ax.$$

Donc il existe $t \in J$ tel que $x = tx$.

Proposition 1.8.28. *Soient A un anneau, J un idéal de type fini de A tels que (A, J) vérifie* (AR). *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *J est contenu dans le radical de A.*

(b) *Tout A-module de type fini est séparé pour la topologie J-préadique.*

(c) *Pour tout A-module de type fini M, tout sous-A-module de M est fermé pour la topologie J-préadique.*

(d) *Tout idéal maximal de A est fermé pour la topologie J-préadique.*

Il suffit de calquer la démonstration de ([12] chap. III §3.3 prop. 6), en remplaçant l'usage de ([12] chap. III §3.2 prop. 5) par celui de 1.8.27.

Corollaire 1.8.29. *Soient A un anneau adique, J un idéal de définition de type fini de A tels que (A, J) vérifie* (AR)*. Alors les conditions équivalentes de* (1.8.28) *sont remplies ; en particulier, tout A-module de type fini est complet et séparé pour la topologie J-adique.*

En effet, la condition 1.8.28(a) est clairement remplie ([12] chap. III §2.13 lem. 3), et la topologie J-adique d'un A-module de type fini est complète en vertu de ([12] chap. III §2.12 cor. 1 de prop. 16).

1.8.30. Soient A un anneau, J un idéal de A, M un A-module. On appelle sous-module de *J-torsion* de M, et l'on note $M_{J\text{-tor}}$, le sous-module des sections $x \in M$ pour lesquelles il existe un entier $k \geq 0$ tel que $J^k x = 0$. On dit que M est *J-nul* (resp. *J-pur*) si $M = M_{J\text{-tor}}$ (resp. $M_{J\text{-tor}} = 0$). On dit que A est *J-pur* s'il est J-pur en tant que A-module.

On peut préciser la terminologie et faire les remarques suivantes :

1.8.30.1. Lorsque A est un anneau préadmissible et J est un idéal de définition de A, le module $M_{J\text{-tor}}$ ne dépend pas du choix de J ; on l'appelle sous-module de *torsion topologique* de M et on le note M_{tor}. On dit que M est *rig-nul* (resp. *rig-pur*) si $M = M_{\text{tor}}$ (resp. $M_{\text{tor}} = 0$). On dit que A est *rig-pur* s'il est rig-pur en tant que A-module.

1.8.30.2. Supposons J de type fini ; posons $X = \text{Spec}(A)$ et $U = X - \text{V}(J)$. Il résulte de ([28] 6.8.4) que $M_{J\text{-tor}}$ est le noyau du morphisme de restriction $M \to \Gamma(U, \widetilde{M})$. De plus, en vertu de 1.5.5.5, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\text{Ass}(A) \subset U$.
(ii) U est schématiquement dense dans X.
(iii) A est J-pur.

1.8.31. Soient X un schéma, Y un sous-schéma fermé de présentation finie de X, défini par un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_X$, U l'ouvert $X - Y$ de X, $j: U \to X$ l'injection canonique, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent. On dit que $\mathscr{F}$ est *Y-pur* (ou *$\mathscr{J}$-pur*) si l'homomorphisme canonique $\mathscr{F} \to j_*(\mathscr{F}|U)$ est injectif (cf. [31] 5.9.9).

Lorsque $X = \text{Spec}(A)$ est affine, $\mathscr{J} = \widetilde{J}$, où J est un idéal de type fini de A, et $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, où M est un A module, $\mathscr{F}$ est $\mathscr{J}$-pur si et seulement si M est J-pur.

Lemme 1.8.32. *Soient S un schéma, T un sous-schéma fermé de présentation finie de S, U l'ouvert $S - T$ de S, X un S-schéma, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent, Y l'image réciproque de T dans X. Si U est schématiquement dense dans S et $\mathscr{F}$ est S-plat, alors $\mathscr{F}$ est Y-pur.*

En effet, la question étant locale sur S et sur X, on peut se borner au cas où $S = \text{Spec}(A)$ et $X = \text{Spec}(B)$ sont affines, $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, où M est un B-module, et T

est défini par un idéal de type fini J de A. Comme A est J-pur (1.8.30.2) et M est A-plat, M est (JB)-pur.

Proposition 1.8.33 ([28] 6.9.17). *Soient X un schéma, $\mathscr{J}$ un idéal quasi-cohérent de type fini de $\mathscr{O}_X$, Y le sous-schéma fermé de X défini par $\mathscr{J}$, U l'ouvert $X-Y$ de X, $j\colon U\to X$ l'injection canonique, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent de type fini, $\mathscr{G}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent. Alors le morphisme canonique*

$$\varinjlim_{n\geq 0} \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{J}^n\mathscr{F},\mathscr{G}) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_U}(\mathscr{F}|U,\mathscr{G}|U) \tag{1.8.33.1}$$

est injectif ; il est bijectif dans chacun des cas suivants :

(a) *X est quasi-compact, $\mathscr{J}$ est localement monogène, le noyau du morphisme d'adjonction $\mathscr{O}_X\to j_*(\mathscr{O}_U)$ est de type fini et $\mathscr{F}$ est X-plat.*

(b) *X admet un recouvrement fini (V_i) par des ouverts affines tels que pour tout i, si l'on pose $A_i=\Gamma(V_i,\mathscr{O}_X)$, $J_i=\Gamma(V_i,\mathscr{J})$ et $M_i=\Gamma(V_i,\mathscr{F})$, (A_i,J_i) vérifie* (Kr) *et que M_i soit cohérent.*

Montrons d'abord que le morphisme (1.8.33.1) est injectif. Soit $f\colon \mathscr{J}^n\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ un morphisme $\mathscr{O}_X$-linéaire tel que $f|U=0$; alors l'image $f(\mathscr{J}^n\mathscr{F})\subset\mathscr{G}$ est un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent de type fini, dont le support est contenu dans Y. En vertu de ([28] 6.8.4), il existe un entier $m>0$ tel que $\mathscr{J}^m f(\mathscr{J}^n\mathscr{F})=0$, autrement dit la restriction de f à $\mathscr{J}^{n+m}\mathscr{F}$ est nulle, donc aussi l'image de f dans $\varinjlim_{n\geq 0}\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{J}^n\mathscr{F},\mathscr{G})$.

Pour prouver que le morphisme (1.8.33.1) est surjectif sous l'une des conditions (a) ou (b), considérons d'abord le cas où $X=\operatorname{Spec}(A)$ est affine, de sorte que $\mathscr{J}=\widetilde{J}$, où J est un idéal de type fini de A, $\mathscr{F}=\widetilde{M}$, où M est un A-module de type fini et $\mathscr{G}=\widetilde{N}$, où N est un A-module.

Supposons que J soit principal engendré par t, que M soit A-plat et que le noyau du morphisme d'adjonction $\mathscr{O}_X\to j_*(\mathscr{O}_U)$ soit de type fini. Il faut montrer que le morphisme canonique

$$\varinjlim_{n\geq 0}\operatorname{Hom}_A(t^nM,N)\to\operatorname{Hom}_{A_t}(M_t,N_t) \tag{1.8.33.2}$$

est surjectif. On peut se réduire grâce aux isomorphismes canoniques $t^nM\simeq t^nA\otimes_A M$ et $\operatorname{Hom}_A(t^nA\otimes_A M,N)\simeq\operatorname{Hom}_A(t^nA,\operatorname{Hom}_A(M,N))$ au cas où $M=A$. Comme j est cohérent, $j_*(\mathscr{O}_U)$ est un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent ([28] 6.7.1). Il résulte alors des hypothèses que $A_{t\text{-tor}}$ est un idéal de type fini de A. Il existe donc un entier $\alpha\geq 0$ tel que $t^\alpha A_{t\text{-tor}}=0$. Soient $s\in N$, n un entier ≥ 0. La suite

$$0\longrightarrow A_{t\text{-tor}}\longrightarrow A\xrightarrow{\cdot t^{n+\alpha}} t^{n+\alpha}A\longrightarrow 0$$

est exacte. Le morphisme $A\to N$ qui à x associe $xt^\alpha s$, s'annule sur $A_{t\text{-tor}}$. Il induit donc un A-morphisme $\varphi\colon t^{n+\alpha}A\to N$ tel que $\varphi(t^{n+\alpha}x)=t^\alpha xs$ pour tout $x\in A$.

L'image canonique de φ dans $\mathrm{Hom}_{A_t}(A_t, N_t) = N_t$ est s/t^n ; d'où la surjectivité de (1.8.33.1) dans ce cas.

Supposons que (A, J) vérifie (Kr) et que M soit cohérent, et montrons que le morphisme (1.8.33.1) est surjectif. Soient $(g_i)_{1\leq i\leq m}$ un système de générateurs de J, $(s_j)_{1\leq j\leq n}$ un système de générateurs de M. Soit $f\colon \mathscr{F}|U \to \mathscr{G}|U$ un $\mathscr{O}_U$-morphisme, et considérons les sections $t_i = f(s_j|U)$ de $\mathscr{G}$ au-dessus de U. Par la preuve de ([28] 6.9.17), il existe un entier $h \geq 0$ tel que chacune des sections $g_i^h t_j$ se prolonge en une section u_{ij} de $\mathscr{G}$ au-dessus de X. Si J_1 est l'idéal de A engendré par les g_i^h, on a $J^{mh} \subset J_1 \subset J$, donc on peut désormais supposer $h = 1$.

Les éléments $g_i s_j$ engendrent le A-module JM et définissent donc un épimorphisme $p\colon A^{mn} \to JM$ tel que $p(e_{ij}) = g_i s_j$, où (e_{ij}) est la base canonique de A^{mn} ; soit $R = \ker(p)$ son noyau. Comme M est cohérent, R est un A-module de type fini. Soit d'autre part $q\colon A^{mn} \to N$ le A-morphisme tel que $q(e_{ij}) = u_{ij}$, et soit $S = \ker(q)$ son noyau. Par définition, on a $\widetilde{q}|U = f \circ (\widetilde{p}|U)$. Donc on a $\widetilde{R}|U \subset \widetilde{S}|U$. Cela s'exprime aussi en disant que le $\mathscr{O}_X$-module $\widetilde{R}/(\widetilde{R}\cap\widetilde{S})$ a son support dans $\mathrm{V}(J)$. Il existe donc un entier $\nu \geq 0$ tel que $J^\nu(\widetilde{R}/(\widetilde{R}\cap\widetilde{S})) = 0$ ([28] 6.8.4), autrement dit $J^\nu R \subset S$. Comme (A, J) vérifie (Kr), il existe $\mu \geq 0$ tel que $J^\mu A^{mn} \cap R \subset J^\nu R \subset S$. On en déduit un A-morphisme $\varphi\colon J^{1+\mu}M \to N$ tel que $\varphi \circ (p|J^\mu A^{mn}) = q|J^\mu A^{mn}$. En particulier, la restriction de $\widetilde{\varphi}\colon \mathscr{J}^{1+\mu}\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ à U est f ; d'où la surjectivité de (1.8.33.1) dans ce cas.

Montrons maintenant la surjectivité du morphisme (1.8.33.1) lorsque X est un schéma quelconque sous l'une des conditions (a) ou (b). Soit (V_i) un recouvrement fini de X par des ouverts affines tels que si l'on pose $A_i = \Gamma(V_i, \mathscr{O}_X)$, $J_i = \Gamma(V_i, \mathscr{J})$ et $M_i = \Gamma(V_i, \mathscr{F})$, l'une des deux conditions suivantes soit remplie :

(a′) Le noyau du morphisme d'adjonction $\mathscr{O}_X \to j_*(\mathscr{O}_U)$ est de type fini, $\mathscr{F}$ est X-plat et pour tout i, J_i est un idéal principal.

(b) (A_i, J_i) vérifie (Kr) et M_i est cohérent.

Pour tout couple (i, j), posons $V_{ij} = V_i \cap V_j$. On a alors un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_U(\mathscr{F},\mathscr{G}) \arrow[r] & \prod\limits_i \mathrm{Hom}_{U\cap V_i}(\mathscr{F},\mathscr{G}) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod\limits_{i,j} \mathrm{Hom}_{U\cap V_{ij}}(\mathscr{F},\mathscr{G}) \\
\varinjlim\limits_{n\geq 0} \mathrm{Hom}_X(\mathscr{J}^n\mathscr{F},\mathscr{G}) \arrow[r] \arrow[u] & \prod\limits_i \varinjlim\limits_{n\geq 0} \mathrm{Hom}_{V_i}(\mathscr{J}^n\mathscr{F},\mathscr{G}) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[u] & \prod\limits_{i,j} \varinjlim\limits_{n\geq 0} \mathrm{Hom}_{V_{ij}}(\mathscr{J}^n\mathscr{F},\mathscr{G}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

où l'on a écrit pour simplifier $\mathrm{Hom}_W(\mathscr{M},\mathscr{N})$ au lieu de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_W}(\mathscr{M}|W, \mathscr{N}|W)$ pour deux faisceaux $\mathscr{M}, \mathscr{N}$ et un ouvert W. En effet, la ligne inférieure est exacte car le foncteur $\varinjlim$ commute aux produits finis dans la catégorie des ensembles. Comme la flèche verticale centrale est bijective et que la flèche verticale de droite est injective d'après ce qui a été vu précédemment, la flèche verticale de gauche est bijective.

Corollaire 1.8.34. *Soient X un schéma, $\mathscr{J}$ un idéal quasi-cohérent de type fini de $\mathscr{O}_X$, Y le sous-schéma fermé de X défini par $\mathscr{J}$, U l'ouvert $X-Y$ de X, $j\colon U \to X$ l'injection canonique, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent. Alors le morphisme canonique*

$$\varinjlim_{n\geq} \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{J}^n, \mathscr{F}) \to \Gamma(U, \mathscr{F}) \tag{1.8.34.1}$$

est injectif; il est bijectif dans chacun des cas suivants :

(a) *X est quasi-compact, $\mathscr{J}$ est localement monogène et le noyau du morphisme d'adjonction $\mathscr{O}_X \to j_*(\mathscr{O}_U)$ est de type fini.*

(b) *X admet un recouvrement fini (V_i) par des ouverts affines tels que pour tout i, si l'on pose $A_i = \Gamma(V_i, \mathscr{O}_X)$ et $J_i = \Gamma(V_i, \mathscr{J})$, (A_i, J_i) vérifie* (Kr) *et que A_i soit cohérent.*

1.9 Anneaux valuatifs

Définition 1.9.1 ([19] 3.1.1). On dit qu'un anneau topologique A est *prévaluatif* si les conditions suivantes sont remplies :

(i) A est local.

(ii) La topologie de A est définie par un idéal de type fini.

(iii) Tout idéal ouvert de type fini de A est inversible.

On dit que A est *valuatif* s'il est prévaluatif et si en outre il est séparé et complet.

On notera que tout idéal de définition de type fini d'un anneau prévaluatif est principal, engendré par un élément non diviseur de zéro.

Exemple 1.9.2. Soient A un anneau de valuation, J un idéal non nul de type fini de A. Alors A muni de la topologie J-préadique est un anneau prévaluatif.

Proposition 1.9.3. *Soient A un anneau prévaluatif qui n'est pas un corps, J un idéal de définition de type fini de A, t un générateur de J. Pour que A soit séparé, il faut et il suffit que A_t soit un corps. Dans ces conditions, A est un anneau de valuation et J est contenu dans l'idéal maximal de A.*

Notons d'abord que $A \subset A_t$ car t est non diviseur de zéro dans A. Montrons que si A_t est un corps, A est séparé. Soient f un élément non nul de $\cap_m J^m$, $g \in A$, n un entier ≥ 0, tels que g/t^n soit l'inverse de f dans A_t. La relation $t^n = fg$ dans A, entraîne que $t^n \in t^m A$ pour tout $m \geq 0$. Donc t est inversible dans A et $A = A_t$ est un corps, ce qui est exclu. Par suite A est séparé.

Montrons que si A est séparé, A_t est un corps. Il suffit évidemment de montrer que tout élément non nul f de A est inversible dans A_t. Comme A est prévaluatif, il existe $g \in A$ non diviseur de zéro tel que $fA+tA = gA$. On peut alors considérer

t/g et f/g comme des éléments de A, et au moins l'un d'eux est inversible, car A est local. Si f/g est inversible alors $t \in fA$; donc f est inversible dans A_t. Si t/g est inversible alors $f \in tA$; on se ramène dans ce cas à montrer que $f/t \in A$ est inversible dans A_t. Or par hypothèse, il existe $n > 0$ tel que $f \notin t^n A$; on en déduit par une récurrence fini que f est inversible dans A_t.

Supposons toujours A séparé ; donc J est contenu dans l'idéal maximal de A. Montrons que les idéaux principaux de A sont totalement ordonnés par la relation d'inclusion ([12] chap. VI §1.2 théo. 1). Soient f, g deux éléments non nuls de A. On a vu que $f \in tA$ ou $t \in fA$; et de même pour g. Si $t \in fA$ ou $t \in gA$, alors $fA + gA$ est ouvert et on conclut comme plus haut que $f \in gA$ ou $g \in fA$. Sinon, f et g appartiennent à tA et on recommence avec f/t et g/t. Comme A est séparé, on en déduit par une récurrence fini que $f \in gA$ ou $g \in fA$.

Proposition 1.9.4 ([19] 3.3.1). *Soient A un anneau prévaluatif, J un idéal de définition de type fini de A, t un générateur de J. Supposons J contenu dans l'idéal maximal de A et posons $V = A/(\cap_n J^n)$. Alors :*

(i) *A_t est un anneau local.*

(ii) *V est un anneau de valuation, de corps des fractions le corps résiduel de A_t.*

(iii) *V est séparé pour de la topologie JV-préadique.*

Notons d'abord que $\mathrm{Spec}(A_t) \neq \emptyset$ car t n'est pas diviseur de zéro dans A. Soient $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A qui définit un point fermé de $\mathrm{Spec}(A_t)$, $\kappa(\mathfrak{p})$ le corps résiduel de $A_\mathfrak{p}$, $W = A/\mathfrak{p}$, $\overline{t}$ la classe de t dans W. Donc W est un anneau local intègre, de corps des fractions $\kappa(\mathfrak{p})$ et $\overline{t} \neq 0$. On munit W de la topologie JW-préadique. Tout idéal ouvert de W est l'image d'un idéal ouvert de A, donc monogène et même inversible puisqu'il contient une puissance de $\overline{t}$; par suite W est prévaluatif. D'autre part, $W \neq \kappa(\mathfrak{p})$ car $\mathfrak{p}$ n'est pas l'idéal maximal de A, et $W_{\overline{t}} = \kappa(\mathfrak{p})$. Dans ces conditions, il résulte de 1.9.3 que W est un anneau de valuation, séparé pour la topologie JW-préadique.

Montrons que A_t est un anneau local (et est donc isomorphe à $A_\mathfrak{p}$). Il suffit de montrer que tout $f \in A$, de classe non nulle $\overline{f}$ dans W, est inversible dans A_t. Comme W est un anneau de valuation, si $\overline{t}^n \notin \overline{f}W$ pour tout $n > 0$, alors $\overline{f} \in \cap_n \overline{t}^n W = 0$, ce qui est exclu. Il existe donc un entier $n > 0$ tel que $\overline{t}^n \in \overline{f}W$. Soit h un élément non diviseur de zéro de A tel que $fA + t^n A = hA$, et soit $g \in A$ tel que $f = hg$. On a alors $\overline{f}W = \overline{f}W + \overline{t}^n W = hW$. Comme $\overline{f} \neq 0$, g est inversible dans W, et donc aussi dans A ; d'où $t^n \in fA$. Par suite f est inversible dans A_t.

Montrons enfin que $W = V$, autrement dit que $\mathfrak{p} = \cap_n J^n$. Soient $f \in \mathfrak{p}$, n un entier > 0, h un élément non diviseur de zéro de A tels que $fA + t^n A = hA$, et soit $g \in A$ tel que $t^n = hg$. On a alors $\overline{t}^n W = hW$. Comme $\overline{t} \neq 0$, g est inversible dans W, et donc aussi dans A. D'où $f \in t^n A$ et $\mathfrak{p} \subset \cap_n J^n$. L'inclusion inverse découle du fait que W est séparé pour la topologie JW-préadique.

Lemme 1.9.5. *Soient A un anneau de valuation qui n'est pas un corps, J un idéal non nul de type fini de A. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La topologie J-préadique sur A est séparée.*

(ii) *Tout idéal non nul de A est ouvert pour la topologie J-préadique.*

Comme A n'est pas un corps, (ii) entraîne facilement (i). Montrons que (i) implique (ii). Soient t un élément non nul de A qui engendre J, f un élément non nul de A. Il existe $n > 0$ tel que $f \notin t^n A$, et donc $t^n \in fA$. Par suite, tout idéal non nul de A est ouvert pour la topologie J-préadique.

Remarque 1.9.6. Il existe sur tout anneau intègre une et une seule topologie linéaire, non discrète telle que tout idéal non nul soit ouvert, à savoir la topologie linéaire pour laquelle les idéaux non nuls forment un système fondamental d'idéaux ouverts ([13] Chap. III §1.2 prop. 1).

Proposition 1.9.7. *Soit A un anneau de valuation qui n'est pas un corps. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La topologie linéaire de A pour laquelle les idéaux non nuls forment un système fondamental d'idéaux ouverts* (1.9.6)*, est définie par un idéal de type fini J de A.*

(ii) *Il existe un idéal premier non nul $\mathfrak{p}$ de A, contenu dans tous les idéaux premiers non nuls de A.*

Dans ces conditions, pour qu'un idéal de type fini de A soit un idéal de définition de la topologie définie dans (i)*, il faut et il suffit qu'il soit engendré par un élément non nul de $\mathfrak{p}$.*

Notons d'abord qu'étant donnés deux idéaux $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ de A, on a $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ ou $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$. En effet, sinon il existerait $a \in \mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ et $b \in \mathfrak{b} - \mathfrak{a}$, ce qui est impossible car $a \in bA$ ou $b \in aA$.

Soient t un élément de l'idéal maximal de A, $\sqrt{tA}$ le radical de tA. Soient $a, b \in A$ tels que $ab \in \sqrt{tA}$. D'après ce qui précède, on peut supposer $\sqrt{aA} \subset \sqrt{bA}$; autrement dit, $a^n \in bA$ pour un entier $n > 0$; d'où $a \in \sqrt{tA}$. Par suite $\sqrt{tA}$ est un idéal premier de A.

Supposons la condition (i) remplie. Comme la topologie J-préadique de A est séparée (1.9.5) et non discrète, J est engendré par un élément non nul t de l'idéal maximal de A. D'autre part, tout idéal non nul de A contient une puissance de t ; donc $\sqrt{tA}$ est un idéal premier, contenu dans tout idéal premier non nul de A, d'où (ii).

Supposons la condition (ii) remplie. Soit t un élément non nul de $\mathfrak{p}$. Pour tout élément non nul a de A, on a $\sqrt{tA} = \mathfrak{p} \subset \sqrt{aA}$. Par suite, tout idéal non nul de A est ouvert pour la topologie tA-préadique. Il résulte de 1.9.6 que la topologie définie dans (i) est la topologie tA-préadique.

On a démontré la dernière assertion de la proposition.

Corollaire 1.9.8. *Pour un anneau topologique A, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est un anneau prévaluatif séparé.*

(ii) *A est un anneau de valuation, ayant un idéal premier non nul* $\mathfrak{p}$ *contenu dans tous les idéaux premiers non nuls, muni de la topologie linéaire pour laquelle les idéaux non nuls forment un système fondamental d'idéaux ouverts.*

Dans ces conditions, pour qu'un idéal de type fini de A *soit un idéal de définition, il faut et il suffit qu'il soit engendré par un élément non nul de* $\mathfrak{p}$.

On notera que chacune des conditions entraîne que A n'est pas un corps. Le corollaire résulte donc de 1.9.3, 1.9.5, 1.9.6 et 1.9.7.

Définition 1.9.9. On appelle *hauteur* d'un anneau valuatif sa hauteur en tant qu'anneau de valuation (1.9.8). Si cette hauteur est finie égale à n, on dit que l'anneau est *n-valuatif.*

Corollaire 1.9.10. *Pour un anneau topologique* A*, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est un anneau* 1*-valuatif.*

(ii) *A est un anneau de valuation de hauteur* 1*, muni de la topologie linéaire pour laquelle les idéaux non nuls forment un système fondamental d'idéaux ouverts, et il est complet et séparé.*

Dans ces conditions, pour qu'un idéal de type fini de A *soit un idéal de définition, il faut et il suffit qu'il soit engendré par un élément non nul de l'idéal maximal de* A.

Lemme 1.9.11. *Soient* A *un anneau prévaluatif séparé,* J *un idéal de définition de type fini de* A*,* $A_0 = A/J$*. Alors* $\mathrm{Ass}(A_0) = \mathrm{Spec}(A_0)$.

Notons $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A. Compte tenu de 1.9.8, ([12] chap. IV §1 exerc. 17(d) et chap. VI §4.1 prop. 1), il suffit de montrer que $\mathfrak{m}/J \in \mathrm{Ass}(A_0)$. Soient $x \in \mathfrak{m} - J$, t un générateur de J. Comme $x \notin J$, il existe $y \in A$ tel que $t = xy$; de plus, $y \notin J$ (sinon x serait inversible dans A). Par suite, la classe de x modulo J est un diviseur de zéro de A_0. On en déduit que $\mathfrak{m}/J$ est la réunion des idéaux premiers dans $\mathrm{Ass}(A_0)$ ([12] chap. IV §1 exerc. 17(b)). Comme $\mathrm{Spec}(A)$ est totalement ordonné par inclusion, on conclut que $\mathfrak{m}/J \in \mathrm{Ass}(A_0)$.

Lemme 1.9.12. *Soient* R *un anneau valuatif,* t *un élément non nul de* R *tel que* tR *soit un idéal de définition de* R*,* M *un* R*-module. Pour que* M *soit* R*-plat, il faut et il suffit que* t *ne soit pas diviseur de zéro dans* M.

On sait que M est R-plat si et seulement si M est sans-torsion, *i.e.*, tout élément non nul de R n'est pas diviseur de zéro dans M ([12] chap. VI §3.6 lem. 1). Comme R est séparé, pour tout élément non nul f de R, il existe un entier $n > 0$ tel que $f \notin t^n R$. Donc $t^n \in fR$, et le lemme s'ensuit.

Proposition 1.9.13. *Soient* R *un anneau valuatif,* t *un élément non nul de* R *tel que* tR *soit un idéal de définition de* R*,* A *une* R*-algèbre. Supposons que pour tout* A*-module de type fini* M*, tout sous-module* N *de* M *tel que* M/N *soit* R*-plat, est de type fini sur* A*. Alors* (A, tA) *vérifie* (AR) (1.8.25).

Soient M un A-module de type fini, N un sous-module de M,

$$N_{\mathrm{sat}} = \{x \in M |\ t^n x \in N \text{ pour un entier } n \geq 1\}$$

la saturation de N dans M. On a alors $(t^n M) \cap N_{\mathrm{sat}} = t^n N_{\mathrm{sat}}$ pour tout $n \geq 0$. Comme t n'est pas diviseur de zéro dans M/N_{sat}, M/N_{sat} est R-plat (1.9.12). Par suite, N_{sat} est un A-module de type fini. Il existe alors un entier $n_0 \geq 0$ tel que $t^{n_0} N_{\mathrm{sat}} \subset N$. Pour tout $n \geq n_0$, on a

$$(t^n M) \cap N = ((t^n M) \cap N_{\mathrm{sat}}) \cap N = (t^n N_{\mathrm{sat}}) \cap N = t^n N_{\mathrm{sat}},$$

d'où la conclusion.

Proposition 1.9.14. *Soient R un anneau valuatif de hauteur finie, A une R-algèbre topologiquement de type fini, M un A-module de type fini, N un sous-module de M tel que M/N soit R-plat. Alors N est de type fini sur A.*

On peut se borner au cas où $A = R\langle \xi_1, \ldots, \xi_r \rangle$. Si $u \colon A^j \to M$ est un morphisme A-linéaire surjectif, $A^j/u^{-1}(N) \simeq M/N$; on peut donc supposer M libre de type fini. Soient J un idéal de définition de type fini de R, $R_0 = R/J$, $A_0 = A \otimes_R R_0$, $M_0 = M \otimes_R R_0$, $N_0 = N \otimes_R R_0$. Par hypothèse, $A_0 = R_0[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ et $(M/N) \otimes_R R_0$ est un A_0-module de type fini, R_0-plat. Donc en vertu de 1.5.16, $(M/N) \otimes_R R_0$ est de présentation finie sur A_0. Comme la suite $0 \to N_0 \to M_0 \to (M/N) \otimes_R R_0 \to 0$ est exacte, N_0 est de type fini sur A_0. D'autre part, N est séparé pour la topologie JA-adique, en tant que sous-module de $M = A^j$. Donc N est de type fini sur A (1.8.5).

Remarque 1.9.15. La condition que R est de hauteur finie dans 1.9.14 ne sert qu'à garantir que $\mathrm{Ass}(R_0)$ est fini (1.9.11).

Corollaire 1.9.16. *Soient R un anneau valuatif de hauteur finie, A une R-algèbre topologiquement de type fini qui est plate sur R. Alors A est topologiquement de présentation finie sur R.*

Corollaire 1.9.17. *Soient R un anneau valuatif de hauteur finie, A une R-algèbre topologiquement de type fini, S une partie multiplicative de A, M un $(S^{-1}A)$-module de type fini, N un sous-$(S^{-1}A)$-module de M tel que M/N soit R-plat. Alors N est un $(S^{-1}A)$-module de type fini.*

Soit P un sous-A-module de type fini de M tel que $M = S^{-1}P$. Posons $Q = N \cap P$ dans M, qui est un sous-A-module de P tel que $N = S^{-1}Q$. Comme P/Q est un sous-A-module de M/N, il est R-plat (1.9.12). Donc en vertu de 1.9.14, Q est un A-module de type fini, d'où la conclusion.

Corollaire 1.9.18. *Soient R un anneau valuatif de hauteur finie, t un élément non nul de R tel que tR soit un idéal de définition de R, A une R-algèbre topologiquement de type fini, S une partie multiplicative de A, M un $(S^{-1}A)$-module de type fini. Alors,*

(i) $(S^{-1}A, tS^{-1}A)$ *vérifie* (AR) *; en particulier,* (A, tA) *vérifie* (AR).

(ii) *L'anneau* A_t *est noethérien.*

(iii) M_{tor} *est un* $(S^{-1}A)$*-module de type fini et* M/M_{tor} *est un* $(S^{-1}A)$*-module cohérent.*

(i) Cela résulte de 1.9.13 et 1.9.17.

(ii) Soient $\mathfrak{a}$ un idéal de A_t, $\mathfrak{b}$ le noyau de l'homomorphisme canonique $A \to A_t/\mathfrak{a}$; donc $\mathfrak{b}_t = \mathfrak{a}$. Comme $A/\mathfrak{b}$ est R-plat (1.9.12), $\mathfrak{b}$ est un A-module de type fini (1.9.14), ce qui démontre l'assertion.

(iii) Tout sous-$(S^{-1}A)$-module de M/M_{tor} est R-plat (1.9.12). Donc en vertu de 1.9.17, M_{tor} est un $(S^{-1}A)$-module de type fini. De même, le noyau de tout homomorphisme $S^{-1}A^n \to M/M_{\text{tor}}$ est de type fini ; donc M/M_{tor} est un $(S^{-1}A)$-module cohérent.

1.10 Anneaux idylliques

Définition 1.10.1. On dit qu'un anneau adique est *idyllique* s'il est noethérien ou s'il est topologiquement de présentation finie sur un anneau 1-valuatif (1.9.9).

On peut préciser la terminologie comme suit :

1.10.1.1. On dit qu'un anneau adique est *quasi-idyllique* s'il est noethérien ou s'il est topologiquement de type fini sur un anneau 1-valuatif. On notera que cette notion faible est secondaire.

1.10.1.2. On pourrait être tenté d'élargir la notion d'anneaux idylliques pour inclure les anneaux topologiquement de présentation finie sur un anneau valuatif de hauteur finie. Nous nous en sommes abstenus car d'une part, cela nous obligerait à nous éloigner du point de vue de M. Raynaud que nous avons adopté pour ce traité, et d'autre part, nous aurions dû sacrifier de nombreux résultats (par exemple ceux relatifs à la notion de rig-platitude) dont l'énoncé ou la démonstration nécessitent d'introduire la notion de point rigide (3.3.1), et donc celle d'ordre 1-valuatif (1.11.1). Par ailleurs, le cadre fixé ci-dessus est largement suffisant pour les applications que nous avons en vue, et inclut la géométrie rigide de Tate.

Proposition 1.10.2. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, M un A-module de type fini. Alors :*

(i) (A, J) *vérifie* (Kr), *et le schéma* $\operatorname{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$ *est noethérien.*

(ii) *M est complet et séparé pour la topologie J-adique.*

(iii) *M_{tor} est de type fini et M/M_{tor} est cohérent.*

(iv) *Tout idéal premier de A qui n'est pas ouvert est de type fini.*

Les assertions (i)–(iii) résultent de 1.8.25.4, 1.9.18 et 1.8.29. Pour (iv), on peut se borner au cas où A est topologiquement de type fini sur un anneau 1-valuatif R : si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A qui n'est pas ouvert, alors $A/\mathfrak{p}$ est R-plat (1.9.12), et $\mathfrak{p}$ est de type fini sur A en vertu de 1.9.14.

Proposition 1.10.3. *Soit A un anneau idyllique. Alors :*

(i) *A est cohérent.*

(ii) *Tout idéal de type fini de A est cohérent ; en particulier, tout idéal premier de A qui n'est pas ouvert est cohérent.*

(iii) *Si M est un A-module cohérent, alors M_{tor} est cohérent.*

Tout sous-module de type fini d'un module cohérent est cohérent. Donc compte tenu de 1.10.2, il suffit de montrer (i). On peut clairement supposer $A = R\langle\xi_1, \dots, \xi_n\rangle/\mathfrak{I}$, où R est un anneau 1-valuatif et $\mathfrak{I}$ est un idéal de type fini de $R\langle\xi_1, \dots, \xi_n\rangle$. D'après 1.10.2(iii), $R\langle\xi_1, \dots, \xi_n\rangle$ est un anneau cohérent. Par suite $\mathfrak{I}$ est un idéal cohérent. Donc A est un anneau cohérent (1.3.6).

Proposition 1.10.4. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre topologique ; posons $A_n = A/J^{n+1}$ et $B_n = B \otimes_A A_n$ ($n \geq 0$). Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *B est une A-algèbre adique, et B_n est une A_n-algèbre de présentation finie pour tout $n \geq 0$.*

(ii) *B est topologiquement de présentation finie sur A.*

Notons d'abord que la condition (i) est équivalente à la même condition pour tout autre choix de l'idéal de définition J de A. On peut donc supposer J de type fini sur A. Compte tenu de 1.8.23, il suffit de montrer que (i) entraîne (ii). En vertu de 1.8.19, B est une A-algèbre topologiquement de type fini. On peut donc se borner au cas où A est topologiquement de type fini sur un anneau 1-valuatif R et J est engendré par un élément non nul de l'idéal maximal de R. Soit $\varphi\colon A\langle\xi_1, \dots, \xi_r\rangle \to B$ un homomorphisme continu, strict et surjectif de A-algèbres, et soit $\mathfrak{I}$ son noyau. Pour tout $n \geq 0$, on a une suite exacte

$$0 \to \mathfrak{I}/(\mathfrak{I} \cap J^{n+1}A\langle\xi_1, \dots, \xi_r\rangle) \to A_n[\xi_1, \dots, \xi_r] \to B_n \to 0$$

qui montre que $\mathfrak{I}/(\mathfrak{I} \cap J^{n+1}A\langle\xi_1, \dots, \xi_r\rangle)$ est de type fini sur $A_n[\xi_1, \dots, \xi_r]$ ([28] 6.2.7). Comme $A\langle\xi_1, \dots, \xi_r\rangle$ est topologiquement de type fini sur R (1.8.21), il existe un entier $n \geq 0$ tel que $\mathfrak{I} \cap J^{n+1}A\langle\xi_1, \dots, \xi_r\rangle \subset J\mathfrak{I}$, en vertu de 1.9.18(i). Donc $\mathfrak{I}/J\mathfrak{I}$ est de type fini sur $A_0[\xi_1, \dots, \xi_r]$. Comme $\mathfrak{I}$ est séparé pour la topologie J-adique (en tant que sous-module de $A\langle\xi_1, \dots, \xi_r\rangle$), il est de type sur $A\langle\xi_1, \dots, \xi_r\rangle$ (1.8.5), et l'assertion est démontrée.

Corollaire 1.10.5. *Soient A un anneau quasi-idyllique, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie, $\varphi\colon A\langle\xi_1, \dots, \xi_n\rangle \to B$ un homomorphisme surjectif de A-algèbres. Alors φ est continu et strict, et son noyau est de type fini sur $A\langle\xi_1, \dots, \xi_n\rangle$.*

En effet, φ est continu et strict en vertu de 1.8.18.2 et 1.8.23, et $\ker(\varphi)$ est de type fini d'après la démonstration de 1.10.4.

Corollaire 1.10.6. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre de présentation finie. Alors $\widehat{B} = \varprojlim(B/J^{n+1}B)$ est topologiquement de présentation finie sur A.*

En effet, on peut supposer J de type fini sur A, et la conclusion résulte de 1.8.7 et 1.10.4.

Corollaire 1.10.7. *Soient A un anneau quasi-idyllique, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie, C une B-algèbre topologiquement de présentation finie. Alors C est topologiquement de présentation finie sur A.*

Corollaire 1.10.8. *Une algèbre topologiquement de présentation finie sur un anneau idyllique est un anneau idyllique.*

Corollaire 1.10.9. *Soient A un anneau adique, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie, A' une A-algèbre topologique. Supposons A' un anneau quasi-idyllique. Alors $B\widehat{\otimes}_A A'$ est topologiquement de présentation finie sur A'.*

Cela résulte de 1.8.8 et 1.10.4.

Remarque 1.10.10. Soient A un anneau adique, $\mathfrak{I}$ un idéal de l'algèbre des séries formelles restreintes $A\langle\xi_1, \dots, \xi_n\rangle$, B la A-algèbre topologique quotient $A\langle\xi_1, \dots, \xi_n\rangle/\mathfrak{I}$, A' une A-algèbre topologique. Supposons A' quasi-idyllique. Alors on a un isomorphisme canonique de A'-algèbres topologiques

$$B\widehat{\otimes}_A A' \simeq A'\langle\xi_1, \dots, \xi_n\rangle/\mathfrak{I}A'\langle\xi_1, \dots, \xi_n\rangle. \tag{1.10.10.1}$$

En effet, $B\widehat{\otimes}_A A'$ est canoniquement isomorphe à $B\widehat{\otimes}_{A\langle\xi_1,\dots,\xi_n\rangle} A'\langle\xi_1, \dots, \xi_n\rangle$, c'est à dire au séparé complété de l'algèbre

$$B \otimes_{A\langle\xi_1,\dots,\xi_n\rangle} A'\langle\xi_1, \dots, \xi_n\rangle = A'\langle\xi_1, \dots, \xi_n\rangle/\mathfrak{I}A'\langle\xi_1, \dots, \xi_n\rangle$$

pour la topologie déduite de celle de A' ; notre assertion résulte alors de 1.10.2(ii).

L'isomorphisme (1.10.10.1) fournit une seconde preuve de 1.10.9.

Proposition 1.10.11. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de type fini de A, M un A-module, $A_n = A/J^{n+1}$ $(n \geq 0)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *M est un A-module de présentation finie.*

(ii) *M est isomorphe à la limite projective d'une suite (M_n) de A_n-modules de présentation finie tels que $M_m = M_n \otimes_{A_n} A_m$ pour $m \leq n$. Le système projectif (M_n) est alors isomorphe au système des $M \otimes_A A_n$.*

De plus, lorsque A est idyllique, elles sont équivalentes aux conditions suivantes :

(i′) *M est un A-module cohérent.*

(ii′) *M est isomorphe à la limite projective d'une suite (M_n) de A_n-modules cohérents tels que $M_m = M_n \otimes_{A_n} A_m$ pour $m \leq n$. Le système projectif (M_n) est alors isomorphe au système des $M \otimes_A A_n$.*

Si M est un A-module de présentation finie, $M_n = M \otimes_A A_n$ est un A_n-module de présentation finie, et $M_m = M_n \otimes_{A_n} A_m$ pour $m \leq n$. Comme M est complet et séparé pour la topologie J-adique (1.10.2), M est limite projective du système projectif (M_n), ce qui prouve que (i) entraîne (ii). Montrons l'implication inverse. Il résulte aussitôt de la définition des A_n que le système projectif (M_n) vérifie les conditions de ([12] chap. III §2.11 prop. 14 et cor. 1) ; sa limite projective M est par suite un A-module de type fini tel que $M_n = M \otimes_A A_n$ pour tout n. Soient L un A-module libre de type fini, $u \colon L \to M$ un homomorphisme surjectif de noyau N. Pour tout $n \geq 0$, on a une suite exacte de A-modules

$$0 \to N/(N \cap J^{n+1}L) \to L \otimes_A A_n \to M_n \to 0.$$

Comme M_n est un A_n-module de présentation finie, $N/(N \cap J^{n+1}L)$ est un A_n-module de type fini. D'après 1.10.2(i), il existe un entier n tel que $N \cap J^{n+1}L \subset JN$. Par suite N/JN est un A_0-module de type fini. Comme N est séparé pour la topologie J-adique (en tant que sous-module de L), il est de type fini sur A (1.8.5) ; donc (ii) entraîne (i).

La dernière assertion de la proposition résulte de 1.3.6, 1.3.10 et 1.10.3.

Proposition 1.10.12. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, S une partie multiplicative de A, $A\{S^{-1}\}$ le séparé complété de $S^{-1}A$ pour la topologie $(S^{-1}J)$-préadique* (1.8.9)*, M un $(S^{-1}A)$-module de type fini, $\widehat{M}$ son séparé complété pour la topologie $(S^{-1}J)$-préadique. Alors :*

(i) *$(S^{-1}A, S^{-1}J)$ vérifie* (Kr)*.*

(ii) *M_{tor} est un $(S^{-1}A)$-module de type fini et M/M_{tor} est un $(S^{-1}A)$-module cohérent.*

(iii) *Le morphisme canonique $M \otimes_{S^{-1}A} A\{S^{-1}\} \to \widehat{M}$ est bijectif.*

Les propositions (i) et (ii) résultent de 1.8.25.4 et 1.9.18. Pour un $(S^{-1}A)$-module de présentation finie M, la proposition (iii) résulte de (i) et 1.8.26(ii). Montrons (iii) dans le cas général. Compte tenu de (i) et 1.8.26(i), on a un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd} & M_{\mathrm{tor}} \otimes_{S^{-1}A} A\{S^{-1}\} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & M \otimes_{S^{-1}A} A\{S^{-1}\} \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & (M/M_{\mathrm{tor}}) \otimes_{S^{-1}A} A\{S^{-1}\} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & (M_{\mathrm{tor}})^{\wedge} \arrow[r] & \widehat{M} \arrow[r] & (M/M_{\mathrm{tor}})^{\wedge} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

D'après (ii), M/M_{tor} est un $(S^{-1}A)$-module de présentation finie et $J^n M_{\mathrm{tor}} = 0$ pour un entier $n \geq 1$. On en déduit que α et γ sont des isomorphismes. Donc β est un isomorphisme.

Corollaire 1.10.13. *Soient A un anneau quasi-idyllique, S une partie multiplicative de A, M un A-module de type fini. Alors avec les notations de* (1.8.12)*, l'homomorphisme canonique $M \otimes_A A_{\{S\}} \to M_{\{S\}}$ est bijectif.*

En effet, pour tout $f \in S$, le morphisme canonique $M \otimes_B B_{\{f\}} \to M_{\{f\}}$ est bijectif, d'après 1.10.12(iii). Le corollaire s'en déduit par passage à la limite inductive.

1.11 Ordres 1-valuatifs

Définition 1.11.1. On dit qu'un anneau idyllique est un *ordre* 1-*valuatif* s'il est rig-pur (1.8.30.1), local, intègre et de dimension 1.

On peut faire les remarques suivantes :

1.11.1.1. Un anneau préadique intègre est rig-pur si et seulement si sa topologie n'est pas discrète.

1.11.1.2. Un anneau 1-valuatif est un ordre 1-valuatif. La terminologie sera justifiée ultérieurement (1.11.4).

1.11.1.3. Soient A un ordre 1-valuatif, J un idéal de définition de A, $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A. Comme $J \subset \mathfrak{m}$ et $J \neq 0$, A/J est un anneau de Jacobson ([12] chap. V §3.4 déf. 1) de nilradical $\mathfrak{m}/J$ ([12] chap. V §3.4 prop. 3). Par suite, tout élément de $\mathfrak{m}$ est topologiquement nilpotent, et A est un anneau hensélien, en vertu du lemme de Hensel ([12] chap. III §4.3 théo. 1 et [31] 18.5.13).

Proposition 1.11.2. *Soient A un anneau idyllique, B une A-algèbre topologique, locale, intègre et de dimension* 1. *Supposons qu'il existe un idéal de définition de type fini J de A tel que A/J soit un anneau de Jacobson. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *B est une A-algèbre adique* (1.8.4.5) *et un A-module cohérent.*

(ii) *B est topologiquement de présentation finie sur A.*

(iii) *B est topologiquement de type fini sur A.*

Dans ces conditions, B est un anneau idyllique rig-pur (*i.e., un ordre* 1-*valuatif*).

En vertu de 1.10.4 et ([28] 6.2.10), (i) implique (ii). Il est clair que (ii) implique (iii). Montrons que (iii) entraîne (i) et le fait que B soit rig-pur ; on notera que (ii) implique que B est idyllique (1.10.8). En vertu de 1.8.19, B est une A-algèbre adique, et B/JB est une (A/J)-algèbre de type fini. Si $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de B, on a évidemment $JB \subset \mathfrak{m}$. On en déduit que B/JB est un anneau de Jacobson, $B/\mathfrak{m}$ est une (A/J)-algèbre finie, et $\mathfrak{m}/JB$ est le nilradical de B/JB ([12] chap. V §3.4 théo. 3 et prop. 3). Par suite, B/JB est une (A/J)-algèbre entière, et donc finie. Par conséquent B est une A-algèbre finie (1.8.5). Comme B est intègre et $JB \neq 0$ (sinon $\mathfrak{m}$ serait le nilradical de B, ce qui est impossible), B est rig-pur. Reste à montrer que B est un A-module cohérent. On peut évidemment se borner au cas où A est topologiquement de présentation finie sur un anneau 1-valuatif R. Comme B est topologiquement de type fini sur R (1.8.21) et R-plat (1.9.12), il est topologiquement de présentation finie sur R (1.9.16). On en déduit que B est topologiquement de présentation finie sur A, en vertu de 1.10.4 et ([28]

6.2.6(v)). Par suite, compte tenu de ([28] 6.2.10), B/J^nB est un (A/J^n)-module de présentation finie pour tout $n \geq 1$. Donc B est un A-module cohérent, en vertu de 1.10.11.

Remarque 1.11.3. Soient R un ordre 1-valuatif, I un idéal de définition de type fini de R, A une R-algèbre topologiquement de type fini. Alors A/IA est un anneau de Jacobson ([12] chap. V §3.4 théo. 3).

Proposition 1.11.4. *Soient A un ordre 1-valuatif, L le corps des fractions de A, $\overline{A}$ la clôture intégrale de A dans L. Alors $\overline{A}$ muni de la topologie déduite de celle de A est un anneau 1-valuatif. Si A est noethérien, $\overline{A}$ est un anneau de valuation discrète complet et fini sur A.*

Supposons d'abord A noethérien et montrons la seconde proposition. Il résulte de 1.11.1.3 que l'idéal maximal de A est un idéal de définition. Donc $\overline{A}$ est fini sur A ([31] 7.7.4). On en déduit que $\overline{A}$ est un anneau noethérien, local (1.11.1.3), intègre, intégralement clos et de dimension 1. Par suite, $\overline{A}$ est un anneau de valuation discrète complet (pour la topologie canonique qui coïncide avec la topologie déduite de celle de A).

Montrons ensuite la première proposition. On peut se borner au cas où A est topologiquement de présentation finie sur un anneau 1-valuatif R. En vertu de 1.11.2, A est une R-algèbre finie et plate ; donc L est une extension algébrique finie du corps des fractions K de R. Il existe un anneau de valuation S pour L tel que $S \cap K = R$ ([12] chap. VI §1.2 théo. 2). Il est de hauteur 1 ([12] chap. VI §8.1 prop. 1 et cor. 1). Il est unique et L est complet pour la valuation associée à S ([12] chap. VI §8.2 prop. 2 et cor. 1). Donc S est la clôture intégrale de R dans L ([12] chap. VI §1.3 théo. 3), ce qui implique que $S = \overline{A}$.

Proposition 1.11.5. *Soient A un ordre 1-valuatif, B une A-algèbre topologiquement de type fini, qui est un ordre 1-valuatif. Alors :*

(i) *B est une A-algèbre topologiquement de présentation finie, et un A-module cohérent.*
(ii) *L'homomorphisme canonique $A \to B$ est injectif.*

La proposition (i) résulte de 1.11.1.3 et 1.11.2, et implique facilement (ii).

Proposition 1.11.6. *Soient A un ordre 1-valuatif, B un anneau intègre contenant A et fini sur A. Alors B muni de la topologie déduite de celle de A, est une A-algèbre topologiquement de présentation finie, et un ordre 1-valuatif.*

Il est clair que B est un anneau local (1.11.1.3), de dimension 1, complet et séparé pour la topologie déduite de celle de A (1.10.2), topologiquement de type fini sur A (1.8.19) et rig-pur. Si A est noethérien, il en est de même de B. Si A est topologiquement de présentation finie sur un anneau 1-valuatif R, il en est de même de B (1.9.16). Donc B est un ordre 1-valuatif. Enfin, B est topologiquement de présentation finie sur A en vertu de 1.11.5.

Corollaire 1.11.7. *Soient A un ordre 1-valuatif, B, C deux A-algèbres topologiquement de type fini, qui sont des ordres 1-valuatifs. Alors l'algèbre $B \otimes_A C$ munie de la topologie du produit tensoriel, est complète et séparée, et elle admet un homomorphisme continu, strict et surjectif dans un ordre 1-valuatif.*

Cela résulte de 1.11.5, 1.10.2 et 1.11.6.

Proposition 1.11.8. *Soient A un anneau idyllique, J un idéal de définition de A, $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A, $X = \mathrm{Spec}(A)$, X_{g} l'ouvert $X - \mathrm{V}(J)$ de X. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\mathfrak{p}$ est un idéal cohérent, et la A-algèbre topologique quotient $A/\mathfrak{p}$ est un ordre 1-valuatif.*

(ii) *$J \not\subset \mathfrak{p}$ et $\dim(A/\mathfrak{p}) = 1$.*

(iii) *$\mathfrak{p}$ détermine un point fermé de X_{g}.*

D'abord (i) entraîne (ii) : comme $A/\mathfrak{p}$ est rig-pur, $(J + \mathfrak{p})/\mathfrak{p} = J(A/\mathfrak{p}) \neq 0$. Ensuite (ii) entraîne (iii) : comme J est contenu dans le radical de A ([12] chap. III §2.13 lem. 3), l'ouvert X_{g} ne contient aucun point fermé de X. Montrons que (iii) entraîne (i). Supposons en premier lieu que A soit topologiquement de présentation finie sur un anneau 1-valuatif R. On sait que $A/\mathfrak{p}$ est R-plat (1.9.12), $\mathfrak{p}$ est cohérent (1.10.3), et $A/\mathfrak{p}$ est complet et séparé pour la topologie J-adique (1.10.2). On en déduit que $A/\mathfrak{p}$ est topologiquement de présentation finie sur A, et donc idyllique (1.10.8) et rig-pur. Reste à montrer que $A/\mathfrak{p}$ est un anneau local de dimension 1. Pour ce faire, on peut se borner au cas où $A = R\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$. Soient K le corps des fractions de R, L le corps résiduel de X en $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A contenant $\mathfrak{p}$, κ une clôture algébrique de $A/\mathfrak{m}$. Comme J est contenu dans le radical de A, $\mathfrak{m}$ est au-dessus de l'idéal maximal de R et $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$. Appliquons ([12] chap. VI §1.2 théo. 2) au sous-anneau $A/\mathfrak{p}$ de L et à l'homomorphisme naturel $h\colon A/\mathfrak{p} \to \kappa$. Il existe alors un anneau de valuation S pour L et un homomorphisme $h'\colon S \to \kappa$ tels que S contienne $A/\mathfrak{p}$, que h' prolonge h et que $h'^{-1}(0) = \mathfrak{m}_S$ soit l'idéal maximal de S. Il résulte aussitôt que $K \cap S$ est un anneau de valuation pour K ([12] chap. VI §1.4 exem. 2) qui domine R ; donc $R = K \cap S$. En vertu de ([7] 6.1.2/3), L est une extension finie de K. Raisonnant comme dans le preuve de 1.11.4, on conclut que S est entier sur R, et donc sur $A/\mathfrak{p}$. Par suite, $A/\mathfrak{p}$ est un anneau local de dimension 1, ce qui achève la preuve dans ce cas.

Supposons en second lieu que A soit noethérien. Alors $A/\mathfrak{p}$ est complet et séparé pour la topologie J-adique, intègre et rig-pur. Reste à montrer que $A/\mathfrak{p}$ est un anneau local de dimension 1. Soit L le corps résiduel de X en $\mathfrak{p}$. Il existe $g \in J$ tel que $\mathfrak{p}$ soit un point fermé de $D(g)$; on a donc un homomorphisme surjectif $u\colon A[g^{-1}] \to L$. Comme $(A/\mathfrak{p})[g^{-1}] = L$, $A/\mathfrak{p}$ est un anneau semi-local de dimension ≤ 1 ([31] 0.16.3.3). Mais comme J est contenu dans le radical de A, $A/\mathfrak{p}$ est intègre sans être un corps ; donc $\dim(A/\mathfrak{p}) = 1$. Il en résulte aussi que $\dim(A/(J + \mathfrak{p})) = 0$ et la topologie J-adique de $A/\mathfrak{p}$ coïncide avec la topologie définie par son radical. Par suite, $A/\mathfrak{p}$ est un anneau local ([12] chap. III §2.13 cor. de prop. 19).

Proposition 1.11.9. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A ; alors* $\mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$ *est un schéma noethérien de Jacobson.*

Si A est topologiquement de type fini sur un anneau 1-valuatif, la conclusion résulte de 1.10.2 et ([7] 6.1.1/3). Supposons A noethérien, et considérons un système de générateurs $(g_i)_{1\leq i\leq r}$ de J. Comme J est contenu dans le radical de A ([12] chap. III §2.13 lem. 3), A_{g_i} est un anneau de Jacobson en vertu de ([31] 10.5.8). Par suite, $\mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J) = \cup D(g_i)$ est un schéma de Jacobson ([28] 6.4.2).

Proposition 1.11.10. *Soient A un anneau adique, noethérien et rig-pur, J un idéal de définition de A, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(A)$, $X_{\mathfrak{g}}$ l'ouvert $X - \mathrm{V}(J)$ de X, x un point fermé de X. Alors, quitte à remplacer $\mathfrak{X}$ par un ouvert formel affine contenant x, il existe un point fermé y de $X_{\mathfrak{g}}$ tel que x appartienne à l'adhérence de y dans X.*

Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A correspondant à x ; alors $J \subset \mathfrak{m}$ car J est contenu dans le radical de A ([12] chap. III §2.13 lem. 3).

Si $\mathrm{V}(J) = \{x\}$, A est local. Comme $X_{\mathfrak{g}}$ est quasi-compact et non vide (1.8.30.2), il contient des points fermés ([28] 0.2.1.2), et tout point fermé convient.

Supposons $\mathrm{V}(J) \neq \{x\}$ et posons $r = \dim((A/J)_{\mathfrak{m}})$. En vertu de ([31] 0.16.3.1) appliqué à l'idéal $\mathfrak{m}/J$ de A/J, il existe r éléments f_i de A $(1 \leq i \leq r)$ tels que, si on note I l'idéal de A engendré par les f_i, alors $\mathfrak{m}$ est minimal dans l'ensemble des idéaux premiers contenant $I + J$; autrement dit, $\{x\}$ est une composante connexe de $\mathrm{V}(I + J)$. Quitte à remplacer $\mathfrak{X}$ par un ouvert formel affine contenant x, on peut supposer que $\mathrm{V}(I+J) = \{x\}$ ([12] chap. III §3.4 théo. 3(iii)) ; en particulier, $r = \dim((A/J)_{\mathfrak{m}})$ ne change pas. Montrons qu'on a

$$r = \dim((A/J)_{\mathfrak{m}}) < \dim(A_{\mathfrak{m}}).$$

En effet, les idéaux premiers associés de $A_{\mathfrak{m}}$ sont en bijection avec les idéaux premiers associés de A contenus dans $\mathfrak{m}$ ([12] chap. IV §1.2 prop. 5) ; donc d'après 1.8.30.2, $\mathrm{V}(JA_{\mathfrak{m}})$ ne contient aucun idéal premier associé de $A_{\mathfrak{m}}$, ce qui entraîne notre assertion ([12] chap. IV §1.4 théo. 2). D'où, compte tenu de ([31] 0.16.3.7),

$$\dim(A_{\mathfrak{m}}/IA_{\mathfrak{m}}) \geq \dim(A_{\mathfrak{m}}) - r > 0.$$

On en déduit que $\mathrm{V}(I) \neq \{x\}$, et donc $\mathrm{V}(I) \not\subset \mathrm{V}(J)$ (sinon on aurait $\mathrm{V}(I) = \mathrm{V}(I+J) = \{x\}$, ce qui n'est pas possible). Par suite, $\mathrm{V}(I)$ contient un point fermé y de $X_{\mathfrak{g}}$ ([28] 0.2.1.2). Si z est un point fermé de l'adhérence de y dans X, alors $z \in \mathrm{V}(J + I)$; d'où $z = x$, ce qui achève la preuve.

1.12 Compléments sur la platitude

L'énoncé suivant est essentiellement contenu dans ([12] chap. III §5.2 théo. 1) :

Proposition 1.12.1. *Soient A un anneau, J un idéal de A, $A_n = A/J^{n+1}$ $(n \geq 0)$, M un A-module. Supposons que, pour tout idéal de type fini $\mathfrak{a}$ de A, les conditions suivantes soient remplies :*

(a) *La topologie J-préadique de $\mathfrak{a}$ est induite par la topologie J-préadique de A.*

(b) *$\mathfrak{a} \otimes_A M$ est séparé pour la topologie J-préadique.*

Alors, pour que M soit plat sur A, il faut et il suffit que $M \otimes_A A_n$ soit plat sur A_n pour tout $n \geq 0$. Si, de plus, J est contenu dans le radical de A, alors M est fidèlement plat sur A si et seulement si $M \otimes_A A_n$ est fidèlement plat sur A_n pour tout $n \geq 0$.

Pour la première assertion, il suffit de reprendre la partie ([12] chap. III §5.3 E) de la preuve de ([12] chap. III §5.2 théo. 1). Montrons la second assertion. Si M est fidèlement plat sur A, $M \otimes_A A_n$ est fidèlement plat sur A_n en vertu de ([12] chap. I §3.3 prop. 5). Inversement, supposons que $M \otimes_A A_n$ soit fidèlement plat sur A_n pour tout $n \geq 0$. On en déduit déjà que M est plat sur A. Soit N un A-module de type fini tel que $M \otimes_A N = 0$. Tensorisant avec A_0, on obtient que $(M/JM) \otimes_{A_0} (NJN) = 0$. D'où $N/JN = 0$, ce qui implique que $N = 0$ car J est contenu dans le radical de A.

1.12.2. Soient A un anneau, J un idéal de A, B une A-algèbre, M un B-module. On peut faire les remarques suivantes concernant les hypothèses de 1.12.1 :

(i) La condition (a) est remplie si (A, J) vérifie (Kr).

(ii) La condition (b) est remplie si M est un B-module de type fini et si la topologie J-préadique de B admet un idéal de définition K contenu dans le radical de B, tel que (B, K) vérifie (AR). En effet, $\mathfrak{a} \otimes_A M = (\mathfrak{a} \otimes_A B) \otimes_B M$ est un B-module de type fini, et les topologies J-préadique et K-préadique coïncident ; donc $\mathfrak{a} \otimes_A M$ est séparé pour la topologie J-préadique, en vertu de 1.8.28.

Proposition 1.12.3. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, $A_n = A/J^{n+1}$ $(n \geq 0)$, B une A-algèbre, M un B-module de type fini. Supposons que l'une des conditions suivantes soit remplie :*

(a) *B est un anneau noethérien et JB est contenu dans le radical de B.*

(b) *B muni de la topologie JB-préadique est topologiquement de type fini sur un anneau 1-valuatif.*

Alors, pour que M soit plat (resp. fidèlement plat) sur A, il faut et il suffit que $M \otimes_A A_n$ soit plat (resp. fidèlement plat) sur A_n pour tout $n \geq 0$.

Cela résulte de 1.12.1, 1.12.2, 1.9.18 et 1.10.2.

Corollaire 1.12.4. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, $A_n = A/J^{n+1}$ $(n \geq 0)$, B une A-algèbre adique qui est un anneau quasi-idyllique, M un B-module de type fini. Pour que M soit plat (resp. fidèlement plat) sur A, il faut et il suffit que $M \otimes_A A_n$ soit plat (resp. fidèlement plat) sur A_n pour tout $n \geq 0$.*

Corollaire 1.12.5. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de type fini de A, M un A-module de type fini, $A_n = A/J^{n+1}$ $(n \geq 0)$. Alors, pour que M soit un A-module projectif, il faut et il suffit que $M \otimes_A A_n$ soit un A_n-module projectif pour tout $n \geq 0$.*

Il n'y a que la suffisance de la condition à démontrer. Comme tout module projectif de type fini est de présentation finie, il résulte de 1.10.2 et 1.10.11 que M est un A-module de présentation finie. D'autre part, M est A-plat en vertu de 1.12.4. Donc M est un A-module projectif d'après ([12] chap. II §5.2 cor. 2 du théo. 1).

Proposition 1.12.6. *Soient A un anneau quasi-idyllique, S une partie multiplicative de A, $A\{S^{-1}\}$ et $A_{\{S\}}$ les anneaux définis dans* (1.8.9) *et* (1.8.12)*. Alors $A_{\{S\}}$ est A-plat et $A\{S^{-1}\}$ est $A_{\{S\}}$-plat ; en particulier, $A\{S^{-1}\}$ est A-plat.*

Il résulte de 1.8.26(i) et 1.10.12 que pour tout idéal de type fini $\mathfrak{a}$ de $S^{-1}A$, le morphisme canonique $\mathfrak{a} \otimes_{S^{-1}A} A\{S^{-1}\} \to \mathfrak{a}A\{S^{-1}\}$ est injectif, et donc bijectif. Par suite, $A\{S^{-1}\}$ est $(S^{-1}A)$-plat ([12] chap. I §2.3 rem. 1). En particulier, $A_{\{f\}}$ est A-plat, pour tout $f \in S$. On en déduit, par passage à la limite inductive, que $A_{\{S\}}$ est A-plat. D'autre part, comme $A_{\{f\}}$ est quasi-idyllique et $A\{S^{-1}\} \simeq (A_{\{f\}})\{S^{-1}\}$, alors $A\{S^{-1}\}$ est $A_{\{f\}}$-plat. Par suite, $A\{S^{-1}\}$ est $A_{\{S\}}$-plat ([12] chap. I §2.7 prop. 9).

Corollaire 1.12.7. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, $\mathfrak{p}$ un idéal premier ouvert de A, $S = A - \mathfrak{p}$. Alors, $A_{\{S\}}$ est fidèlement plat sur $A_{\mathfrak{p}}$ et $A\{S^{-1}\}$ est fidèlement plat sur $A_{\{S\}}$; en particulier, $A_{\{S\}}$ est séparé pour la topologie J-adique.*

Cela résulte de 1.8.13 et 1.12.6.

Proposition 1.12.8. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, $A_n = A/J^{n+1}$ $(n \geq 0)$, B une A-algèbre adique qui est un anneau quasi-idyllique, $\varphi\colon A \to B$ l'homomorphisme canonique, $\mathfrak{q}$ un idéal premier ouvert de B, $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$, $T = B - \mathfrak{q}$, $S = A - \mathfrak{p}$, M un B-module de type fini. Alors avec les notations de* (1.8.9) *et* (1.8.12)*, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *$M_{\{T\}}$ est $A_{\{S\}}$-plat.*
(ii) *$M_{\{T\}}$ est A-plat.*
(iii) *$M\{T^{-1}\}$ est A-plat.*
(iv) *$M_{\mathfrak{q}}$ est A-plat.*
(v) *$M_{\mathfrak{q}} \otimes_A A_n$ est A_n-plat pour tout $n \geq 0$.*

D'abord, (i) entraîne (ii) en vertu de 1.12.7. Ensuite, $M\{T^{-1}\} \simeq M_{\mathfrak{q}} \otimes_{B_{\mathfrak{q}}} B\{T^{-1}\}$ (1.10.12) et $M_{\{T\}} \simeq M_{\mathfrak{q}} \otimes_{B_{\mathfrak{q}}} B_{\{T\}}$ (1.10.13) ; donc compte tenu de 1.12.7, les conditions (ii), (iii) et (iv) sont équivalentes ([12] chap. I §3.2 prop. 4). D'autre part, les conditions (iv) et (v) sont équivalentes en vertu de 1.12.1, 1.12.2, 1.10.2 et 1.9.18(i). Enfin (v) entraîne (i) : comme (ii) est équivalent à (v), $M_{\{T\}}$ est $A_{\{f\}}$-plat, pour tout $f \in S$; d'où l'implication recherchée ([12] chap. I §2.7 prop. 9).

Lemme 1.12.9. *Soient A un anneau, t un élément non diviseur de zéro de A, M un A-module. Pour que M soit A-plat, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies :*

(i) *t n'est pas diviseur de zéro dans M.*
(ii) *M_t est A_t-plat.*
(iii) *M/tM est (A/tA)-plat.*

Il n'y a évidemment que la suffisance des conditions à prouver. Il faut montrer que pour tout A-module N, $\mathrm{Tor}_i^A(M,N)=0$ pour tout entier $i\geq 1$. Supposons d'abord que $N=N_{(t)\text{-tor}}$. On a $N_{(t)\text{-tor}}=\cup_{n\geq 1}N_n$, où N_n est le noyau de l'homothétie $x\mapsto t^n x$ de N. Comme les foncteurs $\mathrm{Tor}_i^A(M,-)$ commutent aux limites inductives filtrantes ([30] 6.3.6), on peut se réduire au cas où $N=N_n$ pour un entier $n\geq 1$. Considérant la filtration $(t^iN)_{0\leq i\leq n}$ de N, on peut se réduire encore au cas où $tN=0$. Comme t est non diviseur de zéro dans A et dans M, on a $M\otimes^L_A(A/tA)\simeq M/tM$. Par suite, on a

$$M\otimes^L_A N\simeq M\otimes^L_A(A/tA)\otimes^L_{A/tA}N\simeq (M/tM)\otimes^L_{A/tA}N,$$

et $\mathrm{Tor}_i^A(M,N)=0$ pour tout $i\geq 1$. Supposons ensuite que $N_{(t)\text{-tor}}=0$. On a alors une suite exacte de A-modules $0\to N\to N_t\to C\to 0$ où $C=C_{(t)\text{-tor}}$, d'où l'on déduit pour tout $i\geq 1$,

$$\mathrm{Tor}_i^A(M,N)\simeq \mathrm{Tor}_i^A(M,N_t)\simeq \mathrm{Tor}_i^{A_t}(M_t,N_t)=0.$$

Enfin, le cas général se déduit des deux cas précédents grâce à la suite exacte

$$0\to N_{(t)\text{-tor}}\to N\to N/N_{(t)\text{-tor}}\to 0.$$

Lemme 1.12.10. *Soient R un ordre 1-valuatif, s (resp. η) le point fermé (resp. générique) de $\mathrm{Spec}(R)$, $f\colon X\to \mathrm{Spec}(R)$ un morphisme séparé, plat et localement de type fini, tel que le sous-espace X_s soit non vide, fini et discret, et que le sous-espace X_η soit réduit à un point. Alors f est fini.*

En vertu de 1.11.1.3 et ([31] 18.5.11), X se décompose en somme de deux sous-schémas X_1 et X_2, induits sur des ouverts disjoints de X, tels que la restriction de f à X_1 soit un morphisme fini et que la fibre fermée de X_2 soit vide. Comme X_1 est non vide, fini et plat sur $\mathrm{Spec}(R)$, sa fibre générique est aussi non vide. Donc la fibre générique de X_2 est vide, ce qui implique que $X=X_1$.

Proposition 1.12.11. *Soient R un anneau 1-valuatif, t un élément non nul de l'idéal maximal de R, A une R-algèbre topologiquement de présentation finie, B une A-algèbre de présentation finie, $\widehat{B}$ le séparé complété de B pour la topologie (t)-adique ; notons $u\colon A\to B$ et $\varphi\colon B\to \widehat{B}$ les homomorphismes canoniques. Soient $\mathfrak{q}$ un idéal maximal de $\widehat{B}_t$, $\mathfrak{p}=\varphi_t^{-1}(\mathfrak{q})$, $\mathfrak{m}=u_t^{-1}(\mathfrak{p})$. Pour tout entier $n\geq 1$, notons $\mathfrak{q}^{(n)}$ (resp. $\mathfrak{p}^{(n)}$, resp. $\mathfrak{m}^{(n)}$) le noyau de l'homomorphisme canonique $\widehat{B}\to \widehat{B}_t/\mathfrak{q}^n$ (resp. $B\to B_t/\mathfrak{p}^n$, resp. $A\to A_t/\mathfrak{m}^n$). Alors :*

(i) $\mathfrak{p}$ (*resp.* $\mathfrak{m}$) *est un idéal maximal de* B_t (*resp.* A_t).

(ii) *Pour tout* $n \geq 1$, *le morphisme canonique* $f_n \colon \mathrm{Spec}(B/\mathfrak{p}^{(n)}) \to \mathrm{Spec}(R)$ *est fini.*

(iii) *Pour tout* $n \geq 1$, *l'homomorphisme* $\psi_n \colon B_t/\mathfrak{p}^n \to \widehat{B}_t/\mathfrak{q}^n$ *déduit de* φ_t *est un isomorphisme.*

(iv) *L'homomorphisme canonique* $B_{\mathfrak{p}^{(1)}} \to \widehat{B}_{\mathfrak{q}^{(1)}}$ *induit un isomorphisme entre les séparés complétés de ces anneaux locaux pour les topologies définies par leurs idéaux maximaux respectifs.*

(v) $\widehat{B}_t$ *est* B_t*-plat.*

On notera que tR est un idéal de définition de R (1.9.10), $K = R_t$ est le corps des fractions de R (1.9.3), $\widehat{B}$ est topologiquement de présentation finie sur A (1.10.6), et donc idyllique (1.10.8).

(i) En vertu de 1.11.8, $\mathfrak{q}^{(1)}$ est un $\widehat{B}$-module cohérent et $\widehat{B}/\mathfrak{q}^{(1)}$ est un ordre 1-valuatif. Donc d'après 1.11.5, $\widehat{B}/\mathfrak{q}^{(1)}$ est un R-module cohérent, et son corps des fractions est une extension finie de K. Comme $A/\mathfrak{m}^{(1)} \subset B/\mathfrak{p}^{(1)} \subset \widehat{B}/\mathfrak{q}^{(1)}$, $(A/\mathfrak{m}^{(1)}) \otimes_R K$ et $(B/\mathfrak{p}^{(1)}) \otimes_R K$ sont des extensions finies de K, d'où la proposition.

(ii) Il suffit de montrer que f_n vérifie les hypothèses de (1.12.10). Il est clair que f_n est séparé et plat, et l'espace sous-jacent à sa fibre générique est un point. La fibre fermée du morphisme $\mathrm{Spec}(\widehat{B}/\mathfrak{q}^{(1)}) \to \mathrm{Spec}(R)$ est non vide. Il en est alors de même de f_1 et par suite de f_n. D'après (i) et 1.11.8, $\mathfrak{m}^{(1)}$ est un A-module cohérent et $A/\mathfrak{m}^{(1)}$ est un ordre 1-valuatif. Par suite, $A/\mathfrak{m}^{(1)}$ est une R-algèbre finie (1.11.5) ; donc $A/(\mathfrak{m}^{(1)})^n$ et son quotient $A/\mathfrak{m}^{(n)}$ sont des R-algèbres finies. On conclut que f_n est un morphisme de type fini. Reste à montrer que l'espace sous-jacent à la fibre fermée de f_n est fini et discret. Il suffit de montrer qu'il n'a qu'un nombre fini de points fermés ([28] 6.5.4). On se réduit immédiatement au cas $n = 1$ car $(\mathfrak{p}^{(1)})^n \subset \mathfrak{p}^{(n)}$. D'une part, l'homomorphisme $B/\mathfrak{p}^{(1)} \to \widehat{B}/\mathfrak{q}^{(1)}$ est injectif et fini car $\widehat{B}/\mathfrak{q}^{(1)}$ est une R-algèbre finie. D'autre part, $\widehat{B}/\mathfrak{q}^{(1)}$ est un anneau local car c'est un ordre 1-valuatif. On en déduit que la fibre fermée de f_1 n'a qu'un nombre fini de points fermés ([12] chap. V §2.1 prop. 1 et théo. 1).

(iii) Compte tenu de (ii), $B/\mathfrak{p}^{(n)}$ est complet et séparé pour la topologie (t)-adique (1.10.2). Donc la projection $B \to B/\mathfrak{p}^{(n)}$ induit un homomorphisme $\widehat{B} \to B/\mathfrak{p}^{(n)}$. On obtient un homomorphisme canonique $\rho_n \colon \widehat{B}_t \to B_t/\mathfrak{p}^n$ qui rend commutatif le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} B_t \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_t"'] & B_t/\mathfrak{p}^n \arrow[r, "\psi_n"] & \widehat{B}_t/\mathfrak{q}^n \\ \widehat{B}_t \arrow[ur, "\rho_n"] \arrow[urr] & & \end{tikzcd}$$

où les flèches non libellées sont les projections canoniques. Il résulte aussitôt que ψ_n et ρ_n sont surjectifs. Pour achever la preuve de (iii), il suffit de voir que $\rho_n(\mathfrak{q}^n) = 0$.

Comme les $(\rho_n)_{n\geq 1}$ forment un système projectif, on se réduit à voir que $\rho_1(\mathfrak{q}) = 0$, ce qui est évident car ψ_1 est injectif par définition.

(iv) Cela résulte de (iii) car $B_{\mathfrak{p}^{(1)}} = (B_t)_{\mathfrak{p}}$ et $\widehat{B}_{\mathfrak{q}^{(1)}} = (\widehat{B}_t)_{\mathfrak{q}}$.

(v) Comme B_t et $\widehat{B}_t$ sont noethériens (1.9.18), il résulte de (iv) que $(\widehat{B}_t)_{\mathfrak{q}}$ est $(B_t)_{\mathfrak{p}}$-plat ([12] chap. III §5.4 prop. 4). La proposition s'ensuit aussitôt ([12] chap. II §3.4 prop. 15).

Le corollaire suivant, dû à Gabber, sera renforcé dans 1.12.17.

Corollaire 1.12.12. *Sous les hypothèses de* (1.12.11)*, si B est R-plat, alors $\widehat{B}$ est B-plat et $\widehat{B} \times B_t$ est fidèlement plat sur B.*

Comme $\widehat{B}$ est R-plat (1.12.4), la première assertion résulte aussitôt de 1.12.9 et 1.12.11(v). Posons $S = 1 + tB$. Comme $t\widehat{B}$ est contenu dans le radical de $\widehat{B}$ ([12] chap. III §2.13 lem. 3), $\widehat{B}$ est une $B[S^{-1}]$-algèbre plate. D'autre part, $B[S^{-1}]/tB[S^{-1}] \simeq B/tB \simeq \widehat{B}/t\widehat{B}$ et $tB[S^{-1}]$ est contenu dans le radical de $B[S^{-1}]$; donc $\widehat{B}$ est fidèlement plat sur $B[S^{-1}]$. Pour conclure la preuve, il suffit d'observer que $B[S^{-1}] \times B_t$ est fidèlement plat sur B.

Proposition 1.12.13. *Soient R un anneau* 1*-valuatif, t un élément non nul de l'idéal maximal de R, A une R-algèbre topologiquement de type fini, B une A-algèbre de type fini, M un B-module de type fini, N un sous-B-module de M tel que M/N soit R-plat. Alors N est de type fini sur B.*

On peut se borner au cas où $A = R\langle\xi_1, \dots, \xi_n\rangle$ et $B = A[X_1, \dots, X_m]$. Soit $\widehat{B}$ le séparé complété de B pour la topologie (t)-préadique, qui est clairement idyllique. Par descente fidèlement plate ([12] chap. I §3.6 prop. 11), compte tenu de 1.12.12, il suffit de montrer que $N \otimes_B \widehat{B}$ est un $\widehat{B}$-module de type fini, et $N \otimes_B B_t$ est un B_t-module de type fini. D'après 1.12.12, la suite

$$0 \to N \otimes_B \widehat{B} \to M \otimes_B \widehat{B} \to (M/N) \otimes_B \widehat{B} \to 0$$

est exacte et $(M/N) \otimes_B \widehat{B}$ est R-plat. Il résulte alors de 1.9.14 que $N \otimes_B \widehat{B}$ est de type fini sur $\widehat{B}$. La seconde assertion est évidente puisque A_t et B_t sont noethériens (1.9.18).

Corollaire 1.12.14. *Soient R un anneau* 1*-valuatif, t un élément non nul de l'idéal maximal de R, A une R-algèbre topologiquement de type fini, B une A-algèbre de type fini, M un B-module de type fini. Alors,*

(i) (B, tB) *vérifie* (AR).

(ii) $B/B_{(t)\text{-tor}}$ *est une A-algèbre de présentation finie.*

(iii) $M_{(t)\text{-tor}}$ *est un B-module de type fini et $M/M_{(t)\text{-tor}}$ est un B-module cohérent.*

Cela résulte de 1.12.13 et 1.9.13.

Corollaire 1.12.15. *Un anneau idyllique est universellement cohérent* (1.4.1).

On peut évidemment se borner au cas d'un anneau A topologiquement de présentation finie sur un anneau 1-valuatif R, et même au cas où $A = R\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$ (1.4.2). Il résulte alors de 1.12.14(iii) que les anneaux $A[X_1, \dots, X_m]$ sont cohérents ($m \geq 0$).

Proposition 1.12.16. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre de type fini, M un B-module de type fini. On note $\widehat{B}$ (resp. $\widehat{M}$) le séparé complété de B (resp. M) pour la topologie J-préadique. Alors :*

(i) *(B, JB) vérifie* (Kr).

(ii) *$B/B_{J\text{-tor}}$ est une A-algèbre de présentation finie.*

(iii) *$M_{J\text{-tor}}$ est un B-module de type fini et $M/M_{J\text{-tor}}$ est un B-module cohérent.*

(iv) *Le morphisme canonique $M \otimes_B \widehat{B} \to \widehat{M}$ est un isomorphisme.*

Les propositions (i)–(iii) résultent de 1.8.25.4 et 1.12.14. Pour un B-module de présentation finie M, la proposition (iv) résulte de (i) et 1.8.26(ii). Montrons (iv) dans le cas général. Compte tenu de (i) et 1.8.26(i), on a un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
& M_{J\text{-tor}} \otimes_B \widehat{B} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & M \otimes_B \widehat{B} \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & (M/M_{J\text{-tor}}) \otimes_B \widehat{B} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & (M_{J\text{-tor}})^{\wedge} \arrow[r] & \widehat{M} \arrow[r] & (M/M_{J\text{-tor}})^{\wedge} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

En vertu de (iii), $M/M_{J\text{-tor}}$ est un B-module de présentation finie et $J^n M_{J\text{-tor}} = 0$ pour un entier $n \geq 1$. On en déduit que α et γ sont des isomorphismes. Donc β est un isomorphisme.

Théorème 1.12.17 (Gabber). *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre de type fini, $\widehat{B}$ le séparé complété de B pour la topologie J-préadique. Alors $\widehat{B}$ est B-plat.*

Compte tenu de ([12] chap. III §3.4 théo. 3), on peut se borner au cas où A est topologiquement de type fini sur un anneau 1-valuatif R, et on peut même supposer $A = R\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$. Grâce à 1.12.16(iv), on se réduit au cas où $B = A[X_1, \dots, X_m]$. Le théorème résulte alors de 1.12.12.

Proposition 1.12.18. *Soient A un anneau idyllique, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre de présentation finie, $\widehat{B}$ le séparé complété de B pour la topologie J-préadique ; notons $u \colon A \to B$ et $\varphi \colon B \to \widehat{B}$ les homomorphismes canoniques. Soient $\mathfrak{q}$ un idéal premier de $\widehat{B}$, $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$, $\mathfrak{m} = u^{-1}(\mathfrak{p})$. Supposons $\mathfrak{q}$ fermé dans* $\operatorname{Spec}(\widehat{B}) - \mathrm{V}(J\widehat{B})$ *et $\mathfrak{m}$ fermé dans* $\operatorname{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$. *Alors l'homomorphisme canonique $B_{\mathfrak{p}} \to \widehat{B}_{\mathfrak{q}}$ induit un isomorphisme entre les séparés complétés de ces anneaux locaux pour les topologies définies par leurs idéaux maximaux respectifs.*

Rappelons d'abord que $\widehat{B}$ est topologiquement de présentation finie sur A (1.10.6), et donc idyllique (1.10.8). Compte tenu de 1.12.11(iv), on peut se borner au cas où A est noethérien, ce qui entraîne que B et $\widehat{B}$ sont noethériens. Il suffit de montrer que pour tout $n \geq 1$, l'homomorphisme canonique $\varphi_n \colon B/\mathfrak{p}^n \to \widehat{B}/\mathfrak{q}^n$ est bijectif. On sait que $A/\mathfrak{m}$ et $\widehat{B}/\mathfrak{q}$ sont des ordres 1-valuatifs (1.11.8), et $\widehat{B}/\mathfrak{q}$ est un $(A/\mathfrak{m})$-module de type fini (1.11.5). Comme $B/\mathfrak{p} \subset \widehat{B}/\mathfrak{q}$, $B/\mathfrak{p}$ est un A-module de type fini. Par suite $B/\mathfrak{p}^n$ est un A-module de type fini, et il est complet et séparé pour la topologie J-adique. Par conséquent, la projection $B \to B/\mathfrak{p}^n$ induit un homomorphisme $\rho_n \colon \widehat{B} \to B/\mathfrak{p}^n$ qui s'insère dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & B/\mathfrak{p}^n \arrow[r, "\varphi_n"] & \widehat{B}/\mathfrak{q}^n \\ \widehat{B} \arrow[ur, "\rho_n"] \arrow[urr] & & \end{tikzcd}$$

où les flèches non libellées sont les projections canoniques. Il résulte aussitôt que φ_n et ρ_n sont surjectifs. Il suffit de montrer que $\rho_n(\mathfrak{q}^n) = 0$. Comme les $(\rho_n)_{n \geq 1}$ forment un système projectif, on se réduit à voir que $\rho_1(\mathfrak{q}) = 0$, ce qui est évident car φ_1 est injectif par définition.

Corollaire 1.12.19. *Les hypothèses étant celles de* (1.12.18)*, de plus soient C une $\widehat{B}$-algèbre topologiquement de type fini, $\mathfrak{r}$ un idéal premier de C au-dessus de $\mathfrak{q}$, M un C-module de type fini. Pour que $M_{\mathfrak{r}}$ soit $\widehat{B}$-plat, il faut et il suffit qu'il soit B-plat.*

On sait que $\widehat{B}$ est B-plat (1.12.17). Donc si $M_{\mathfrak{r}}$ est $\widehat{B}$-plat, il est B-plat. Inversement, les anneaux $B_{\mathfrak{p}}$, $\widehat{B}_{\mathfrak{q}}$ et $C_{\mathfrak{r}}$ sont noethériens (1.10.2) et l'homomorphisme $B_{\mathfrak{p}} \to \widehat{B}_{\mathfrak{q}}$ induit un isomorphisme sur les séparés complétés (1.12.18). Donc si $M_{\mathfrak{r}}$ est $B_{\mathfrak{p}}$-plat, il est $\widehat{B}_{\mathfrak{q}}$-plat ([12] chap. III §5.4 prop. 4).

Corollaire 1.12.20. *Soient R un ordre* 1*-valuatif, I un idéal de définition de R, K le corps des fractions de R, A une R-algèbre topologiquement de présentation finie, B une A-algèbre de présentation finie, $\widehat{B}$ le séparé complété de B pour la topologie I-préadique ; notons $u \colon A \to B$ et $\varphi \colon B \to \widehat{B}$ les homomorphismes canoniques. Soient $\mathfrak{q}$ un idéal premier de $\widehat{B}$ définissant un point fermé de* $\mathrm{Spec}(\widehat{B} \otimes_R K)$*, $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$, $\mathfrak{m} = u^{-1}(\mathfrak{p})$. Alors :*

(i) $\mathfrak{p}$ (*resp.* $\mathfrak{m}$) *détermine un point fermé de* $\mathrm{Spec}(B \otimes_R K)$ (*resp.* $\mathrm{Spec}(A \otimes_R K)$).

(ii) *L'homomorphisme canonique $B_{\mathfrak{p}} \to \widehat{B}_{\mathfrak{q}}$ induit un isomorphisme entre les séparés complétés de ces anneaux locaux pour les topologies définies par leurs idéaux maximaux respectifs.*

(iii) *On a* $\dim(B_{\mathfrak{p}}) = \dim(\widehat{B}_{\mathfrak{q}})$.

(iv) *On a* $\dim(\widehat{B} \otimes_R K) \leq \dim(B \otimes_R K)$ *et les deux membres sont égaux si $B \otimes_R K$ est biéquidimentionnel* ([31] 0.16.1.4).

On notera que $\widehat{B}$ est topologiquement de présentation finie sur A (1.10.6), et donc idyllique (1.10.8).

(i) On sait que $\widehat{B}/\mathfrak{q}$ est un ordre 1-valuatif (1.11.8) ; il est donc fini sur R et son corps des fractions est une extension finie de K (1.11.5). Comme $A/\mathfrak{m} \subset B/\mathfrak{p} \subset \widehat{B}/\mathfrak{q}$, $(A/\mathfrak{m}) \otimes_R K$ et $(B/\mathfrak{p}) \otimes_R K$ sont des extensions finies de K, d'où l'assertion.

(ii) Cela résulte de (i) et 1.12.18.

(iii) Cela résulte de (ii) et ([31] 0.16.2.4) car les anneaux $B_\mathfrak{p}$ et $\widehat{B}_\mathfrak{q}$ sont noethériens (1.10.2).

(iv) Cela résulte aussitôt de (i) et (iii).

Définition 1.12.21. Soient S un schéma, T un sous-schéma fermé de S. On dit que la paire (S,T) est *quasi-idyllique* si elle vérifie l'une des conditions suivantes :

(a) S est localement noethérien.
(b) S est localement de type fini sur un anneau quasi-idyllique A, et T est défini par un idéal de $\mathscr{O}_S$ de la forme $J\mathscr{O}_S$, où J est un idéal de définition de type fini de A.

Proposition 1.12.22. *Soient S un schéma, T un sous-schéma fermé de S, U l'ouvert $S - T$ de S, $f\colon X \to S$ un morphisme localement de type fini. Supposons la paire (S,T) quasi-idyllique et l'ouvert $f^{-1}(U)$ schématiquement dense dans X. Alors f est localement de présentation finie.*

On peut évidemment se borner au cas où $S = \mathrm{Spec}(A)$, A étant un anneau quasi-idyllique, et T est le sous-schéma fermé de S défini par un idéal de définition de type fini J de A ([28] 6.2.6(v)). La proposition résulte alors de 1.8.30.2 et 1.12.16(ii).

Proposition 1.12.23. *Soient S un schéma cohérent, T un sous-schéma fermé de S, U l'ouvert $S - T$ de S, V un U-schéma séparé de type fini. Supposons la paire (S,T) quasi-idyllique. Alors il existe un morphisme propre de présentation finie $f\colon X \to S$ et une immersion ouverte schématiquement dominante $\iota\colon V \to X$ au-dessus de S.*

Par le théorème de plongement de Nagata ([16], [14] 4.1), il existe un morphisme propre $f\colon X \to S$ et une immersion ouverte $\iota\colon V \to X$ au-dessus de S, qui est nécessairement quasi-compacte ([28] 6.1.10). Quitte à remplacer X par l'adhérence schématique de V dans X (qui existe en vertu de [28] 6.10.6), on peut supposer ι schématiquement dominante. Par suite, $f^{-1}(U)$ est schématiquement dense dans X. Donc f est de présentation finie en vertu de 1.12.22.

Corollaire 1.12.24. *Soient S un schéma cohérent, T un sous-schéma fermé de S, U l'ouvert $S - T$ de S, V un U-schéma propre. Supposons la paire (S,T) quasi-idyllique. Alors il existe un S-schéma propre de présentation finie X tel que X_U soit U-isomorphe à V.*

En effet, en vertu de 1.12.23, il existe un morphisme propre de présentation finie $f\colon X \to S$ et une immersion ouverte schématiquement dominante $\iota\colon V \to X$

au-dessus de S. Donc l'immersion $\iota_U \colon V \to X_U$ est schématiquement dominante. Or il résulte des hypothèses que ι_U est propre. Par suite, ι_U est un isomorphisme.

1.13 Rappels et compléments sur la platification par éclatements

Définition 1.13.1. Soient S un schéma, T un sous-schéma fermé défini par un idéal quasi-cohérent $\mathscr{I}$ de $\mathscr{O}_S$, $\mathscr{M}$ un $\mathscr{O}_S$-module quasi-cohérent.

(i) On appelle *éclatement* de T (ou de $\mathscr{I}$) dans S le spectre homogène de la $\mathscr{O}_S$-algèbre graduée $\oplus_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{I}^n$ (cf. [29] 8.1.3).

(ii) Notons $f \colon S' \to S$ l'éclatement de T dans S. On appelle *transformé strict* de $\mathscr{M}$ par f le quotient de $f^*(\mathscr{M})$ par le sous-module formé des sections à support dans $f^{-1}(T)$.

On peut faire les remarques suivantes :

1.13.1.1. Il est bien connu que S' est un objet final de la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Sch}_{/S}$ formée des S-schémas X tels que $\mathscr{I}\mathscr{O}_X$ soit un idéal inversible de $\mathscr{O}_X$.

En particulier, si U est l'ouvert $S - T$ de S, f induit un isomorphisme au-dessus de U.

1.13.1.2. À partir de maintenant on ne considère que des éclatements d'idéaux de type fini. Si $\mathscr{I}$ est de type fini, f est un morphisme projectif et $\mathscr{I}\mathscr{O}_{S'}$ est un $\mathscr{O}_{S'}$-module très ample pour f.

1.13.1.3. Comme $\mathscr{I}\mathscr{O}_{S'}$ est un idéal inversible de $\mathscr{O}_{S'}$, $U' = f^{-1}(U)$ est un ouvert schématiquement dense dans S'.

1.13.1.4. Soit $\mathscr{J}$ un idéal quasi-cohérent de type fini de $\mathscr{O}_S$; notons $g \colon S'' \to S'$ l'éclatement de $\mathscr{J}\mathscr{O}_{S'}$ dans S'. On voit à l'aide de 1.13.1.1 que $f\circ g$ est l'éclatement de $\mathscr{I}\mathscr{J}$ dans S.

1.13.1.5. Soient X un S-schéma, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent, X' l'éclatement de $\mathscr{I}\mathscr{O}_X$ dans X. On voit à l'aide de 1.13.1.1 que X' est X-isomorphe à l'adhérence schématique de $X \times_S U'$ dans $X \times_S S'$. Par suite, le transformé strict de $\mathscr{F}$ par l'éclatement $X' \to X$ est le quotient de $\mathscr{F} \otimes_S \mathscr{O}_{S'}$ par le sous-module formé des sections nulles au-dessus de $X \times_S U'$; on l'appelle encore *transformé strict* de $\mathscr{F}$ par f.

Le transformé strict de $\mathscr{O}_X$ par f est $\mathscr{O}_{X'}$. On dit que X' est le *transformé strict* de X par f.

On prendra grade que la notion de "transformé strict par f" dépend à priori de T et pas seulement du morphisme f.

1.13.1.6. Sous les hypothèses de 1.13.1.5, si $\mathscr{F}$ est S-plat, le transformé strict de $\mathscr{F}$ par f est égal à $\mathscr{F} \otimes_S \mathscr{O}_{S'}$ (1.8.32).

Définition 1.13.2 ([42] 5.1.3). Soient S un schéma, U un ouvert de S, $f\colon S' \to S$ un morphisme de type fini. On dit que f est un *éclatement U-admissible* s'il existe un sous-schéma fermé de présentation finie T de S, disjoint de U, tel que f soit isomorphe à l'éclatement de T dans S. On notera que l'isomorphisme est alors unique.

Proposition 1.13.3. *Soient S un schéma, T un sous-schéma fermé de S, U l'ouvert $S-T$ de S, $f\colon S' \to S$ un éclatement U-admissible de S, $U' = f^{-1}(U)$.*

(i) *Si U est schématiquement dense dans S, U' est schématiquement dense dans S'.*

(ii) *Supposons la paire (S,T) quasi-idyllique* (1.12.21) *et U' schématiquement dense dans S'. Alors f est de présentation finie.*

(i) Soient Y un sous-schéma fermé de présentation finie de S, disjoint de U, tel que f soit isomorphe à l'éclatement de Y dans S, V l'ouvert $S-Y$ de S, $V' = f^{-1}(V)$. Comme $U \subset V$, l'hypothèse entraîne que U' est schématiquement dense dans V' ([28] 6.10.7) ; et comme V' est schématiquement dense dans S', U' est schématiquement dense dans S' ([28] 6.10.3).

(ii) C'est un cas particulier de 1.12.22.

Corollaire 1.13.4. *Soient S un schéma, T un sous-schéma fermé de S, U l'ouvert $S-T$ de S, $f\colon S' \to S$ un éclatement U-admissible. Supposons la paire (S,T) quasi-idyllique. Alors il existe un éclatement U-admissible de présentation finie $g\colon S'' \to S$ tel que f majore g, i.e., tel que* $\mathrm{Hom}_S(S'', S') \neq \emptyset$.

En effet, si T est défini par un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_S$, et si f est isomorphe à l'éclatement dans S d'un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{I}$ de $\mathscr{O}_S$, l'éclatement de $\mathscr{I}\mathscr{J}$ dans S répond à la question, en vertu de 1.13.3(ii).

Proposition 1.13.5 ([42] 5.1.4). *Soient S un schéma cohérent, U un ouvert de S, $f\colon S' \to S$ un éclatement U-admissible, $g\colon S'' \to S'$ un éclatement $f^{-1}(U)$-admissible. Alors $f \circ g$ est un éclatement U-admissible.*

Remarque 1.13.6. Conservons les hypothèses de 1.13.5. Supposons que f soit l'éclatement dans S d'un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{I}$ de $\mathscr{O}_S$ définissant un sous-schéma fermé disjoint de U, et que g soit l'éclatement dans S' d'un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_{S'}$ définissant un sous-schéma fermé disjoint de $f^{-1}(U)$. Posons $\mathscr{I}' = \mathscr{I}\mathscr{O}_{S'}$.

(i) Il ressort de la preuve de ([42] 5.1.4) qu'il existe un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{L}$ de $\mathscr{O}_S$ et un entier $m \geq 1$ tels que $\mathscr{L}\mathscr{O}_{S'} = \mathscr{I}'^m \mathscr{J}^m$. Par suite, $f \circ g$ est isomorphe à l'éclatement de $\mathscr{I}\mathscr{L}$ dans S.

(ii) Soient $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_S$-module quasi-cohérent, $\mathscr{F}'$ le transformé strict de $\mathscr{F}$ par f, $\mathscr{F}''$ le transformé strict de $\mathscr{F}'$ par g. Il résulte aussitôt de (i) que le transformé strict de $\mathscr{F}$ par $f \circ g$ est un quotient de $\mathscr{F}''$. Par suite, si $\mathscr{F}''$ est S''-plat, le transformé strict de $\mathscr{F}$ par $f \circ g$ est égal à $\mathscr{F}''$ (1.8.32).

Définition 1.13.7 ([42] 5.2.1). Soient $f\colon X \to S$ un morphisme de présentation finie, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent de type fini, n un entier. On dit que $\mathscr{F}$ est S-plat en dimension $\geq n$, s'il existe un ouvert rétro-compact V de X ([28] 0.2.3.1) tel que $\dim((X-V)/S) < n$ et que $\mathscr{F}|V$ soit un $\mathscr{O}_V$-module de présentation finie, S-plat.

Théorème 1.13.8 ([42] 5.2.2). *Soient S un schéma cohérent, U un ouvert quasi-compact de S, $f\colon X \to S$ un morphisme de présentation finie, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent de type fini, n un entier. Supposons que $\mathscr{F}|f^{-1}(U)$ soit U-plat en dimension $\geq n$. Alors il existe un éclatement U-admissible $g\colon S' \to S$, tel que le transformé strict de $\mathscr{F}$ par g soit S'-plat en dimension $\geq n$.*

Remarque 1.13.9. Conservons les hypothèses de 1.13.8. Notons $\mathscr{B}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Sch}_{/S}$ formée des éclatements dans S d'un sous-schéma fermé de présentation finie T tel que $U = S - T$, et $\mathscr{C}$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{B}$ formée des éclatements $g\colon S' \to S$, tels que le transformé strict de $\mathscr{F}$ par g soit S'-plat en dimension $\geq n$. Alors $\mathscr{C}$ est un crible non vide de $\mathscr{B}$ ([1] I 4.1).

Montrons d'abord que $\mathscr{C}$ est non vide. D'après 1.13.8, il existe un éclatement U-admissible $g\colon S' \to S$, tel que le transformé strict $\mathscr{F}'$ de $\mathscr{F}$ par g soit S'-plat en dimension $\geq n$. D'autre part, il existe un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_S$ tel que $U = S - \mathrm{V}(\mathscr{J})$ ([28] 6.9.7). Soient $g'\colon S'' \to S'$ l'éclatement de $\mathscr{J}\mathscr{O}_{S'}$ dans S', $h = g \circ g'$, $U'' = h^{-1}(U)$. Il est clair que h est un objet de $\mathscr{B}$ (1.13.1.4) ; le transformé strict $\mathscr{F}''$ de $\mathscr{F}$ par h est le quotient de $\mathscr{F}' \otimes_{S'} \mathscr{O}_{S''}$ par le sous-module formé des sections nulles au-dessus de $X \times_S U''$. Il résulte alors de 1.8.32 que $\mathscr{F}''$ est S''-plat en dimension $\geq n$. Donc h est un objet de $\mathscr{C}$.

Montrons ensuite que $\mathscr{C}$ est un crible. Soient $g\colon S' \to S$ un objet de $\mathscr{C}$, $h\colon S'' \to S$ un objet de $\mathscr{B}$, $U'' = h^{-1}(U)$, $\mathscr{F}'$ (resp. $\mathscr{F}''$) le transformé strict de $\mathscr{F}$ par g (resp. h), $k\colon S'' \to S'$ un S-morphisme. Il est clair que $\mathscr{F}''$ est le quotient de $\mathscr{F}' \otimes_{S'} \mathscr{O}_{S''}$ par le sous-module formé des sections nulles au-dessus de $X \times_S U''$. Il résulte alors de 1.8.32 que $\mathscr{F}''$ est S''-plat en dimension $\geq n$. Donc h est un objet de $\mathscr{C}$.

Corollaire 1.13.10. *Soient S un schéma cohérent, U un ouvert quasi-compact de S, X un S-schéma de type fini, qui est plat et localement de présentation finie au-dessus de U. Alors il existe un éclatement U-admissible $\varphi\colon S' \to S$, tel que le transformé strict de X par φ soit plat et localement de présentation finie au-dessus de S'.*

En effet, il résulte de ([42] 5.3) que l'on peut supposer X et S affines, auquel cas l'assertion est une conséquence immédiate de 1.13.8.

Corollaire 1.13.11 ([42] 5.7.10). *Soient S un schéma cohérent, U un ouvert quasi-compact de S, n un entier, X un S-schéma de type fini, qui au-dessus de U est de dimension relative $\leq n$. Alors il existe un éclatement U-admissible $S' \to S$, tel que le transformé strict de X par cet éclatement soit de dimension relative $\leq n$ au-dessus de S'.*

Corollaire 1.13.12. *Soient S un schéma cohérent, U un ouvert quasi-compact de S, X un S-schéma de type fini, qui au-dessus de U est quasi-fini. Alors il existe un éclatement U-admissible $S' \to S$, tel que le transformé strict de X par cet éclatement soit quasi-fini au-dessus de S'.*

Corollaire 1.13.13. *Soient S un schéma cohérent, T un sous-schéma fermé de S, U l'ouvert $S - T$ de S, X un S-schéma propre, qui au-dessus de U est fini. Supposons la paire (S, T) quasi-idyllique* (1.12.21). *Alors il existe un éclatement U-admissible $S' \to S$, tel que le transformé strict de X par cet éclatement soit fini et de présentation finie au-dessus de S'.*

En effet, en vertu de 1.13.12, il existe un éclatement U-admissible $\varphi\colon S' \to S$, tel que le transformé strict X' de X par φ soit quasi-fini au-dessus de S'. Quitte à remplacer φ, on peut supposer que φ est l'éclatement dans S d'un fermé de support T (1.13.1.4). Il résulte alors de 1.12.22 que X' est localement de présentation finie sur S'. Comme X' est propre sur S', il est fini sur S' en vertu de ([31] 8.11.1).

Corollaire 1.13.14. *Soient S un schéma cohérent, T un sous-schéma fermé de S, U l'ouvert $S - T$ de S, V un U-schéma fini. Supposons la paire (S, T) quasi-idyllique. Alors il existe un éclatement U-admissible $S' \to S$ et un S'-schéma fini de présentation finie X' tel que X'_U soit U-isomorphe à V.*

En effet, en vertu de 1.12.24, il existe un S-schéma propre de présentation finie X tel que X_U soit U-isomorphe à V. Il suffit de lui appliquer 1.13.13.

Remarque 1.13.15. L'énoncé 1.13.14 sera renforcé dans 2.6.23.

Corollaire 1.13.16 ([42] 5.7.11). *Soient S un schéma cohérent, U un ouvert quasi-compact de S, $f\colon X \to S$ un morphisme séparé de type fini. On suppose que f_U est une immersion ouverte. Alors il existe un éclatement U-admissible $S' \to S$, tel que si X' est le transformé strict de X par cet éclatement, le morphisme canonique $X' \to S'$ soit une immersion ouverte.*

Corollaire 1.13.17 ([42] 5.7.12). *Soient S un schéma cohérent, U un ouvert quasi-compact de S, $f\colon X \to S$ un morphisme propre qui est un isomorphisme au-dessus de U. Alors il existe un éclatement U-admissible $S' \to S$, tel que si X' est le transformé strict de X par cet éclatement, le morphisme canonique $X' \to S'$ soit un isomorphisme.*

Proposition 1.13.18. *Soient S un schéma, U un ouvert rétro-compact de S, Y un S-schéma, X un S-schéma propre, $u\colon Y_U \to X_U$ un U-morphisme. Supposons que Y soit un schéma cohérent. Alors il existe un éclatement Y_U-admissible $\varphi\colon Y' \to Y$ et un S-morphisme $u'\colon Y' \to X$ tels que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} Y_U \arrow[r, "u"] \arrow[d] & X_U \arrow[d] \\ Y' \arrow[r, "u'"] & X \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les morphismes canoniques soit commutatif.

Notons $j\colon U \to S$ l'injection canonique, $\gamma_0\colon Y_U \to Y_U \times_S X$ le morphisme graphe de $j_X \circ u$ et $\gamma\colon Y_U \to Y \times_S X$ l'immersion composée de γ_0 et de $j_Y \times_S X\colon Y_U \times_S X \to Y \times_S X$. Comme X est séparé sur S, γ_0 est une immersion fermée ; et comme j est quasi-compacte, γ est quasi-compacte. Par suite, l'adhérence schématique Γ de Y_U dans $Y \times_S X$ existe ([28] 6.10.6). Notons $p\colon \Gamma \to Y$ le morphisme induit par la projection canonique $Y \times_S X \to Y$. D'une part, p est propre car X est propre sur S. D'autre part, $\Gamma \cap (Y_U \times_S X)$ s'identifie à l'adhérence schématique de Y_U dans $Y_U \times_S X$ ([28] 6.10.7) ; il est donc égal à Y_U. Par suite la restriction de p au-dessus de Y_U est un isomorphisme. En vertu de 1.13.17, il existe alors un éclatement Y_U-admissible $\varphi\colon Y' \to Y$ tel que, si Γ' est le transformé strict de Γ par cet éclatement, le morphisme canonique $\alpha\colon \Gamma' \to Y'$ soit un isomorphisme. Le morphisme u' composé de α^{-1} et du morphisme canonique $\Gamma' \to X$ répond à la question.

Proposition 1.13.19. *Soient S un schéma, T un sous-schéma fermé de S défini par un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_S$, U l'ouvert $S - T$ de S, $f\colon Y \to X$ un morphisme de S-schémas, Z un sous-schéma fermé de X défini par un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{I}$ de $\mathscr{O}_X$, V l'ouvert $X_U - Z_U$ de X_U. Supposons que Y soit quasi-compact et que l'on ait $f(Y_U) \subset V$. Alors il existe un éclatement X_U-admissible $\varphi\colon X' \to X$ et un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{I}'$ de $\mathscr{O}_{X'}$ tels que si Y' désigne le transformé strict de Y par φ, on ait $\mathscr{I}\mathscr{O}_{X'} \subset \mathscr{I}'$, $\mathscr{I}'|X'_U = \mathscr{I}|X_U$ et $\mathscr{I}'\mathscr{O}_{Y'} = \mathscr{O}_{Y'}$.*

D'après ([28] 6.8.4), il existe un entier $n \geq 1$ tel que l'on ait $\mathscr{J}^n\mathscr{O}_Y \subset \mathscr{I}\mathscr{O}_Y$. Soient $\varphi\colon X' \to X$ l'éclatement de $\mathscr{I} + \mathscr{J}^n\mathscr{O}_X$ dans X, Y' le transformé strict de Y par φ, qu'on identifie à l'éclatement de $\mathscr{I}\mathscr{O}_Y = \mathscr{I}\mathscr{O}_Y + \mathscr{J}^n\mathscr{O}_Y$ dans Y, $f'\colon Y' \to X'$ le morphisme canonique. Comme l'idéal $\mathscr{I}\mathscr{O}_{X'} + \mathscr{J}^n\mathscr{O}_{X'}$ est inversible, $\mathscr{I}' = (\mathscr{I}\mathscr{O}_{X'})(\mathscr{I}\mathscr{O}_{X'} + \mathscr{J}^n\mathscr{O}_{X'})^{-1}$ s'identifie à un idéal de $\mathscr{O}_{X'}$. On a clairement $\mathscr{I}'|X'_U = \mathscr{I}\mathscr{O}_{X'_U} = \mathscr{I}|X_U$ et $\mathscr{I}\mathscr{O}_{X'} \subset \mathscr{I}'$. D'autre part, l'homomorphisme surjectif canonique

$$f'^*(\mathscr{I}\mathscr{O}_{X'} + \mathscr{J}^n\mathscr{O}_{X'}) \to \mathscr{I}\mathscr{O}_{Y'} + \mathscr{J}^n\mathscr{O}_{Y'} = \mathscr{I}\mathscr{O}_{Y'}$$

est bijectif puisque sa source et son but sont des modules inversibles. On en déduit que l'on a $\mathscr{I}'\mathscr{O}_{Y'} = \mathscr{O}_{Y'}$.

Lemme 1.13.20. *Soient S un schéma cohérent, U un ouvert quasi-compact de S, X un S-schéma fidèlement plat et de présentation finie au-dessus de S, $f\colon X' \to X$ un morphisme propre qui est un isomorphisme au-dessus de X_U. Alors il existe un éclatement U-admissible $\psi\colon S' \to S$, tel que le transformé strict de X' par ψ soit fidèlement plat et de présentation finie au-dessus de S'.*

En effet, d'après 1.13.10, il existe un éclatement U-admissible $\psi\colon S' \to S$, tel que le transformé strict X'_1 de X' par ψ soit plat et de présentation finie au-dessus de S'. On peut supposer que ψ est l'éclatement dans S d'un fermé de présentation finie T tel que $U = S - T$ (cf. 1.13.9). Donc $U' = \psi^{-1}(U)$ est schématiquement dense dans S'. Le morphisme $f_1\colon X_1' \to X \times_S S'$ déduit de f est propre. Comme $X \times_S U'$ est schématiquement dense dans $X \times_S S'$ (1.8.32), f_1 est surjectif. Donc ψ répond à la question.

Théorème 1.13.21 (Gabber). *Soient S un schéma cohérent, U un ouvert quasi-compact de S, $f\colon X \to S$ un morphisme propre et de présentation finie, V un ouvert quasi-compact de X_U qui est fidèlement plat au-dessus de U. Alors il existe un éclatement X_U-admissible $\varphi\colon X' \to X$, un éclatement U-admissible $\psi\colon S' \to S$ et un ouvert quasi-compact W du transformé strict de X' par ψ qui coïncide avec V au-dessus de U et qui est fidèlement plat et de présentation finie au-dessus de S'.*

On désigne par $\mathscr{B}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Sch}_{/X}$ formée des éclatements X_U-admissibles de X, et par $\mathscr{C}$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{B}$ formée des éclatements X_U-admissibles $\varphi\colon X' \to X$, tels qu'il existe un éclatement U-admissible $\psi\colon S' \to S$ et un ouvert quasi-compact W du transformé strict de X' par ψ qui coïncide avec V au-dessus de U et qui est fidèlement plat et de présentation finie au-dessus de S'. Il est clair que $\mathscr{B}$ est une catégorie cofiltrante. Il résulte de 1.13.20, 1.13.5 et 1.13.6 que $\mathscr{C}$ est un crible de $\mathscr{B}$ ([1] I 4.1). On en déduit par ([42] 5.3) que si $(S_i)_{i\in I}$ est un recouvrement fini de S par des ouverts quasi-compacts tel que pour tout $i \in I$, le théorème soit vrai pour la restriction de la situation au-dessus de S_i, alors le théorème est vrai au-dessus de S. On peut donc supposer S affine.

Montrons que l'on peut se réduire encore au cas où S est affine noethérien. Considérons S comme limite projective filtrante de schémas affines noethériens $(S_i)_{i\in I}$. Pour i assez grand, il existe un ouvert U_i de S_i, un S_i-schéma propre X_i et un ouvert V_i de $X_i \times_{S_i} U_i$, fidèlement plat au-dessus de U_i, tels que U, X et V proviennent respectivement de U_i, X_i et V_i par le changement de base $S \to S_i$ ([31] 8.8.2, 8.10.5 et 11.2.6). Supposons qu'il existe un éclatement $(X_i \times_{S_i} U_i)$-admissible $\varphi_i\colon X_i' \to X_i$ défini par un idéal cohérent $\mathscr{I}_i$ de $\mathscr{O}_{X_i}$, avec $\mathscr{I}_i|(X_i \times_{S_i} U_i) = \mathscr{O}_{X_i \times_{S_i} U_i}$, un éclatement U_i-admissible $\psi_i\colon S_i' \to S_i$ défini par un idéal cohérent $\mathscr{J}_i$ de $\mathscr{O}_{S_i}$, avec $\mathscr{J}_i|U_i = \mathscr{O}_{U_i}$, et un ouvert W_i du transformé strict $\widetilde{X}_i'$ de X_i' par ψ_i, qui coïncide avec V_i au-dessus de U_i et qui est fidèlement plat au-dessus de S_i'. Quitte à changer ψ_i, on peut supposer $U_i = S_i - \mathrm{V}(\mathscr{J}_i)$ (cf. 1.13.9). Soient $\varphi\colon X' \to X$ l'éclatement X_U-admissible défini par l'idéal $\mathscr{I} = \mathscr{I}_i\mathscr{O}_X$, $\psi\colon S' \to S$ l'éclatement U-admissible défini par l'idéal $\mathscr{J} = \mathscr{J}_i\mathscr{O}_S$, $\widetilde{X}'$ le transformé strict de X' par ψ. Il est clair que $\widetilde{X}'$ est un sous-schéma fermé de $S' \times_{S_i'} \widetilde{X}_i'$, et ces deux schémas coïncident au-dessus de U. Comme $U_i = S_i - \mathrm{V}(\mathscr{J}_i)$, $S' \times_{S_i'} W_i$ s'identifie à un sous-schéma ouvert de $\widetilde{X}'$ (1.8.32). Le triplet $(\varphi, \psi, S' \times_{S_i'} W_i)$ répond donc à la question.

Montrons maintenant le théorème dans le cas où S est noethérien. On notera d'abord que si $\psi\colon S' \to S$ est un éclatement U-admissible, il est loisible de remplacer S par S' et X par son transformé strict par ψ (1.13.5 et 1.13.6). En vertu de ([31] 17.16.4), il existe une famille finie $(U_j)_{j\in J}$ de sous-schémas non vides de U, deux à deux disjoints, de réunion U, et ayant la propriété suivante : pour tout

$j \in J$, il existe un morphisme fini et surjectif $g_j \colon V_j \to U_j$ et un U-morphisme $s_j \colon V_j \to V$. Quitte à raffiner la stratification $(U_j)_{j\in J}$ de U, on peut supposer que, pour tout $j \in J$, l'adhérence de U_j dans U est réunion de strates. De plus, on peut supposer les s_j des immersions. En effet, compte tenu des hypothèses, le morphisme $V_j \to V \times_U U_j$, défini par s_j et g_j, est propre. Notons V'_j son image schématique ([28] 6.10.5). Le morphisme canonique $V'_j \to U_j$ est quasi-fini, surjectif et propre ([29] 5.4.3(ii)). Il est donc fini ([30] 4.4.11), et on peut remplacer V_j par V'_j. On dira dans la suite que $(U_j)_{j\in J}$ est une *stratification adéquate* de U.

On procède par récurrence sur le nombre de strates d'une stratification adéquate de U. Soit n un entier ≥ 1. Supposons le théorème établi lorsque U admet une stratification adéquate ayant au plus $n-1$ strates (cette hypothèses est clairement satisfaite si $n = 1$). Montrons le théorème lorsque U admet une stratification adéquate $(U_j)_{j\in J}$ à n strates. Soit $j \in J$ tel que U_j soit fermé dans U (qui existe d'après les hypothèses). Notons S_j l'adhérence schématique de U_j dans S, X_j l'adhérence schématique de V_j dans X. Par transitivité des images schématiques ([28] 6.9.3), f induit un morphisme propre et surjectif $f_j \colon X_j \to S_j$ qui prolonge g_j. Il résulte des hypothèses que V_j est fermé dans X_U, et par suite, que l'on a $X_j \times_S U = V_j \subset V$. Soit Z un sous-schéma fermé de X défini par un idéal cohérent $\mathscr{I}$ de $\mathscr{O}_X$, tel que X_U soit la réunion disjointe de Z_U et V. D'après 1.13.19, il existe un éclatement X_U-admissible $\varphi \colon X' \to X$ et un idéal cohérent $\mathscr{I}'$ de $\mathscr{O}_{X'}$ tels que si X'_j désigne le transformé strict de X_j par φ, on ait $\mathscr{I}\mathscr{O}_{X'} \subset \mathscr{I}'$, $\mathscr{I}'|X'_U = \mathscr{I}|X_U$ et $\mathscr{I}'\mathscr{O}_{X'_j} = \mathscr{O}_{X'_j}$. Il est loisible de remplacer X par X' (1.13.5), X_j par X'_j (1.13.3(i)) et Z par $\mathrm{V}(\mathscr{I}')$. On peut donc supposer que l'on a $X_j \cap Z = \emptyset$. Posons $W_j = X - Z$, qui est un ouvert de X contenant X_j, et coïncidant avec V au-dessus de U. En vertu de 1.13.10, il existe un éclatement U-admissible $\psi \colon S' \to S$ tel que le transformé strict de W_j par ψ soit S'-plat. Il est encore loisible de remplacer S par S', et S_j, X, W_j et X_j par leurs transformés stricts par ψ. On peut donc supposer qu'il existe un ouvert W_j de X, S-plat, contenant X_j, et coïncidant avec V au-dessus de U. Par suite $A = f(W_j)$ est un ouvert de S contenant S_j. Notons B l'ouvert $S - S_j$ de S, de sorte que l'on a $S = A \cup B$. Le théorème est clairement vrai pour la restriction de la situation au-dessus de A ; et il est vrai pour la restriction de la situation au-dessus de B d'après l'hypothèse de récurrence. Il est donc vrai au-dessus de S.

1.14 Propriétés différentielles des anneaux idylliques

1.14.1. Soient A un anneau linéairement topologisé, B une A-algèbre topologique, linéairement topologisée. On rappelle que le module des différentielles $\Omega^1_{B/A}$ est muni d'une topologie canonique, qui en fait un B-module topologique ([31] 0.20.4.3). Cette topologie est moins fine que la topologie déduite de celle de B ; si dans B le carré de tout idéal ouvert est ouvert, ces deux topologies sont identiques ([31] 0.20.4.5). On désigne par $\widehat{\Omega}^1_{B/A}$ le séparé complété du B-module topologique

$\Omega^1_{B/A}$ ([31] 0.20.7.14) et par $\hat{d}_{B/A}$ (ou simplement $\hat{d}$) la A-dérivation canonique de B dans $\widehat{\Omega}^1_{B/A}$.

Proposition 1.14.2. *Soient A un anneau quasi-idyllique, B une A-algèbre topologiquement de type fini.*

(i) *Le B-module $\widehat{\Omega}^1_{B/A}$ est de type fini et sa topologie est déduite de celle de B ; il est engendré par les éléments $\hat{d}(x)$, où x parcourt un système de générateurs topologiques de la A-algèbre topologique B.*

(ii) *Si B est topologiquement de présentation finie sur A, $\widehat{\Omega}^1_{B/A}$ est un B-module de présentation finie.*

(iii) *Si B est formellement lisse sur A, $\widehat{\Omega}^1_{B/A}$ est un B-module projectif.*

En effet, (i) résulte de 1.8.5 et 1.8.7, (ii) de 1.10.11, et (iii) de 1.12.5 et ([31] 0.20.4.10).

1.14.3. Soient A un anneau quasi-idyllique, B une A-algèbre topologiquement de type fini, C une B-algèbre topologiquement de type fini. Alors la suite canonique ([31] 0.20.7.17)

$$\widehat{\Omega}^1_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{\hat{u}} \widehat{\Omega}^1_{C/A} \xrightarrow{\hat{v}} \widehat{\Omega}^1_{C/B} \longrightarrow 0 \tag{1.14.3.1}$$

est exacte. En effet, on sait que $\hat{v}$ est surjectif et que l'image de $\hat{u}$ est dense dans le noyau de $\hat{v}$; donc l'assertion résulte de 1.8.28(c).

1.14.4. Soient A un anneau quasi-idyllique, B une A-algèbre topologiquement de type fini, $\mathfrak{I}$ un idéal de type fini de B, $C = B/\mathfrak{I}$ la A-algèbre topologique quotient. Alors la suite canonique ([31] 0.20.7.20)

$$\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \xrightarrow{\widehat{\delta}} \widehat{\Omega}^1_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{\hat{u}} \widehat{\Omega}^1_{C/A} \longrightarrow 0 \tag{1.14.4.1}$$

est exacte. En effet, on sait que $\hat{u}$ est surjectif et que l'image de $\widehat{\delta}$ est dense dans le noyau de $\hat{u}$; donc l'assertion résulte de 1.8.28(c).

Proposition 1.14.5 (Critère jacobien de lissité formelle). *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de type fini de A, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie et formellement lisse, $\mathfrak{I}$ un idéal de type fini de B, $C = B/\mathfrak{I}$ la A-algèbre topologique quotient. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *C est une A-algèbre formellement lisse.*

(ii) *L'homomorphisme canonique $\delta\colon \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \to \Omega^1_{B/A} \otimes_B C$ est formellement inversible à gauche* ([31] 0.19.1.5).

(iii) *L'homomorphisme $\widehat{\delta}\colon \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \to \widehat{\Omega}^1_{B/A} \otimes_B C$ déduit de δ par prolongement aux complétés est inversible à gauche.*

(iv) *L'homomorphisme $\delta_0\colon \mathfrak{I} \otimes_B (C/JC) \to \Omega^1_{B/A} \otimes_B (C/JC)$ déduit de δ par passage aux quotients est inversible à gauche.*

En effet, les conditions (i) et (ii) sont équivalentes par le critère jacobien ([31] 0.22.6.1), les conditions (ii) et (iv) sont équivalentes en vertu de ([31] 0.19.1.9), et les conditions (iii) et (iv) sont équivalentes en vertu de 1.14.2 et ([31] 0.19.1.10).

Proposition 1.14.6. *Soient A un anneau quasi-idyllique, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie et formellement lisse, $\mathfrak{I}$ un idéal de type fini de B, $C = B/\mathfrak{I}$ la A-algèbre topologique quotient. Considérons l'homomorphisme canonique*

$$\widehat{\delta}\colon \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \to \widehat{\Omega}^1_{B/A} \otimes_B C \tag{1.14.6.1}$$

et notons U l'ensemble des points $x \in \mathrm{Spec}(C)$ tel que $\widehat{\delta} \otimes_C \kappa(x)$ soit injectif. Alors U est l'ouvert maximal de $\mathrm{Spec}(C)$ où $\widehat{\delta}$ est localement inversible à gauche. De plus, U ne dépend pas du choix de la A-algèbre formellement lisse B.

La première assertion résulte de 1.3.15 et du fait que $\widehat{\Omega}^1_{B/A}$ est un B-module projectif de type fini (1.14.2). Appelons provisoirement U l'ouvert jacobien de $\mathfrak{I}$. Soient S une A-algèbre topologiquement de présentation finie et formellement lisse, $\varphi\colon S \to C$ un homomorphisme surjectif de A-algèbres, $\mathfrak{J}$ son noyau, qui est un S-module de type fini (1.10.5). Pour montrer que les ouverts jacobiens de $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{J}$ sont égaux, on peut se borner au cas où il existe un homomorphisme surjectif de A-algèbres $\psi\colon S \to B$ induisant φ ; notons $\mathfrak{K}$ son noyau, qui est un S-module de type fini (1.10.5). Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{K}/\mathfrak{K}^2 \otimes_B C \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{K}/\mathfrak{K}^2 \otimes_B C \arrow[r] & \widehat{\Omega}^1_{S/A} \otimes_S C \arrow[r] & \widehat{\Omega}^1_{B/A} \otimes_B C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{1.14.6.2}$$

dont la ligne inférieure est exacte et scindée d'après 1.14.5, montre que les ouverts jacobiens de $\mathfrak{I}$ et de $\mathfrak{J}$ sont égaux.

Définition 1.14.7. Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, C une A-algèbre topologiquement de présentation finie. On appelle ouvert de lissité formelle de C sur A l'ouvert U de $\mathrm{Spec}(C)$ défini dans (1.14.6). On dit que C est une A-algèbre *rig-lisse* (ou *rig-lisse* sur A) si U contient $\mathrm{Spec}(C) - \mathrm{V}(JC)$. On dit que C est une A-algèbre *rig-étale* (ou *rig-étale* sur A) si elle est rig-lisse sur A et si le C-module $\widehat{\Omega}^1_{C/A}$ est rig-nul.

Il résulte de la définition (1.14.7) et de la suite exacte (1.14.4.1) que $\widehat{\Omega}^1_{C/A}$ est localement libre de type fini sur l'ouvert de lissité formelle de C sur A.

Proposition 1.14.8. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, C une A-algèbre topologiquement de présentation finie, $B = A\langle\xi_1, \ldots, \xi_n\rangle$ une algèbre de séries formelles restreintes, $\varphi\colon B \to C$ un homomorphisme surjectif de A-algèbres, $\mathfrak{I} = \ker(\varphi)$. Les conditions suivantes sont alors équivalentes :*

(i) *C est rig-lisse sur A et $\widehat{\Omega}^1_{C/A}$ est localement libre de rang r sur* $\mathrm{Spec}(C) - \mathrm{V}(JC)$.

(ii) *Pour tout point fermé $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(C) - \mathrm{V}(JC)$, si l'on pose $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$, il existe dans $\mathfrak{I}$ un système de $(n-r)$ séries u_i $(r+1 \leq i \leq n)$, et $(n-r)$ indices $j_k \in \{1, \dots, n\}$ $(r+1 \leq k \leq n)$ tels que les images des u_i dans $\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}}$ engendrent cet idéal et que l'on ait*

$$\det(\partial u_i / \partial \xi_{j_k}) \notin \mathfrak{p}. \tag{1.14.8.1}$$

Cela résulte de la définition, de 1.3.15 et du fait que $\mathrm{Spec}(C) - \mathrm{V}(JC)$ est un schéma de Jacobson (1.11.9).

Proposition 1.14.9 (Critère jacobien de rig-lissité). *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie et rig-lisse, $\mathfrak{I}$ un idéal de type fini de B, $C = B/\mathfrak{I}$ la A-algèbre topologique quotient. Pour que C soit une A-algèbre rig-lisse, il faut et il suffit que l'homomorphisme canonique*

$$\widehat{\delta}\colon \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \to \widehat{\Omega}^1_{B/A} \otimes_B C \tag{1.14.9.1}$$

soit localement inversible à gauche sur $\mathrm{Spec}(C) - \mathrm{V}(JC)$.

Soit V l'ensemble des points $x \in \mathrm{Spec}(C) - \mathrm{V}(JC)$ tel que $\widehat{\delta} \otimes_C \kappa(x)$ soit injectif. Il résulte de 1.3.15 et du fait que $\widehat{\Omega}^1_{B/A}$ est localement libre de type fini sur $\mathrm{Spec}(B) - \mathrm{V}(JB)$, que V est l'ouvert maximal de $\mathrm{Spec}(C) - \mathrm{V}(JC)$ où $\widehat{\delta}$ est localement inversible à gauche. Donc tout revient à montrer que C est rig-lisse sur A si et seulement si $V = \mathrm{Spec}(C) - \mathrm{V}(JC)$. Soient S une A-algèbre topologiquement de présentation finie et formellement lisse, $\varphi\colon S \to B$ un homomorphisme surjectif, $\mathfrak{K}$ son noyau, $\mathfrak{J}$ l'image réciproque de $\mathfrak{I}$, de sorte que C est isomorphe au quotient de S par $\mathfrak{J}$; alors $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{J}$ sont des S-modules de type fini (1.10.5). Le diagramme commutatif canonique

$$\begin{tikzcd}
& \mathfrak{K}/\mathfrak{K}^2 \otimes_B C \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{K}/\mathfrak{K}^2 \otimes_B C \arrow[r] & \widehat{\Omega}^1_{S/A} \otimes_S C \arrow[r] & \widehat{\Omega}^1_{B/A} \otimes_B C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dont la ligne inférieure est exacte et localement scindée sur l'ouvert $\mathrm{Spec}(C) - \mathrm{V}(JC)$ (1.14.6), montre que V est l'intersection de $\mathrm{Spec}(C) - \mathrm{V}(JC)$ et de l'ouvert de lissité formel de C sur A, d'où notre assertion.

Proposition 1.14.10. *Soient A un anneau quasi-idyllique, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie et rig-lisse, C une B-algèbre topologiquement de présentation finie et rig-lisse ; alors C est une A-algèbre rig-lisse.*

Cette proposition sera démontrée dans 6.4.16. Le lecteur vérifiera qu'il n'y a pas de cercle vicieux.

Proposition 1.14.11. *Soient A un anneau quasi-idyllique, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie et rig-lisse, A' une A-algèbre adique. Supposons A' un anneau quasi-idyllique. Alors $B\widehat{\otimes}_A A'$ est topologiquement de présentation finie et rig-lisse sur A'.*

Cela résulte facilement de 1.10.10 (cf. 1.16.3).

Proposition 1.14.12. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie et rig-lisse, C une B-algèbre topologiquement de présentation finie et rig-lisse ; alors la suite canonique* (1.14.3.1)

$$0 \to \widehat{\Omega}^1_{B/A} \otimes_B C \to \widehat{\Omega}^1_{C/A} \to \widehat{\Omega}^1_{C/B} \to 0 \tag{1.14.12.1}$$

est exacte et localement scindée sur $\mathrm{Spec}(C) - \mathrm{V}(JC)$.

Soient $D = B\langle \xi_1, \ldots, \xi_n \rangle$ une algèbre de séries formelles restreintes sur B, $\varphi\colon D \to C$ un homomorphisme surjectif de B-algèbres, $\mathfrak{I}$ son noyau. En vertu de 1.14.10, D et C sont rig-lisses sur A. Considérons le diagramme commutatif canonique

$$\begin{tikzcd}
 & & \widehat{\Omega}^1_{B/A} \otimes_B C \arrow[r, equal] \arrow[d, "a"] & \widehat{\Omega}^1_{B/A} \otimes_B C \arrow[d, "b"] & \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \widehat{\Omega}^1_{D/A} \otimes_D C \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{\Omega}^1_{C/A} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \arrow[r] & \widehat{\Omega}^1_{D/B} \otimes_D C \arrow[r] & \widehat{\Omega}^1_{C/B} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

D'une part, les lignes horizontales sont exactes et localement scindées sur l'ouvert $\mathrm{Spec}(C) - \mathrm{V}(JC)$ en vertu de 1.14.9. D'autre part, la suite

$$0 \to \widehat{\Omega}^1_{B/A} \otimes_B D \to \widehat{\Omega}^1_{D/A} \to \widehat{\Omega}^1_{D/B} \to 0 \tag{1.14.12.2}$$

est exacte et scindée d'après ([31] 0.20.7.18). Par suite, pour tout $x \in \mathrm{Spec}(C) - \mathrm{V}(JC)$, $b \otimes_C \kappa(x)$ est injectif, et la proposition s'ensuit compte tenu de 1.3.15.

Proposition 1.14.13. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, C une A-algèbre de présentation finie, $\widehat{C}$ le séparé complété de C pour la topologie J-adique. Alors l'ouvert de lissité formelle de $\widehat{C}$ sur A est l'image réciproque de l'ouvert de lissité de C sur A par le morphisme canonique* $\mathrm{Spec}(\widehat{C}) \to \mathrm{Spec}(C)$.

Notons d'abord que $\widehat{C}$ est topologiquement de présentation finie sur A (1.10.6). Soient B une A-algèbre lisse, $\varphi\colon B \to C$ un A-homomorphisme surjectif, $\mathfrak{I}$ le noyau de φ (qui est de type fini sur B), $\delta\colon \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \to \Omega^1_{B/A} \otimes_B C$ l'homomorphisme canonique, $\widehat{B}$ le séparé complété de B pour la topologie J-adique, $\widehat{\varphi}\colon \widehat{B} \to \widehat{C}$ le prolongement de φ aux complétés. Alors $\widehat{B}$ est topologiquement de présentation finie et formellement lisse sur A (1.10.6) ; $\widehat{\varphi}$ est surjectif (1.8.5) ; $\mathfrak{I}\widehat{B}$ est le noyau de $\widehat{\varphi}$ et on a $\widehat{\Omega}^1_{\widehat{B}/A} \simeq \Omega^1_{B/A} \otimes_B \widehat{B}$ (1.12.16). Comme $\widehat{B}$ est B-plat (1.12.17), on a $\mathfrak{I}\widehat{B} \simeq \mathfrak{I} \otimes_B \widehat{B}$. Par suite, l'homomorphisme canonique

$$\widehat{\delta}\colon (\mathfrak{I}\widehat{B})/(\mathfrak{I}^2\widehat{B}) \to \widehat{\Omega}^1_{\widehat{B}/A} \otimes_{\widehat{B}} \widehat{C}$$

s'identifie à $\delta \otimes_C \widehat{C}$; d'où la proposition.

Corollaire 1.14.14. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre de type fini, C une B-algèbre de présentation finie, lisse sur* $\mathrm{Spec}(B)$ *en dehors de* $\mathrm{V}(JB)$, *$\widehat{B}$ (resp. $\widehat{C}$) le séparé complété de B (resp. C) pour la topologie déduite de celle de A. Alors $\widehat{C}$ est rig-lisse sur $\widehat{B}$.*

Quitte à remplacer A par $\widehat{B}$ (qui est quasi-idyllique) et C par $C \otimes_B \widehat{B}$, on se ramène au cas où $A = B$ (1.8.7), de sorte que C est une A-algèbre de présentation finie, lisse sur $\mathrm{Spec}(A)$ en dehors de $\mathrm{V}(J)$. La proposition résulte alors de 1.14.13.

Corollaire 1.14.15. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, C une A-algèbre finie et de présentation finie. Alors l'ouvert de lissité formelle de C sur A est égal à l'ouvert de lissité de C sur A ; en particulier, C est rig-étale sur A si et seulement si C est étale sur A en dehors de* $\mathrm{V}(J)$.

On notera que C est une A-algèbre adique (1.10.2), et par suite topologiquement de présentation finie (1.10.6). La proposition résulte alors de 1.14.13 et du fait que $\widehat{\Omega}^1_{C/A} = \Omega^1_{C/A}$ (1.10.2).

Proposition 1.14.16 (Fujiwara). *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre topologiquement de type finie, B' une A-algèbre adique qui est un anneau quasi-idyllique, $u\colon B \to B'$ un A-homomorphisme. Supposons $\widehat{\Omega}^1_{B/A}$ rig-nul* (1.8.30.1). *Alors, il existe un entier $n \geq 0$ tel que tout A-homomorphisme $v\colon B \to B'$ congru à u modulo J^n soit égal à u.*

Quitte à remplacer A par B' et B par $B\widehat{\otimes}_A B'$, on peut se borner au cas où $B' = A$, u étant une augmentation de B dans A. On peut évidemment remplacer J par un autre idéal de définition de A. Donc si A n'est pas noethérien, on peut supposer J principal. Pour tout entier $n \geq 0$, posons $A_n = A/J^{n+1}$, $B_n = B \otimes_A A_n$ et soit $u_n\colon B_n \to A_n$ l'augmentation déduite de u. Il existe un entier $c \geq 1$ tel que $J^c\widehat{\Omega}^1_{B/A} = 0$. Soient n et m deux entiers tels que $c \leq n \leq m \leq n + c + 1$. L'ensemble des augmentations $v_m\colon B_m \to A_m$ qui relèvent u_n est canoniquement isomorphe (par le choix de u_m) à la source de l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{A_n}(\Omega^1_{B_n/A_n} \otimes_{B_n,u_n} A_n, J^{n+1}/J^{m+1}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A_c}(\Omega^1_{B_c/A_c} \otimes_{B_c,u_c} A_c, J^{n+1}/J^{m+1}),$$

défini par le fait que le A-module J^{n+1}/J^{m+1} est annulé par J^{c+1}. L'application qui à une augmentation $w\colon B_{n+c+1} \to A_{n+c+1}$ associe l'augmentation $w \otimes A_{n+1}$

de B_{n+1} dans A_{n+1}, correspond au morphisme

$$\rho_n\colon \mathrm{Hom}_{A_c}(\Omega^1_{B_c/A_c}\otimes_{u_c} A_c, J^{n+1}/J^{n+c+2}) \to \mathrm{Hom}_{A_c}(\Omega^1_{B_c/A_c}\otimes_{u_c} A_c, J^{n+1}/J^{n+2})$$

déduit du morphisme canonique $J^{n+1}/J^{n+c+2} \to J^{n+1}/J^{n+2}$.

Montrons qu'il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait

$$\{x \in J^{n+1} | xJ^c \subset J^{n+c+2}\} = J^{n+2}. \tag{1.14.16.1}$$

Supposons d'abord J principal, engendré par un élément $t \in A$. Il existe $n_0 \geq 1$ tel que $t^{n_0}A_{\mathrm{tor}} = 0$ (1.10.2). Pour tout $n \geq n_0$, si $\alpha, \beta \in A$ sont tels que $t^{n+c+1}\alpha = t^{n+c+2}\beta$, on a $\alpha - t\beta \in A_{\mathrm{tor}}$ et par suite $t^{n+1}(\alpha - t\beta) = 0$; d'où la relation (1.14.16.1) dans ce cas. Supposons ensuite A noethérien. Soient X' l'éclatement de $\widetilde{J}$ dans $\mathrm{Spec}(A)$, $x \in A$ tel que $xJ^c \subset J^{n+c+2}$. Comme $J\mathscr{O}_{X'}$ est inversible, on a $x \in \Gamma(X', J^{n+2}\mathscr{O}_{X'})$. En vertu de ([30] 2.3.1), il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$, l'homomorphisme canonique $J^{n+2} \to \Gamma(X', J^{n+2}\mathscr{O}_{X'})$ soit bijectif ; d'où la relation (1.14.16.1) dans ce cas.

Soit $n \geq \sup(n_0, c)$. Il résulte de (1.14.16.1) et du fait que $t^c\Omega^1_{B_c/A_c} = 0$ (1.8.7) que ρ_n est nul. Par suite, toutes les augmentations $w\colon B_{n+c+1} \to A_{n+c+1}$ qui relèvent u_n sont égales modulo J^{n+2}, et donc égales à u_{n+1}.

1.15 Couples henséliens idylliques

Nous rappelons d'abord quelques propriétés des couples henséliens ([40] §XI).

1.15.1. On sous-entend par *couple* la donnée d'un anneau et d'un idéal. Un morphisme u d'un couple (A, J) dans un couple (B, K) est la donnée d'un homomorphisme d'anneaux $u\colon A \to B$ tel que $u(J) \subset K$. Le morphisme u est dit *strict* si $K = u(J)B$.

Définition 1.15.2. Soient A un anneau, J un idéal de A, B une A-algèbre étale. On dit que B est un *voisinage étale élémentaire* de J dans A si l'homomorphisme induit $A/J \to B/JB$ est un isomorphisme.

Proposition 1.15.3. *Soient A un anneau, J un idéal contenu dans le radical de A. Posons $\overline{A} = A/J$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Si B est une A-algèbre finie et si $\overline{e}$ est un idempotent de B/JB, alors $\overline{e}$ se relève en un idempotent de B.*

(ii) *Si P est un polynôme unitaire de $A[t]$, dont l'image $\overline{P}$ dans $\overline{A}[t]$ est de la forme qr, où q et r sont deux polynômes unitaires de $\overline{A}[t]$, fortement étrangers* ([12] III §4.1)*, alors P est de la forme QR où Q et R sont deux polynômes unitaires de $A[t]$ qui relèvent respectivement q et r.*

(iii) *Si B est un voisinage étale élémentaire de J dans A, il existe un homomorphisme de A-algèbres de B dans A.*

(iv) *Si B est une A-algèbre étale et si $\overline{\sigma}\colon B \to \overline{A}$ est un homomorphisme de A-algèbres, il existe un et un unique homomorphisme de A-algèbres $\sigma\colon B \to A$ qui relève $\overline{\sigma}$.*

L'équivalence des propositions (i), (ii) et (iii) est démontrée dans ([40] §XI prop. 1). L'implication (i)⇒(iv) résulte de ([31] 18.5.4), et l'implication (iv)⇒(iii) est triviale.

Définition 1.15.4. On dit qu'un couple (A, J) est un couple *hensélien* si J est contenu dans le radical de A et si (A, J) vérifie les conditions équivalentes de (1.15.3).

On peut faire les remarques suivantes :

1.15.4.1. Si A est un anneau séparé et complet pour la topologie définie par un idéal J, alors (A, J) est hensélien.

1.15.4.2. Soient (A, J) un couple hensélien, J' un idéal de A. Si J' est contenu dans J, ou si J' est un idéal de définition de la topologie J-préadique de A, alors (A, J') est hensélien. La première assertion est évidente et la seconde résulte de ([31] 18.1.2).

1.15.4.3. Soient (A, J) un couple hensélien, B une A-algèbre entière. Alors (B, JB) est hensélien.

Définition 1.15.5. Soient A un anneau, J un idéal de A. On appelle *hensélisé* J-préadique de A un couple hensélien $(A^{\mathrm{h}}, J^{\mathrm{h}})$ muni d'un morphisme de couples

$$i\colon (A, J) \to (A^{\mathrm{h}}, J^{\mathrm{h}})$$

tel que, pour tout couple hensélien (B, K) et tout morphisme de couples $v\colon (A, J) \to (B, K)$, il existe un unique morphisme de couples $v^{\mathrm{h}}\colon (A^{\mathrm{h}}, J^{\mathrm{h}}) \to (B, K)$ tel que $v = v^{\mathrm{h}} \circ i$.

On notera que le couple $(A^{\mathrm{h}}, J^{\mathrm{h}})$ et le morphisme i sont uniquement déterminés à un isomorphisme unique près. On peut faire les remarques suivantes :

1.15.5.1. Nous avons préféré le suffixe "préadique" au suffixe "adique" par cohérence avec la terminologie (1.8.4).

1.15.5.2. L'existence du hensélisé est démontrée dans ([40] XI théo. 2). Plus précisément, $(A^{\mathrm{h}}, J^{\mathrm{h}})$ est une limite inductive filtrante de voisinages étales élémentaires de J dans A. En particulier, $(A^{\mathrm{h}}, J^{\mathrm{h}})$ est aussi le hensélisé J-préadique de tout voisinage étale élémentaire de J dans A.

1.15.5.3. Le morphisme i est strict et induit un isomorphisme entre les séparés complétés pour les topologies J-préadiques de A et de A^{h}. Nous omettrons dans la suite l'idéal J^{h} des notations.

1.15.5.4. Si J est contenu dans le radical de A, alors A^{h} est fidèlement plat sur A ; en particulier, A^{h} est noethérien (resp. réduit, resp. normal) si et seulement s'il en est de même de A.

1.15.5.5. Pour tout idéal de définition J' de la topologie J-préadique de A, le hensélisé J'-préadique de A est canoniquement isomorphe à A^{h}.

1.15.5.6. Pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A, le hensélisé J-préadique de $A/\mathfrak{a}$ est canoniquement isomorphe à $A^{\mathrm{h}}/\mathfrak{a}A^{\mathrm{h}}$.

Définition 1.15.6. Soient $X = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma affine, Y un sous-schéma fermé de X défini par un idéal J de A.

(i) On dit qu'un morphisme $f\colon X' \to X$ est un *voisinage étale élémentaire* de Y s'il est étale et si la projection canonique $X' \times_X Y \to Y$ est un isomorphisme. On dit alors aussi que X' est un *voisinage étale élémentaire* de Y dans X.

(ii) On appelle *hensélisé* de X le long de Y, et l'on note X^{h}, le schéma affine d'anneau A^{h} le hensélisé J-préadique de A.

Proposition 1.15.7. *Soient R un anneau 1-valuatif, t un élément non nul de l'idéal maximal de R, A une R-algèbre topologiquement de type fini, B une A-algèbre de type fini, B^{h} le hensélisé (t)-préadique de B, $\widehat{B}$ le séparé complété de B pour la topologie (t)-préadique. Alors $\widehat{B}$ est fidèlement plat sur B^{h}.*

Écrivons B^{h} comme limite inductive filtrante $\varinjlim B_\lambda$, où les B_λ sont des voisinages étales élémentaires de tB dans B. En particulier, B_λ est une A-algèbre de type fini, dont le hensélisé (t)-préadique est isomorphe à B^{h} ; donc le séparé complété de B_λ pour la topologie (t)-préadique est isomorphe à $\widehat{B}$. Il résulte alors de 1.12.17 que $\widehat{B}$ est B_λ-plat. Par passage à la limite inductive ([12] chap. I §2.7 prop. 9), on en déduit que $\widehat{B}$ est B^{h}-plat. Pour conclure, il suffit de noter que tB^{h} est contenu dans le radical de B^{h} et $\widehat{B}$ est le séparé complété de B^{h} pour la topologie (t)-préadique.

Corollaire 1.15.8. *Les hypothèses étant celles de* (1.15.7)*, soient de plus M un B^{h}-module de type fini, N un sous-B^{h}-module de M tel que M/N soit R-plat. Alors N est de type fini sur B^{h}.*

En effet, d'après 1.15.7, la suite

$$0 \to N \otimes_{B^{\mathrm{h}}} \widehat{B} \to M \otimes_{B^{\mathrm{h}}} \widehat{B} \to (M/N) \otimes_{B^{\mathrm{h}}} \widehat{B} \to 0$$

est exacte, et $(M/N) \otimes_{B^{\mathrm{h}}} \widehat{B}$ est R-plat. Comme $\widehat{B}$ est topologiquement de type fini sur R, il résulte de 1.9.14 que $N \otimes_{B^{\mathrm{h}}} \widehat{B}$ est de type fini sur $\widehat{B}$. On en déduit, par descente fidèlement plate ([12] chap. I §3.6 prop. 11), que N est de type fini sur B^{h} (1.15.7).

Corollaire 1.15.9. *Sous les hypothèses de* (1.15.7)*, pour tout B^{h}-module de type fini M, $M_{(t)\text{-tor}}$ est de type fini et $M/M_{(t)\text{-tor}}$ est cohérent.*

Il suffit de calquer la preuve de 1.9.18(iii) en tenant compte de 1.15.8.

Corollaire 1.15.10. *Sous les hypothèses de* (1.15.7)*, $(B^{\mathrm{h}}, tB^{\mathrm{h}})$ vérifie* (AR) *et $(B^{\mathrm{h}})_t$ est noethérien.*

Cela résulte de 1.15.8 et 1.9.13.

Définition 1.15.11. On dit qu'un couple hensélien (A, J) est *quasi-idyllique* s'il vérifie l'une des conditions suivantes :

(a) A est noethérien.

(b) Il existe un anneau quasi-idyllique A_0, un idéal de définition de type fini I de A_0 et une A_0-algèbre de type fini A_1, tels que A soit un quotient du hensélisé (IA_1)-préadique de A_1 et $J = IA$.

On peut faire les remarques suivantes :

1.15.11.1. Dans le cas (b), si A_0 est noethérien, A est noethérien (1.15.5.4).

1.15.11.2. Si A est un anneau quasi-idyllique et J un idéal de définition de type fini, (A, J) est un couple hensélien quasi-idyllique.

1.15.11.3. Soient (A, J) un couple hensélien quasi-idyllique, B une A-algèbre de type fini, B^{h} le hensélisé (JB)-préadique de B. Alors $(B^{\mathrm{h}}, JB^{\mathrm{h}})$ est un couple hensélien quasi-idyllique (1.15.5.4 et 1.15.5.6).

Proposition 1.15.12. *Soit (A, J) un couple hensélien quasi-idyllique. Pour tout A-module M, on note $\widehat{M}$ son séparé complété pour la topologie J-préadique. Alors,*

(i) *(A, J) vérifie* (Kr)*, et le schéma* $\mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$ *est noethérien.*

(ii) *$\widehat{A}$ est fidèlement plat sur A.*

(iii) *Pour tout A-module de type fini M, $M_{J\text{-tor}}$ est de type fini et $M/M_{J\text{-tor}}$ est cohérent.*

(iv) *Pour tout A-module de type fini M, le morphisme canonique $M \otimes_A \widehat{A} \to \widehat{M}$ est un isomorphisme.*

Compte tenu de ([12] chap. III §3.4 théo. 3), on peut se borner au cas 1.15.11(b), où avec les mêmes notations, on fait de plus les deux hypothèses suivantes :

(1) A_0 topologiquement de type fini sur un anneau 1-valuatif R ;

(2) A est le hensélisé (IA_1)-préadique de A_1.

Les propositions (i), (ii) et (iii) résultent alors de 1.15.7 et de ces corollaires. La proposition (iv) résulte de ce qui précède et de 1.8.26, en calquant la démonstration de 1.12.16(iv).

Corollaire 1.15.13. *Si (A, J) est un couple hensélien quasi-idyllique, le séparé complété de A pour la topologie J-préadique est un anneau quasi-idyllique.*

Cela résulte aussitôt de 1.15.12(iv) et 1.15.5.3.

Corollaire 1.15.14. *Soient (A, J) un couple hensélien quasi-idyllique, B une A-algèbre de type fini, M un B-module de type fini, $\widehat{B}$ (resp. $\widehat{M}$) le séparé complété de B (resp. M) pour la topologie J-préadique. Alors :*

(i) *$\widehat{B}$ est B-plat.*

(ii) *Le morphisme canonique $M \otimes_B \widehat{B} \to \widehat{M}$ est bijectif.*

En effet, si B^{h} est le hensélisé (JB)-préadique de B, alors $(B^{\mathrm{h}}, JB^{\mathrm{h}})$ est un couple hensélien quasi-idyllique (1.15.11.3) et le séparé complété de $M \otimes_B B^{\mathrm{h}}$ pour la topologie J-préadique est isomorphe à $\widehat{M}$ (1.15.5.3). Les propositions résultent donc de 1.15.12(ii)–(iv).

Corollaire 1.15.15. *Soient (A, J) un couple hensélien quasi-idyllique, $S = \mathrm{Spec}(A)$, U l'ouvert $S - \mathrm{V}(J)$ de S, X, Y deux S-schémas localement de type fini, $f\colon X \to Y$ un S-morphisme. Si l'ouvert $X \times_S U$ est schématiquement dense dans X, alors f est localement de présentation finie.*

Soit $\widehat{A}$ le séparé complété de A pour la topologie J-préadique. On sait que $\widehat{A}$ est un anneau quasi-idyllique (1.15.13) et qu'il est fidèlement plat sur A (1.15.12). La proposition résulte alors de 1.12.22 par descente fidèlement plate ([31] 2.7.1 et 11.10.5).

Proposition 1.15.16 ([18] 4.4). *Soient (A, J) un couple hensélien quasi-idyllique, $\widehat{A}$ le séparé complété de A pour la topologie J-préadique ; posons $X = \mathrm{Spec}(A)$, $U = X - \mathrm{V}(J)$, $X' = \mathrm{Spec}(\widehat{A})$ et soient U' l'image réciproque de U dans X', $f\colon X' \to X$ le morphisme canonique, $g\colon U' \to U$ sa restriction à U'. Alors, l'application $\mathrm{Of}(U) \to \mathrm{Of}(U')$ qui à une partie ouverte et fermée Z de U associe $g^{-1}(Z)$, est bijective.*

Il suffit de calquer la preuve de ([18] 4.4) en tenant compte de 1.15.12(ii).

Définition 1.15.17. On dit qu'un couple hensélien (A, J) est *idyllique* s'il vérifie l'une des conditions suivantes :

(a) A est noethérien.

(b) Il existe un anneau idyllique A_0, un idéal de définition de type fini I de A_0 et une A_0-algèbre de présentation finie A_1, tels que A soit le hensélisé I-préadique de A_1 et $J = IA$.

On peut faire les remarques suivantes :

1.15.17.1. Dans le cas (b), si A_0 est noethérien, A est noethérien (1.15.5.4).

1.15.17.2. Si A est un anneau idyllique et J un idéal de définition de type fini, (A, J) est un couple hensélien idyllique.

1.15.17.3. Si (A, J) est un couple hensélien idyllique, le séparé complété de A pour la topologie J-préadique est un anneau idyllique.

Lemme 1.15.18. *Soient (A, J) un couple hensélien idyllique, B une A-algèbre de présentation finie, B^{h} le hensélisé (JB)-préadique de B. Alors $(B^{\mathrm{h}}, JB^{\mathrm{h}})$ est un couple hensélien idyllique.*

Compte tenu de 1.15.5.4, on peut se borner au cas 1.15.17(b), dont on reprend les notations. Considérons une présentation finie $B = A[\xi_1, \dots, \xi_N]/(f_1, \dots, f_q)$. Quitte à remplacer A_1 par un voisinage étale élémentaire de IA_1, on peut supposer que l'on a $f_i \in A_1[\xi_1, \dots, \xi_N]$ pour tout $1 \leq i \leq q$. Par suite, d'après 1.15.5.6, B^{h} est isomorphe au hensélisé I-préadique de $A_1[\xi_1, \dots, \xi_N]/(f_1, \dots, f_q)$.

Proposition 1.15.19. *Pour tout couple hensélien idyllique (A, J), l'anneau A est cohérent.*

On peut évidemment se borner au cas 1.15.17(b), et même au cas où il existe un anneau 1-valuatif R, un élément non nul t de l'idéal maximal de R et une algèbre de séries formelles restreintes $A_0 = R\langle\xi_1, \ldots, \xi_n\rangle$, tels que A soit le hensélisé (t)-préadique de $A_1 = A_0[X_1, \ldots, X_m]$ (1.15.5.6). Donc A est R-plat (1.15.5.4), et il est par suite un anneau cohérent en vertu de 1.15.12(iii).

1.16 Approximation algébrique

Nous étendons au cadre idyllique certains résultats d'Elkik [17] suivant sa remarque 2 page 587.

1.16.1. Soient A un anneau, B une A-algèbre de présentation finie

$$B = A[\xi_1, \ldots, \xi_N]/\mathfrak{I}, \quad \mathfrak{I} = (f_1, \ldots, f_q), \quad f_i \in A[\xi_1, \ldots, \xi_N].$$

Pour tout entier $p \geq 0$ et tout multi-indice

$$(\alpha) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p), \qquad 1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_p \leq q,$$

on désigne par $\mathfrak{I}_{(\alpha)}$ l'idéal de $A[\xi_1, \ldots, \xi_N]$ engendré par les f_{α_i} et par $\Delta_{(\alpha)}$ l'idéal de $A[\xi_1, \ldots, \xi_N]$ engendré par les mineurs d'ordre p de la matrice jacobienne

$$\left(\frac{\partial f_{\alpha_i}}{\partial \xi_j}\right)_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq N}.$$

On note $\mathfrak{k}_{(\alpha)}$ l'idéal de $A[\xi_1, \ldots, \xi_N]$ conducteur de $\mathfrak{I}$ dans $\mathfrak{I}_{(\alpha)}$:

$$\mathfrak{k}_{(\alpha)} = \{f \in A[\xi_1, \ldots, \xi_N] \mid f\mathfrak{I} \subset \mathfrak{I}_{(\alpha)}\}.$$

On a par convention $\mathfrak{I}_\emptyset = 0$ et $\Delta_\emptyset = A[\xi_1, \ldots, \xi_N]$. On pose alors

$$\mathscr{D} = \sum_{(\alpha), p} \mathfrak{k}_{(\alpha)} \Delta_{(\alpha)}. \tag{1.16.1.1}$$

On notera que $\mathscr{D}$ ne peut qu'augmenter après extension de la base. On dira qu'un idéal de $A[\xi_1, \ldots, \xi_N]$ est *jacobien* relativement à $(f_1, \ldots, f_q)$ (ou *jacobien* lorsque il n'y a aucun risque de confusion) s'il est contenu dans $\mathscr{D}$.

1.16.1.2. L'ouvert de lissité de $\mathrm{Spec}(B)$ sur $\mathrm{Spec}(A)$ est égal à $\mathrm{Spec}(B) - \mathrm{V}(\mathscr{D}B)$. En effet, soit $\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(\mathfrak{I})$ et notons

$$\delta \colon \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \to \Omega^1_{A[\xi_1, \ldots, \xi_N]/A} \otimes_{A[\xi_1, \ldots, \xi_N]} B$$

l'homomorphisme canonique. On vérifie immédiatement les propriétés suivantes :

(a) Pour que $\mathfrak{I}_{(\alpha)}$ engendre $\mathfrak{I}$ en $\mathfrak{p}$, il faut et il suffit que $\mathfrak{k}_{(\alpha)} \not\subset \mathfrak{p}$.
(b) Si $\mathfrak{I}_{(\alpha)}$ engendre $\mathfrak{I}$ en $\mathfrak{p}$ et $|\alpha| > \mathrm{rang}(\mathfrak{I} \otimes \kappa(\mathfrak{p}))$, alors $\Delta_{(\alpha)} \subset \mathfrak{p}$.
(c) Supposons $\mathfrak{I}_{(\alpha)}$ engendre $\mathfrak{I}$ en $\mathfrak{p}$ et $|\alpha| = \mathrm{rang}(\mathfrak{I} \otimes \kappa(\mathfrak{p}))$; pour que $\Delta_{(\alpha)} \subset \mathfrak{p}$, il faut et il suffit que $\delta \otimes \kappa(\mathfrak{p})$ ne soit pas injectif.

Par suite, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathscr{D}$ est contenu dans $\mathfrak{p}$;
(ii) $\Delta_{(\alpha)} \subset \mathfrak{p}$ pour un (tout) multi-indice α tel que $\mathfrak{I}_{(\alpha)}$ engendre $\mathfrak{I}$ en $\mathfrak{p}$ et $|\alpha| = \mathrm{rang}(\mathfrak{I} \otimes \kappa(\mathfrak{p}))$;
(iii) $\delta \otimes \kappa(\mathfrak{p})$ n'est pas injectif.

1.16.1.3. On peut construire des idéaux jacobiens de $A[\xi_1, \ldots, \xi_N]$ de la façon suivante. Soit

$$\mathrm{L} = (\ell_{i,j})_{1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq m}$$

une matrice à coefficients dans $A[\xi_1, \ldots, \xi_N]$ telle que $(f_i)\mathrm{L} = 0$, de sorte qu'on a un complexe

$$A[\xi_1, \ldots, \xi_N]^m \xrightarrow{\mathrm{L}} A[\xi_1, \ldots, \xi_N]^q \xrightarrow{(f_i)} \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \longrightarrow 0 \, .$$

Pour tout multi-indice

$$(\alpha, \alpha') = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{q-p})$$

tel que α et α' soient des suites croissantes et $\{\alpha, \alpha'\} = \{1, \ldots, q\}$, on désigne par $\mathfrak{d}_{(\alpha')}$ l'idéal de $A[\xi_1, \ldots, \xi_N]$ engendré par les mineurs d'ordre $(q-p)$ de la matrice

$$\mathrm{L}_{(\alpha')} = (\ell_{\alpha'_i, j})_{1 \leq i \leq q-p, 1 \leq j \leq m} .$$

On vérifie aussitôt que $\mathfrak{d}_{(\alpha')} \subset \mathfrak{k}_{(\alpha)}$. Par suite,

$$\mathscr{D}_{\mathrm{L}} = \sum_{(\alpha, \alpha')} \mathfrak{d}_{(\alpha')} \Delta_{(\alpha)} \tag{1.16.1.4}$$

est un idéal jacobien de $A[\xi_1, \ldots, \xi_N]$. De plus, si la suite

$$B^m \xrightarrow{\mathrm{L} \otimes B} B^q \xrightarrow{(f_i)} \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \longrightarrow 0$$

est exacte au-dessus d'un ouvert U de $\mathrm{Spec}(B)$, alors $\mathrm{V}(\mathscr{D}_L B) \cap U = \mathrm{V}(\mathscr{D} B) \cap U$. En effet, pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(\mathfrak{I}) \cap U$ et tout multi-indice (α, α') tel que $\mathfrak{I}_{(\alpha)}$ engendre $\mathfrak{I}$ en $\mathfrak{p}$ et $|\alpha| = \mathrm{rang}(\mathfrak{I} \otimes \kappa(\mathfrak{p}))$, la suite exacte

$$\kappa(\mathfrak{p})^m \xrightarrow{\mathrm{L} \otimes \kappa(\mathfrak{p})} \kappa(\mathfrak{p})^q \xrightarrow{(f_i)} \mathfrak{I} \otimes \kappa(\mathfrak{p}) \longrightarrow 0$$

montre que $\mathfrak{d}_{(\alpha')} \not\subset \mathfrak{p}$. Notre assertion résulte alors de 1.16.1.2.

1.16.2. Soient A un anneau, B une A-algèbre de présentation finie. On dit qu'un idéal de B est *jacobien* relativement à A s'il est l'image par un homomorphisme surjectif de A-algèbres $\varphi\colon A[\xi_1, \dots, \xi_n] \to B$ d'un idéal jacobien de $A[\xi_1, \dots, \xi_n]$ relativement à un ensemble fini de générateurs de $\ker(\varphi)$.

1.16.3. Les notions introduites dans (1.16.1) s'étendent naturellement au cadre idyllique. Plus précisément, si A est un anneau quasi-idyllique et B est une A-algèbre topologiquement de présentation finie :

$$B = A\langle\xi_1, \dots, \xi_N\rangle/\mathfrak{I}, \quad \mathfrak{I} = (f_1, \dots, f_q), \quad f_i \in A\langle\xi_1, \dots, \xi_N\rangle,$$

on peut définir l'idéal $\mathscr{D}$ de $A\langle\xi_1, \dots, \xi_n\rangle$ par la formule (1.16.1.1). On notera que $\mathscr{D}$ ne peut qu'augmenter après extension topologique de la base (1.10.10). On dira qu'un idéal de $A\langle\xi_1, \dots, \xi_N\rangle$ est *jacobien* relativement à $(f_1, \dots, f_q)$ (ou *jacobien* lorsqu'il n'y a aucun risque de confusion) s'il est contenu dans $\mathscr{D}$. Les paragraphes 1.16.1.2 et 1.16.1.3 se généralisent facilement à ce cadre. En particulier, l'ouvert de lissité formelle de B sur A est égal à $\mathrm{Spec}(B) - \mathrm{V}(\mathscr{D}B)$ (1.14.7).

1.16.4. Soient A un anneau quasi-idyllique, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie. On dit qu'un idéal de B est *jacobien* relativement à A s'il est l'image par un homomorphisme surjectif de A-algèbres $\varphi\colon A\langle\xi_1, \dots, \xi_n\rangle \to B$ d'un idéal jacobien de $A\langle\xi_1, \dots, \xi_n\rangle$ relativement à un ensemble fini de générateurs de $\ker(\varphi)$ (1.10.5).

1.16.5. Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, $\mathscr{A}$ l'un des deux anneaux $\mathscr{A} = A[\xi_1, \dots, \xi_N]$ ou $\mathscr{A} = A\langle\xi_1, \dots, \xi_N\rangle$,

$$B = \mathscr{A}/\mathfrak{I}, \quad \mathfrak{I} = (f_1, \dots, f_q), \quad f_i \in \mathscr{A},$$

et $\mathfrak{h}$ un idéal jacobien de $\mathscr{A}$ relativement à $(f_1, \dots, f_q)$.

Lemme 1.16.6 ([17] I lem. 1). *Les hypothèses étant celles de* (1.16.5)*, supposons de plus J principal engendré par t. Il existe alors un entier $k \geq 0$ tel que $A_{\mathrm{tor}} \cap (t^k) = 0$* (1.8.30.1)*. Soient h, n deux entiers ≥ 0 tels que $n > \sup(2h, h+k)$, et soit $x \in A^N$ tel que*

$$\mathfrak{h}(x) \supset (t^h) \quad \textit{et} \quad \mathfrak{I}(x) \subset (t^n).$$

Alors, il existe $y \in A^N$ congru à x modulo (t^{n-h}) et tel que $\mathfrak{I}(y) = 0$.

Comme A_{tor} est de type fini sur A (1.10.2), il existe un entier $k \geq 1$ tel que $t^k A_{\mathrm{tor}} = 0$. Si $a = t^k b \in A_{\mathrm{tor}}$, alors $b \in A_{\mathrm{tor}}$; d'où $A_{\mathrm{tor}} \cap (t^k) = 0$. Une fois l'existence de k démontrée, la preuve de ([17] I lem. 1) s'applique intégralement.

Proposition 1.16.7 ([17] I théo. 1). *Les hypothèses étant celles de* (1.16.5)*, supposons de plus A noethérien* (*resp. J principal*)*. Alors, pour tout entier $h \geq 0$, il existe deux entiers $n_0 > r \geq 0$ tels que si n est un entier $\geq n_0$ et si $x \in A^N$ est tel que*

$$\mathfrak{h}(x) \supset J^h \quad \text{et} \quad \mathfrak{I}(x) \subset J^n,$$

il existe $y \in A^N$ congru à x modulo J^{n-r} et tel que $\mathfrak{I}(y) = 0$.

Le cas où A est noethérien est traité dans *loc. cit.*, et le cas où J est principal résulte de 1.16.6.

Remarques 1.16.8.

(i) Un anneau quasi-idyllique qui n'est pas noethérien, admet un idéal de définition principal. Donc les hypothèses supplémentaires de 1.16.7 sont superflues.

(ii) La preuve de ([17] I théo. 1) montre que le couple d'entiers (n_0, r) dans 1.16.7 ne dépend que de (A, J) et h.

Théorème 1.16.9 ([17] II théo. 2 bis). *Soient (A, J) un couple hensélien quasi-idyllique, $\widehat{A}$ le séparé complété de A pour la topologie J-préadique, B une A-algèbre de présentation finie, $\overline{B} = B \otimes_A \widehat{A}$, V un ouvert de* $\mathrm{Spec}(B)$ *lisse sur* $\mathrm{Spec}(A)$*, $\overline{V}$ son image réciproque dans* $\mathrm{Spec}(\overline{B})$*. Alors, pour tout entier $n \geq 0$ et toute $\widehat{A}$-section $\overline{\varepsilon}$ de* $\mathrm{Spec}(\overline{B})$ *dont la restriction au-dessus de* $\mathrm{Spec}(\widehat{A}) - \mathrm{V}(J\widehat{A})$ *se factorise à travers $\overline{V}$, il existe une A-section ε de* $\mathrm{Spec}(B)$*, congrue à $\overline{\varepsilon}$ modulo J^n et dont la restriction au-dessus de* $\mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$ *se factorise à travers V.*

La preuve sera donnée dans 1.16.15.

Conjuguant 1.16.9 et 1.16.7, on obtient les corollaires suivants :

Corollaire 1.16.10 ([17] II théo. 2). *Soient (A, J) un couple hensélien quasi-idyllique tel que A soit noethérien (resp. J soit principal), h un entier ≥ 0. Alors, il existe deux entiers $n_0 > r \geq 0$ tels que si B est une A-algèbre de présentation finie,*

$$B = A[\xi_1, \ldots, \xi_N]/\mathfrak{I}, \quad \mathfrak{I} = (f_1, \ldots, f_q), \quad f_i \in A[\xi_1, \ldots, \xi_N],$$

$\mathfrak{h}$ est un idéal jacobien de $A[\xi_1, \ldots, \xi_N]$, n est un entier $\geq n_0$ et $x \in A^N$ tel que

$$\mathfrak{h}(x) \supset J^h \quad \text{et} \quad \mathfrak{I}(x) \subset J^n,$$

alors il existe $y \in A^N$ congru à x modulo J^{n-r} et tel que $\mathfrak{I}(y) = 0$.

Corollaire 1.16.11 ([17] II cor. 1). *Soient (A, J) un couple hensélien quasi-idyllique, T un A-schéma affine, X un T-schéma affine de présentation finie, lisse sur T en dehors du fermé* $\mathrm{V}(J)$*. Pour toute section $\sigma\colon$* $\mathrm{Spec}(A) \to T$*, désignons par X_σ le A-schéma déduit de X par le changement de base σ :*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d] & \\
T \arrow[d] & X_\sigma \arrow[ul] \arrow[d] \\
\mathrm{Spec}(A) & \mathrm{Spec}(A) \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \arrow[ul, "\sigma"']
\end{tikzcd}$$

Alors, il existe deux entiers $n_0 > r \geq 0$ tels que pour toute section $\sigma\colon$ $\mathrm{Spec}(A) \to$ *T, tout entier $n > n_0$ et tout A-morphisme $\varepsilon_n\colon$* $\mathrm{Spec}(A/J^n) \to X_\sigma$*, il existe une section $\varepsilon\colon$* $\mathrm{Spec}(A) \to X_\sigma$ *congrue à ε_n modulo J^{n-r}.*

Nous aurons besoin pour la preuve de 1.16.9 du résultat suivant plus précis que 1.16.10, dans un cas particulier.

Lemme 1.16.12 ([17] II lem. 2). *Soient* (A, J) *un couple hensélien,* B *une* A*-algèbre de présentation finie,*

$$B = A[\xi_1, \dots, \xi_N]/\mathfrak{I}, \quad \mathfrak{I} = (f_1, \dots, f_q), \quad f_i \in A[\xi_1, \dots, \xi_N],$$

Δ *l'idéal de* $A[\xi_1, \dots, \xi_N]$ *engendré par les mineurs d'ordre* q *de la matrice jacobienne*

$$\mathrm{M} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}\right)_{1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq N}.$$

Soient n, h *deux entiers tels que* $n > 2h$*,* $x \in A^N$ *tel que*

$$\Delta(x) \supset J^h \quad \text{et} \quad \mathfrak{I}(x) \subset J^n.$$

Alors, il existe $y \in A^N$ *congru à* x *modulo* J^{n-h} *et tel que* $\mathfrak{I}(y) = 0$*.*

On notera que la preuve de ([17] II lem. 2) utilise le fait que J^h est de type fini, ce qui n'est pas nécessaire. En effet, il existe un idéal de type fini K de A tel que $K \subset J^h$ et $\mathfrak{I}(x) \subset J^{n-2h}K^2$. Il suffit alors de prendre dans *loc. cit.* pour $(t_1, \dots, t_r)$ un système de générateurs de K (au lieu d'un système de générateurs de J^h).

Montrons ensuite le théorème 1.16.9 sous des hypothèses différentes.

Lemme 1.16.13. *Soient* (A, J) *un couple hensélien quasi-idyllique,* $\widehat{A}$ *le séparé complété de* A *pour la topologie* J*-préadique,* B *une* A*-algèbre de type fini, quotient d'une algèbre de polynômes* $A[\xi_1, \dots, \xi_N]$ *par un idéal* $\mathfrak{I}$*,* $\overline{B} = B \otimes_A \widehat{A}$*,* V *un ouvert de* $\mathrm{Spec}(B)$*,* $\overline{V}$ *son image réciproque dans* $\mathrm{Spec}(\overline{B})$*. Supposons les conditions suivantes remplies :*

(i) *J est principal engendré par t.*
(ii) *V est lisse sur $\mathrm{Spec}(A)$ de dimension relative constante d.*
(iii) *$\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$ est libre de rang $N-d$ sur tout ouvert affine de $\mathrm{Spec}(B)$ contenu dans V.*

Alors, pour tout entier $n \geq 0$ *et toute* $\widehat{A}$*-section* $\overline{\varepsilon}$ *de* $\mathrm{Spec}(\overline{B})$ *dont la restriction au-dessus de* $\mathrm{Spec}(\widehat{A}) - \mathrm{V}(J\widehat{A})$ *se factorise à travers* $\overline{V}$*, il existe une* A*-section* ε *de* $\mathrm{Spec}(B)$*, congrue à* $\overline{\varepsilon}$ *modulo* J^n *et dont la restriction au-dessus de* $\mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$ *se factorise à travers* V*.*

Nous utiliserons souvent la remarque suivante : soient $\mathfrak{a}$ un idéal de A, n, α deux entiers tels que $n > \alpha \geq 0$. Si $t^\alpha \in t^n A + \mathfrak{a}$, alors $t^\alpha \in \mathfrak{a}$. En effet, $J = tA$ est contenu dans le radical de A.

Il suffit de montrer que pour tout n, il existe une A-section ε de $\mathrm{Spec}(B)$ congrue à $\overline{\varepsilon}$ modulo J^n. En effet, soit $\mathfrak{b}$ un idéal de B tel que $V = \mathrm{Spec}(B) - \mathrm{V}(\mathfrak{b})$. L'hypothèse sur $\overline{\varepsilon}$ signifie qu'il existe un entier α tel que $t^\alpha \in \overline{\varepsilon}^*(\mathfrak{b})$. Alors toute

A-section ε de $\mathrm{Spec}(B)$ congrue à $\overline{\varepsilon}$ modulo (t^n) pour $n > \alpha$, vérifie $t^\alpha \in \varepsilon^*(\mathfrak{b})$ et se factorise donc à travers V au-dessus de $\mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$.

Notons

$$\begin{aligned} j\colon \mathrm{Spec}(B) &\to \mathrm{Spec}(A[\xi_1, \ldots, \xi_N]), \\ \overline{j}\colon \mathrm{Spec}(\overline{B}) &\to \mathrm{Spec}(\widehat{A}[\xi_1, \ldots, \xi_N]), \\ \overline{\varepsilon}\colon \mathrm{Spec}(\widehat{A}) &\to \mathrm{Spec}(\overline{B}), \end{aligned}$$

les morphismes donnés. Montrons qu'il existe un ouvert affine de V dont l'image réciproque dans $\overline{V}$ contient $\overline{\varepsilon}(\mathrm{Spec}(\widehat{A}) - \mathrm{V}(J\widehat{A}))$. Soient H un idéal de $A[\xi_1, \ldots, \xi_N]$ tel que $V = \mathrm{Spec}(B) - \mathrm{V}(HB)$, $\overline{K}$ l'idéal de $\widehat{A}[\xi_1, \ldots, \xi_N]$ défini par l'immersion fermée $\overline{j} \circ \overline{\varepsilon}$. Par hypothèse, il existe un entier α tel que

$$H\widehat{A}[\xi_1, \ldots, \xi_N] + \overline{K} \supset t^\alpha \widehat{A}[\xi_1, \ldots, \xi_N].$$

Écrivons $t^\alpha = \overline{h} + \overline{k}$, où $\overline{h} \in H\widehat{A}[\xi_1, \ldots, \xi_N]$ et $\overline{k} \in \overline{K}$. Soit $h \in H$ tel que $h \equiv \overline{h} \mod (t^{\alpha+1})$; alors il existe $\overline{y} \in \widehat{A}[\xi_1, \ldots, \xi_N]$ tel que $t^\alpha(1 + t\overline{y}) = h + \overline{k}$. Comme $(\overline{j} \circ \overline{\varepsilon})^*(1 + t\overline{y})$ est inversible dans $\widehat{A}$, l'ouvert de $\mathrm{Spec}(B)$ où h est inversible, répond à la question.

Comme V est lisse sur $\mathrm{Spec}(A)$ et $\mathrm{Spec}(B_h) \subset V$, B_h est une A-algèbre de présentation finie ; donc $\mathfrak{I}_h$ est de type fini sur $A[\xi_1, \ldots, \xi_N]_h$. Soit S le sous-ensemble multiplicatif de $A[\xi_1, \ldots, \xi_N]$ des éléments de la forme $h^m + f$, où $m \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathfrak{I}$. Les hypothèses entraînent qu'il existe des éléments f_i $(1 \leq i \leq N - d)$ de $\mathfrak{I}$, engendrant $\mathfrak{I}$ sur $\mathrm{Spec}(A[\xi_1, \ldots, \xi_N][S^{-1}])$. Quitte à multiplier h par un nombre fini d'éléments de S, ce qui ne change pas l'ouvert $\mathrm{Spec}(B_h)$ de $\mathrm{Spec}(B)$, on peut supposer que les f_i engendrent $\mathfrak{I}$ sur l'ouvert $\mathrm{Spec}(A[\xi_1, \ldots, \xi_N]_h)$.

Soit Δ l'idéal de $A[\xi_1, \ldots, \xi_N]$ engendré par les mineurs d'ordre $N - d$ de la matrice jacobienne $(\partial f_i / \partial \xi_j)_{1 \leq i \leq N-d, 1 \leq j \leq N}$. On peut trouver un entier γ tel que

$$(\overline{j} \circ \overline{\varepsilon})^*(\Delta) \supset t^\gamma \widehat{A}.$$

Soient n un entier $> 2\gamma$, σ_0 une A-section de $\mathrm{Spec}(A[\xi_1, \ldots, \xi_N])$ congrue à $\overline{j} \circ \overline{\varepsilon}$ modulo J^n. On a encore $\sigma_0^*(\Delta) \supset t^\gamma A$ et $\sigma_0^*(f_1, \ldots, f_{N-d}) \subset t^n A$. Par suite, d'après 1.16.12, on peut trouver une A-section σ de $\mathrm{Spec}(A[\xi_1, \ldots, \xi_N])$, congrue à σ_0 (donc aussi à $\overline{j} \circ \overline{\varepsilon}$) modulo $J^{n-\gamma}$ et telle que

$$\sigma^*(f_1, \ldots, f_{N-d}) = 0.$$

D'autre part, il existe un entier α tel que $(\overline{j} \circ \overline{\varepsilon})^*(h) \supset t^\alpha \widehat{A}$. Pour $n > \alpha + \gamma$, on aura encore $\sigma^*(h) \supset t^\alpha A$. Pour tout élément $f \in \mathfrak{I}$, il existe un entier m tel que $h^m f \in (f_1, \ldots, f_{N-d})$; donc $\sigma^*(\mathfrak{I}) \subset A_{J\text{-tor}}$. Utilisant encore une fois la congruence $\sigma \equiv \overline{j} \circ \overline{\varepsilon} \mod (t^{n-\gamma})$, on voit que $\sigma^*(\mathfrak{I}) \subset t^{n-\gamma} A$. Il résulte de 1.15.12(iii) que si n est suffisamment grand, $A_{J\text{-tor}} \cap (t^{n-\gamma}) = 0$, d'où $\sigma^*(\mathfrak{I}) = 0$, ce qui achève la démonstration.

Lemme 1.16.14 ([17] II lem. 3). *Soient A un anneau, B une A-algèbre de présentation finie,*

$$B = A[\xi_1, \dots, \xi_N]/\mathfrak{I}, \quad \mathfrak{I} = (f_1, \dots, f_q), \quad f_i \in A[\xi_1, \dots, \xi_N],$$

C l'algèbre symétrique du B-module $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$, V un ouvert de $\mathrm{Spec}(B)$ *lisse sur* $\mathrm{Spec}(A)$*, V' l'image réciproque de V dans* $\mathrm{Spec}(C)$*. Alors, V' est lisse sur* $\mathrm{Spec}(A)$ *de dimension relative constante N. Il existe un plongement de* $\mathrm{Spec}(C)$ *dans l'espace affine de dimension $2N + q$ sur A tel que sur tout ouvert affine de* $\mathrm{Spec}(C)$ *contenu dans V', le faisceau conormal de cette immersion soit libre de rang $N+q$.*

On notera que la condition que A est noethérien dans ([17] II lem. 3) est superflue.

1.16.15. Revenons maintenant à la démonstration de 1.16.9. Le cas où A est noethérien est traité dans ([17] II théo. 2 bis) ; on peut donc se borner au cas où J est principal (1.15.5.5). Il suffit de montrer que pour tout n, il existe une A-section ε de $\mathrm{Spec}(B)$ congrue à $\overline{\varepsilon}$ modulo J^n (cf. la preuve de 1.16.13). Considérons une présentation finie

$$B = A[\xi_1, \dots, \xi_N]/\mathfrak{I}, \quad \mathfrak{I} = (f_1, \dots, f_q), \quad f_i \in A[\xi_1, \dots, \xi_N],$$

et notons C l'algèbre symétrique du B-module $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$ et V' l'image réciproque de V dans $\mathrm{Spec}(C)$. D'après 1.16.14, le couple (C, V') vérifie les conditions d'applications du lemme 1.16.13. D'autre part, le plongement de $\mathrm{Spec}(\overline{B})$ dans $\mathrm{Spec}(C \otimes_A \widehat{A})$ par la section nulle, permet de relever $\overline{\varepsilon}$ en une $\widehat{A}$-section $\overline{\sigma}$ de $\mathrm{Spec}(C \otimes_A \widehat{A})$. Donc en vertu de 1.16.13, il existe une A-section σ de $\mathrm{Spec}(C)$ congrue à $\overline{\sigma}$ modulo J^n. La projection de σ sur $\mathrm{Spec}(B)$ est une A-section de $\mathrm{Spec}(B)$ qui répond à la question.

Signalons la variante suivante de 1.16.9 où l'on ne suppose plus B de présentation finie sur A :

Proposition 1.16.16. *Soient (A, J) un couple hensélien quasi-idyllique, $\widehat{A}$ le séparé complété de A pour la topologie J-préadique, M un A-module de présentation finie, localement libre au-dessus de l'ouvert* $\mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$*, B l'algèbre symétrique de M, $\overline{B} = B \otimes_A \widehat{A}$, $\overline{\varepsilon}$ une $\widehat{A}$-section de* $\mathrm{Spec}(\overline{B})$*. Alors, pour tout entier $n \geq 0$, il existe une A-section ε de* $\mathrm{Spec}(B)$*, congrue à $\overline{\varepsilon}$ modulo J^n.*

En effet, on se ramène, comme dans la démonstration de 1.16.9, à appliquer 1.16.13, grâce au lemme suivant :

Lemme 1.16.17. *Soient A un anneau, M un A-module de présentation finie, localement libre sur un ouvert U de* $\mathrm{Spec}(A)$*,*

$$A^q \xrightarrow{u} A^p \xrightarrow{v} M \longrightarrow 0$$

une présentation de M, N le noyau de v, B la A-algèbre symétrique de M, C la B-algèbre symétrique de $N \otimes_A B$, V' l'image réciproque de U dans $\mathrm{Spec}(C)$*.*

Alors, V' est lisse sur $\mathrm{Spec}(A)$ *de dimension relative constante p. Il existe un A-plongement de* $\mathrm{Spec}(C)$ *dans l'espace affine de dimension $2p+q$ sur A tel que sur tout ouvert affine de* $\mathrm{Spec}(C)$ *contenu dans V', le faisceau conormal de cette immersion soit libre de rang $p+q$.*

La première assertion est évidente. Soit W un ouvert affine de $\mathrm{Spec}(C)$ contenu dans V'. On peut écrire au-dessus de W les suites exactes suivantes qui sont des suites exactes de modules localement libres sur un schéma affine, donc scindées :

$$0 \to (N \otimes_A C)^{\sim}|W \to \mathscr{O}_W^p \to (M \otimes_A C)^{\sim}|W \to 0,$$
$$0 \to (\Omega^1_{B/A} \otimes_B C)^{\sim}|W \to (\Omega^1_{C/A})^{\sim}|W \to (\Omega^1_{C/B})^{\sim}|W \to 0.$$

D'autre part, $\Omega^1_{B/A}$ s'identifie à $M \otimes_A B$ et $\Omega^1_{C/B}$ à $N \otimes_A C$. On en déduit que $\Omega^1_{C/A}$ est globalement libre de rang p sur W.

Le morphisme v permet de plonger $\mathrm{Spec}(B)$ dans $\mathrm{Spec}(A[\xi_1, \dots, \xi_p])$, et le morphisme u induit un plongement de $\mathrm{Spec}(C)$ dans $\mathrm{Spec}(B[\zeta_1, \dots, \zeta_q])$. Donc on peut aussi considérer $\mathrm{Spec}(C)$ comme plongé dans $\mathrm{Spec}(A[\xi_1, \dots, \xi_p, \zeta_1, \dots, \zeta_q])$; soit K/K^2 le faisceau conormal de cette immersion. On a la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \to (K/K^2)^{\sim}|W \to (\Omega^1_{A[\xi_1,\dots,\xi_p,\zeta_1,\dots,\zeta_q]/A} \otimes_{A[\xi_1,\dots,\xi_p,\zeta_1,\dots,\zeta_q]} C)^{\sim}|W \\ \to (\Omega^1_{C/A})^{\sim}|W \to 0. \end{aligned}$$

Donc, compte tenu des isomorphismes précédents, on a une suite exacte

$$0 \to (K/K^2)^{\sim}|W \to \mathscr{O}_W^{p+q} \to \mathscr{O}_W^p \to 0. \qquad (1.16.17.1)$$

On plonge alors $\mathrm{Spec}(C)$ dans $\mathrm{Spec}(A[\xi_1, \dots, \xi_p, \zeta_1, \dots, \zeta_q, t_1, \dots, t_p])$ dans lequel il est défini par les équations supplémentaires $t_i = 0$ pour $1 \le i \le p$. Soit K'/K'^2 le faisceau conormal de cette nouvelle immersion. On a alors, d'après (1.16.17.1),

$$(K'/K'^2)^{\sim}|W \simeq (K/K^2)^{\sim}|W \oplus \mathscr{O}_W^p \simeq \mathscr{O}_W^{p+q},$$

ce qui achève la preuve.

Théorème 1.16.18 ([17] II). *Soient (A, J) un couple hensélien, B une A-algèbre lisse, n un entier ≥ 1, ε_n*: $\mathrm{Spec}(A/J^n) \to \mathrm{Spec}(B)$ *un A-morphisme. Alors il existe une section ε*: $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(B)$ *relevant ε_n.*

Compte tenu de 1.16.14, on peut se ramener, comme dans la preuve de 1.16.9, au cas où B est globalement une intersection complète relative sur A. Le théorème résulte alors de 1.16.12.

Théorème 1.16.19 ([17] III théo. 3). *Soient (A, J) un couple hensélien quasi-idyllique, $\widehat{A}$ le séparé complété de A pour la topologie J-préadique, $\widehat{M}$ un $\widehat{A}$-module* *de présentation finie, localement libre au-dessus de* $\mathrm{Spec}(\widehat{A}) - \mathrm{V}(J\widehat{A})$*,*

$$\widehat{A}^p \xrightarrow{\widehat{\mathrm{L}}} \widehat{A}^q \longrightarrow \widehat{M} \longrightarrow 0 \tag{1.16.19.1}$$

une présentation de $\widehat{M}$*. Alors, pour tout entier* n*, on peut trouver une présentation*

$$A^p \xrightarrow{\mathrm{L}} A^q \longrightarrow M \longrightarrow 0 \tag{1.16.19.2}$$

d'un A*-module* M*, localement libre au-dessus de* $\mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$*, telle que l'on ait* $\mathrm{L} \equiv \widehat{\mathrm{L}} \mod (J^n)$*, et un isomorphisme de* $M \otimes_A \widehat{A}$ *sur* $\widehat{M}$ *induit par des automorphismes* $\widehat{A}$*-linéaires de* $\widehat{A}^p$ *et* $\widehat{A}^q$*, congrus à l'identité modulo* J^n*.*

On dira que (1.16.19.2) est une présentation de M de type (p, q). On peut classifier les A-modules munis d'une présentation de type (p, q) par les matrices (p, q), donc par une algèbre de polynômes à pq variables sur A, soit $A[X] = A[(X_{ij})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq q}]$; notons aussi $X = (X_{ij})$ la matrice (p, q) universelle.

Soit $\Delta^{(k)}$ l'idéal de $A[X]$ engendré par les mineurs de rang k de la matrice X. Dire qu'un module admettant une présentation de type (p, q), est libre de rang r au voisinage d'un point équivaut à dire que les mineurs d'ordre $q - r + 1$ de la matrice associée sont nuls en ce point et qu'un des mineurs d'ordre $q - r$ y est inversible. La première condition traduit que le rang du module en ce point est au moins égal à r.

Posons $U = \mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$, qui est un schéma noethérien (1.15.12), et soient $U_1, \ldots, U_\ell$ les différentes composantes connexes de U. Comme les U_i sont quasi-compacts, il existe des idéaux de type fini $I_1, \ldots, I_\ell$ de A tels que $U_i = \mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(I_i)$.

Soient U' l'image réciproque de U dans $\mathrm{Spec}(\widehat{A})$, U'_i $(1 \leq i \leq \ell)$ celle de U_i. On sait (1.15.16) que les U'_i forment une décomposition de U' en composantes connexes.

Pour tout $i \in [1, \ell]$, désignons par r'_i le rang de $\widehat{M}$ sur U'_i. Montrons qu'il existe un entier β_i tel que tout élément de $A_{I_i\text{-tor}}$ soit annulé par $I_i^{\beta_i}$ (1.8.30). L'assertion étant évidente si A est noethérien, on peut se borner au cas où J est principal engendré par t. Comme $\mathrm{V}(J) \subset \mathrm{V}(I_i)$, on a la suite exacte

$$0 \to A_{(t)\text{-tor}} \to A_{I_i\text{-tor}} \to (A_t)_{I_i\text{-tor}}.$$

Par ailleurs, $A_{(t)\text{-tor}}$ est un A-module de type fini (1.15.12) ; il est donc annulé par une puissance de I_i, soit $I_i^{\alpha_i}$. Comme A_t est noethérien, $(A_t)_{I_i\text{-tor}}$ est annulé par une puissance de I_i, soit $I_i^{\gamma_i}$. On peut alors prendre $\beta_i = \alpha_i + \gamma_i$. De même, quitte à augmenter β_i, on peut supposer que tout élément de $\widehat{A}_{I_i\text{-tor}}$ est annulé par $I_i^{\beta_i}$.

Soient $(t_{i1}, \ldots, t_{ik_i})$ un système de générateurs de $I_i^{\beta_i}$ (pour $1 \leq i \leq \ell$), B le quotient de $A[X]$ par l'idéal

$$\sum_{i,\mu} t_{i\mu} \Delta^{(q-r_i+1)},$$

qui exprime que les mineurs d'ordre $q - r_i + 1$ sont nuls au-dessus de U_i. La A-algèbre B classifie les A-modules munis d'une présentation de type (p, q) et qui sont de rang au moins égale à r_i sur U_i pour tout $1 \leq i \leq \ell$. La $\widehat{A}$-algèbre $B \otimes_A \widehat{A}$ classifie les $\widehat{A}$-modules munis d'une présentation de type (p, q) et qui sont de rang au moins égale à r_i sur U'_i pour tout $1 \leq i \leq \ell$.

Soient, pour $1 \leq i \leq \ell$, V_i l'ouvert de $\mathrm{Spec}(B)$ au-dessus de U_i où l'idéal engendré par $\Delta^{(q-r_i)}$ est l'idéal unité, $V = \cup_i V_i$, V' l'image réciproque de V dans $\mathrm{Spec}(B \otimes_A \widehat{A})$. La matrice $\widehat{\mathrm{L}}$ (1.16.19.1) est définie par une $\widehat{A}$-section $\overline{\varepsilon}$ de $\mathrm{Spec}(B \otimes_A \widehat{A})$ telle que $\overline{\varepsilon}(U') \subset V'$.

On montre facilement que V est lisse sur $\mathrm{Spec}(A)$ (cf. [17] III théo. 3). Donc d'après 1.16.9, pour tout $n \geq 1$, on peut trouver une A-section de $\mathrm{Spec}(B)$, congrue à $\overline{\varepsilon}$ modulo J^n et dont la restriction au-dessus de U se factorise à travers V ; autrement dit, on peut trouver une matrice L de taille (p, q) à coefficients dans A, congrue à $\widehat{\mathrm{L}}$ modulo J^n telle que le module M défini par

$$A^p \xrightarrow{\mathrm{L}} A^q \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

soit localement libre de rang r_i au-dessus de U_i pour tout $1 \leq i \leq \ell$.

La fin de la démonstration du théorème 1.16.19 est identique à celle de ([17] III théo. 3) ; en effet, le lemme 5 page 570 et le lemme page 572 sont vrais pour un couple hensélien quasi-idyllique ; on notera pour le second que la condition $J^h \cap H = 0$ est satisfaite compte tenu de 1.15.12(i).

Proposition 1.16.20. *Soient (A, J) un couple hensélien, n un entier ≥ 0, $A_n = A/J^{n+1}$, M_n un A_n-module localement libre de type fini,*

$$A_n^p \xrightarrow{\mathrm{L}_n} A_n^q \longrightarrow M_n \longrightarrow 0 \qquad (1.16.20.1)$$

une présentation de M_n. Alors, on peut trouver une présentation

$$A^p \xrightarrow{\mathrm{L}} A^q \longrightarrow M \longrightarrow 0 \qquad (1.16.20.2)$$

d'un A-module localement libre M telle que L *relève* L_n.

Quitte à remplacer A par eA, où e est un idempotent de A, on peut supposer le rang r de M_n sur A_n contant (1.15.4). Reprenons les notations de la preuve de 1.16.19 et notons C le quotient de $A[X]$ par l'idéal $\Delta^{(q-r+1)}$ et W l'ouvert (affine) de $\mathrm{Spec}(C)$ où l'idéal engendré par $\Delta^{(q-r)}$ est l'idéal unité. On montre facilement que W est lisse sur $\mathrm{Spec}(A)$ (cf. [17] III théo. 3). La matrice L_n définit un A-morphisme $\varepsilon_n \colon \mathrm{Spec}(A_n) \to W$, qu'on peut relever en une A-section de W en vertu de 1.16.18, d'où la proposition.

1.16.21. Soient X un schéma,

$$\mathscr{O}_X^p \xrightarrow{\mathrm{L}} \mathscr{O}_X^q \xrightarrow{\pi} \mathscr{F} \longrightarrow 0 \qquad (1.16.21.1)$$

une présentation d'un $\mathscr{O}_X$-module $\mathscr{F}$. Une structure de $\mathscr{O}_X$-algèbre commutative sur $\mathscr{F}$ munie d'une rigidification relativement à la présentation (1.16.21.1) consiste en la donnée des applications $\mathscr{O}_X$-linéaires suivantes :

$$\begin{array}{rcl} m & : & \mathscr{O}_X^q \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X^q \to \mathscr{O}_X^q, \\ \varphi & : & \mathscr{O}_X^p \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X^q \to \mathscr{O}_X^p, \\ \varepsilon & : & \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X^q, \\ \psi & : & \mathscr{O}_X^q \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X^q \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X^q \to \mathscr{O}_X^p, \\ y & : & \mathscr{O}_X^q \to \mathscr{O}_X^p, \end{array}$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

(a) m est symétrique et $m(\mathrm{L} \otimes 1) = \mathrm{L} \circ \varphi$. Ces relations expriment le fait que m passe au quotient et permet de définir une application bilinéaire symétrique sur $\mathscr{F}$.

(b) $m(1 \otimes m) - m(m \otimes 1) = \mathrm{L} \circ \psi$ (associativité).

(c) $m(1 \otimes \varepsilon) - \mathrm{id}_{\mathscr{O}_X^q} = \mathrm{L} \otimes y$. Cette relation exprime le fait que $\pi(\varepsilon(1))$ définit sur $\mathscr{F}$ un élément neutre pour la multiplication et $\pi \circ \varepsilon$ munit $\mathscr{F}$ d'une structure de $\mathscr{O}_X$-algèbre.

On désigne par **Sch** la catégorie des schémas (éléments d'un univers fixé). Soit $\mathscr{R}$ le préfaisceau sur $\mathbf{Sch}_{/X}$ défini pour tout X-schéma Y par $\mathscr{R}(Y)$ est l'ensemble des structures de $\mathscr{O}_Y$-algèbres rigidifiées sur $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Y$ relativement à la présentation déduite de (1.16.21.1).

Lemme 1.16.22. *Conservons les hypothèses et notations de* (1.16.21).

(i) *Le préfaisceau $\mathscr{R}$ est représentable par un X-schéma affine de présentation finie Z.*

(ii) *Supposons le $\mathscr{O}_X$-module $\mathscr{F}$ localement libre de type fini, et soit $\mathscr{A}$ la $\mathscr{O}_Z$-algèbre universelle sous-jacente à $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Z$. Alors le sous-objet $\mathscr{S}$ de $\mathscr{R}$ qui rend* $\mathrm{Spec}(\mathscr{A})$ *étale au-dessus de X est représentable par un ouvert V de Z tel que le morphisme $V \to X$ soit affine et lisse.*

(i) La démonstration est très simple (cf. [17] Lemme page 576).

(ii) Comme $\mathscr{A}$ est une $\mathscr{O}_Z$-algèbre de présentation finie ([28] 6.2.10), $\mathscr{S}$ est représentable par un ouvert V de Z, défini localement en inversant un discriminant ([31] 18.2.4) ; en particulier, l'injection canonique $V \to Z$ est affine. Il reste à montrer que V est formellement lisse sur X, c'est à dire, que pour tout schéma affine Y, tout sous-schéma fermé Y_0 de Y défini par un idéal nilpotent $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_Y$, et tout morphisme $Y \to X$, l'application $\mathscr{S}(Y) \to \mathscr{S}(Y_0)$ est surjective. Supposons donnée une structure de $\mathscr{O}_{Y_0}$-algèbre rigidifiée sur $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{Y_0}$ relativement à la présentation déduite de (1.16.21.1), telle que si $\mathscr{B}_0$ est la $\mathscr{O}_{Y_0}$-algèbre sous-jacente à $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{Y_0}$, $\mathrm{Spec}(\mathscr{B}_0)$ soit étale au-dessus de Y_0. D'après ([31] 18.1.2), il existe un morphisme étale $f\colon Y' \to Y$ et un Y_0-isomorphisme $Y' \times_Y Y_0 \simeq \mathrm{Spec}(\mathscr{B}_0)$.

Il est clair que f est propre ([29] 5.4.6). Par suite f est fini ([31] 8.11.1). Posons $\mathscr{B} = f_*(\mathscr{O}_{Y'})$, qui est donc un $\mathscr{O}_Y$-module localement libre de type fini ([31] 18.2.3). Comme Y est affine, $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Y$ et $\mathscr{B}$ sont des facteurs directs de deux $\mathscr{O}_Y$-modules libres de type fini. On en déduit qu'il existe deux morphismes $\mathscr{O}_Y$-linéaires $u\colon \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Y \to \mathscr{B}$ et $v\colon \mathscr{B} \to \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Y$ qui relèvent respectivement l'isomorphisme canonique $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{Y_0} \xrightarrow{\sim} \mathscr{B}_0$ et son inverse. Comme $\mathscr{J}$ est nilpotent, $u \circ v$ et $v \circ u$ sont des automorphismes de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Y$ respectivement. Donc $(\mathscr{B}, u)$ définit une structure de $\mathscr{O}_Y$-algèbre sur $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Y$, que l'on peut facilement munir d'une rigidification relativement à la présentation déduite de (1.16.21.1), qui relève celle de $\mathscr{B}_0$. Par suite, l'application $\mathscr{S}(Y) \to \mathscr{S}(Y_0)$ est surjective.

Théorème 1.16.23 ([17] II théo. 5). *Soient (A, J) un couple hensélien quasi-idyllique, $\widehat{A}$ le séparé complété de A pour la topologie J-préadique. Notons $\mathbf{C}(A)$ la catégorie des A-algèbres finies, de présentation finie et induisant un revêtement étale de $U = \operatorname{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$, et $\mathbf{C}(\widehat{A})$ la catégorie des $\widehat{A}$-algèbres finies, de présentation finie et induisant un revêtement étale de $\overline{U} = \operatorname{Spec}(\widehat{A}) - \mathrm{V}(J\widehat{A})$. Alors le foncteur $B \mapsto B \otimes_A \widehat{A}$ induit une équivalence de catégories*

$$\mathbf{C}(A) \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}(\widehat{A}). \tag{1.16.23.1}$$

On peut évidemment se borner soit au cas où A est noethérien, soit au cas où J est principal (1.16.8). Montrons d'abord que le foncteur (1.16.23.1) est essentiellement surjectif. Soient $\overline{C}$ un objet de $\mathbf{C}(\widehat{A})$, M un A-module de présentation finie tel que M soit localement libre au-dessus de U et $M \otimes_A \widehat{A}$ soit isomorphe à $\overline{C}$ (1.16.19), muni d'une présentation

$$A^p \xrightarrow{\mathrm{L}} A^q \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0\ . \tag{1.16.23.2}$$

Le préfaisceau des structures d'algèbres rigidifiées sur M est représentable par un A-schéma affine de présentation finie X (1.16.22). Soit $\mathscr{A}$ la $\mathscr{O}_X$-algèbre universelle sous-jacente à $M \otimes_A \mathscr{O}_X$; c'est une $\mathscr{O}_X$-algèbre de présentation finie ([28] 6.2.10). D'après 1.16.22(ii), il existe un ouvert maximal V de $X \times_{\operatorname{Spec}(A)} U$ au-dessus duquel le morphisme $\operatorname{Spec}(\mathscr{A}) \to X$ est étale, et V est lisse sur U. Soit $\overline{V}$ l'image réciproque de V dans $X \otimes_A \widehat{A}$. L'algèbre $\overline{C}$ correspond à une section $\overline{\varepsilon}$ de $X \otimes_A \widehat{A}$ qui se factorise au-dessus de $\overline{U}$ à travers $\overline{V}$. Soit $\mathrm{H}_{\mathscr{A}}$ un idéal jacobien de $\mathscr{A}$ relativement à $\mathscr{O}_X$. Si l'on identifie $\overline{C}$ avec $\overline{\varepsilon}^*(\mathscr{A})$ et l'on note $\mathrm{H}_{\overline{C}}$ l'image inverse de $\mathrm{H}_{\mathscr{A}}$ par $\overline{\varepsilon}$, il existe un entier h tel que $\mathrm{H}_{\overline{C}} \supset J^h\overline{C}$.

L'algèbre $\overline{C}$ munie de la topologie J-adique étant quasi-idyllique, il existe, d'après 1.16.7, deux entiers $n_0 > r \geq 0$ tels que si B est une $\overline{C}$-algèbre de présentation finie et si $\mathfrak{h}$ est un idéal jacobien de B relativement à $\overline{C}$, pour tout $n > \sup(n_0, h)$ et toute section $\sigma_n\colon \operatorname{Spec}(\overline{C}/J^n\overline{C}) \to \operatorname{Spec}(B/J^nB)$ telle que $\sigma_n^*(\mathfrak{h}) \supset (J^h\overline{C}/J^n\overline{C})$, on puisse trouver une section $\sigma\colon \operatorname{Spec}(\overline{C}) \to \operatorname{Spec}(B)$ congrue à σ_n modulo J^{n-r}. On vérifie aisément que les conditions requises impliquent celles de 1.16.7.

Fixons $n > \sup(n_0, h)$. Soit C une A-algèbre définie par une A-section ε de X, congrue à $\overline{\varepsilon}$ modulo J^n et se factorisant à travers V au-dessus de U. Une telle section existe par 1.16.9. Identifions C avec $\varepsilon^*(\mathscr{A})$ et notons H_C l'image inverse de $\mathrm{H}_{\mathscr{A}}$ par ε (qui est un idéal jacobien de C relativement à A). Il résulte du choix de n que $\mathrm{H}_C \supset J^h C$, et par suite, l'isomorphisme de A-algèbres entre C/J^nC et $\overline{C}/J^n\overline{C}$ est congru modulo J^{n-r} à un morphisme de $\widehat{A}$-algèbres

$$\varphi\colon C \otimes_A \widehat{A} \to \overline{C}. \tag{1.16.23.3}$$

Cette application est surjective par le lemme de Nakayama. De plus, l'isomorphisme $C/J^nC \to \overline{C}/J^n\overline{C}$ provient par construction d'un isomorphisme des $\widehat{A}$-modules $C \otimes_A \widehat{A}$ et $\overline{C}$, de sorte que φ, congru modulo J^{n-r} à un isomorphisme de modules, est un isomorphisme de modules et donc d'algèbres. Par suite, le foncteur (1.16.23.1) est essentiellement surjectif.

Montrons ensuite que le foncteur (1.16.23.1) est pleinement fidèle. Cela revient à montrer que pour tous objets B, B' de $\mathbf{C}(A)$, l'application

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-}\mathrm{Alg}}(B, B') \to \mathrm{Hom}_{\widehat{A}\text{-}\mathrm{Alg}}(B \otimes_A \widehat{A}, B' \otimes_A \widehat{A}) \tag{1.16.23.4}$$

est bijective. Comme $\widehat{A}$ est fidèlement plat sur A (1.15.12), il n'y a que la surjectivité à prouver. Le changement de base $A \to B'$ permet de ramener au cas où $B' = A$. Soient donc B un objet de $\mathbf{C}(A)$, $\overline{\varepsilon}\colon B \otimes_A \widehat{A} \to \widehat{A}$ une section. En vertu de 1.16.9, pour tout entier $n \geq 0$, il existe une A-section $\varepsilon\colon B \to A$ congrue à $\overline{\varepsilon}$ modulo J^n. Mais en vertu de 1.14.16, il existe $n_0 \geq 1$ tel que si $n \geq n_0$, on ait $\overline{\varepsilon} = \varepsilon \otimes_A \widehat{A}$; d'où la surjectivité de (1.16.23.4).

Proposition 1.16.24 (Gabber, [21] lem. 1.1). *Soit (A, J) un couple hensélien. Alors le foncteur $B \mapsto B/JB$ induit une équivalence de la catégorie des A-algèbres finies et étales avec la catégorie des (A/J)-algèbres finies et étales.*

Montrons d'abord que le foncteur en question est pleinement fidèle. Cela revient à montrer que pour toutes A-algèbres finies étales B et B', l'application canonique

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-}\mathrm{Alg}}(B, B') \to \mathrm{Hom}_{A\text{-}\mathrm{Alg}}(B/JB, B'/JB') \tag{1.16.24.1}$$

est bijective. Le changement de base $A \to B'$ permet de ramener au cas où $B' = A$. Il résulte alors de la définition (1.15.4) que l'application (1.16.24.1) est bijective.

Montrons ensuite que le le foncteur en question est essentiellement surjectif. Soient $\overline{B}$ une (A/J)-algèbre finie et étale,

$$A^p \xrightarrow{\mathrm{L}} A^q \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

une présentation d'un A-module localement libre M tel que M/JM soit A-isomorphe à $\overline{B}$ (qui existe par 1.16.20). Le préfaisceau $\mathscr{R}$ des structures d'algèbres rigidifiées sur M est représentable par un A-schéma affine de présentation finie X (1.16.22). Soit $\mathscr{A}$ la $\mathscr{O}_X$-algèbre universelle sous-jacente à $M \otimes_A \mathscr{O}_X$. D'après 1.16.22(ii), le sous-objet $\mathscr{S}$ de $\mathscr{R}$ qui rend $\mathrm{Spec}(\mathscr{A})$ étale au-dessus de X est représentable par un ouvert V de X tel que le morphisme $V \to \mathrm{Spec}(A)$ soit affine et lisse. On en déduit par 1.16.18 que l'application $\mathscr{S}(\mathrm{Spec}(A)) \to \mathscr{S}(\mathrm{Spec}(A/J))$ est surjective. Il existe donc une A-algèbre finie et étale qui relève $\overline{B}$.

Corollaire 1.16.25. *Soient (A, J) un couple hensélien, $S = \mathrm{Spec}(A)$, $T = \mathrm{Spec}(A/J)$, $i \colon T \to S$ l'injection canonique. Notons $S_{\text{ét}}$ et $T_{\text{ét}}$ les topos étales de S et T respectivement. Soit F un faisceau de groupes ind-finis de $S_{\text{ét}}$. Alors le foncteur $P \mapsto i^*(P)$ induit une équivalence de la catégorie des F-torseurs de $S_{\text{ét}}$ avec la catégorie des $i^*(F)$-torseurs de $T_{\text{ét}}$, et a fortiori, l'application canonique*

$$\mathrm{H}^1(S_{\text{ét}}, F) \to \mathrm{H}^1(T_{\text{ét}}, i^*(F)) \tag{1.16.25.1}$$

est bijective.

En effet, le foncteur $P \mapsto i^*(P)$ est pleinement fidèle d'après 1.15.4 et ([1] XII 6.5(i)). D'autre part, l'application (1.16.25.1) est bijective en vertu de 1.16.24 et ([1] XII 6.5(ii)). Par suite le foncteur $P \mapsto i^*(P)$ est une équivalence de catégories.

Théorème 1.16.26 ([17] III théo. 6). *Soient (A, J) un couple hensélien quasi-idyllique, $A_0 = A/J$, B_0 une A_0-algèbre lisse. Alors, il existe une A-algèbre lisse B tel que $B \otimes_A A_0$ soit A_0-isomorphe à B_0.*

Supposons d'abord B_0 globalement une intersection complète relative, c'est à dire, supposons que B_0 admette une présentation

$$B_0 = A_0[\xi_1, \dots, \xi_N]/\mathfrak{I}_0, \quad \mathfrak{I}_0 = (f_1, \dots, f_q), \quad f_i \in A_0[\xi_1, \dots, \xi_N],$$

et que l'idéal de B_0 engendré par les mineurs d'ordre q de la matrice jacobienne

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}\right)_{1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq N}$$

soit l'idéal unité. Dans ce cas, il suffit de relever les f_i en $\widetilde{f_i}$ dans $A[\xi_1, \dots, \xi_N]$. La A-algèbre $B = A[\xi_1, \dots, \xi_N]/(\widetilde{f_1}, \dots, \widetilde{f_q})$ est lisse au voisinage du fermé $\mathrm{V}(J)$ et un localisé de B répond à la question.

Dans le cas général, soit

$$B_0 = A_0[\xi_1, \dots, \xi_N]/\mathfrak{I}_0, \quad \mathfrak{I}_0 = (f_1, \dots, f_q), \quad f_i \in A_0[\xi_1, \dots, \xi_N],$$

une présentation de B_0. Le B_0-module $\mathfrak{I}_0/\mathfrak{I}_0^2$ est localement libre. Soient

$$B_0^p \xrightarrow{\mathrm{L}_0} B_0^q \longrightarrow \mathfrak{I}_0/\mathfrak{I}_0^2 \longrightarrow 0 \tag{1.16.26.1}$$

une présentation de ce B_0-module, C_0 son algèbre symétrique. D'après 1.16.14, C_0 est une A_0-algèbre lisse de dimension relative N et globalement intersection complète relative. Il existe donc une A-algèbre lisse C tel que $C \otimes_A A_0$ soit A_0-isomorphe à C_0.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(B_0) \arrow[r, "\sigma_0"] \arrow[d, "\sigma_0"'] & \mathrm{Spec}(C_0) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Box"] & \mathrm{Spec}(B_0) \arrow[d, "\sigma_0"] \\ \mathrm{Spec}(C_0) \arrow[r, "\delta_0"] & \mathrm{Spec}(C_0 \otimes_{B_0} C_0) \arrow[r, "p"] & \mathrm{Spec}(C_0) \end{tikzcd} \tag{1.16.26.2}$$

où δ_0 est le morphisme diagonal, σ_0 est la section nulle, p est la première projection et le carré de droite est cartésien. Comme le rectangle extérieur est cartésien, le carré de gauche est aussi cartésien.

On désigne par C^{h} le hensélisé J-préadique de C ; donc $(C^{\mathrm{h}}, JC^{\mathrm{h}})$ est un couple hensélien quasi-idyllique (1.15.11.3). D'après 1.16.20, il existe un C^{h}-module localement libre M, muni d'une présentation finie qui relèvent $(\mathfrak{I}_0/\mathfrak{I}_0^2) \otimes_{B_0} C_0$ et sa présentation déduite de (1.16.26.1). Quitte à remplacer C par un voisinage étale élémentaire de J dans C, on peut supposer que M et sa présentation sont définis sur C. Soit alors D l'algèbre symétrique du C-module M, de sorte que $D \otimes_C C_0$ est isomorphe à $C_0 \otimes_{B_0} C_0$. D'après 1.16.18, comme D est lisse sur C, quitte à remplacer encore C par un voisinage étale élémentaire de J dans C, on peut supposer que la section diagonale $\delta_0 \colon \mathrm{Spec}(C_0) \to \mathrm{Spec}(C_0 \otimes_{B_0} C_0)$ se relève en une section

$$\delta \colon \mathrm{Spec}(C) \to \mathrm{Spec}(D).$$

Soient $\sigma \colon \mathrm{Spec}(C) \to \mathrm{Spec}(D)$ la section nulle, B le quotient de C défini par le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(B) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Box"] & \mathrm{Spec}(C) \arrow[d, "\sigma"] \\ \mathrm{Spec}(C) \arrow[r, "\delta"'] & \mathrm{Spec}(D) \end{tikzcd}$$

Compte tenu de (1.16.26.2), $B \otimes_A A_0$ est A_0-isomorphe à B_0. D'autre part, δ est transverse à σ au-voisinage de $\mathrm{V}(JB)$ dans $\mathrm{Spec}(B)$ ([31] 17.13.3). En effet, comme C et D sont lisses sur A, il suffit de montrer que $\delta \otimes_A A_0$ est transverse à $\sigma \otimes_A A_0$ ([31] 17.13.4(i)), ce qui résulte du fait que B_0 est lisse sur A_0 de la bonne dimension relative ([31] 17.13.2). On en conclut, de nouveau par ([31] 17.13.2), que B est lisse sur A au voisinage de $\mathrm{V}(JB)$, et un localisé de B répond à la question.

Corollaire 1.16.27. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie et formellement étale. Alors, il existe une A-algèbre étale dont le séparé complété pour la topologie J-préadique est isomorphe à B.*

On peut évidemment supposer J de type fini sur A, de sorte que (A, J) est un couple hensélien quasi-idyllique. Posons $A_0 = A/J$ et $B = B \otimes_A A_0$. D'après

1.16.26, il existe une A-algèbre lisse B' tel que $B' \otimes_A A_0$ soit A_0-isomorphe à B_0. Comme $\Omega^1_{B'/A}$ est un B'-module localement libre de type fini, il est nul sur un ouvert et fermé de $\mathrm{Spec}(B')$ contenant $\mathrm{V}(JB')$. Quitte à changer B', on peut supposer $\Omega^1_{B'/A} = 0$; donc B' est étale sur A. Il résulte alors de ([31] 18.1.2) que le séparé complété de B' pour la topologie J-préadique est isomorphe à B.

Le corollaire suivant est un analogue partiel du “Main Theorem” de Zariski ([31] 8.12.6).

Corollaire 1.16.28. *Soient A un anneau quasi-idyllique, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie et formellement étale. Alors, le morphisme structural* $\mathrm{Spf}(B) \to \mathrm{Spf}(A)$ *se factorise en*

$$\mathrm{Spf}(B) \xrightarrow{i} \mathrm{Spf}(A') \to \mathrm{Spf}(A),$$

où A' est une A-algèbre finie et topologiquement de présentation finie et i est une immersion ouverte, i.e., i identifie $\mathrm{Spf}(B)$ *à un ouvert formel affine de* $\mathrm{Spf}(A')$.

Soit J un idéal de définition de A. D'après 1.16.27, il existe une A-algèbre étale B' dont le séparé complété pour la topologie J-préadique est isomorphe à B. En vertu de ([31] 8.12.6 et 8.12.7), le morphisme structural $\mathrm{Spec}(B') \to \mathrm{Spec}(A)$ se factorise en

$$\mathrm{Spec}(B') \xrightarrow{j} \mathrm{Spec}(A') \to \mathrm{Spec}(A),$$

où A' est une A-algèbre finie et de présentation finie et j est une immersion ouverte. Par suite, A' muni de la topologie déduite de celle de A, est séparé et complet (1.10.2), et topologiquement de présentation finie sur A (1.10.4). Il suffit alors de prendre pour i le prolongement de j aux complétés.

Théorème 1.16.29 ([17] III théo. 7). *Soient (A, J) un couple hensélien idyllique tel que J soit principal, $\widehat{A}$ le séparé complété de A pour la topologie J-préadique, $\widehat{B}$ une $\widehat{A}$-algèbre topologiquement de présentation finie et rig-lisse (resp. rig-étale)* (1.14.7),

$$\widehat{B} = \widehat{A}\langle \xi_1, \dots, \xi_N \rangle / \mathfrak{I}, \quad \mathfrak{I} = (f_1, \dots, f_q), \quad f_i \in \widehat{A}\langle \xi_1, \dots, \xi_N \rangle,$$

C l'algèbre symétrique du $\widehat{B}$-module $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$. Supposons vérifiée l'une des deux conditions suivantes :

(i) *C est de présentation finie sur $\widehat{B}$;*

(ii) *$\widehat{B}$ est rig-pur* (1.8.30.1).

Alors il existe une A-algèbre de présentation finie B', lisse (resp. étale) sur $\mathrm{Spec}(A)$ *en dehors de* $\mathrm{V}(J)$, *dont le séparé complété pour la topologie J-préadique est $\widehat{A}$-isomorphe à $\widehat{B}$.*

La preuve sera donnée dans 1.16.39. Nous établirons d'abord quelques lemmes préparatoires. Nous utiliserons souvent la remarque suivante :

Lemme 1.16.30. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ deux idéaux de A tels que $\mathfrak{b}$ soit de type fini. Si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} + J\mathfrak{a}$, alors $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$.*

En effet, on a $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} + J\mathfrak{b} + \cdots + J^n\mathfrak{b} + J^{n+1}\mathfrak{a}$ pour tout $n \geq 0$, ce qui entraîne l'assertion car A et $\mathfrak{b}$ sont complets et séparés pour les topologies J-adiques (1.10.2).

Lemme 1.16.31. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, h un entier ≥ 0, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie,*

$$B = A\langle \xi_1, \dots, \xi_N \rangle / \mathfrak{I}, \quad \mathfrak{I} = (f_1, \dots, f_q), \quad f_i \in A\langle \xi_1, \dots, \xi_N \rangle.$$

Supposons A noethérien (*resp. J principal*)*. Alors, il existe deux entiers $n_1 > r \geq 0$ vérifiant la propriété suivante : soient n un entier $\geq n_1$, $\mathfrak{I}'$ un idéal de type fini de $A\langle \xi_1, \dots, \xi_N \rangle$, $B' = A\langle \xi_1, \dots, \xi_N \rangle / \mathfrak{I}'$. Supposons que $\mathfrak{I}' \equiv \mathfrak{I} \mod (J^n)$ et qu'il existe un idéal $\mathfrak{h}'$ de $A\langle \xi_1, \dots, \xi_N \rangle$ jacobien relativement à un ensemble fini de générateurs de $\mathfrak{I}'$ tel que $J^h B \subset \mathfrak{h}' B$. Alors, il existe un automorphisme de la A-algèbre $A\langle \xi_1, \dots, \xi_N \rangle$, congru à l'identité modulo J^{n-r} et induisant un isomorphisme de B' sur B.*

On notera les variables $(\xi_1, \dots, \xi_N)$ simplement par ξ. On a $B \widehat{\otimes}_A B' \simeq B\langle \xi \rangle / \mathfrak{I}' B\langle \xi \rangle$ (1.10.2). On cherche une section du morphisme

$$\mathrm{Spec}(B \widehat{\otimes}_A B') \to \mathrm{Spec}(B)$$

qui soit congrue à la diagonale modulo J^{n-r}. D'après 1.16.7, il existe deux entiers $n_0 > r \geq 0$, qui ne dépendent que de (A, J) et h, tels que pour tout $n \geq n_0$, on puisse trouver un homomorphisme $\sigma \colon B' \to B$ congru modulo J^{n-r} à l'isomorphisme donné modulo J^n. Il reste à montrer que pour n assez grand, σ est un isomorphisme.

On peut trouver un homomorphisme de A-algèbres $\varphi \colon A\langle \xi \rangle \to A\langle \xi \rangle$ congru à l'identité modulo J^{n-r} et tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{I}' \arrow[r] & A\langle \xi \rangle \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & B' \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{I} \arrow[r] & A\langle \xi \rangle \arrow[r] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Il est clair que φ est surjectif (1.8.5). On voit par réduction modulo les puissances de J, que φ est formellement étale ([31] 17.8.2), et par suite qu'il est un isomorphisme ([31] 17.9.2).

Il reste à montrer que pour n assez grand, $\varphi(\mathfrak{I}') = \mathfrak{I}$. On a évidemment $\varphi(\mathfrak{I}') \subset \mathfrak{I}$ puisque le diagramme commute. Pour tout $g \in \mathfrak{I}$, il existe $g' \in \mathfrak{I}'$ tel que $g \equiv g' \mod (J^n)$; donc $g - \varphi(g') \in \mathfrak{I} \cap (J^{n-r} A\langle \xi \rangle)$. On a alors

$$\mathfrak{I} \subset \varphi(\mathfrak{I}') + \mathfrak{I} \cap (J^{n-r} A\langle \xi \rangle).$$

D'après 1.10.2, il existe un entier $n_1 \geq n_0$, tel que pour $n \geq n_1$, on ait $\mathfrak{I} \cap (J^{n-r}A\langle\xi\rangle) \subset J\mathfrak{I}$. La relation $\mathfrak{I} \subset \varphi(\mathfrak{I}') + J\mathfrak{I}$ entraîne que $\mathfrak{I} \subset \varphi(\mathfrak{I}')$ (1.16.30), d'où l'assertion.

Lemme 1.16.32 ([17] III lem. 6). *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie et rig-lisse,*

$$B = A\langle\xi_1, \ldots, \xi_N\rangle/\mathfrak{I}, \quad \mathfrak{I} = (f_1, \ldots, f_q), \quad f_i \in A\langle\xi_1, \ldots, \xi_N\rangle,$$

L *une matrice (m, q) à coefficients dans $A\langle\xi_1, \ldots, \xi_N\rangle$ telle que $(f_i)\mathrm{L} = 0$ et que la suite*

$$B^m \xrightarrow{\mathrm{L}\otimes B} B^q \xrightarrow{(f_i)} \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \longrightarrow 0$$

soit exacte sur l'ouvert $\mathrm{Spec}(B) - \mathrm{V}(JB)$. *Supposons A noethérien (resp. J principal). Alors, il existe deux entiers $n_1 > r \geq 0$ vérifiant la propriété suivante : soient n un entier $\geq n_1$, $\mathfrak{I}' = (f'_1, \ldots, f'_q)$ un idéal de $A\langle\xi_1, \ldots, \xi_N\rangle$, $B' = A\langle\xi_1, \ldots, \xi_N\rangle/\mathfrak{I}'$. Supposons $f'_i \equiv f_i \mod (J^n)$ pour tout i et $(f'_i)\mathrm{L}' = 0$, où L' est une matrice (m, q) à coefficients dans $A\langle\xi_1, \ldots, \xi_N\rangle$, congrue à L modulo J^n. Alors, il existe un automorphisme de la A-algèbre $A\langle\xi_1, \ldots, \xi_N\rangle$, congru à l'identité modulo J^{n-r} et induisant un isomorphisme de B' sur B.*

Soit $\mathscr{D}_\mathrm{L}$ l'idéal jacobien de $A\langle\xi_1, \ldots, \xi_N\rangle$ relativement à $(f_1, \ldots, f_q)$, défini par L (1.16.1.4), et soit $\mathscr{D}'_{\mathrm{L}'}$ l'idéal jacobien de $A\langle\xi_1, \ldots, \xi_N\rangle$ relativement à $(f'_1, \ldots, f'_q)$, défini par L'. Compte tenu des congruences imposées, on a

$$\mathscr{D}'_{\mathrm{L}'} \equiv \mathscr{D}_\mathrm{L} \mod (J^n).$$

Il résulte de 1.16.1.3 et des hypothèses que $\mathrm{V}(\mathscr{D}_\mathrm{L} B) \subset \mathrm{V}(JB)$. Par suite, il existe un entier h tel que $\mathscr{D}_\mathrm{L} + \mathfrak{I} \supset J^h A\langle\xi\rangle$ ([28] 6.8.4). Pour $n > h$, on a $\mathscr{D}'_{\mathrm{L}'} + \mathfrak{I} \supset J^h A\langle\xi\rangle$ (1.16.30) et donc $\mathscr{D}'_{\mathrm{L}'} B \supset J^h B$. Il suffit alors d'appliquer 1.16.31.

Lemme 1.16.33. *Soient A un anneau idyllique, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie et rig-lisse,*

$$B = A\langle\xi_1, \ldots, \xi_N\rangle/\mathfrak{I}, \quad \mathfrak{I} = (f_1, \ldots, f_q), \quad f_i \in A\langle\xi_1, \ldots, \xi_N\rangle,$$

C l'algèbre symétrique du B-module $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$, $\widehat{C}$ le séparé complété de C pour la topologie J-préadique,

$$A\langle\xi_1, \ldots, \xi_N\rangle^m \xrightarrow{\mathrm{L}} A\langle\xi_1, \ldots, \xi_N\rangle^q \xrightarrow{(f_i)} \mathfrak{I} \longrightarrow 0 \tag{1.16.33.1}$$

une présentation de $\mathfrak{I}$ (1.10.3). Supposons C de présentation finie sur B, et l'une des deux conditions suivantes remplie :

(a) *A est noethérien ;*
(b) *A est topologiquement de présentation finie sur un anneau 1-valuatif R et J est engendré par un élément non-nul de l'idéal maximal de R.*

Alors, il existe deux entiers $n_1 > r \geq 0$ vérifiant la propriété suivante : soient n un entier $\geq n_1$, $\mathfrak{I}' = (f'_1, \dots, f'_q)$ un idéal de $\widehat{C}$, $B' = \widehat{C}/\mathfrak{I}'$. Supposons $f'_i \equiv f_i \mod (J^n\widehat{C})$ et $(f'_i)\mathrm{L}' = 0$, où L' est une matrice (m, q) à coefficients dans $\widehat{C}$, congrue à L modulo $J^n\widehat{C}$. Alors il existe un A-isomorphisme de B' sur B congru à l'identité modulo J^{n-r}.

La congruence $f'_i \equiv f_i \mod (J^n\widehat{C})$ signifie que f'_i est congru modulo $J^n\widehat{C}$ à l'image de f_i par le composé des morphismes canoniques $\mathfrak{I} \to \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \to C \to \widehat{C}$.

On notera les variables $(\xi_1, \dots, \xi_N)$ simplement par ξ ; et on se donne un autre système de variables $(\zeta_1, \dots, \zeta_q)$, que l'on notera simplement par ζ. On peut considérer naturellement C comme une $A\langle\xi\rangle$-algèbre. Les classes des éléments f_i dans $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$ définissent un homomorphisme surjectif de $A\langle\xi\rangle$-algèbres

$$\varphi\colon A\langle\xi, \zeta\rangle \to \widehat{C}.$$

On désigne par $\mathfrak{K}$ le noyau de φ, qui est un idéal de type fini de $A\langle\xi, \zeta\rangle$ (1.10.5). D'après 1.8.25.4 et 1.9.18, il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $n > n_0$, on ait

$$\mathfrak{K} \cap (J^n A\langle\xi, \zeta\rangle) \subset J^{n-n_0}\mathfrak{K}. \tag{1.16.33.2}$$

La section nulle $\sigma\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(C)$ induit par prolongement aux complétés une section $\widehat{\sigma}\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(\widehat{C})$. D'après 1.12.16(iv), le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(B) \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\widehat{\sigma}"'] & \mathrm{Spec}(B) \arrow[d, "\sigma"] \\ \mathrm{Spec}(\widehat{C}) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(C) \end{tikzcd} \tag{1.16.33.3}$$

est cartésien. Comme $\widehat{C}$ est C-plat (1.12.17), le faisceau conormal de $\widehat{\sigma}$ s'identifie à $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$.

Soit $\mathfrak{J}$ le noyau de l'homomorphisme $A\langle\xi, \zeta\rangle \to B$ composé de φ et de $\widehat{\sigma}^*$; c'est un idéal de type fini de $A\langle\xi, \zeta\rangle$ (1.10.5). La suite canonique

$$0 \to \mathfrak{K}/\mathfrak{K}^2 \otimes_{\widehat{C}} B \to \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \to \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \to 0 \tag{1.16.33.4}$$

est exacte sur $\mathrm{Spec}(B) - \mathrm{V}(JB)$. En effet, $\widehat{C}$ est rig-lisse sur A (1.14.14 et 1.14.10) ; donc les modules de cette suite sont localement libres sur $\mathrm{Spec}(B) - \mathrm{V}(JB)$, et leurs rangs se calculent facilement (1.14.6 et 1.14.9).

Soient $(g_1, \dots, g_s)$ des générateurs de $\mathfrak{K}$,

$$A\langle\xi, \zeta\rangle^\ell \xrightarrow{\mathrm{M}} A\langle\xi, \zeta\rangle^s \xrightarrow{(g_i)} \mathfrak{K} \longrightarrow 0$$

une présentation de $\mathfrak{K}$ (1.10.3). On a $\mathfrak{J} = (g_1, \dots, g_s, \zeta_1, \dots, \zeta_q)$ (1.16.33.3), et il existe N une matrice (m, s) à coefficients dans $A\langle \xi, \zeta \rangle$ telle que

$$(g_1, \dots, g_s, \zeta_1, \dots, \zeta_q)\mathrm{H} = 0, \quad \text{où} \quad \mathrm{H} = \begin{pmatrix} \mathrm{M} & \mathrm{N} \\ 0 & \mathrm{L} \end{pmatrix}.$$

Il résulte de (1.16.33.4) que la suite

$$B^{\ell+m} \xrightarrow{\mathrm{H}\otimes B} B^{s+q} \xrightarrow{(g_i, \zeta_j)} \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \longrightarrow 0 \tag{1.16.33.5}$$

est exacte sur $\mathrm{Spec}(B) - \mathrm{V}(JB)$.

Pour tout $1 \leq i \leq q$, soit ζ'_i un élément de $A\langle \xi, \zeta \rangle$ relevant f'_i et tel que $\zeta'_i \equiv \zeta_i \mod (J^n)$, de sorte que B' est isomorphe au quotient de $A\langle \xi, \zeta \rangle$ par l'idéal $\mathfrak{J}' = (g_1, \dots, g_s, \zeta'_1, \dots, \zeta'_q)$. Il existe L'' une matrice (m, q) à coefficients dans $A\langle \xi, \zeta \rangle$ relevant L', et N' une matrice (m, s) à coefficients dans $A\langle \xi, \zeta \rangle$, telles que

$$(g_1, \dots, g_s, \zeta'_1, \dots, \zeta'_q)\mathrm{H}' = 0, \quad \text{où} \quad \mathrm{H}' = \begin{pmatrix} \mathrm{M} & \mathrm{N}' \\ 0 & \mathrm{L}'' \end{pmatrix}.$$

On peut choisir L'' congrue à L modulo J^n. Posons

$$(a_1, \dots, a_m) = (\zeta_1, \dots, \zeta_q)\mathrm{L} - (\zeta'_1, \dots, \zeta'_q)\mathrm{L}''.$$

Comme $a_i \in \mathfrak{K} \cap (J^n A\langle \xi, \zeta \rangle)$ pour tout $1 \leq i \leq m$, il résulte de (1.16.33.2), que si $n > n_0$, on peut choisir N' congrue à N modulo J^{n-n_0}. Il suffit alors d'appliquer 1.16.32.

Lemme 1.16.34. *Soient A un anneau idyllique, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie et rig-lisse,*

$$B = A\langle \xi_1, \dots, \xi_N \rangle / \mathfrak{J}, \quad \mathfrak{J} = (f_1, \dots, f_q), \quad f_i \in A\langle \xi_1, \dots, \xi_N \rangle,$$

C l'algèbre symétrique du B-module $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$, S le quotient de C par $C_{J\text{-tor}}$, $\widehat{S}$ le séparé complété de S pour la topologie J-préadique,

$$A\langle \xi_1, \dots, \xi_N \rangle^m \xrightarrow{\mathrm{L}} A\langle \xi_1, \dots, \xi_N \rangle^q \xrightarrow{(f_i)} \mathfrak{J} \longrightarrow 0 \tag{1.16.34.1}$$

une présentation de $\mathfrak{J}$ (1.10.3). *Supposons B rig-pur, et l'une des deux conditions suivantes remplie :*

(a) *A est noethérien ;*

(b) *A est topologiquement de présentation finie sur un anneau* 1*-valuatif R et J est engendré par un élément non-nul de l'idéal maximal de R.*

Alors, il existe deux entiers $n_1 > r \geq 0$ vérifiant la propriété suivante : soient n un entier $\geq n_1$, $\mathfrak{J}' = (f'_1, \dots, f'_q)$ un idéal de $\widehat{S}$, $B' = \widehat{S}/\mathfrak{J}'$. Supposons $f'_i \equiv f_i$ mod *$(J^n\widehat{S})$ et $(f'_i)\mathrm{L}' = 0$, où L' est une matrice (m, q) à coefficients dans $\widehat{S}$, congrue à* L *modulo $J^n\widehat{S}$. Alors il existe un A-isomorphisme de B' sur B congru à l'identité modulo J^{n-r}.*

On notera (1.12.16) que S est de présentation finie sur B et $\widehat{S} \simeq S \otimes_C \widehat{C}$, où $\widehat{C}$ est le séparé complété de C pour la topologie J-préadique. Il suffit alors d'adapter la preuve de 1.16.33 en remplaçant $\widehat{C}$ par $\widehat{S}$. Conservons les mêmes notations ; nous indiquerons seulement les modifications nécessaires.

Comme B est rig-pur, la section nulle $\sigma\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(C)$ se factorise à travers une section $\tau\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(S)$, qui induit par prolongement aux complétés une section $\widehat{\tau}\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(\widehat{S})$; soit $\mathscr{L}/\mathscr{L}^2$ le faisceau conormal de $\widehat{\tau}$. L'homomorphisme φ induit un homomorphisme surjectif de $A\langle\xi\rangle$-algèbres $\psi\colon A\langle\xi,\zeta\rangle \to \widehat{S}$; soit $\mathfrak{H}$ son noyau. Par la même preuve que celle de (1.16.33.4), la suite canonique

$$0 \to \mathfrak{H}/\mathfrak{H}^2 \otimes_{\widehat{S}} B \to \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \to \mathscr{L}/\mathscr{L}^2 \to 0 \tag{1.16.34.2}$$

est exacte sur $\mathrm{Spec}(B) - \mathrm{V}(JB)$. On conclut alors en calquant la fin de la démonstration de 1.16.33.

Lemme 1.16.35 ([17] III lem. 7). *Soient (A, J) un couple hensélien quasi-idyllique, $\widehat{A}$ le séparé complété de A pour la topologie J-préadique, $\widehat{B}$ une $\widehat{A}$-algèbre topologiquement de type fini, quotient d'une $\widehat{A}$-algèbre de séries formelles restreintes $\widehat{A}\langle\xi_1,\dots,\xi_N\rangle$ par un idéal $\mathfrak{J}$, f_i $(1 \le i \le d)$ des éléments de $\widehat{A}\langle\xi_1,\dots,\xi_N\rangle$, Δ l'idéal de $\widehat{A}\langle\xi_1,\dots,\xi_N\rangle$ engendré par les mineurs d'ordre d de la matrice jacobienne*

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}\right)_{1\le i\le d, 1\le j\le N}.$$

Supposons les conditions suivantes remplies :

(i) *J est principal engendré par t ;*

(ii) *$(f_1,\dots,f_d)$ engendrent $\mathfrak{J}$ au voisinage de* $\mathrm{Spec}(\widehat{B}) - \mathrm{V}(J\widehat{B})$ *dans*

$$\mathrm{Spec}(\widehat{A}\langle\xi_1,\dots,\xi_N\rangle);$$

(iii) $\mathrm{V}(\Delta\widehat{B}) \subset \mathrm{V}(J\widehat{B})$.

Alors, il existe une A-algèbre de type fini B', lisse sur $\mathrm{Spec}(A)$ *en dehors de* $\mathrm{V}(J)$, *dont le séparé complété pour la topologie J-préadique est $\widehat{A}$-isomorphe à $\widehat{B}$.*

On notera les variables $(\xi_1,\dots,\xi_N)$ simplement par ξ. Comme $\mathrm{Spec}(\widehat{B} \otimes_{\widehat{A}} \widehat{A}_t)$ est une partie ouverte et fermée de $\mathrm{Spec}(\widehat{A}\langle\xi\rangle/(f_1,\dots,f_d) \otimes_{\widehat{A}} \widehat{A}_t)$ ([28] 6.6.4), il lui correspond un idempotent, qu'on relève en un élément e' de $\widehat{A}\langle\xi\rangle \otimes_{\widehat{A}} \widehat{A}_t$ vérifiant la relation :

$$e'(1-e') = \sum_{i=1}^{d} \mu_i f_i.$$

Multipliant e' par une puissance convenable de t, on obtient un élément e de $\widehat{A}\langle\xi\rangle$ vérifiant la relation :

$$ke = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i f_i,$$

en retenant que l'idéal de $\widehat{A}\langle\xi\rangle$ engendré par k et e contient une puissance de t, soit t^{h_0}. De plus, $\mathfrak{I}$ coïncide avec l'idéal $(f_1,\ldots,f_d,e)$ sur l'ouvert $\mathrm{Spec}(\widehat{A}\langle\xi\rangle)-\mathrm{V}(J\widehat{A}\langle\xi\rangle)$.

La condition (iii) du lemme entraîne qu'il existe un entier h_1 tel qu'on ait $\Delta+\mathfrak{I}\supset t^{h_1}\widehat{A}\langle\xi\rangle$ ([28] 6.8.4) ; quitte à augmenter h_1, on peut supposer que l'on a

$$\Delta+(f_1,\ldots,f_d,e)\supset t^{h_1}\widehat{A}\langle\xi\rangle.$$

Considérons au-dessus de $\mathscr{A}$, hensélisé J-préadique de $A[\xi_1,\ldots,\xi_N]$, l'algèbre $\mathscr{R}$ définie par

$$\mathscr{R}=\mathscr{A}[F_1,\ldots,F_d,E,K,\Lambda_1,\ldots,\Lambda_d]/\Bigg(\sum_{i=1}^{d}\Lambda_iF_i-KE\Bigg).$$

On notera que $(\mathscr{A},J\mathscr{A})$ est un couple hensélien quasi-idyllique et que le séparé complété J-préadique de $\mathscr{A}$ est canoniquement isomorphe à $\widehat{A}\langle\xi\rangle$. Soit ε la section

$$\mathrm{Spec}(\widehat{A}\langle\xi\rangle)\to\mathrm{Spec}(\mathscr{R}\otimes_{\mathscr{A}}\widehat{A}\langle\xi\rangle)$$

définie par (k,e,f_i,λ_i). Elle se factorise au-dessus de $\mathrm{Spec}(\widehat{A}\langle\xi\rangle\otimes_{\widehat{A}}\widehat{A}_t)$ à travers l'image réciproque d'un ouvert lisse de $\mathrm{Spec}(\mathscr{R})$ sur $\mathrm{Spec}(\mathscr{A})$, car (k,e) contient une puissance de t. Donc en vertu de 1.16.9, on peut approximer cette section au-dessus de $\mathscr{A}$.

Soient n un entier $>h_0+h_1$, ε' une $\mathscr{A}$-section de $\mathrm{Spec}(\mathscr{R})$, congrue à ε modulo J^n, définie par (k',e',λ'_i,f'_i), C la A-algèbre $\mathscr{A}/(f'_i,e')$ et $\widehat{C}$ son séparé complété pour la topologie J-préadique. Il résulte de 1.15.12(iv) que $\widehat{C}\simeq\widehat{A}\langle\xi\rangle/(f'_i,e')$; donc $\widehat{C}$ est rig-lisse sur $\widehat{A}$. En effet, grâce aux congruences imposées, l'idéal de $\widehat{C}$ engendré par les mineurs d'ordre d de la matrice jacobienne $(\partial f'_i/\partial\xi_j)_{1\le i\le d,1\le j\le N}$ contient t^{h_1}, l'idéal (k',e') contient t^{h_0}, et les éléments (f'_i) suffisent à engendrer l'idéal (f'_i,e') au voisinage de $\mathrm{Spec}(\widehat{C})-\mathrm{V}(J\widehat{C})$ dans $\mathrm{Spec}(\widehat{A}\langle\xi\rangle)$; c'est ce qu'assure l'équation

$$k'e'=\sum_{i=1}^{d}\lambda'_if'_i.$$

Comme $\widehat{A}\langle\xi\rangle$ est fidèlement plat sur $\mathscr{A}$ (1.15.12), on en déduit que $t^{h_0}\in\mathscr{A}k'+\mathscr{A}e'$ et les éléments (f'_i) suffisent à engendrer l'idéal (f'_i,e') au voisinage de $\mathrm{Spec}(C)-\mathrm{V}(JC)$ dans $\mathrm{Spec}(\mathscr{A})$. Par suite, on peut trouver un voisinage étale élémentaire Λ de J dans $A[\xi_1,\ldots,\xi_N]$, contenant les éléments $(f'_1,\ldots,f'_d,e')$ et tel que $\mathrm{Spec}(\Lambda/(f'_i,e'))$ soit lisse sur $\mathrm{Spec}(A)$ en dehors de $\mathrm{V}(J)$.

D'autre part, l'idéal $\mathfrak{h}$ de $\widehat{A}\langle\xi\rangle$ engendré par les produits de k' et des mineurs d'ordre d de la matrice jacobienne $(\partial f'_i/\partial\xi_j)_{1\le i\le d,1\le j\le N}$ est jacobien relativement à (f_i,e) (1.16.1) ; et compte tenu des congruences imposées, $t^{h_0+h_1}$ appartient à $\mathfrak{h}(\widehat{A}\langle\xi\rangle/(f_i,e))$. Donc d'après 1.16.31, il existe deux entiers $n_0>r\ge 0$ tels que si $n > n_0$, il existe un automorphisme φ de la $\widehat{A}$-algèbre $\widehat{A}\langle\xi\rangle$ congru à l'identité modulo (t^{n-r}) et induisant un isomorphisme de $\widehat{C}$ sur $\widehat{A}\langle\xi\rangle/(f_i, e)$. On a donc

$$\varphi^{-1}((f_1, \dots, f_d, e)) = (f'_1, \dots, f'_d, e'),$$

et $\varphi^{-1}(\mathfrak{I})$ coïncide avec l'idéal $(f'_1, \dots, f'_d, e')$ sur l'ouvert $\mathrm{Spec}(\widehat{A}\langle\xi\rangle) - \mathrm{V}(J\widehat{A}\langle\xi\rangle)$.

Posons $S = 1 + J\Lambda$. Comme $\widehat{A}\langle\xi\rangle$ est fidèlement plat sur $\mathscr{A}$, il est aussi fidèlement plat sur $\Lambda[S^{-1}]$ (1.15.5.4). En vertu de ([18] 4.2), il existe un idéal $\mathfrak{I}_0$ de $\Lambda[S^{-1}]$ coïncidant avec $(f'_1, \dots, f'_d, e')$ sur l'ouvert $\mathrm{Spec}(\Lambda[S^{-1}]) - \mathrm{V}(J\Lambda[S^{-1}])$ et engendrant $\varphi^{-1}(\mathfrak{I})$ dans $\widehat{A}\langle\xi\rangle$. Soit $\mathfrak{I}'$ un idéal de Λ tel que $\mathfrak{I}'[S^{-1}] = \mathfrak{I}_0$. On notera que $\mathfrak{I}'_t$ est de type fini sur Λ_t (1.15.12). Donc quitte à remplacer Λ par Λ_h pour un élément h de S, ce qui ne change pas $\Lambda[S^{-1}]$, on peut supposer que $\mathfrak{I}'$ coïncide avec $(f'_1, \dots, f'_d, e')$ sur $\mathrm{Spec}(\Lambda) - \mathrm{V}(J\Lambda)$.

Le hensélisé J-préadique de $B' = \Lambda/\mathfrak{I}'$ est isomorphe à $\mathscr{A}/\mathfrak{I}_0\mathscr{A}$. Donc en vertu de 1.15.12(iv), le séparé complété de B' pour la topologie J-préadique est isomorphe à $\widehat{B}$. Par conséquent, B' remplit les conditions requises.

Lemme 1.16.36. *Soient (A, J) un couple hensélien idyllique, B une A-algèbre de type fini, $\widehat{A}$ (resp. $\widehat{B}$) le séparé complété de A (resp. B) pour la topologie J-préadique. Supposons $\widehat{B}$ topologiquement de présentation finie et rig-lisse sur $\widehat{A}$. Alors il existe une A-algèbre de présentation finie B', lisse sur* $\mathrm{Spec}(A)$ *en dehors de* $\mathrm{V}(J)$ *dont le séparé complété pour la topologie J-préadique est $\widehat{A}$-isomorphe à $\widehat{B}$.*

Considérons B comme le quotient d'une A-algèbre de polynômes $A[\xi_1,\dots,\xi_N]$ par un idéal $\mathfrak{I}$. On notera les variables $(\xi_1, \dots, \xi_N)$ simplement par ξ. Soient $\mathscr{A}$ le hensélisé J-préadique de $A[\xi]$, B^{h} le hensélisé J-préadique de B. On a $B^{\mathrm{h}} \simeq \mathscr{A}/\mathfrak{I}\mathscr{A}$ (1.15.5.6) et $\widehat{B} \simeq \widehat{A}\langle\xi\rangle/\mathfrak{I}\widehat{A}\langle\xi\rangle$ (1.15.14). Comme $\widehat{B}$ est topologiquement de présentation finie sur $\widehat{A}$, $\mathfrak{I}$ engendre un idéal de type fini de $\widehat{A}\langle\xi\rangle$ (1.10.5). Comme $\widehat{A}\langle\xi\rangle$ est fidèlement plat sur $\mathscr{A}$ (1.15.12), on en déduit par descente fidèlement plate ([12] chap. I §3.6 prop. 11) que $\mathfrak{I}$ engendre un idéal de type fini de $\mathscr{A}$. Par suite, il existe un voisinage étale élémentaire Λ de $JA[\xi]$ dans $A[\xi]$ et un idéal de type fini $\mathfrak{I}'$ de Λ tels que $\mathfrak{I}'\mathscr{A} = \mathfrak{I}\mathscr{A}$. Le hensélisé J-préadique de $\Lambda/\mathfrak{I}'$ est A-isomorphe à B^{h}. Donc le séparé complété de $\Lambda/\mathfrak{I}'$ pour la topologie J-préadique est $\widehat{A}$-isomorphe à $\widehat{B}$. Quitte à remplacer B par $\Lambda/\mathfrak{I}'$, on peut supposer B de présentation finie sur A. Il suffit alors de montrer qu'il existe un voisinage ouvert affine de $\mathrm{V}(JB)$ dans $\mathrm{Spec}(B)$, lisse sur $\mathrm{Spec}(A)$ en dehors de $\mathrm{V}(J)$.

Considérons une présentation finie de B,

$$B = A[\xi]/\mathfrak{I}, \quad \mathfrak{I} = (f_1, \dots, f_q), \quad f_i \in A[\xi],$$

où ξ désigne comme plus haut un ensemble fini de variables $(\xi_1, \dots, \xi_N)$, et posons $S = 1 + JA[\xi]$. Il résulte de 1.15.12(ii) que $\widehat{A}\langle\xi\rangle$ est fidèlement plat sur $A[\xi][S^{-1}]$. Par suite, $\mathfrak{I}[S^{-1}]$ est de présentation finie sur $A[\xi][S^{-1}]$ (1.10.3), et on peut trouver un complexe

$$A[\xi]^m \xrightarrow{\mathrm{L}} A[\xi]^q \xrightarrow{(f_i)} \mathfrak{I} \longrightarrow 0$$

qui devient exact après localisation par rapport à S. Soit $\mathscr{D}_{\mathrm{L}}$ l'idéal jacobien de $A[\xi]$ relativement à $(f_1, \dots, f_q)$ défini par L (1.16.1.4). Comme $\widehat{B}$ est $\widehat{A}$-isomorphe à $\widehat{A}\langle\xi\rangle/\mathfrak{I}\widehat{A}\langle\xi\rangle$ et est rig-lisse sur $\widehat{A}$, on a $\mathrm{V}(\mathscr{D}_{\mathrm{L}}\widehat{B}) \subset \mathrm{V}(J\widehat{B})$ (1.16.1.3 et 1.16.3). Par suite, il existe un entier $r \geq 1$ tel que $J^r\widehat{B} \subset \mathscr{D}_{\mathrm{L}}\widehat{B}$ ([28] 6.8.4). On en déduit par descente fidèlement plate que $J^rB[S^{-1}] \subset \mathscr{D}_{\mathrm{L}}B[S^{-1}]$. Il existe donc $h \in S$ tel que $J^rB_h \subset \mathscr{D}_{\mathrm{L}}B_h$. L'ouvert de $\mathrm{Spec}(B)$ où h est inversible répond alors à la question.

Lemme 1.16.37. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie et rig-lisse,*

$$B = A\langle\xi_1, \dots, \xi_N\rangle/\mathfrak{I}, \quad \mathfrak{I} = (f_1, \dots, f_q), \quad f_i \in A\langle\xi_1, \dots, \xi_N\rangle,$$

C l'algèbre symétrique du B-module $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$, $\widehat{C}$ le séparé complété de C pour la topologie J-préadique. Supposons C de présentation finie sur B. Alors $\widehat{C}$ est une A-algèbre topologiquement de présentation finie et rig-lisse. Il existe un A-plongement de $\mathrm{Spec}(\widehat{C})$ *dans le spectre d'une algèbre de séries formelles restreintes à $2N+q$ variables sur A tel que sur tout ouvert affine de* $\mathrm{Spec}(\widehat{C}) - \mathrm{V}(J\widehat{C})$*, le faisceau conormal de cette immersion soit libre de rang $N+q$.*

On notera les variables $(\xi_1, \dots, \xi_N)$ simplement par ξ. La suite

$$0 \to \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \to \widehat{\Omega}^1_{A\langle\xi\rangle/A} \otimes_{A\langle\xi\rangle} B \to \widehat{\Omega}^1_{B/A} \to 0$$

est exacte et localement scindée sur $\mathrm{Spec}(B) - \mathrm{V}(JB)$ (1.14.6). Donc $\mathrm{Spec}(C)$ est lisse sur $\mathrm{Spec}(B)$ en dehors de $\mathrm{V}(JB)$, et par suite $\widehat{C}$ est rig-lisse sur A (1.14.14 et 1.14.10). Soit W un ouvert affine de $\mathrm{Spec}(\widehat{C}) - \mathrm{V}(J\widehat{C})$. On peut écrire au-dessus de W les suites exactes suivantes (1.14.12) qui sont des suites exactes de modules localement libres sur un schéma affine, donc scindées :

$$0 \to (\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \otimes_B \widehat{C})^{\sim}|W \to (\widehat{\Omega}^1_{A\langle\xi\rangle/A} \otimes_{A\langle\xi\rangle} \widehat{C})^{\sim}|W \to (\widehat{\Omega}^1_{B/A} \otimes_B \widehat{C})^{\sim}|W \to 0,$$
$$0 \to (\widehat{\Omega}^1_{B/A} \otimes_B \widehat{C})^{\sim}|W \to (\widehat{\Omega}^1_{\widehat{C}/A})^{\sim}|W \to (\widehat{\Omega}^1_{\widehat{C}/B})^{\sim}|W \to 0.$$

On a $\widehat{\Omega}^1_{\widehat{C}/B} \simeq \Omega^1_{C/B} \otimes_C \widehat{C}$ (1.12.16) et $\Omega^1_{C/B}$ s'identifie à $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$. Les deux suites ci-dessus montrent alors que $\widehat{\Omega}^1_{\widehat{C}/A}$ est globalement libre de rang N sur W.

On se donne un autre ensemble de variables $(\zeta_1, \dots, \zeta_q)$, que l'on notera simplement par ζ. Les (f_i) permettent de plonger $\mathrm{Spec}(\widehat{C})$ dans l'espace affine $\mathrm{Spec}(B\langle\zeta\rangle)$. Donc on peut aussi considérer $\mathrm{Spec}(\widehat{C})$ comme un sous-schéma fermé de $\mathrm{Spec}(A\langle\xi,\zeta\rangle)$; soit $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}^2$ le faisceau conormal de cette immersion. D'après 1.14.6, on a la suite exacte

$$0 \to (\mathfrak{K}/\mathfrak{K}^2)^{\sim}|W \to (\widehat{\Omega}^1_{A\langle\xi,\zeta\rangle/A} \otimes_{A\langle\xi,\zeta\rangle} \widehat{C})^{\sim}|W \to (\widehat{\Omega}^1_{\widehat{C}/A})^{\sim}|W \to 0.$$

Donc, compte tenu des isomorphismes précédents, on a une suite exacte

$$0 \to (\mathfrak{K}/\mathfrak{K}^2)^{\sim}|W \to \mathscr{O}_W^{N+q} \to \mathscr{O}_W^N \to 0. \tag{1.16.37.1}$$

On plonge alors $\mathrm{Spec}(\widehat{C})$ dans $\mathrm{Spec}(A\langle \xi_1, \dots, \xi_N, \zeta_1, \dots, \zeta_q, t_1, \dots, t_N\rangle)$ dans lequel il est défini par les équations supplémentaires $t_i = 0$ pour $1 \leq i \leq N$. Soit $\mathfrak{K}'/\mathfrak{K}'^2$ le faisceau conormal de cette nouvelle immersion. On a alors, d'après (1.16.37.1),

$$(\mathfrak{K}'/\mathfrak{K}'^2)^{\sim}|W \simeq (\mathfrak{K}/\mathfrak{K}^2)^{\sim}|W \oplus \mathscr{O}_W^N \simeq \mathscr{O}_W^{N+q},$$

ce qui achève la preuve.

Lemme 1.16.38. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie et rig-lisse,*

$$B = A\langle \xi_1, \dots, \xi_N\rangle/\mathfrak{I}, \quad \mathfrak{I} = (f_1, \dots, f_q), \quad f_i \in A\langle \xi_1, \dots, \xi_N\rangle,$$

C l'algèbre symétrique du B-module $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$, S le quotient de C par $C_{J\text{-tor}}$, $\widehat{S}$ le séparé complété de S pour la topologie J-préadique. Supposons B rig-pur. Alors $\widehat{S}$ est une A-algèbre topologiquement de présentation finie et rig-lisse. Il existe un A-plongement de $\mathrm{Spec}(\widehat{S})$ *dans le spectre d'une algèbre de séries formelles restreintes à $2N + q$ variables sur A tel que sur tout ouvert affine de* $\mathrm{Spec}(\widehat{S}) - \mathrm{V}(J\widehat{S})$*, le faisceau conormal de cette immersion soit libre de rang $N + q$.*

On notera (1.12.16) que S est de présentation finie sur B et $\widehat{S} \simeq S \otimes_C \widehat{C}$, où $\widehat{C}$ est le séparé complété de C pour la topologie J-préadique. Il suffit alors d'adapter la démonstration de 1.16.37 en remplaçant $\widehat{C}$ par $\widehat{S}$ (cf. la preuve de 1.16.34).

1.16.39. Revenons maintenant à la démonstration de 1.16.29. Montrons d'abord comment la proposition non respée entraîne la proposition respée. D'après la première, il existe une A-algèbre de présentation finie B', lisse sur $\mathrm{Spec}(A)$ en dehors de $\mathrm{V}(J)$, dont le séparé complété pour la topologie J-préadique est $\widehat{A}$-isomorphe à $\widehat{B}$. Comme $\widehat{\Omega}^1_{\widehat{B}/\widehat{A}}$ est $\widehat{B}$-isomorphisme à $\Omega^1_{B'/A} \otimes_{B'} \widehat{B}$ (1.10.2), il suffit de montrer que l'on peut choisir B' telle que l'image réciproque de toute composante connexe de $\mathrm{Spec}(B') - \mathrm{V}(JB')$ dans $\mathrm{Spec}(\widehat{B}) - \mathrm{V}(J\widehat{B})$ soit non vide. En effet, cela impliquera que $\Omega^1_{B'/A}$ est nul en dehors de $\mathrm{V}(J)$, et donc que B' est étale en dehors de $\mathrm{V}(J)$. Soit V une composante connexe de $\mathrm{Spec}(B') - \mathrm{V}(JB')$. Comme l'injection canonique $V \to \mathrm{Spec}(B')$ est quasi-compacte ([28] 6.1.5), l'adhérence schématique de V dans $\mathrm{Spec}(B')$ existe ([28] 6.10.6). Si cette dernière ne rencontre pas $\mathrm{V}(JB')$, alors V est fermé (et ouvert) dans $\mathrm{Spec}(B')$. On peut évidemment choisir B' de sorte que ce cas ne se produit pas. Dans le cas contraire, l'image réciproque W de V dans $\mathrm{Spec}(\widehat{B}) - \mathrm{V}(J\widehat{B})$ est non vide. En effet, comme $\widehat{B}$ est B'-plat (1.15.12), il résulte de ([31] 11.10.5(ii)) que l'adhérence schématique de W dans $\mathrm{Spec}(\widehat{B})$ est l'image réciproque de l'adhérence schématique de V dans $\mathrm{Spec}(B')$, et donc non vide.

Montrons ensuite la proposition non respée. On peut évidemment supposer l'une des conditions suivantes remplie :

(a) A est noethérien et J est principal ;

(b) il existe un anneau 1-valuatif R, un élément non nul t de l'idéal maximal de R, une R-algèbre topologiquement de présentation finie A_0 et une A_0-algèbre de présentation finie A_1 tels que A soit le hensélisé (t)-préadique de A_1 et $J = tA$ (1.15.5.5).

En particulier, le couple $(\widehat{A}, J\widehat{A})$ remplit les conditions requises dans les lemmes 1.16.33 et 1.16.34. Soient

$$\widehat{A}\langle\xi_1,\ldots,\xi_N\rangle^m \xrightarrow{\mathrm{L}} \widehat{A}\langle\xi_1,\ldots,\xi_N\rangle^q \xrightarrow{(f_i)} \mathfrak{I} \longrightarrow 0 \tag{1.16.39.1}$$

une présentation finie de $\mathfrak{I}$ (1.10.3), $\widehat{C}$ le séparé complété de C pour la topologie J-préadique, $\sigma\colon \mathrm{Spec}(\widehat{B}) \to \mathrm{Spec}(C)$ la section nulle, $\widehat{\sigma}\colon \mathrm{Spec}(\widehat{B}) \to \mathrm{Spec}(\widehat{C})$ la section déduite de σ par prolongement aux complétés. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(\widehat{B}) \arrow[r, "\widehat{\sigma}"] \arrow[d, "\widehat{\sigma}"'] & \mathrm{Spec}(\widehat{C}) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathrm{Spec}(\widehat{B}) \arrow[d, "\sigma"] \\
\mathrm{Spec}(\widehat{C}) \arrow[r, "\delta"] & \mathrm{Spec}(C \otimes_{\widehat{B}} \widehat{C}) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(C)
\end{tikzcd} \tag{1.16.39.2}$$

où δ est le graphe du morphisme canonique $\mathrm{Spec}(\widehat{C}) \to \mathrm{Spec}(C)$ et le carré cartésien de droite est défini par le changement de base $\mathrm{Spec}(\widehat{C}) \to \mathrm{Spec}(\widehat{B})$. Il résulte de 1.12.16(iv) que le rectangle extérieur est cartésien. Par suite, le carré de gauche est aussi cartésien.

(i) Supposons d'abord C de présentation finie sur $\widehat{B}$. D'après 1.16.37, $\widehat{C}$ est un quotient d'une $\widehat{A}$-algèbre de séries formelles restreintes à $2N+q$ variables, vérifiant les conditions d'application du lemme 1.16.35. Soit donc C' une A-algèbre de type fini, lisse sur $\mathrm{Spec}(A)$ en dehors de $\mathrm{V}(J)$, dont le séparé complété pour la topologie J-préadique est $\widehat{A}$-isomorphe à $\widehat{C}$ (on identifie dans la suite ces deux algèbres). On notera que le hensélisé J-préadique de C' est un couple hensélien quasi-idyllique (1.15.11.3).

Le $\widehat{B}$-module $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$ est localement libre en dehors de $\mathrm{V}(J\widehat{B})$ (1.14.6). Donc en vertu de 1.16.19, pour tout entier $n \geq 0$, quitte à remplacer C' par un voisinage étale élémentaire de JC', on peut trouver un C'-module de présentation finie M', localement libre en dehors de $\mathrm{V}(JC')$, muni d'une présentation

$$C'^m \xrightarrow{\mathrm{L}'} C'^q \longrightarrow M' \longrightarrow 0\ ,$$

tels que $M' \otimes_{C'} \widehat{C}$ soit isomorphe à $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \otimes_{\widehat{B}} \widehat{C}$ et $\mathrm{L}' \equiv \mathrm{L} \mod (J^n\widehat{C})$.

Supposons n fixé (on le précisera dans la suite) et M' ainsi choisi. Soit alors D' l'algèbre symétrique du C'-module M', de sorte que $D' \otimes_{C'} \widehat{C}$ est $\widehat{C}$-isomorphe à $C \otimes_{\widehat{B}} \widehat{C}$. D'après 1.16.16, pour tout entier $r \geq 0$, quitte à remplacer C' par un voisinage étale élémentaire de JC', on peut approximer modulo J^r la section $\delta\colon \mathrm{Spec}(\widehat{C}) \to \mathrm{Spec}(C \otimes_{\widehat{B}} \widehat{C})$ en une section

$$\delta'\colon \mathrm{Spec}(C') \to \mathrm{Spec}(D').$$

Soit B' le quotient de C' défini par le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(B') \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathrm{Spec}(C') \arrow[d, "\sigma'"] \\ \mathrm{Spec}(C') \arrow[r, "\delta'"'] & \mathrm{Spec}(D') \end{tikzcd} \qquad (1.16.39.3)$$

où σ' est la section nulle, et soit $\widehat{B}'$ le séparé complété de B' pour la topologie J-préadique, qui est isomorphe à $B' \otimes_{C'} \widehat{C}$ (1.15.14). Il résulte alors de 1.16.33, compte tenu de (1.16.39.2) et (1.16.39.3), que si n et r sont suffisamment grands, $\widehat{B}$ et $\widehat{B}'$ sont $\widehat{A}$-isomorphes. On en déduit le théorème 1.16.29 dans le cas (i) en appliquant 1.16.36.

(ii) Supposons ensuite $\widehat{B}$ rig-pur. Soient S le quotient de C par $C_{J\text{-tor}}$, $\widehat{S}$ le séparé complété de S pour la topologie J-préadique. La section nulle $\sigma\colon \mathrm{Spec}(\widehat{B}) \to \mathrm{Spec}(C)$ se factorise à travers une section $\tau\colon \mathrm{Spec}(\widehat{B}) \to \mathrm{Spec}(S)$, qui induit par prolongement aux complétés une section $\widehat{\tau}\colon \mathrm{Spec}(\widehat{B}) \to \mathrm{Spec}(\widehat{S})$. Considérons alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(\widehat{B}) \arrow[r, "\widehat{\tau}"] \arrow[d, "\widehat{\tau}"'] & \mathrm{Spec}(\widehat{S}) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathrm{Spec}(\widehat{B}) \arrow[d, "\sigma"] \\ \mathrm{Spec}(\widehat{S}) \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{Spec}(C \otimes_{\widehat{B}} \widehat{S}) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(C) \end{tikzcd} \qquad (1.16.39.4)$$

où ρ est le graphe du morphisme canonique $\mathrm{Spec}(\widehat{S}) \to \mathrm{Spec}(C)$ et le carré cartésien de droite est défini par le changement de base $\mathrm{Spec}(\widehat{S}) \to \mathrm{Spec}(\widehat{B})$. Il résulte de 1.12.16(iv) que le rectangle extérieur est cartésien. Par suite, le carré de gauche est aussi cartésien.

D'après 1.16.38, $\widehat{S}$ est un quotient d'une $\widehat{A}$-algèbre de séries formelles restreintes à $2N+q$ variables, vérifiant les conditions d'application du lemme 1.16.35. Soit donc S' une A-algèbre de type fini, lisse sur $\mathrm{Spec}(A)$ en dehors de $\mathrm{V}(J)$, dont le séparé complété pour la topologie J-préadique est $\widehat{A}$-isomorphe à $\widehat{S}$ (on identifie dans la suite ces deux algèbres). En vertu de 1.16.19, pour tout entier n, quitte à remplacer S' par un voisinage étale élémentaire de JS', on peut trouver un

S'-module de présentation finie M', localement libre en dehors de $\mathrm{V}(JS')$, muni d'une présentation

$$S'^m \xrightarrow{\mathrm{L}'} S'^q \longrightarrow M' \longrightarrow 0\ ,$$

tels que $M' \otimes_{S'} \widehat{S}$ soit isomorphe à $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \otimes_{\widehat{B}} \widehat{S}$ et $\mathrm{L}' \equiv \mathrm{L} \mod (J^n\widehat{S})$.

Supposons n fixé (on le précisera dans la suite) et M' ainsi choisi. Soit alors D' l'algèbre symétrique du S'-module M', de sorte que $D' \otimes_{S'} \widehat{S}$ est $\widehat{S}$-isomorphe à $C \otimes_{\widehat{B}} \widehat{S}$. D'après 1.16.16, pour tout entier $r \geq 0$, quitte à remplacer S' par un voisinage étale élémentaire de JS', on peut approximer modulo J^r la section $\rho\colon \mathrm{Spec}(\widehat{S}) \to \mathrm{Spec}(C \otimes_{\widehat{B}} \widehat{S})$ en une section

$$\rho'\colon \mathrm{Spec}(S') \to \mathrm{Spec}(D').$$

Soit B' le quotient de S' défini par le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(B') \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathrm{Spec}(S') \arrow[d, "\tau'"] \\ \mathrm{Spec}(S') \arrow[r, "\rho'"'] & \mathrm{Spec}(D') \end{tikzcd} \tag{1.16.39.5}$$

où τ' est la section nulle, et soit $\widehat{B}'$ le séparé complété de B' pour la topologie J-préadique, qui est isomorphe à $B' \otimes_{S'} \widehat{S}$ (1.15.14). Il résulte de 1.16.34, compte tenu de (1.16.39.4) et (1.16.39.5), que si n et r sont suffisamment grands, $\widehat{B}$ et $\widehat{B}'$ sont $\widehat{A}$-isomorphes. On en déduit le théorème 1.16.29 dans le cas (ii) en appliquant 1.16.36.

1.17 Compléments d'algèbre homologique

Les résultats de cette section sont dus à Ullrich [44].

1.17.1. Soient A un anneau, (M_n) un système projectif de A-modules indexé par $\mathbb{N}$; on note $u_{mn}\colon M_n \to M_m$ les morphismes de transition (pour $m \leq n$). On dit que

(i) (M_n) est *strict* si les morphismes de transition u_{mn} sont surjectifs.

(ii) (M_n) est *Artin-Rees-nul* (en abrégé AR-nul) s'il existe un entier $r \geq 0$ tel que pour tout n, $u_{n,n+r} = 0$.

(iii) (M_n) vérifie *la condition de Mittag-Leffler*, (en abrégé ML), si pour tout m il existe $n \geq m$ tel que, pour tout $n' \geq n$, $u_{mn'}(M_{n'}) = u_{mn}(M_n)$.

(iv) (M_n) vérifie *la condition d'Artin-Rees-Mittag-Leffler*, (en abrégé ARML), s'il existe un entier $r \geq 0$ tel que, pour tout m et tout $n' \geq m+r$, $u_{mn'}(M_{n'}) = u_{m,m+r}(M_{m+r})$.

On renvoie à ([30] 0.13), ([27] §V) et ([33] 2.5) pour plus de détails sur ces conditions.

1.17.2. Soient A un anneau, $t \in A$, $(\mathrm{C}^\bullet, d^\bullet)$ un complexe de A-modules (à différentielle de degré $+1$) ; posons $A_n = A/t^{n+1}A$ et $\mathrm{C}^\bullet_n = \mathrm{C}^\bullet \otimes_A A_n$ pour tout $n \geq 0$. Soient q un entier, $\widehat{\mathrm{H}}^q(\mathrm{C}^\bullet)$ le séparé complété de $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)$ pour la topologie (t)-préadique. Les flèches naturelles

$$\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet) \quad \to \quad \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n) \tag{1.17.2.1}$$

induisent un homomorphisme topologique

$$\widehat{\mathrm{H}}^q(\mathrm{C}^\bullet) \quad \to \quad \varprojlim_n \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n), \tag{1.17.2.2}$$

où le premier membre est muni de la topologie (t)-préadique et les $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n)$ de la topologie discrète. On note N_n (resp. Q_n) le noyau (resp. conoyau) de l'homomorphisme (1.17.2.1).

Lemme 1.17.3. *Les hypothèses sont celles de* (1.17.2).

(i) *S'il existe un entier $r \geq 0$ tel que $t^r \mathrm{C}^{q+1}_{(t)\text{-tor}} = 0$, les N_n définissent sur* $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)$ *une filtration (t)-bonne ; plus précisément, on a $N_{n+1} = tN_n$ pour tout $n \geq r$.*

(ii) *S'il existe deux entiers $r, h \geq 0$ tels que $t^r \mathrm{C}^i_{(t)\text{-tor}} = 0$ pour $i \in \{q, q+1, q+2\}$ et que $t^h(\mathrm{H}^{q+1}(t^r\mathrm{C}^\bullet))_{(t)\text{-tor}} = 0$, le système projectif (Q_n) est AR-nul.*

(iii) *Si le système projectif (Q_n) est AR-nul, le système projectif* $(\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n))$ *vérifie* (ARML).

(iv) *Si le système projectif (Q_n) est AR-nul et si les N_n définissent sur* $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)$ *une filtration (t)-bonne,* (1.17.2.2) *est un isomorphisme topologique.*

La démonstration de 1.17.3 est élémentaire, basée sur la remarque suivante.

Lemme 1.17.4. *Soient A un anneau, $t \in A$, M un A-module, N un sous-A-module de M. Posons $P = M/N$, et supposons que $t^r P_{(t)\text{-tor}} = 0$ pour un entier $r \geq 0$. Alors pour tout $n \geq 0$, on a $(t^{n+r}M) \cap N = t^n((t^rM) \cap N)$.*

En effet, soient $y \in M$, $\overline{y}$ son image dans P. Si $x = t^{n+r}y \in (t^{n+r}M) \cap N$, alors $\overline{y} \in P_{(t)\text{-tor}}$ et $t^r\overline{y} = 0$; donc $x \in t^n((t^rM) \cap N)$.

1.17.5. Revenons à la démonstration de 1.17.3. Les flèches (1.17.2.1) se mettent dans la suite exacte longue de cohomologies

$$\mathrm{H}^q(t^{n+1}\mathrm{C}^\bullet) \to \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet) \to \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n) \to \mathrm{H}^{q+1}(t^{n+1}\mathrm{C}^\bullet) \to \mathrm{H}^{q+1}(\mathrm{C}^\bullet)$$

déduite de la suite exacte courte $0 \to t^{n+1}\mathrm{C}^\bullet \to \mathrm{C}^\bullet \to \mathrm{C}^\bullet_n \to 0$. On a donc

$$N_n = \mathrm{im}(\mathrm{H}^q(t^{n+1}\mathrm{C}^\bullet) \to \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)),$$

$$Q_n = \mathrm{im}(\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n) \to \mathrm{H}^{q+1}(t^{n+1}\mathrm{C}^\bullet)) = \ker(\mathrm{H}^{q+1}(t^{n+1}\mathrm{C}^\bullet) \to \mathrm{H}^{q+1}(\mathrm{C}^\bullet)).$$

(i) Si on note $\pi\colon \ker(d^q) \to \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)$ la projection canonique, on a $N_n = \pi((t^{n+1}\mathrm{C}^q) \cap \ker(d^q))$; en particulier on a $tN_n \subset N_{n+1}$. D'autre part, en vertu de 1.17.4, on a, pour tout $n \geq 0$,

$$(t^{n+r}\mathrm{C}^q) \cap \ker(d^q) = t^n((t^r\mathrm{C}^q) \cap \ker(d^q)),$$

d'où l'assertion.

(ii) Pour $i \in \{q, q+1, q+2\}$ et tout $p \geq 0$, la flèche $t^r\mathrm{C}^i \to t^{r+p}\mathrm{C}^i$ de multiplication par t^p est un isomorphisme, car $t^r\mathrm{C}^i_{(t)\text{-tor}} = 0$. Donc la multiplication par t^p induit un isomorphisme $\mathrm{H}^{q+1}(t^r\mathrm{C}^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{q+1}(t^{r+p}\mathrm{C}^\bullet)$; en particulier, on a $t^h(\mathrm{H}^{q+1}(t^n\mathrm{C}^\bullet))_{(t)\text{-tor}} = 0$ pour tout $n \geq r$. Posons

$$N'_n = \mathrm{H}^{q+1}(t^{n+1}\mathrm{C}^\bullet)/Q_n = \mathrm{im}(\mathrm{H}^{q+1}(t^{n+1}\mathrm{C}^\bullet) \to \mathrm{H}^{q+1}(\mathrm{C}^\bullet)).$$

Compte tenu de (i) et de l'hypothèse $t^r\mathrm{C}^{q+2}_{(t)\text{-tor}} = 0$, on a $N'_{n+1} = tN'_n$ pour tout $n \geq r$. Considérons alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Q_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^{q+1}(t^{n+1}\mathrm{C}^\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & N'_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q_{n+1} \arrow[r] & \mathrm{H}^{q+1}(t^{n+2}\mathrm{C}^\bullet) \arrow[r] & N'_{n+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont induites par la multiplication par t. Pour tout $n \geq r$, deux des flèches verticales sont des isomorphismes ; il en est donc de même de la troisième ; d'où $Q_{n+1} = tQ_n$.

En tant que quotient de $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n)$, Q_n est tué par t^{n+1}, et donc

$$Q_n \subset (\mathrm{H}^{q+1}(t^{n+1}\mathrm{C}^\bullet))_{(t)\text{-tor}}.$$

Il en résulte que $t^hQ_n = 0$ pour tout $n \geq r$. D'autre part, le composé de la multiplication par t^p de $\mathrm{H}^{q+1}(t^{n+1}\mathrm{C}^\bullet)$ dans $\mathrm{H}^{q+1}(t^{n+p+1}\mathrm{C}^\bullet)$ avec la flèche de transition de $\mathrm{H}^{q+1}(t^{n+p+1}\mathrm{C}^\bullet)$ dans $\mathrm{H}^{q+1}(t^{n+1}\mathrm{C}^\bullet)$ est la multiplication par t^p dans $\mathrm{H}^{q+1}(t^{n+1}\mathrm{C}^\bullet)$. Comme $Q_{n+p} = t^pQ_n$ pour $n \geq r$, le morphisme de transition $Q_{n+p} \to Q_n$ est nul pour tout $n \geq r$ et tout $p \geq h$. Donc pour tout n, le morphisme de transition $Q_{n+r+h} \to Q_n$ est nul.

(iii) Considérons la suite exacte de systèmes projectifs

$$0 \to \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)/N_n \to \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n) \to Q_n \to 0, \tag{1.17.5.1}$$

où celui de gauche est clairement strict. Alors le système projectif $(\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n))$ vérifie (ARML), en vertu de ([27] V 2.1.2). On en déduit aussi un isomorphisme topologique

$$\varprojlim_n \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)/N_n \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n). \tag{1.17.5.2}$$

(iv) La flèche

$$\widehat{\mathrm{H}}^q(\mathrm{C}^\bullet) \quad \to \quad \varprojlim_n \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)/N_n \tag{1.17.5.3}$$

déduite des surjections $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet) \otimes_A A_n \to \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)/N_n$ est un isomorphisme topologique. On achève la preuve en observant que le composé de (1.17.5.2) et (1.17.5.3) est (1.17.2.2).

Lemme 1.17.6. *Les hypothèses étant celles de* (1.17.2)*, supposons de plus que les conditions suivantes soient remplies :*

(a) *Il existe un entier $r \geq 1$ tel que $t^r \mathrm{C}^{q+1}_{(t)\text{-tor}} = 0$.*

(b) *A et C^{q-1} sont complets et C^q est séparé pour les topologies (t)-préadiques.*

Soient $x_1, \dots, x_m$ des éléments de $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)$ dont les classes engendrent le A-module $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)/N_n$ pour un entier $n > r$. Alors $x_1, \dots, x_m$ engendrent le A-module $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)$.

En particulier, si $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n) = 0$ pour un entier $n > r$, $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet) = 0$.

En vertu de 1.17.3(i), les classes de $x_1, \dots, x_m$ engendrent le A_0-module $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet) \otimes_A A_0$. Soient $y_1, \dots, y_m \in \ker(d^q)$ des éléments qui relèvent $x_1, \dots, x_m$. Considérons l'homomorphisme

$$u \colon A^m \oplus \mathrm{C}^{q-1} \quad \to \quad \ker(d^q),$$

défini par $u(z_1, \dots, z_m, z) = \sum_{i=1}^m z_i y_i + d^{q-1}(z)$. Comme $\mathrm{gr}_0(u) = u \otimes_A A_0$ est surjectif, il résulte de la condition (b) et de 1.8.5 que u est surjectif.

Proposition 1.17.7. *Soient R un anneau 1-valuatif, t un élément non nul de l'idéal maximal de R, A une R-algèbre topologiquement de type fini, $(\mathrm{C}^\bullet, d^\bullet)$ un complexe de A-modules, $A_n = A/t^{n+1}A$, $\mathrm{C}^\bullet_n = \mathrm{C}^\bullet \otimes_A A_n$, q un entier. Supposons que les conditions suivantes soient remplies :*

(a) *Il existe un entier $r \geq 1$ tel que $t^r \mathrm{C}^i_{(t)\text{-tor}} = 0$ pour $i \in \{q, q+1, q+2\}$.*

(b) *C^{q-1} est complet et C^q est séparé pour les topologies (t)-préadiques.*

(c) *Pour tout entier $n \geq 0$, $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n)$ et $\mathrm{H}^{q+1}(t^{n+1}\mathrm{C}^\bullet)$ sont des A-modules cohérents.*

Alors $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)$ est un A-module cohérent ; le système projectif $(\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n))$ vérifie (ARML) *; si on pose*

$$N_n = \ker(\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet) \to \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n)), \tag{1.17.7.1}$$

les N_n définissent sur $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)$ une filtration (t)-bonne ; enfin, l'homomorphisme canonique

$$\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet) \quad \to \quad \varprojlim_n \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n), \tag{1.17.7.2}$$

est un isomorphisme topologique (*le premier membre étant muni de la topologie (t)-préadique, les $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n)$ de la topologie discrète*).

En vertu de 1.9.18(iii), il existe un entier $h \geq 1$ tel que $t^h(\mathrm{H}^{q+1}(t^r\mathrm{C}^\bullet))_{(t)\text{-tor}} = 0$. On en déduit par 1.17.3 que les N_n définissent sur $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)$ une filtration (t)-bonne ; $(\mathrm{H}^q(\mathrm{C}_n^\bullet))$ vérifie (ARML) ; enfin (1.17.2.2) est un isomorphisme topologique. Reste à montrer que $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)$ est un A-module cohérent, ce qui impliquera que (1.17.7.2) est un isomorphisme topologique (1.8.29 et 1.9.18). Reprenons les notations de 1.17.2. Pour tout entier $n \geq 0$, Q_n est de type fini en tant que quotient de $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}_n^\bullet)$; il est donc de présentation finie car il est contenu dans le A-module cohérent $\mathrm{H}^{q+1}(t^{n+1}\mathrm{C}^\bullet)$. La suite exacte (1.17.5.1) implique alors que $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)/N_n$ est de type fini ; par suite $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)$ est de type fini (1.17.6). Si on pose $M = \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)_{(t)\text{-tor}}$, alors M est de type fini et $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)/M$ est cohérent (1.9.18). Il existe deux entiers $s, k \geq 0$ tels que $t^kM = 0$ et $N_{n+1} = tN_n$ pour $n \geq s$ (1.17.3). On en déduit aussitôt que $M \cap N_n = 0$ pour n suffisamment grand ; autrement dit la flèche naturelle $M \to \mathrm{H}^q(\mathrm{C}_n^\bullet)$ est injective. Comme $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}_n^\bullet)$ est cohérent, M est cohérent et il en est alors de même de $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)$.

Chapitre 2

Géométrie formelle

Ce chapitre reprend et complète la théorie des schémas formels d'A. Grothendieck [28, 30]. Nous introduisons les schémas formels *idylliques*. Nous étendons à ces objets certains résultats de Grothendieck initialement établis pour les schémas formels noethériens, entre autres ceux qui portent sur les faisceaux cohérents (2.7.2 et 2.8.5) et sur leur cohomologie (théorème de finitude (2.11.5), comparaison de la théorie "algébrique" à la théorie "formelle" (2.12.2)...). Nous développons la notion de *clôture rigide* d'un module sur un schéma formel idyllique qui jouera un rôle important dans la suite de ce traité. Nous étudions enfin les propriétés différentielles des schémas formels idylliques.

La terminologie de Grothendieck pour les schémas formels est essentiellement adaptée au cadre noethérien, qui n'est pas le cadre exclusif de ce traité. Nous nous en écartons à certains endroits pour mettre l'accent sur les concepts fondamentaux pour la suite. Pour éviter toute confusion, nous reformulons toutes les définitions, même celles que nous conservons identiques à ([28] §10).

2.1 Rappels et compléments sur les schémas formels

2.1.1. Soit A un anneau topologique admissible (1.8.3). Pour tout idéal de définition J de A, $\mathrm{Spec}(A/J)$ s'identifie au sous-espace fermé $\mathrm{V}(J)$ de $\mathrm{Spec}(A)$, ensemble des idéaux premiers *ouverts* de A ; cet espace ne dépend pas de l'idéal de définition J considéré ; notons le $\mathfrak{X}$. Soit (J_λ) un système fondamental de voisinages de 0 dans A, formé d'idéaux de définition, et pour tout λ, soit $\mathscr{O}_\lambda$ le faisceau structural de $\mathrm{Spec}(A/J_\lambda)$; ce faisceau est induit sur $\mathfrak{X}$ par $\widetilde{A}/\widetilde{J}_\lambda$ (lequel est nul hors de $\mathfrak{X}$). Pour $J_\mu \subset J_\lambda$, l'homomorphisme canonique $A/J_\mu \to A/J_\lambda$ définit donc un homomorphisme $u_{\lambda\mu}\colon \mathscr{O}_\mu \to \mathscr{O}_\lambda$ de faisceaux d'anneaux, et $(\mathscr{O}_\lambda)$ est un *système projectif de faisceaux d'anneaux* pour ces homomorphismes. Comme la topologie de $\mathfrak{X}$ admet une base formée d'ouverts quasi-compacts, on peut associer à tout $\mathscr{O}_\lambda$ un faisceau d'anneaux topologiques pseudo-discrets ([28] 0.3.9.1) qui a $\mathscr{O}_\lambda$ comme faisceau d'anneaux (sans topologie) sous-jacent, et que nous notons

A. Abbes, *Éléments de Géométrie Rigide*, Progress in Mathematics 286,
DOI 10.1007/978-3-0348-0012-9_2,

encore $\mathscr{O}_\lambda$; et les $\mathscr{O}_\lambda$ forment un *système projectif de faisceaux d'anneaux topologiques* ([28] 0.3.9.2). Nous désignons par $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ le faisceau d'anneaux topologiques sur $\mathfrak{X}$, limite projective du système $(\mathscr{O}_\lambda)$; pour tout ouvert quasi-compact U de $\mathfrak{X}$, $\Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ est donc l'anneau topologique limite projective du système d'anneaux discrets $\Gamma(U, \mathscr{O}_\lambda)$.

Définition 2.1.2 ([28] 10.1.2). Étant donné un anneau admissible A, on appelle *spectre formel* de A et on note $\mathrm{Spf}(A)$ le sous-espace fermé $\mathfrak{X}$ de $\mathrm{Spec}(A)$ formé des idéaux premiers ouverts de A. On dit qu'un espace topologiquement annelé est un *schéma formel affine* s'il est isomorphe à un spectre formel $\mathrm{Spf}(A) = \mathfrak{X}$ muni du faisceau d'anneaux topologiques $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ limite projective des faisceaux d'anneaux pseudo-discrets $(\widetilde{A}/\widetilde{J}_\lambda)|\mathfrak{X}$, où J_λ parcourt l'ensemble filtrant des idéaux de définition de A.

Proposition 2.1.3 ([28] 10.1.3). *Si* $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$*, où A est un anneau admissible,* $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ *est topologiquement isomorphe à A.*

Proposition 2.1.4 ([28] 10.1.4). *Soient A un anneau admissible,* $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$*, et pour tout $f \in A$, soit $\mathscr{D}(f) = \mathrm{D}(f) \cap \mathfrak{X}$; l'espace topologiquement annelé $(\mathscr{D}(f), \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|\mathscr{D}(f))$ est isomorphe au spectre formel affine* $\mathrm{Spf}(A_{\{f\}})$ (1.8.12).

2.1.5. En tant que faisceau d'anneaux *sans topologie*, le faisceau structural $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ de $\mathrm{Spf}(A)$ admet pour tout $x \in \mathfrak{X}$ une fibre qui, en vertu de 2.1.4, s'identifie à la limite inductive $\varinjlim A_{\{f\}}$ pour les $f \notin \mathfrak{p}_x$, où $\mathfrak{p}_x$ est l'idéal premier de A associé à x. Par suite (1.8.13) et (1.8.14) :

Proposition 2.1.6. *Pour tout $x \in \mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, la fibre $\mathscr{O}_x$ est un anneau local dont le corps résiduel est isomorphe à $\kappa(x) = A_x/\mathfrak{p}_x A_x$. Si en outre A est adique et noethérien, $\mathscr{O}_x$ est un anneau noethérien.*

2.1.7. On appelle *schéma formel affine préadique* (resp. *adique*, resp. *noethérien*) un schéma formel affine isomorphe à un spectre formel $\mathrm{Spf}(A)$, où A est préadique complet et séparé (resp. adique, resp. adique et noethérien) (1.8.4).

Nous nous écartons ici de la terminologie de Grothendieck. Notre notion de schéma formel affine préadique correspond à sa notion de schéma formel affine adique.

2.1.8. Soient A un anneau admissible, J un idéal *ouvert* de A, $\mathfrak{X}$ le schéma formel affine $\mathrm{Spf}(A)$. Soit (J_λ) l'ensemble des idéaux de définition de A contenus dans J ; alors $\widetilde{J}/\widetilde{J}_\lambda$ est un faisceau d'idéaux de $\widetilde{A}/\widetilde{J}_\lambda$. Désignons par J^Δ la limite projective des faisceaux induits sur $\mathfrak{X}$ par $\widetilde{J}/\widetilde{J}_\lambda$, qui s'identifie à un *idéal* de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$. Pour tout $f \in A$, si on note S_f l'ensemble multiplicatif des f^n $(n \geq 0)$, $\Gamma(\mathscr{D}(f), J^\Delta)$ est la limite projective de $S_f^{-1}J/S_f^{-1}J_\lambda$, autrement dit s'identifie à l'idéal ouvert $J_{\{f\}}$ de l'anneau $A_{\{f\}}$ (1.8.9), et en particulier $\Gamma(\mathfrak{X}, J^\Delta) = J$; on en conclut (les $\mathscr{D}(f)$ formant une base de la topologie de $\mathfrak{X}$) que l'on a

$$J^\Delta|\mathscr{D}(f) = (J_{\{f\}})^\Delta. \tag{2.1.8.1}$$

L'application canonique de $A_{\{f\}} = \Gamma(\mathscr{D}(f), \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ dans $\Gamma(\mathscr{D}(f), (\widetilde{A}/\widetilde{J})|\mathfrak{X}) = S_f^{-1}A/S_f^{-1}J$ est surjective et a pour noyau $\Gamma(\mathscr{D}(f), J^\Delta) = J_{\{f\}}$. Ces applications définissent donc un *épimorphisme* continu, dit *canonique*, du faisceau d'anneaux topologiques $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ sur le faisceau d'anneaux discrets $(\widetilde{A}/\widetilde{J})|\mathfrak{X}$, dont le noyau est J^Δ. On a donc un *isomorphisme canonique*

$$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/J^\Delta \xrightarrow{\sim} (\widetilde{A}/\widetilde{J})|\mathfrak{X}. \tag{2.1.8.2}$$

Il est clair (en vertu de $\Gamma(\mathfrak{X}, J^\Delta) = J$) que l'application $J \mapsto J^\Delta$ est strictement croissante; d'après ce qui précède, pour $J \subset J'$, le faisceau J'^Δ/J^Δ est canoniquement isomorphe à $(J'/J)^\sim$.

2.1.9. Les hypothèses et notations étant toujours celles de (2.1.8), nous dirons qu'un idéal $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est un *idéal ouvert* (resp. un *idéal de définition*) de $\mathfrak{X}$ si, pour tout $x \in \mathfrak{X}$, il existe un voisinage ouvert de x de la forme $\mathscr{D}(f)$, où $f \in A$, tel que $\mathscr{J}|\mathscr{D}(f)$ soit de la forme $\mathfrak{J}^\Delta$, où $\mathfrak{J}$ est un idéal ouvert (resp. un idéal de définition) de $A_{\{f\}}$.

Proposition 2.1.10 ([28] 10.3.5). *Si A est un anneau admissible, tout idéal ouvert* (*resp. tout idéal de définition*) *de $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ est de la forme J^Δ, où J est un idéal ouvert* (*resp. un idéal de définition*) *de A, uniquement déterminé.*

En effet, soit $\mathscr{J}$ un idéal ouvert de $\mathfrak{X}$; par hypothèse, et puisque $\mathfrak{X}$ est quasi-compact, il y a un nombre fini d'éléments $f_i \in A$ tels que les $\mathscr{D}(f_i)$ recouvrent $\mathfrak{X}$ et $\mathscr{J}|\mathscr{D}(f_i) = \mathfrak{J}_i^\Delta$, où $\mathfrak{J}_i$ est un idéal ouvert de $A_{\{f_i\}}$. Pour tout i, il existe un idéal ouvert $\mathfrak{R}_i$ de A tel que $\mathfrak{J}_i = (\mathfrak{R}_i)_{\{f_i\}}$ (1.8.9). Soit $\mathfrak{R}$ un idéal de définition de A contenu dans tous les $\mathfrak{R}_i$. On a alors $\mathfrak{R}^\Delta \subset \mathscr{J}$. L'image canonique de $\mathscr{J}/\mathfrak{R}^\Delta$ dans le faisceau structural $(A/\mathfrak{R})^\sim$ de $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{R})$ est telle que sa restriction à $\mathscr{D}(f_i)$ soit égale à $(\mathfrak{J}_i/\mathfrak{R}_{\{f_i\}})^\sim$; on en conclut que cette image canonique est un idéal quasi-cohérent sur $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{R})$, donc de la forme $(J/\mathfrak{R})^\sim$, où J est un idéal de A contenant $\mathfrak{R}$, d'où $\mathscr{J} = J^\Delta$ (2.1.8).

Supposons maintenant que $\mathscr{J}$ soit un idéal de définition de $\mathfrak{X}$ et montrons que J est un idéal de définition de A. On peut supposer que, pour tout i, $\mathfrak{J}_i$ est un idéal de définition de $A_{\{f_i\}}$; donc il existe n_i tel que l'on ait $\mathfrak{J}_i^{n_i} \subset \mathfrak{R}_{\{f_i\}}$. On aura, en désignant par n le plus grand des n_i, $(\mathscr{J}/\mathfrak{R}^\Delta)^n = 0$, et par suite $((J/\mathfrak{R})^\sim)^n = 0$, d'où finalement $(J/\mathfrak{R})^n = 0$, ce qui prouve que J est un idéal de définition de A.

Proposition 2.1.11. *Soient A un anneau préadique complet et séparé, J un idéal de définition de A, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathscr{J} = J^\Delta$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\mathscr{J}$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module de type fini.*
(ii) *$\mathscr{J}/\mathscr{J}^2$ est un $(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$-module de type fini.*
(iii) *J est un A-module de type fini.*

En outre, quand ces conditions sont vérifiées, on a $\mathscr{J} = J\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ et $\mathscr{J}^n = (J^n)^\Delta$ pour tout $n \geq 0$; en particulier, $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2$ est canoniquement isomorphe à $(J/J^2)^\sim$.

D'abord (i) entraîne clairement (ii). Montrons ensuite que (ii) implique (iii). Comme l'idéal $\mathscr{J}/(J^2)^\Delta = (J/J^2)^\sim$ de $\mathscr{O}_\mathfrak{X}/(J^2)^\Delta$ est de carré nul (2.1.8), on a $\mathscr{J}^2 \subset (J^2)^\Delta$, et $\mathscr{J}/(J^2)^\Delta$ est un quotient de $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2$. Par suite, J/J^2 est un A-module de type fini, et J est un A-module de type fini, en vertu de 1.8.6. Montrons enfin que (iii) entraîne (i). Il résulte de 2.1.8 et 1.8.11 que, pour tout $f \in A$,

$$\Gamma(\mathscr{D}(f), J^\Delta) = J_{\{f\}} = JA_{\{f\}} = J\Gamma(\mathscr{D}(f), \mathscr{O}_\mathfrak{X}).$$

Comme $J\mathscr{O}_\mathfrak{X}$ est associé au préfaisceau $U \mapsto J\Gamma(U, \mathscr{O}_\mathfrak{X})$, la relation $\mathscr{J} = J\mathscr{O}_\mathfrak{X}$ et la condition (i) en résultent, puisque les $\mathscr{D}(f)$ forment une base de la topologie de $\mathfrak{X}$. De même, on a $\mathscr{J}^n = (J^n)^\Delta$ car J^n est un idéal de définition de type fini de A.

Corollaire 2.1.12. *Pour qu'un schéma formel affine préadique soit adique* (2.1.7)*, il faut et il suffit qu'il admette un idéal de définition de type fini.*

Proposition 2.1.13. *Soient A un anneau adique, J un idéal de définition de type fini de A, $\mathfrak{a}$ un idéal ouvert de A, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathscr{J} = J^\Delta$, $\mathscr{A} = \mathfrak{a}^\Delta$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\mathscr{A}$ est un $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$-module de type fini.*
(ii) *$\mathscr{A}/\mathscr{A}\mathscr{J}$ est un $(\mathscr{O}_\mathfrak{X}/\mathscr{J})$-module de type fini.*
(iii) *$\mathfrak{a}$ est un A-module de type fini.*

En outre, quand ces conditions sont vérifiées, on a $\mathscr{A} = \mathfrak{a}\mathscr{O}_\mathfrak{X}$.

D'abord (i) entraîne clairement (ii). Montrons ensuite que (ii) implique (iii). Comme l'idéal $\mathscr{A}/(\mathfrak{a}J)^\Delta = (\mathfrak{a}/\mathfrak{a}J)^\sim$ de $\mathscr{O}_\mathfrak{X}/(\mathfrak{a}J)^\Delta$ est annulé par $\mathscr{J}/(\mathfrak{a}J)^\Delta = (J/\mathfrak{a}J)^\sim$ (2.1.8), on a $\mathscr{J}\mathscr{A} \subset (\mathfrak{a}J)^\Delta$, et $\mathscr{A}/(\mathfrak{a}J)^\Delta$ est un quotient de $\mathscr{A}/\mathscr{A}\mathscr{J}$. Par suite, $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}J$ est un A-module de type fini, et $\mathfrak{a}$ est un A-module de type fini, en vertu de 1.8.6. Montrons enfin que (iii) entraîne (i). Il résulte de 2.1.8 et 1.8.11 que, pour tout $f \in A$,

$$\Gamma(\mathscr{D}(f), \mathfrak{a}^\Delta) = \mathfrak{a}_{\{f\}} = \mathfrak{a}A_{\{f\}} = \mathfrak{a}\Gamma(\mathscr{D}(f), \mathscr{O}_\mathfrak{X}).$$

Comme $\mathfrak{a}\mathscr{O}_\mathfrak{X}$ est associé au préfaisceau $U \mapsto \mathfrak{a}\Gamma(U, \mathscr{O}_\mathfrak{X})$, la relation $\mathscr{A} = \mathfrak{a}\mathscr{O}_\mathfrak{X}$ et la condition (i) en résultent, puisque les $\mathscr{D}(f)$ forment une base de la topologie de $\mathfrak{X}$.

2.1.14. Soit $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ un schéma formel affine. On dit qu'une famille $(\mathscr{J}_\lambda)$ d'idéaux de définition de $\mathfrak{X}$ est un *système fondamental d'idéaux de définition* si tout idéal de définition de $\mathfrak{X}$ contient un des $\mathscr{J}_\lambda$; comme $\mathscr{J}_\lambda = J_\lambda^\Delta$, il revient au même de dire que les J_λ forment un système fondamental de voisinages de 0 dans A.

Soit (f_α) une famille d'éléments de A tels que les $\mathscr{D}(f_\alpha)$ recouvrent $\mathfrak{X}$. Si $(\mathscr{J}_\lambda)$ est une famille filtrante décroissante d'idéaux de $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$ telle que pour tout α, la famille $(\mathscr{J}_\lambda|\mathscr{D}(f_\alpha))$ soit un système fondamental d'idéaux de définition de $\mathscr{D}(f_\alpha)$, alors $(\mathscr{J}_\lambda)$ est un système fondamental d'idéaux de définition de $\mathfrak{X}$. En effet, pour tout idéal de définition $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$, il y a un recouvrement fini de $\mathfrak{X}$ par des $\mathscr{D}(f_i)$ tel que, pour tout i, $\mathscr{J}_{\lambda_i}|\mathscr{D}(f_i)$ soit un idéal de définition de $\mathscr{D}(f_i)$ contenu dans $\mathscr{J}|\mathscr{D}(f_i)$. Si μ est un indice tel que $\mathscr{J}_\mu \subset \mathscr{J}_{\lambda_i}$ pour tout i, il résulte de 2.1.9 que $\mathscr{J}_\mu$ est un idéal de définition de $\mathfrak{X}$, contenu évidemment dans $\mathscr{J}$, d'où notre assertion.

2.1.15. Etant donné un espace topologiquement annelé $\mathfrak{X}$, on dit qu'un ouvert $U \subset \mathfrak{X}$ est un *ouvert formel affine* (resp. un *ouvert formel affine préadique*, resp. un *ouvert formel affine adique*, resp. un *ouvert formel affine noethérien*) si l'espace topologiquement annelé induit par $\mathfrak{X}$ sur U est un schéma formel affine (resp. un schéma formel affine préadique, resp. un schéma formel affine adique, resp. un schéma formel affine noethérien) (2.1.7).

Définition 2.1.16. On appelle *schéma formel* un espace topologiquement annelé $\mathfrak{X}$ dont tout point admet un voisinage ouvert formel affine. On dit que le schéma formel $\mathfrak{X}$ est *préadique* (resp. *localement noethérien*) si tout point de $\mathfrak{X}$ admet un voisinage ouvert formel affine préadique (resp. noethérien). On dit que $\mathfrak{X}$ est *noethérien* s'il est localement noethérien et si son espace sous-jacent est quasi-compact (donc noethérien).

On peut faire les remarques suivantes :

2.1.16.1. Nous nous écartons ici de la terminologie de Grothendieck. Notre notion de schéma formel préadique correspond à sa notion de schéma formel adique ; notre notion de *schéma formel adique* sera définie dans (2.1.24).

2.1.16.2. Si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel (resp. localement noethérien), les ensembles ouverts formels affines (resp. affines noethériens) forment une base de la topologie de $\mathfrak{X}$ ([28] 10.4.3).

2.1.16.3. Si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel (resp. un schéma formel localement noethérien, resp. noethérien), l'espace topologiquement annelé induit sur tout ouvert de $\mathfrak{X}$ est encore un schéma formel (resp. un schéma formel localement noethérien, resp. noethérien) ([28] 10.4.4).

2.1.16.4. La notion de schéma formel préadique présente plusieurs inconvénients :

(a) Elle n'est pas stable par restriction à un ouvert.
(b) Un schéma formel affine qui est préadique en tant que schéma formel, n'est pas en général un schéma formel affine préadique dans le sens de (2.1.7).
(c) Si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel préadique, les ensembles ouverts formels affines préadiques ne forment pas en général une base de la topologie de $\mathfrak{X}$.

En effet, si A est un anneau préadique, séparé et complet, et $f \in A$, $A_{\{f\}}$ n'est pas en général préadique. C'est pourquoi nous sommes obligés de renforcer cette notion (2.1.24).

Définition 2.1.17. Étant donnés deux schémas formels $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$, on appelle morphisme (de schémas formels) de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{Y}$ tout morphisme (ψ, θ) d'espaces topologiquement annelés tel que, pour tout $x \in \mathfrak{X}$, $\theta^\sharp_x$ soit un homomorphisme local $\mathscr{O}_{\psi(x)} \to \mathscr{O}_x$.

Il est immédiat que le composé de deux morphismes de schémas formels est encore un tel morphisme ; les schémas formels forment une catégorie.

Proposition 2.1.18 ([28] 10.4.6). *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel, $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A)$ un schéma formel affine. Il existe une correspondance biunivoque canonique entre les morphismes du schéma formel $\mathfrak{X}$ dans le schéma formel $\mathfrak{Y}$ et les homomorphismes continus de l'anneau A dans l'anneau topologique $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$.*

2.1.19. Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel. On dit qu'un idéal $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est un *idéal ouvert* (resp. un *idéal de définition*) de $\mathfrak{X}$ si tout $x \in \mathfrak{X}$ possède un voisinage ouvert formel affine U tel que $\mathscr{J}|U$ soit un idéal ouvert (resp. un idéal de définition) du schéma formel affine induit par $\mathfrak{X}$ sur U (2.1.9). Lorsque $\mathfrak{X}$ est un schéma formel affine, cette définition coïncide avec celle donnée dans (2.1.9). En vertu de (2.1.8.1), pour tout ouvert $V \subset \mathfrak{X}$, $\mathscr{J}|V$ est un idéal ouvert (resp. un idéal de définition) du schéma formel induit par $\mathfrak{X}$ sur V.

On dit qu'une famille $(\mathscr{J}_\lambda)$ d'idéaux de définition de $\mathfrak{X}$ est un *système fondamental d'idéaux de définition* si elle est filtrante décroissante et s'il existe un recouvrement (U_α) de $\mathfrak{X}$ par des ouverts formels affines de $\mathfrak{X}$ tel que, pour tout α, la famille $(\mathscr{J}_\lambda|U_\alpha)$ soit un système fondamental d'idéaux de définition du schéma formel affine induit par $\mathfrak{X}$ sur U_α. Il résulte de la remarque finale de (2.1.14) que lorsque $\mathfrak{X}$ est un schéma formel affine, cette définition coïncide avec celle donnée dans (2.1.14). Pour tout ouvert $V \subset \mathfrak{X}$, les restrictions $\mathscr{J}_\lambda|V$ forment un système fondamental d'idéaux de définition du schéma formel induit sur V, en vertu de (2.1.8.1).

2.1.20. Tout schéma (usuel) X peut être considéré comme un schéma formel, d'une seule manière ([28] 10.1.2) ; c'est un schéma formel préadique ; pour qu'un idéal $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_X$ soit un idéal de définition de X, il faut et il suffit qu'il soit quasi-cohérent et localement nilpotent ([28] 0.7.1.4). Le foncteur ainsi défini de la catégorie des schémas usuels dans celle des schémas formels est *pleinement fidèle* (2.1.17).

2.1.21. Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel, $\mathscr{J}$ un idéal de définition de $\mathfrak{X}$. Alors l'espace annelé $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$ est un schéma (usuel), qui est affine (resp. localement noethérien, resp. noethérien) lorsque $\mathfrak{X}$ est un schéma formel affine (resp. un schéma formel localement noethérien, resp. noethérien) ; en outre, si $\theta\colon \mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}$ est l'homomorphisme canonique, $u = (1_{\mathfrak{X}}, \theta)$ est un *morphisme* (dit *canonique*) de schémas formels $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}) \to (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$; on est aussitôt ramené au cas affine, et alors les propositions ont déjà été démontrées dans (2.1.8).

2.1.22. Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel, $(\mathscr{J}_\lambda)$ un système fondamental d'idéaux de définition de $\mathfrak{X}$. Alors le faisceau d'anneaux topologiques $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est limite projective des faisceaux d'anneaux pseudo-discrets $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}_\lambda$ ([28] 0.3.8.1 et 10.5.3). Pour tout λ, soit f_λ le morphisme canonique $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}_\lambda) \to \mathfrak{X}$; pour $\mathscr{J}_\mu \subset \mathscr{J}_\lambda$, l'homomorphisme canonique $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}_\mu \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}_\lambda$ définit un morphisme canonique

$$f_{\mu\lambda}\colon (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}_\lambda) \to (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}_\mu)$$

de schémas (usuels) tel que l'on ait $f_\lambda = f_\mu \circ f_{\mu\lambda}$. Les schémas $\mathfrak{X}_\lambda = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_\mathfrak{X}/\mathscr{J}_\lambda)$ et les morphismes $f_{\mu\lambda}$ constituent donc un système inductif dans la catégorie des schémas formels.

Proposition 2.1.23 ([28] 10.6.2). *Sous les hypothèses de* (2.1.22)*, le schéma formel $\mathfrak{X}$ et les morphismes f_λ constituent une limite inductive du système $(\mathfrak{X}_\lambda, f_\lambda)$ dans la catégorie des schémas formels.*

Définition 2.1.24. On dit qu'un schéma formel préadique est *adique* s'il admet un idéal de définition de type fini.

Cette notion de schéma formel adique est plus forte que celle de Grothendieck ; elle correspond à la notion considérée dans ([28] 10.11.1) comme le montre la proposition suivante :

Proposition 2.1.25. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel préadique, $\mathscr{J}$ un idéal de définition de $\mathfrak{X}$. Pour que $\mathscr{J}$ soit de type fini, il faut et il suffit que $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2$ soit un $(\mathscr{O}_\mathfrak{X}/\mathscr{J})$-module de type fini.*

En effet, la question étant locale, on peut se borner au cas où $\mathfrak{X}$ est un schéma formel affine préadique (2.1.7), et la proposition résulte alors de 2.1.10 et 2.1.11.

Proposition 2.1.26. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel adique, $\mathscr{J}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{A}$ un idéal ouvert de $\mathfrak{X}$. Pour que $\mathscr{A}$ soit de type fini, il faut et il suffit que $\mathscr{A}/\mathscr{J}\mathscr{A}$ soit un $(\mathscr{O}_\mathfrak{X}/\mathscr{J})$-module de type fini.*

En effet, la question étant locale, on peut se borner au cas où $\mathfrak{X}$ est un schéma formel affine préadique (2.1.7), et la proposition résulte alors de 2.1.10, 2.1.11 et 2.1.13.

Proposition 2.1.27. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel adique, $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ deux idéaux ouverts de type fini de $\mathfrak{X}$. Alors $\mathscr{A}\mathscr{B}$ est un idéal ouvert de type fini de $\mathfrak{X}$.*

En effet, la question étant locale, on peut supposer $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ un schéma formel affine préadique, $\mathscr{A} = \mathfrak{a}^\Delta$ et $\mathscr{B} = \mathfrak{b}^\Delta$, où $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux ouverts de A (2.1.10). Il résulte de 2.1.11 que A est un anneau adique. Donc en vertu de 2.1.13, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des A-modules de type fini, $\mathscr{A} = \mathfrak{a}\mathscr{O}_\mathfrak{X}$ et $\mathscr{B} = \mathfrak{b}\mathscr{O}_\mathfrak{X}$. Par suite on a $\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathscr{O}_\mathfrak{X} = (\mathfrak{a}\mathfrak{b})^\Delta$, d'où la proposition.

Proposition 2.1.28 ([28] 10.5.4). *Si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel localement noethérien, alors $\mathfrak{X}$ est adique ; tout idéal de définition de $\mathfrak{X}$ est de type fini ; et il existe un plus grand idéal de définition de $\mathfrak{X}$.*

Proposition 2.1.29. *Si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel adique, l'espace topologiquement annelé induit sur tout ouvert de $\mathfrak{X}$ est encore un schéma formel adique.*

Le seul point à démontrer est que l'espace topologiquement annelé induit sur un ouvert de $\mathfrak{X}$ est un schéma formel *préadique*. Soient $\mathscr{J}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{X}$, U un ouvert formel affine préadique de $\mathfrak{X}$. Alors $\mathscr{J}|U$ est de la forme J^Δ, où J est un idéal de définition de type fini de $A = \Gamma(U, \mathscr{O}_\mathfrak{X})$ (2.1.10 et

2.1.11). Donc pour tout $f \in A$, $A_{\{f\}}$ est un anneau adique, en vertu de 1.8.11, ce qui implique notre assertion.

Proposition 2.1.30. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel adique, $\mathscr{J}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{X}$. Alors, les puissances $\mathscr{J}^n$ forment un système fondamental d'idéaux de définition de type fini de $\mathfrak{X}$.*

En effet, la question étant locale, on peut se borner au cas d'un schéma formel affine préadique, auquel cas la proposition résulte de 2.1.10 et 2.1.11.

Proposition 2.1.31. *Soit A un anneau admissible. Pour que $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ soit adique, il faut et il suffit que A soit adique* (1.8.4).

Si A est adique, $\mathfrak{X}$ est adique en vertu de 2.1.11. Inversement, supposons $\mathfrak{X}$ adique et montrons que A est adique. Compte tenu de 2.1.10 et 2.1.11, il suffit de montrer que A est préadique. Soit $\mathscr{J}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{X}$. D'après 2.1.30, les puissances $\mathscr{J}^n$ forment un système fondamental d'idéaux de définition de $\mathfrak{X}$. Pour tout entier $n \geq 1$, $\mathscr{J}^n$ est de la forme J_n^{Δ}, où les J_n forment un système fondamental d'idéaux de définition de A (2.1.14). Posons $A_i = A/J_{i+1}$ ($i \geq 0$). Soient $u_{ij}\colon A_j \to A_i$ l'homomorphisme canonique, $J_{ij} = \ker(u_{ij}) = J_{i+1}/J_{j+1}$ pour $i \leq j$. Comme $\widetilde{J}_{ij} = \mathscr{J}^{i+1}/\mathscr{J}^{j+1}$ (2.1.8), on a $J_{ij} = J_{0j}^{i+1}$. D'autre part, J_{01} est un module de type fini sur $A_0 = A_1/J_{01}$. On peut donc appliquer ([12] chap. III §2.11 prop. 14 et cor. 1), qui montre que A est un anneau préadique.

Corollaire 2.1.32 ([28] 10.6.5). *Soit A un anneau admissible. Pour que $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ soit noethérien, il faut et il suffit que A soit adique et noethérien.*

La condition est évidemment suffisante. Inversement, supposons $\mathfrak{X}$ noethérien. Comme $\mathfrak{X}$ est adique (2.1.28), A est adique, en vertu de 2.1.31. Soit J un idéal de définition de type fini de A. Le schéma (usuel) $\mathrm{Spec}(A/J)$ est noethérien (2.1.21). Par suite, A/J est noethérien, et donc A est noethérien ([12] chap. III §2.11 cor. 2 de prop. 14).

Corollaire 2.1.33. *Si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel adique, les ensembles ouverts formels affines adiques forment une base de la topologie de $\mathfrak{X}$.*

Cela résulte de 2.1.29 et 2.1.31.

Remarque 2.1.34. La proposition 2.1.31 (resp. 2.1.32) équivaut à dire qu'un schéma formel affine est adique (resp. noethérien) en tant que schéma formel si et seulement s'il est un schéma formel affine adique (resp. noethérien) dans le sens de (2.1.7).

2.1.35. Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel adique, $\mathscr{J}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{X}$. En vertu de 2.1.30, les puissances $\mathscr{J}^n$ forment un système fondamental d'idéaux de définition de $\mathfrak{X}$; on désigne par $\mathfrak{X}_n$ le schéma usuel $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$. Il résulte alors de 2.1.23 que le schéma formel $\mathfrak{X}$ est limite inductive du système $(\mathfrak{X}_n)$. Inversement, on a la proposition suivante :

Proposition 2.1.36 ([28] 10.6.4). *Soient $\mathfrak{X}$ un espace topologique, $(\mathscr{O}_i, u_{ij})$ un système projectif de faisceaux d'anneaux sur $\mathfrak{X}$, ayant $\mathbb{N}$ pour ensemble d'indices. Pour $i \leq j$, soit $\mathscr{J}_{ij}$ le noyau de l'homomorphisme $u_{ij} \colon \mathscr{O}_j \to \mathscr{O}_i$. On suppose que :*

(i) *L'espace annelé $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_i)$ est un schéma $\mathfrak{X}_i$.*
(ii) *Pour tout $i \in \mathbb{N}$, u_{ii} est l'application identique de $\mathscr{O}_i$, et pour $i \leq j$, les u_{ij} sont surjectifs.*
(iii) *Pour $i \leq j$, $\mathscr{J}_{ij} = \mathscr{J}_{0j}^{i+1}$; en particulier, $\mathscr{J}_{01}^2 = 0$.*
(iv) *Le module $\mathscr{J}_{01}$ est de type fini sur $\mathscr{O}_0 = \mathscr{O}_1/\mathscr{J}_{01}$.*

Soit $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ le faisceau d'anneaux topologiques limite projective des faisceaux d'anneaux pseudo-discrets $\mathscr{O}_i$, et soit $u_i \colon \mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \to \mathscr{O}_i$ l'homomorphisme canonique. Alors :

(a) *L'espace topologiquement annelé $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ est un schéma formel adique.*
(b) *Les homomorphismes u_i sont surjectifs ; leurs noyaux $\mathscr{J}^{(i)}$ forment un système fondamental d'idéaux de définition de $\mathfrak{X}$, et $\mathscr{J}^{(0)}$ est la limite projective des faisceaux d'idéaux $\mathscr{J}_{0i}$.*
(c) *L'idéal $\mathscr{J} = \mathscr{J}^{(0)}$ est de type fini; on a $\mathscr{J}^{(n)} = \mathscr{J}^{n+1}$, et $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2$ est isomorphe à $\mathscr{J}_{01}$.*
(d) *Si en outre $\mathfrak{X}_0$ est localement noethérien (resp. noethérien), $\mathfrak{X}$ est localement noethérien (resp. noethérien).*

Pour $i \leq j$, sur chaque fibre, u_{ji} est un homomorphisme surjectif; donc $v_{ij} = (\mathrm{id}_{\mathfrak{X}}, u_{ji})$ est un morphisme de schémas $\mathfrak{X}_i \to \mathfrak{X}_j$. Il résulte de ([28] 10.6.3) que $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ est un schéma formel vérifiant (b). Pour démontrer les autres propositions, on reprend la preuve de ([28] 10.6.4). Montrons d'abord que $\mathfrak{X}$ est préadique. Comme les espaces sous-jacents à $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{X}_0$ sont les mêmes, on peut supposer que chaque $\mathfrak{X}_i$ est un schéma affine d'anneau A_i ([28] 2.3.5). Pour $i \leq j$, il existe un homomorphisme d'anneaux $\varphi_{ij} \colon A_j \to A_i$ tel que $u_{ij} = \widetilde{\varphi}_{ij}$. On voit facilement (comme dans la preuve de 2.1.31) que le système projectif (A_i, φ_{ij}) vérifie les conditions de ([12] chap. III §2.11 prop. 14 et cor. 1). Il en résulte que $A = \varprojlim A_i$ est un anneau préadique séparé et complet ; les homomorphismes canoniques $\varphi_i \colon A \to A_i$ sont surjectifs ; le noyau J de φ_0 est un idéal de définition de A ; J^{i+1} est le noyau de φ_i pour tout $i \geq 0$; en particulier, J/J^2 est un (A/J)-module de type fini, et J est un A-module de type fini (1.8.5). Par suite, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ est un schéma formel affine adique, $\mathscr{J} = J^{\Delta}$ et $\mathscr{J}^{(n)} = (J^{n+1})^{\Delta} = \mathscr{J}^{n+1}$ (2.1.11). Dans le cas général, on en déduit aussitôt que $\mathfrak{X}$ est préadique et la proposition (c) ; donc $\mathfrak{X}$ est adique. La proposition (d) résulte de ([12] chap. III §2.11 cor. 2 de prop. 14).

Corollaire 2.1.37. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel adique, $\mathscr{J}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{X}$. Pour que $\mathfrak{X}$ soit un schéma formel affine, il faut et il suffit que le schéma usuel $\mathfrak{X}_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$ soit affine.*

En effet, si $\mathfrak{X}$ est formel affine, $\mathfrak{X}_0$ est évidemment affine. Inversement, si $\mathfrak{X}_0$ est affine, le schéma $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$ est affine pour tout $n \geq 0$ ([28] 2.3.5), et il résulte de la preuve de 2.1.36 que $\mathfrak{X}$ est formel affine.

2.1.38. Avec les notations de 2.1.36, soit $\mathscr{F}_i$ un $\mathscr{O}_i$-module, et supposons donnés, pour tout $i \leq j$, un u_{ij}-morphisme $\theta_{ij}\colon \mathscr{F}_j \to \mathscr{F}_i$, de sorte que $\theta_{ki} \circ \theta_{ij} = \theta_{kj}$ pour $k \leq i \leq j$. Soit $\mathscr{F}$ la limite projective du système projectif $(\mathscr{F}_i)$ de faisceaux de groupes abéliens. On peut munir $\mathscr{F}$ d'une structure de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module par passage à la limite. On dira que $\mathscr{F}$ est la *limite projective* du système de $\mathscr{O}_i$-modules $(\mathscr{F}_i)$.

2.2 Morphismes déployés et morphismes adiques

2.2.1. Soient $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ deux schémas formels adiques, $\mathscr{J}$ (resp. $\mathscr{K}$) un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$), $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme tel que $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathscr{J}$. On a pour tout entier $n > 0$, $f^*(\mathscr{K}^n)\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathscr{J}^n$. En vertu de ([28] 10.5.6), f détermine un morphisme de schémas usuels $f_n\colon \mathfrak{X}_n \to \mathfrak{Y}_n$ en posant $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$ et $\mathfrak{Y}_n = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}^{n+1})$. Il résulte aussitôt des définitions que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}_m \arrow[r, "f_m"] \arrow[d] & \mathfrak{Y}_m \arrow[d] \\ \mathfrak{X}_n \arrow[r, "f_n"] & \mathfrak{Y}_n \end{tikzcd} \tag{2.2.1.1}$$

est commutatif pour $m \leq n$; autrement dit (f_n) est un système inductif de morphismes.

Proposition 2.2.2. *Soient $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ deux schémas formels adiques, $\mathscr{J}$ (resp. $\mathscr{K}$) un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$). L'application $f \mapsto (f_n)$ définie dans* (2.2.1) *est une bijection de l'ensemble des morphismes $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ tels que $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathscr{J}$, sur l'ensemble des suites (f_n) de morphismes $\mathfrak{X}_n \to \mathfrak{Y}_n$ rendant commutatifs les diagrammes* (2.2.1.1).

Il suffit de reprendre la preuve de ([28] 10.6.9) en la précisant. Toute suite (f_n) de morphismes rendant commutatifs les diagrammes (2.2.1.1) admet une limite $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, qui est l'unique morphisme de schémas formels rendant commutatifs les diagrammes

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d] & \mathfrak{Y}_n \arrow[d] \\ \mathfrak{X} \arrow[r, "f"] & \mathfrak{Y} \end{tikzcd} \tag{2.2.2.1}$$

Il faut montrer que $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathscr{J}$. La question étant locale sur $\mathfrak{X}$ et sur $\mathfrak{Y}$, on peut se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$ sont formels affines adiques (2.1.29 et 2.1.31), $\mathscr{J} = J^{\Delta}$, $\mathscr{K} = K^{\Delta}$, où J (resp. K) est un idéal de définition de type fini de A (resp. B) (2.1.10 et 2.1.11). On a alors $\mathfrak{X}_n = \mathrm{Spec}(A_n)$ et $\mathfrak{Y}_n = \mathrm{Spec}(B_n)$, où $A_n = A/J^{n+1}$ et $B_n = B/K^{n+1}$ (2.1.11). Les morphismes f_n sont associés à des homomorphismes $\varphi_n\colon B_n \to A_n$ qui forment un système projectif ; donc f est associé à l'homomorphisme $\varphi = \varprojlim \varphi_n$. La commutativité de (2.2.1.1) pour $m = 0$ implique que $\varphi_n(K/K^{n+1}) \subset J/J^{n+1}$ pour tout n. Donc en passant à la limite projective, on a $\varphi(K) \subset J$, et cela entraîne que $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathscr{J}$, en vertu de ([28] 10.5.6(ii)). On voit facilement que l'application $f \mapsto (f_n)$ définie dans (2.2.1), et l'application $(f_n) \mapsto f$ définie ci-dessus, sont inverses l'une de l'autre ([28] 10.5.6(i)).

Définition 2.2.3. Soit $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels adiques. On dit que f est *déployé* s'il existe des idéaux de définition de type fini $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$ et $\mathscr{K}$ de $\mathfrak{Y}$ tels que $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathscr{J}$.

Proposition 2.2.4. *Tout morphisme de schémas formels affines adiques est déployé.*

En effet, soient A est un anneau adique, B une A-algèbre topologique qui est un anneau adique (mais pas forcement une A-algèbre adique), J (resp. K) un idéal de définition de type fini de A (resp. B). Comme la topologie de B est moins fine que la topologie déduite de celle de A, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $J^nB \subset K$, et la proposition résulte de 2.1.11 et ([28] 10.5.6(ii)).

Proposition 2.2.5. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel localement noethérien, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels, $\mathscr{J}$ le plus grand idéal de définition de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{K}$ un idéal de définition de $\mathfrak{Y}$. Alors $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathscr{J}$.*

On peut clairement se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$ sont formels affines, $\mathscr{J} = J^{\Delta}$, $\mathscr{K} = K^{\Delta}$, où A est adique et noethérien, B est admissible, J est le plus grand idéal de définition de A, et K est un idéal de définition de B. Alors f est défini par un homomorphisme continu $\varphi\colon B \to A$. Comme les éléments de K sont topologiquement nilpotents ([28] 0.7.1.4), il en est de même de ceux de $\varphi(K)$, donc $\varphi(K) \subset J$ puisque J est l'ensemble des éléments topologiquement nilpotents de A ([28] 0.7.1.6), d'où la conclusion en vertu de ([28] 10.5.6(ii)).

Proposition 2.2.6. *Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $\mathscr{K}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{Y}$, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels préadiques. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est un idéal de définition de $\mathfrak{X}$.*

(ii) *Il existe un idéal de définition de type fini $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$ tel que $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathscr{J}$ et que les diagrammes* (2.2.1.1) *soient cartésiens.*

(iii) *Il existe un idéal de définition de type fini $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$ tel que $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathscr{J}$ et que le diagramme* (2.2.1.1) *pour $n = 1$ et $m = 0$ soit cartésien.*

De plus, quand ces conditions sont vérifiées, on a $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$.

D'abord (i) implique (ii) en prenant $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$. En effet, on a

$$f^{-1}(\mathscr{K}^{n+1})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} = \mathscr{J}^{n+1}$$

pour tout $n \geq 0$; donc

$$\mathscr{J}^{m+1}/\mathscr{J}^{n+1} = f^{-1}(\mathscr{K}^{m+1}/\mathscr{K}^{n+1})(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$$

pour $m \leq n$, et cela entraîne que les diagrammes (2.2.1.1) sont cartésiens. Ensuite (ii) implique évidemment (iii). Montrons enfin que (iii) entraîne que $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, et par suite (i). La question étant locale sur $\mathfrak{X}$ et sur $\mathfrak{Y}$, on peut se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ et $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$ sont formels affines adiques (2.1.29 et 2.1.31), $\mathscr{J} = J^\Delta$, $\mathscr{K} = K^\Delta$, J (resp. K) est un idéal de définition de type fini de A (resp. B) (2.1.10 et 2.1.11), et f est associé à un homomorphisme continu $\varphi\colon B \to A$. En vertu de ([28] 10.5.6(ii)), on a $\varphi(K) \subset J$. La condition (iii) entraîne que $J = J^2 + KA$; donc $J = KA$ par le lemme de Nakayama car J est contenu dans le radical de A ([12] chap. III §2.13 lem. 3). On en déduit que $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ puisque $\mathscr{K} = K\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$ et $\mathscr{J} = J\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ (2.1.11).

Définition 2.2.7. Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels. On dit que f est *adique* si $\mathfrak{X}$ est adique et s'il existe un idéal de définition de type fini $\mathscr{K}$ de $\mathfrak{Y}$ tel que $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ soit un idéal de définition de $\mathfrak{X}$. On dit alors aussi que $\mathfrak{X}$ est un $\mathfrak{Y}$-schéma formel *adique*, ou *adique* sur $\mathfrak{Y}$.

On peut faire les remarques suivantes :

2.2.7.1. Il revient au même de demander que $\mathfrak{X}$ soit préadique (au lieu d'être adique).

2.2.7.2. Il résulte de 2.1.29 que si f est adique, pour tout ouvert U de $\mathfrak{X}$ et tout ouvert V de $\mathfrak{Y}$ tels que $f(U) \subset V$, la restriction $U \to V$ de f est un morphisme adique.

Proposition 2.2.8. *Soient B un anneau adique, A un anneau préadique complet et séparé, $\varphi\colon B \to A$ un homomorphisme continu, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ le morphisme correspondant à φ.*

(i) *Pour que φ soit adique* (1.8.4.5), *il faut et il suffit que f soit adique.*

(ii) *Si f est adique, pour tout idéal de définition de type fini K de B, on a $f^*(K^\Delta)\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} = (KA)^\Delta$.*

(i) Supposons f adique. Il existe alors un idéal de définition de type fini K de B tel que $f^*(K^\Delta)\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ soit un idéal de définition de $\mathfrak{X}$. En vertu de 2.1.10 et 2.1.11, $f^*(K^\Delta)\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} = J^\Delta$, où J est un idéal de définition de type fini de A. On a $KA \subset J$ d'après ([28] 10.5.6(ii)) et il résulte de la preuve de 2.2.6 que $J = KA$; donc φ est adique. Inversement, supposons φ adique, et soit K un idéal de définition de type fini de B. On a $f^*(K^\Delta)\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \subset (KA)^\Delta$ d'après ([28] 10.5.6(ii)). D'autre part, les diagrammes (2.2.1.1) en prenant $\mathscr{J} = (KA)^\Delta$ et $\mathscr{K} = K^\Delta$ sont clairement cartésiens ; donc $f^*(K^\Delta)\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} = (KA)^\Delta$ en vertu de 2.2.6, et f est adique.

(ii) Cela résulte de la preuve (i).

Proposition 2.2.9. *Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique, $\mathscr{K}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{Y}$. Alors $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{X}$, et le diagramme de morphismes de schémas* *formels*

$$\begin{tikzcd} (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}) \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}) \arrow[d] \\ (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \arrow[r, "f"] & (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}) \end{tikzcd}$$

déduit de f est cartésien.

Les questions étant locales, on peut se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$ sont formels affines adiques, et f est associé à un homomorphisme adique $\varphi\colon B \to A$ (2.2.8). Si K est un idéal de définition de type fini de B, KA est un idéal de définition de A, et on a $f^*(K^\Delta)\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} = (KA)^\Delta$ en vertu de (2.2.8), d'où la conclusion.

Corollaire 2.2.10. *Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est un morphisme adique.*

(ii) *Pour tout $x \in \mathfrak{X}$, il existe un voisinage ouvert V de $f(x)$ et un voisinage ouvert U de x tels que $f(U) \subset V$ et que la restriction $U \to V$ de f soit un morphisme adique.*

Il est clair que (i) entraîne (ii). Montrons l'implication inverse. Il résulte de l'hypothèse que $\mathfrak{X}$ est préadique. D'autre part, si $\mathscr{K}$ est un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{Y}$, alors $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est un idéal de définition de $\mathfrak{X}$; en effet, la question étant locale sur $\mathfrak{X}$ et sur $\mathfrak{Y}$, l'assertion résulte de 2.2.9.

Corollaire 2.2.11. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ deux morphismes de schémas formels adiques.*

(i) *Si f et g sont adiques, il en est de même de $g \circ f$.*

(ii) *Si g et $g \circ f$ sont adiques, il en est de même de f.*

Proposition 2.2.12. *Soient X un schéma, $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f\colon X \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels* (2.1.20). *Alors f est adique.*

En effet, la question étant locale (2.2.10), on peut se borner au cas où $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$ sont affines, de sorte que f provient d'un homomorphisme continu d'anneaux $\varphi\colon B \to A$. Comme la topologie discrète de A est moins finie que la topologie déduite de celle de B (1.8.1), elles sont égales, d'où l'assertion.

2.2.13. Soient $\mathscr{S}$ un schéma formel adique, $\mathscr{I}$ un idéal de définition de type fini de $\mathscr{S}$; posons $\mathscr{S}_n = (\mathscr{S}, \mathscr{O}_{\mathscr{S}}/\mathscr{I}^{n+1})$. On dira qu'un système inductif (X_n) de $\mathscr{S}_n$-schémas (usuels) est un $(\mathscr{S}_n)$-*système inductif adique* si les morphismes structuraux $f_n\colon X_n \to \mathscr{S}_n$ sont tels que, pour $m \leq n$, les diagrammes

$$\begin{tikzcd} X_m \arrow[r, "f_m"] \arrow[d] & \mathscr{S}_m \arrow[d] \\ X_n \arrow[r, "f_n"] & \mathscr{S}_n \end{tikzcd} \tag{2.2.13.1}$$

soient des carrés cartésiens ([28] 10.12.2). Les systèmes inductifs adiques forment une catégorie : il suffit de définir un morphisme $(X_n) \to (Y_n)$ de tels systèmes comme un système inductif de $\mathscr{S}_n$-morphismes $u_n\colon X_n \to Y_n$ tel que u_m s'identifie à $u_n \times_{\mathscr{S}_n} \mathrm{id}_{\mathscr{S}_m}$ pour $m \leq n$.

Proposition 2.2.14. *Sous les hypothèses de* (2.2.13)*, il y a équivalence canonique entre la catégorie des $\mathscr{S}$-schémas adiques et la catégorie des $(\mathscr{S}_n)$-systèmes inductifs adiques.*

L'équivalence en question s'obtient de la façon suivante : si $\mathfrak{X}$ est un $\mathscr{S}$-schéma adique, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ le morphisme structural, $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{I})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est un idéal de définition de $\mathfrak{X}$ et on fait correspondre à $\mathfrak{X}$ le système inductif des $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$, le morphisme structural $f_n\colon \mathfrak{X}_n \to \mathscr{S}_n$ correspondant à f (2.2.1). En vertu de 2.2.6, $(\mathfrak{X}_n)$ est un $(\mathscr{S}_n)$-système inductif adique. Il est immédiat de vérifier qu'à un $\mathscr{S}$-morphisme $u\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ de $\mathscr{S}$-schémas adiques correspond un morphisme $(\mathfrak{X}_n) \to (\mathfrak{Y}_n)$ de $(\mathscr{S}_n)$-systèmes inductifs adiques, et inversement. Il reste à prouver qu'on a défini ainsi une équivalence. Soit (X_n) un $(\mathscr{S}_n)$-système inductif adique. Puisque le système inductif $(\mathscr{S}_n)$ vérifie les conditions de 2.1.36, il en est de même de (X_n). Par suite, il existe un schéma formel adique $\mathfrak{X}$ ayant un idéal de définition de type fini $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$ tels que $X_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$. La suite (f_n) de morphismes structuraux $f_n\colon X_n \to \mathscr{S}_n$ définit un morphisme $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ vérifiant $f^*(\mathscr{I})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathscr{J}$, en vertu de 2.2.2. Enfin, f est adique compte tenu de 2.2.6 et de l'hypothèse.

2.2.15. Soient $\mathfrak{X}, \mathscr{S}, \mathscr{S}'$ des schémas formels adiques, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme adique, $g\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ un morphisme déployé (2.2.3). Soient $\mathscr{I}$ (resp. $\mathscr{I}'$) un idéal de définition de type fini de $\mathscr{S}$ (resp. $\mathscr{S}'$) tels que $g^*(\mathscr{I})\mathscr{O}_{\mathscr{S}'} \subset \mathscr{I}'$; donc $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{I})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est un idéal de définition de $\mathfrak{X}$. Posons $\mathscr{S}_n = (\mathscr{S}, \mathscr{O}_{\mathscr{S}}/\mathscr{I}^{n+1})$, $\mathscr{S}'_n = (\mathscr{S}', \mathscr{O}_{\mathscr{S}'}/\mathscr{I}'^{n+1})$, $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$ et soient $g_n\colon \mathscr{S}'_n \to \mathscr{S}_n$ (resp. $f_n\colon \mathfrak{X}_n \to \mathscr{S}_n$) le morphisme correspondant à g (resp. f) (2.2.1). Il résulte alors de ([28] 10.7.4) que $\mathscr{S}' \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{X}$ est la limite inductive des schémas usuels $\mathscr{S}'_n \times_{\mathscr{S}_n} \mathfrak{X}_n$. Comme $(\mathfrak{X}_n)$ est un $(\mathscr{S}_n)$-système inductif adique, $(\mathscr{S}'_n \times_{\mathscr{S}_n} \mathfrak{X}_n)$ est un $(\mathscr{S}'_n)$-système inductif adique. Donc en vertu de 2.2.14, $\mathscr{S}' \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{X}$ est un $\mathscr{S}'$-schéma formel adique, et il correspond au $(\mathscr{S}'_n)$-système inductif adique $(\mathscr{S}'_n \times_{\mathscr{S}_n} \mathfrak{X}_n)$.

Proposition 2.2.16. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$, $g\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ deux morphismes de schémas formels adiques. Si f est adique, il en est de même du morphisme $\mathscr{S}' \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{X} \to \mathscr{S}'$.*

En effet, la question étant locale sur $\mathscr{S}$ et sur $\mathscr{S}'$ (2.2.10), on peut se borner au cas où g est déployé (2.2.4), auquel cas la conclusion résulte de 2.2.15.

2.3 Conditions de finitude relatives

Définition 2.3.1 ([28] 10.15.1). Soit $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels. On appelle morphisme diagonal $\Delta_f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{X}$ (noté aussi $\Delta_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$) le morphisme $(1_{\mathfrak{X}}, 1_{\mathfrak{X}})_{\mathfrak{Y}}$.

On dit que f est *séparé* si l'image par Δ_f de l'espace sous-jacent à $\mathfrak{X}$ est une partie fermée de l'espace sous-jacent à $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{X}$; on dit alors que $\mathfrak{X}$ est un $\mathfrak{Y}$-schéma formel *séparé*, ou *séparé* sur $\mathfrak{Y}$.

On dit que f est *quasi-séparé* si Δ_f est quasi-compact ; on dit alors que $\mathfrak{X}$ est un $\mathfrak{Y}$-schéma formel *quasi-séparé*, ou *quasi-séparé* sur $\mathfrak{Y}$.

Proposition 2.3.2. *Soient $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ deux schémas formels, limites inductives de suites de schémas usuels $(X_n), (Y_n)$. Soit $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels limite inductive d'une suite de morphismes $f_n\colon X_n \to Y_n$ de schémas usuels. Pour que f soit séparé (resp. quasi-séparé), il faut et il suffit que le morphisme f_0 le soit.*

En effet, Δ_f est alors limite inductive de la suite de morphismes Δ_{f_n} ([28] 10.7.4), et le morphisme d'espaces topologiques sous-jacent est identique à Δ_{f_0}, d'où la conclusion.

Proposition 2.3.3. *On suppose dans ce qui suit que tous les schémas formels (resp. morphismes de schémas formels) considérés sont limites inductives de suites de schémas usuels (resp. de morphismes de schémas usuels).*

(i) *Le composé de deux morphismes séparés (resp. quasi-séparés) est séparé (resp. quasi-séparé).*
(ii) *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $g\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$ deux morphismes. Si f est séparé (resp. quasi-séparé), il en est de même du morphisme $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}'$.*
(iii) *Si le composé $g \circ f$ de deux morphismes est séparé (resp. quasi-séparé), f est séparé (resp. quasi-séparé).*

On sous-entend dans cet énoncé que si un même schéma formel $\mathfrak{Z}$ intervient plusieurs fois dans une même proposition, on le considère comme limite inductive de la même suite (Z_n) de schémas usuels partout où il figure.

Les assertions de 2.3.3 sont conséquences immédiates de 2.3.2 et des assertions correspondantes pour les schémas usuels ([28] 5.3.1 et 6.1.9).

Définition 2.3.4. On dit qu'un morphisme de schémas formels $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ est *affine* (ou que $\mathfrak{X}$ est un $\mathfrak{Y}$-schéma formel *affine*, ou *affine* sur $\mathfrak{Y}$) si $\mathfrak{Y}$ est réunion d'ouverts formels affines V_α tels que, pour tout α, le schéma formel induit sur l'ouvert $f^{-1}(V_\alpha)$ de $\mathfrak{X}$ soit un schéma formel affine.

Si $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ sont des schémas formels affines, tout morphisme $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ est donc affine. Si $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ est un morphisme affine de schémas formels, alors, pour tout ouvert $U \subset \mathfrak{Y}$, le morphisme $f^{-1}(U) \to U$, restriction de f, est affine.

Proposition 2.3.5. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme déployé de schémas formels adiques, $\mathscr{J}$ (resp. $\mathscr{K}$) un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$) tels que $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathscr{J}$, $\mathfrak{X}_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$, $\mathfrak{Y}_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K})$, $f_0\colon \mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{Y}_0$ le morphisme de schémas usuels déduit de f. Pour que f soit affine, il faut et il suffit que f_0 soit affine.*

Comme les ouverts formels affines de $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$) sont exactement les ouverts affines de $\mathfrak{X}_0$ (resp. $\mathfrak{Y}_0$) (2.1.37), la proposition résulte des définitions.

Corollaire 2.3.6. *Sous les hypothèses de* (2.3.5)*, si f est un morphisme affine, il est séparé.*

Corollaire 2.3.7. *Sous les hypothèses de* (2.3.5)*, si f est un morphisme affine, alors, pour tout ouvert formel affine U de $\mathfrak{Y}$, $f^{-1}(U)$ est un ouvert formel affine de $\mathfrak{X}$.*

Cela résulte de 2.3.5 et 2.1.37.

Proposition 2.3.8. *On suppose dans ce qui suit que tous les schémas formels considérés sont adiques.*

(i) *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ et $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ deux morphismes tels que f soit affine et déployé et que g soit affine. Alors $g \circ f$ est affine.*
(ii) *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $g\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$ deux morphismes. Si f est affine, il en est de même du morphisme $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}'$.*
(iii) *Soint $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ et $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ deux morphismes, $\mathscr{J}$ (resp. $\mathscr{K}$, resp. $\mathscr{L}$) un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$, resp. $\mathfrak{Z}$) tels que $g^*(\mathscr{L})\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}} \subset \mathscr{K}$ et $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{Z}} \subset \mathscr{J}$. Si $g \circ f$ est affine et g est séparé, alors f est affine.*

(i) Cela résulte immédiatement de 2.3.7 et des définitions.

(ii) On peut clairement supposer $\mathfrak{Y}, \mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}'$ formels affines, auquel cas $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}'$ est affine.

(iii) Cela résulte de 2.3.2, 2.3.5 et de l'assertion correspondante pour les schémas usuels ([28] 9.1.16).

2.3.9. Soient $\mathscr{S}$ un schéma formel adique, $\mathscr{I}$ un idéal de définition de type fini de $\mathscr{S}$; posons $\mathscr{S}_n = (\mathscr{S}, \mathscr{O}_{\mathscr{S}}/\mathscr{I}^{n+1})$. On dira qu'un système projectif de $(\mathscr{O}_{\mathscr{S}_n})$-algèbres quasi-cohérentes $(\mathscr{A}_n)$ est *adique* si $\mathscr{A}_n \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{S}_n}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}_m} = \mathscr{A}_m$ pour $m \leq n$, les morphismes de transition étant les morphismes canoniques (2.1.38). Les systèmes projectifs adiques de $(\mathscr{O}_{\mathscr{S}_n})$-algèbres quasi-cohérentes forment une catégorie : il suffit de définir un morphisme $(\mathscr{A}_n) \to (\mathscr{B}_n)$ de tels systèmes comme un système projectif d'homomorphismes de $(\mathscr{O}_{\mathscr{S}_n})$-algèbres $\alpha_n\colon \mathscr{A}_n \to \mathscr{B}_n$.

Soient $(\mathscr{A}_n)$ un système projectif adique de $(\mathscr{O}_{\mathscr{S}_n})$-algèbres quasi-cohérentes, $X_n = \mathrm{Spec}(\mathscr{A}_n)$, $f_n\colon X_n \to \mathscr{S}_n$ le morphisme structural ([28] 9.1.8). En vertu de 2.1.36, il existe un schéma formel adique $\mathfrak{X}$ ayant un idéal de définition de type fini $\mathscr{J}$ tels que $X_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$. La suite (f_n) de morphismes structuraux $f_n\colon X_n \to \mathscr{S}_n$ a pour limite un morphisme affine adique $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$, en vertu de

2.2.14 et 2.3.5. Si $\mathscr{A}$ est le faisceau d'anneaux topologiques limite projective de la suite d'anneaux topologiques pseudo-discrets $(\mathscr{A}_n)$, on appelle encore *spectre formel* de $\mathscr{A}$ le $\mathscr{S}$-schéma formel $\mathfrak{X}$, et on le note $\mathrm{Spf}(\mathscr{A})$.

Proposition 2.3.10. *Sous les hypothèses de* (2.3.9)*, il y a équivalence canonique entre la catégorie des $\mathscr{S}$-schémas affines adiques et la catégorie opposée à celle des systèmes projectifs adiques de $(\mathscr{O}_{\mathscr{S}_n})$-algèbres quasi-cohérentes.*

L'équivalence en question s'obtient de la façon suivante : si $\mathfrak{X}$ est un $\mathscr{S}$-schéma affine adique, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ le morphisme structural, $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{I})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est un idéal de définition de $\mathfrak{X}$ et on fait correspondre à $\mathfrak{X}$ le système projectif des $\mathscr{A}_n = f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$. En vertu de 2.2.6, 2.3.5 et ([28] 9.3.2), $(\mathscr{A}_n)$ est un système projectif adique de $(\mathscr{O}_{\mathscr{S}_n})$-algèbres quasi-cohérentes, et a évidemment pour limite projective le faisceau d'anneaux topologiques $\mathscr{A} = f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$. Il résulte de 2.2.14, 2.3.5 et ([28] 9.1.4) qu'on a défini ainsi une équivalence.

Définition 2.3.11. Soient $\mathscr{S}$ un schéma formel adique, $\mathscr{I}$ un idéal de définition de type fini de $\mathscr{S}$, d un entier ≥ 1, $T_1, \ldots, T_d$ des indéterminées ; posons $\mathscr{S}_n = (\mathscr{S}, \mathscr{O}_{\mathscr{S}}/\mathscr{I}^{n+1})$. On appelle *espace affine formel* au-dessus de $\mathscr{S}$, de dimension d et de paramètres $T_1, \ldots, T_d$, le $\mathscr{S}$-schéma formel affine adique $\mathscr{D}$ correspondant au système projectif adique de $(\mathscr{O}_{\mathscr{S}_n})$-algèbres quasi-cohérentes $\mathscr{A}_n = \mathscr{O}_{\mathscr{S}_n}[T_1, \ldots, T_d]$ $(n \geq 0)$ (2.3.10). Lorsque $d = 1$, on dit que $\mathscr{D}$ est la *droite affine formelle* au-dessus de $\mathscr{S}$.

Si $\mathscr{S} = \mathrm{Spf}(A)$ est formel affine, alors $\mathscr{D} = \mathrm{Spf}(A\langle T_1, \ldots, T_d\rangle)$ en vertu de (1.8.16.2). En particulier, $\mathscr{D}$ ne dépend pas de $\mathscr{I}$.

Proposition 2.3.12. *Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels, $\mathscr{K}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{Y}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est un morphisme adique et si l'on pose $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$ et $\mathfrak{Y}_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K})$, le morphisme $f_0\colon \mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{Y}_0$ déduit de f est localement de type fini.*

(ii) *Pour tout ouvert formel affine V de $\mathfrak{Y}$ et tout ouvert formel affine U de $\mathfrak{X}$ tels que $f(U) \subset V$, l'anneau admissible $\Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ est topologiquement de type fini sur $\Gamma(V, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$* (1.8.18).

(iii) *Pour tout $x \in \mathfrak{X}$, il existe un voisinage ouvert formel affine V de $f(x)$ et un voisinage ouvert formel affine U de x tels que $f(U) \subset V$ et que l'anneau admissible $\Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ soit topologiquement de type fini sur $\Gamma(V, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$.*

Montrons d'abord que (i) entraîne (ii). On peut se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$ sont formels affines adiques et f est associé à un homomorphisme adique $\varphi\colon B \to A$ (2.2.8). Soit K un idéal de définition de type fini de B tel que $\mathscr{K} = K^{\Delta}$; on a donc $f^*(K^{\Delta})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} = (KA)^{\Delta}$ (2.2.8). Comme A/KA est une algèbre de type fini sur B/K, A est topologiquement de type fini sur B, en vertu de 1.8.19. Il est clair que (ii) implique (iii). Enfin, (iii) entraîne (i) en vertu de 2.2.10, 2.2.8 et 1.8.19.

Remarque 2.3.12.1. Lorsque les conditions équivalentes de (2.3.12) sont remplies, la condition (i) ne dépend pas de l'idéal de définition de type fini $\mathscr{K}$ de $\mathfrak{Y}$ considéré. En particulier, si l'on pose $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$ et $\mathfrak{Y}_n = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}^{n+1})$, le morphisme $f_n \colon \mathfrak{X}_n \to \mathfrak{Y}_n$ déduit de f est localement de type fini.

Définition 2.3.13. Lorsque les conditions équivalentes de (2.3.12) sont vérifiées, on dit que le morphisme f est *localement de type fini*, ou que $\mathfrak{X}$ est un $\mathfrak{Y}$-schéma formel *localement de type fini*, ou *localement de type fini* sur $\mathfrak{Y}$. On dit que le morphisme f est *de type fini* s'il est localement de type fini et quasi-compact ; on dit alors que $\mathfrak{X}$ est un $\mathfrak{Y}$-schéma formel *de type fini*, ou *de type fini* sur $\mathfrak{Y}$.

Corollaire 2.3.14. *Un schéma formel localement de type fini sur un schéma formel localement noethérien est localement noethérien.*

Cela résulte de 1.8.17(ii) et 2.3.12.

Définition 2.3.15. Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels. On dit que f est *localement de présentation finie*, ou que $\mathfrak{X}$ est un $\mathfrak{Y}$-schéma formel *localement de présentation finie*, ou *localement de présentation finie* sur $\mathfrak{Y}$, si les conditions suivantes sont remplies :

(a) f est un morphisme adique.
(b) Pour tout idéal de définition de type fini $\mathscr{K}$ de $\mathfrak{Y}$, si l'on pose $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$ et $\mathfrak{Y}_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K})$, le morphisme $f_0 \colon \mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{Y}_0$ déduit de f est localement de présentation finie.

On dit que le morphisme f est *de présentation finie* s'il est localement de présentation finie, quasi-compact et quasi-séparé ; on dit alors que $\mathfrak{X}$ est un $\mathfrak{Y}$-schéma formel *de présentation finie*, ou *de présentation finie* sur $\mathfrak{Y}$.

Proposition 2.3.16. *Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels, $\mathscr{K}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{Y}$. Considérons les conditions suivantes :*

(i) *f est un morphisme localement de présentation finie.*
(ii) *f est un morphisme adique et si l'on pose*

$$\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}, \quad \mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1}) \quad \textit{et} \quad \mathfrak{Y}_n = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}^{n+1}),$$

le morphisme $f_n \colon \mathfrak{X}_n \to \mathfrak{Y}_n$ déduit de f est localement de présentation finie pour tout $n \geq 0$.
(iii) *Pour tout ouvert formel affine V de $\mathfrak{Y}$ et tout ouvert formel affine U de $\mathfrak{X}$ tels que $f(U) \subset V$, l'anneau admissible* $\Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ *est topologiquement de présentation finie sur* $\Gamma(V, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ (1.8.18).
(iv) *Pour tout $x \in \mathfrak{X}$, il existe un voisinage ouvert formel affine V de $f(x)$ et un voisinage ouvert formel affine U de x tels que $f(U) \subset V$ et que l'anneau admissible* $\Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ *soit topologiquement de présentation finie sur* $\Gamma(V, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$.

Alors on a (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

Il est clair qu'on a (i)⇒(ii) et (iii)⇒(iv). On a (iv)⇒(i) en vertu de 2.2.10, 2.2.8 et 1.8.23. Reste à montrer (ii)⇒(i). Soient $\mathscr{K}'$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{Y}$, $\mathscr{J}' = f^*(\mathscr{K}')\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}'_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}')$, $\mathfrak{Y}'_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}')$. Montrons que le morphisme $f'_0\colon \mathfrak{X}'_0 \to \mathfrak{Y}'_0$ déduit de f est localement de présentation finie. La question étant locale sur $\mathfrak{Y}$, on peut se borner au cas où $\mathfrak{Y}$ est quasi-compact. Donc $\mathscr{K}^{n+1} \subset \mathscr{K}'$ pour un entier $n \geq 1$, et l'assertion résulte du diagramme cartésien (2.2.9)

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}'_0 \arrow[r, "f'_0"] \arrow[d] & \mathfrak{Y}'_0 \arrow[d] \\ \mathfrak{X}_n \arrow[r, "f_n"] & \mathfrak{Y}_n \end{tikzcd}$$

Proposition 2.3.17. *Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est localement de type fini* (*resp. localement de présentation finie*).

(ii) *Pour tout ouvert V de $\mathfrak{Y}$ et tout ouvert U de $\mathfrak{X}$ tels que $f(U) \subset V$, la restriction $U \to V$ de f est localement de type fini* (*resp. localement de présentation finie*).

(iii) *Pour tout $x \in \mathfrak{X}$, il existe un voisinage ouvert V de $f(x)$ et un voisinage ouvert U de x tels que $f(U) \subset V$ et que la restriction $U \to V$ de f soit localement de type fini* (*resp. localement de présentation finie*).

Cela résulte aussitôt de 2.2.10, 2.3.12 et 2.3.16.

Proposition 2.3.18. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ deux morphismes de schémas formels adiques.*

(i) *Si f et g sont localement de type fini* (*resp. localement de présentation finie, resp. de type fini, resp. de présentation finie*), *il en est de même de $g \circ f$.*

(ii) *Si $g \circ f$ est localement de type fini et si g est adique, alors f est localement de type fini.*

(iii) *Si $g \circ f$ est localement de présentation finie et si g est localement de type fini, alors f est localement de présentation finie.*

Cela résulte de 2.2.11 et des assertions correspondantes pour les morphismes de schémas usuels ([28] 6.2 et 6.3).

Proposition 2.3.19. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$, $g\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ deux morphismes de schémas formels adiques. Si f est localement de type fini* (*resp. localement de présentation finie, resp. de type fini, resp. de présentation finie*), *il en est de même de la projection canonique $\mathscr{S}' \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{X} \to \mathscr{S}'$.*

En effet, la question étant locale sur $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$ (2.3.17), on peut se borner au cas où g est déployé (2.2.4), auquel cas la proposition résulte de 2.2.15 et des assertions correspondantes pour les morphismes de schémas usuels ([28] 6.2 et 6.3).

Définition 2.3.20. Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels. On dit que f est *propre* s'il vérifie les conditions suivantes :

(i) f est adique.

(ii) Pour tout idéal de définition de type fini $\mathscr{K}$ de $\mathfrak{Y}$, si l'on pose $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$ et $\mathfrak{Y}_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K})$, le morphisme $f_0\colon \mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{Y}_0$ déduit de f est propre.

Lorsqu'il en est ainsi, on dit aussi que $\mathfrak{X}$ est un $\mathfrak{Y}$-schéma formel *propre*, ou *propre* sur $\mathfrak{Y}$.

Proposition 2.3.21. *Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels, $\mathscr{K}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{Y}$. Pour que f soit propre, il faut et il suffit que f soit adique, et que si l'on pose $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$ et $\mathfrak{Y}_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K})$, le morphisme $f_0\colon \mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{Y}_0$ déduit de f soit propre.*

Il n'y a que la suffisance de la condition à démontrer. Soient $\mathscr{K}'$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{Y}$, $\mathscr{J}' = f^*(\mathscr{K}')\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}'_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}')$, $\mathfrak{Y}'_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}')$. Montrons que le morphisme $f'_0\colon \mathfrak{X}'_0 \to \mathfrak{Y}'_0$ déduit de f est propre. La question étant locale sur $\mathfrak{Y}$, on peut se borner au cas où $\mathfrak{Y}$ est quasi-compact. Si $\mathscr{K}' \subset \mathscr{K}$, on a un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "i"'] & \mathfrak{Y}_0 \arrow[d, "j"] \\ \mathfrak{X}'_0 \arrow[r, "f'_0"] & \mathfrak{Y}'_0 \end{tikzcd}$$

où i et j sont des immersions surjectives (2.2.9). Il revient donc au même de dire que f_0 ou f'_0 est propre ([29] 5.4.5), d'où l'assertion.

Corollaire 2.3.22. *Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est propre.*

(ii) *Pour tout ouvert U de $\mathfrak{Y}$, la restriction de f au-dessus de U est propre.*

(iii) *Pour tout $y \in \mathfrak{Y}$, il existe un voisinage ouvert U de y dans $\mathfrak{Y}$ tel que la restriction de f au-dessus de U soit propre.*

Cela résulte aussitôt de 2.3.21 et 2.2.10.

Proposition 2.3.23. *On suppose dans ce qui suit que tous les schémas formels considérés sont adiques.*

(i) *Le composé de deux morphismes propres est un morphisme propre.*

(ii) *Si $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ est un morphisme propre, $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}'$ est propre pour tout morphisme $g\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$.*

(iii) *Si $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ et $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ sont deux morphismes tels que $g \circ f$ soit propre et g soit adique et séparé, alors f est propre.*

Les proposition (i) et (iii) résultent de 2.3.21 et des assertions correspondantes pour les schémas usuels ([29] 5.4.2 et 5.4.3). Pour (ii), la question étant locale sur $\mathfrak{Y}$ et sur $\mathfrak{Y}'$ (2.3.22), on peut se borner au cas où g est un morphisme déployé (2.2.4) ; la proposition résulte alors de 2.3.21, 2.2.15 et de l'assertion correspondante pour les schémas usuels ([29] 5.4.2).

Proposition 2.3.24. *Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels, $\mathscr{K}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{Y}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est un morphisme adique et si l'on pose $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$ et $\mathfrak{Y}_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K})$, le morphisme $f_0\colon \mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{Y}_0$ déduit de f est fini.*

(ii) *Pour tout ouvert formel affine U de $\mathfrak{Y}$, $f^{-1}(U)$ est un ouvert formel affine de $\mathfrak{X}$, et $\Gamma(f^{-1}(U), \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ est une $\Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$-algèbre adique* (1.8.4.5) *et un $\Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$-module de type fini.*

(iii) *Tout point de $\mathfrak{Y}$ possède un voisinage ouvert formel affine U tel que $f^{-1}(U)$ soit un ouvert formel affine de $\mathfrak{X}$, et que $\Gamma(f^{-1}(U), \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ soit une $\Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$-algèbre adique et un $\Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$-module de type fini.*

Montrons d'abord que (i) entraîne (ii). On peut supposer que l'on a $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$ et $\mathscr{K} = K^{\Delta}$, où B est un anneau adique et K est un idéal de définition de type fini de B. Posons $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$, $\mathfrak{Y}_n = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}^{n+1})$ et soit $f_n\colon \mathfrak{X}_n \to \mathfrak{Y}_n$ le morphisme déduit de f. Alors $\mathfrak{X}$ est la limite inductive du $(\mathfrak{Y}_n)$-système inductif adique $(\mathfrak{X}_n)$ (2.2.14). Par hypothèse, $\mathfrak{X}_0$ est un schéma affine dont l'anneau A_0 est un (B/K)-module de type fini. Donc chacun des $\mathfrak{X}_n$ est un schéma affine ([28] 2.3.5), et si A_n est son anneau, pour tout $m \leq n$, A_m est isomorphe à $A_n/K^{m+1}A_n$. Par suite, $\mathfrak{X}$ est isomorphe à $\mathrm{Spf}(A)$, où $A = \varprojlim A_n$, et la conclusion résulte de ([12] chap. III §2.11 prop. 14 et cor. 1). Il est claire que (ii) implique (iii). Enfin, (iii) entraîne (i) en vertu de 2.2.8 et 2.2.10.

Définition 2.3.25. Lorsque les conditions équivalentes de (2.3.24) sont vérifiées, on dit que le morphisme f est *fini*, ou encore que $\mathfrak{X}$ est un $\mathfrak{Y}$-schéma formel *fini*, ou *fini* sur $\mathfrak{Y}$.

Il est clair que si f est fini, il est affine, et pour tout ouvert $U \subset \mathfrak{Y}$, $f^{-1}(U)$ est fini sur U.

Proposition 2.3.26. *On suppose dans ce qui suit que tous les schémas formels considérés sont adiques.*

(i) *Le composé de deux morphismes finis est un morphisme fini.*

(ii) *Si $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ est un morphisme fini, $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}'$ est fini pour tout morphisme $g\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$.*

(iii) *Si $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ et $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ sont deux morphismes tels que $g \circ f$ soit fini et g soit adique et séparé, alors f est fini.*

Les propositions (i) et (iii) résultent de 2.3.24 et des assertions correspondantes pour les schémas usuels ([29] 6.1.5). Pour (ii), la question étant locale sur

$\mathfrak{Y}$ et sur $\mathfrak{Y}'$, on peut se borner au cas où g est un morphisme déployé (2.2.4) ; la proposition résulte alors de 2.3.24, 2.2.15 et de l'assertion correspondante pour les schémas usuels ([29] 6.1.5).

2.3.27. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique de schémas formels adiques, y un point de $\mathfrak{Y}$. On note $\mathscr{O}_y$ l'anneau local de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$ en y, $\kappa(y)$ son corps résiduel et $i_y\colon \mathrm{Spec}(\kappa(y)) \to \mathfrak{Y}$ le morphisme canonique localisé en y. La fibre de $\mathfrak{X}$ au-dessus de y, c'est à dire le schéma formel $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathrm{Spec}(\kappa(y))$, sera notée $\mathfrak{X} \otimes_{\mathfrak{Y}} \kappa(y)$.

Soient $\mathscr{K}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{Y}$, $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$, $\mathfrak{Y}_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K})$, $f_0\colon \mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{Y}_0$ le morphisme de schémas usuels déduit de f. Il est immédiat de voir que $\mathfrak{X} \otimes_{\mathfrak{Y}} \kappa(y)$ est canoniquement isomorphe à $\mathfrak{X}_0 \otimes_{\mathfrak{Y}_0} \kappa(y)$ ([28] 10.7.4) ; en particulier, $\mathfrak{X} \otimes_{\mathfrak{Y}} \kappa(y)$ est un schéma (usuel).

Soit x un point de $\mathfrak{X} \otimes_{\mathfrak{Y}} \kappa(y)$. On appelle *dimension relative* de $\mathfrak{X}$ sur $\mathfrak{Y}$ en x, et on note $\dim_x(\mathfrak{X}/\mathfrak{Y})$, la dimension de $\mathfrak{X} \otimes_{\mathfrak{Y}} \kappa(y)$ en x ; elle est fini si f est localement de type fini. On appelle *dimension relative* de $\mathfrak{X}$ sur $\mathfrak{Y}$, et on note $\dim(\mathfrak{X}/\mathfrak{Y})$, la borne supérieure des nombres $\dim_x(\mathfrak{X}/\mathfrak{Y})$, lorsque x parcourt les points de $\mathfrak{X}$.

Soient $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module, $\mathscr{F}_x$ la fibre de $\mathscr{F}$ en x, $\mathscr{F} \otimes_{\mathfrak{Y}} \kappa(y)$ l'image réciproque de $\mathscr{F}$ sur $\mathfrak{X} \otimes_{\mathfrak{Y}} \kappa(y)$. Alors la fibre de $\mathscr{F} \otimes_{\mathfrak{Y}} \kappa(y)$ en x est canoniquement isomorphe à $\mathscr{F}_x \otimes_{\mathscr{O}_y} \kappa(y)$. En effet, il suffit de le montrer pour $\mathscr{F} = \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, auquel cas l'assertion résulte facilement de l'isomorphisme $\mathfrak{X} \otimes_{\mathfrak{Y}} \kappa(y) \simeq \mathfrak{X}_0 \otimes_{\mathfrak{Y}_0} \kappa(y)$ ([28] 3.4.6).

Définition 2.3.28. Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels. On dit que f est *quasi-fini* s'il vérifie les conditions suivantes :

(i) f est de type fini.

(ii) Tout point $x \in \mathfrak{X}$ est isolé dans sa fibre $\mathfrak{X} \otimes_{\mathfrak{Y}} \kappa(f(x))$.

Lorsqu'il en est ainsi, on dit aussi que $\mathfrak{X}$ est un $\mathfrak{Y}$-schéma formel *quasi-fini*, ou *quasi-fini* sur $\mathfrak{Y}$.

Proposition 2.3.29. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique de schémas formels adiques, $\mathscr{K}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{Y}$, $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$, $\mathfrak{Y}_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K})$, $f_0\colon \mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{Y}_0$ le morphisme de schémas usuels déduit de f. Pour que f soit quasi-fini, il faut et il suffit que f_0 soit quasi-fini.*

Cela résulte aussitôt de 2.3.27.

Proposition 2.3.30. *Soit $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme propre, localement de présentation finie et quasi-fini de schémas formels adiques. Alors f est fini.*

En effet, la proposition se ramène aussitôt à l'assertion correspondante pour les morphismes de schémas usuels ([31] 8.11.1).

2.4 Morphismes lisses, morphismes non ramifiés, morphismes étales

Définition 2.4.1. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels. On dit que f est un morphisme *formellement lisse* (resp. *formellement non ramifié*, resp. *formellement étale*) si, pour tout schéma (usuel) affine Y', tout sous-schéma fermé Y'_0 de Y' défini par un idéal nilpotent $\mathscr{I}$ de $\mathscr{O}_{Y'}$, et tout morphisme de schémas formels $Y' \to \mathfrak{Y}$ (2.1.20), l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Y}}(Y', \mathfrak{X}) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Y}}(Y'_0, \mathfrak{X}) \tag{2.4.1.1}$$

déduite de l'injection canonique $Y'_0 \to Y'$, est surjective (resp. injective, resp. bijective).

2.4.2. Supposons $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A)$ et $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B)$ affines, de sorte que f provient d'un homomorphisme continu d'anneaux admissibles $\varphi\colon A \to B$. En vertu de ([31] 0.19.3.1 et 0.19.10.2), dire que f est formellement lisse (resp. formellement non ramifié, resp. formellement étale) signifie que B est une A-algèbre formellement lisse (resp. formellement non ramifié, resp. formellement étale).

Proposition 2.4.3.

(i) *Le composé de deux morphismes formellement lisses* (*resp. formellement non ramifiés, resp. formellement étales*) *de schémas formels est formellement lisse* (*resp. formellement non ramifié, resp. formellement étale*).

(ii) *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $g\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$ deux morphismes de schémas formels. Si f est formellement lisse* (*resp. formellement non ramifié, resp. formellement étale*)*, il en est de même du morphisme $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}'$.*

Cela résultent immédiatement de la définition (2.4.1).

Proposition 2.4.4. *Soit $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique de schémas formels adiques. Pour que f soit formellement lisse* (*resp. formellement non ramifié, resp. formellement étale*)*, il faut et il suffit que pour tout idéal de définition de type fini $\mathscr{K}$ de $\mathfrak{Y}$, si l'on pose $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$ et $\mathfrak{Y}_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K})$, le morphisme de schémas usuels $f_0\colon \mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{Y}_0$ déduit de f soit formellement lisse* (*resp. formellement non ramifié, resp. formellement étale*).

Cela résulte facilement de 2.4.3(ii), 2.2.9 et 2.2.12.

Définition 2.4.5. Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels. On dit que f est *lisse* (resp. *non ramifié*, resp. *étale*) s'il est localement de présentation finie et formellement lisse (resp. formellement non ramifié, resp. formellement étale). On dit alors aussi que $\mathfrak{X}$ est un $\mathfrak{Y}$-schéma *lisse* (resp. *non ramifié*, resp. *étale*), ou *lisse* (resp. *non ramifié*, resp. *étale*) sur $\mathfrak{Y}$.

Proposition 2.4.6. *Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels. Pour que f soit lisse* (*resp. non ramifié, resp. étale*)*, il faut* *et il suffit que f soit adique et que pour tout idéal de définition de type fini $\mathscr{K}$ de $\mathfrak{Y}$, si l'on pose $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$ et $\mathfrak{Y}_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K})$, le morphisme de schéma usuels $f_0 \colon \mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{Y}_0$ déduit de f soit lisse (resp. non ramifié, resp. étale).*

Cela résulte de 2.4.4 et des définitions.

Proposition 2.4.7. *Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels, $\mathscr{K}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{Y}$. Pour que f soit non ramifié, il faut et il suffit que f soit localement de présentation finie, et que si l'on pose $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$ et $\mathfrak{Y}_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K})$, le morphisme $f_0 \colon \mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{Y}_0$ déduit de f soit non ramifié.*

La condition est nécessaire en vertu de 2.4.6. Pour établir sa suffisance, il suffit de montrer que si $\mathscr{K}'$ est un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{Y}$, $\mathscr{J}' = f^*(\mathscr{K}')\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}'_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}')$ et $\mathfrak{Y}'_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}')$, le morphisme $f'_0 \colon \mathfrak{X}'_0 \to \mathfrak{Y}'_0$ déduit de f est non ramifié (2.4.6). On notera que f'_0 est localement de présentation finie. La question étant locale sur $\mathfrak{Y}$, on peut se borner au cas où $\mathfrak{Y}$ est quasi-compact. Si $\mathscr{K}' \subset \mathscr{K}$, on a un diagramme cartésien (2.2.9)

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "i"'] & \mathfrak{Y}_0 \arrow[d, "j"] \\ \mathfrak{X}'_0 \arrow[r, "f'_0"] & \mathfrak{Y}'_0 \end{tikzcd}$$

où i et j sont des immersions surjectives et f_0 et f'_0 sont localement de présentation finie. Il revient donc au même de dire que f_0 ou f'_0 est non ramifié ([31] 17.4.1), d'où l'assertion.

Proposition 2.4.8. *Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels, $\mathscr{K}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{Y}$. Pour que f soit lisse (resp. non ramifié, resp. étale), il faut et il suffit que f soit adique, et que si l'on pose $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$ et $\mathfrak{Y}_n = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}^{n+1})$, le morphisme $f_n \colon \mathfrak{X}_n \to \mathfrak{Y}_n$ déduit de f soit lisse (resp. non ramifié, resp. étale) pour tout $n \geq 0$.*

La condition est nécessaire en vertu de 2.4.6. Pour établir sa suffisance, il suffit de montrer que si $\mathscr{K}'$ est un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{Y}$, $\mathscr{J}' = f^*(\mathscr{K}')\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}'_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}')$ et $\mathfrak{Y}'_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}')$, le morphisme $f'_0 \colon \mathfrak{X}'_0 \to \mathfrak{Y}'_0$ déduit de f est lisse (resp. non ramifié, resp. étale) (2.4.6). Cela se voit immédiatement en calquant la preuve de l'implication (ii)$\Rightarrow$(i) dans 2.3.16.

Proposition 2.4.9. *Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est lisse (resp. non ramifié, resp. étale).*

(ii) *Pour tout ouvert V de $\mathfrak{Y}$ et tout ouvert U de $\mathfrak{X}$ tels que $f(U) \subset V$, la restriction $U \to V$ de f est lisse* (*resp. non ramifié, resp. étale*).

(iii) *Pour tout $x \in \mathfrak{X}$, il existe un voisinage ouvert V de $f(x)$ et un voisinage ouvert U de x tels que $f(U) \subset V$ et que la restriction $U \to V$ de f soit lisse* (*resp. non ramifié, resp. étale*).

En effet, cela résulte de 2.4.8, 2.2.10 et ([31] 17.1.6).

Proposition 2.4.10. *On suppose dans ce qui suit que tous les schémas formels considérés sont adiques.*

(i) *Le composé de deux morphismes lisses* (*resp. non ramifiés, resp. étales*) *est lisse* (*resp. non ramifié, resp. étale*).

(ii) *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $g\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$ deux morphismes. Si f est lisse* (*resp. non ramifié, resp. étale*), *il en est de même du morphisme $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}'$.*

(iii) *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ deux morphismes tels que $g \circ f$ soit non ramifié et que g soit localement de type fini. Alors f est non ramifié.*

(iv) *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ deux morphismes tels que $g \circ f$ soit lisse* (*resp. étale*) *et que g soit non ramifié. Alors f est lisse* (*resp. étale*).

Les propositions (i) et (ii) résultent de 2.3.18, 2.3.19 et 2.4.3. Les propositions (iii) et (iv) résultent de 2.2.11, 2.4.8 et des assertions correspondantes pour les morphismes de schémas usuels ([31] 17.3.3 et 17.3.4).

Proposition 2.4.11. *Soient $\mathscr{S}$ un schéma formel adique, $\mathscr{I}$ un idéal de définition de type fini de $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}_0 = (\mathscr{S}, \mathscr{O}_{\mathscr{S}}/\mathscr{I})$, $f_0\colon X_0 \to \mathscr{S}_0$ un morphisme lisse de schémas. Supposons que X_0 soit affine, ou que f_0 soit étale. Alors il existe un morphisme lisse de schémas formels adiques $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ qui relève f_0 ; c'est à dire, si l'on pose $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{I})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ et $\mathfrak{X}_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$, f_0 s'identifie au morphisme $\mathfrak{X}_0 \to \mathscr{S}_0$ déduit de f. Si X_0 est affine, $\mathfrak{X}$ est affine. Si f_0 est étale, f est étale et unique à isomorphisme unique près.*

Posons $\mathscr{S}_n = (\mathscr{S}, \mathscr{O}_{\mathscr{S}}/\mathscr{I}^{n+1})$ pour $n \geq 0$. On construit par récurrence sur n des morphismes lisses $f_n\colon X_n \to \mathscr{S}_n$ tels que f_n soit une déformation de f_{n-1} (pour $n \geq 1$) ([33] 5.9). Si X_0 est affine, X_n est affine ([28] 2.3.5). Si f_0 est étale, f_n est étale et unique à isomorphisme unique près. Les X_n forment un $(\mathscr{S}_n)$-système inductif adique (2.2.13), et définissent donc un schéma formel $\mathfrak{X}$ adique sur $\mathscr{S}$ (2.2.14). Le morphisme structural $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ est lisse en vertu de 2.4.8. Si f_0 est étale, f est étale et unique à isomorphisme unique prés. Si X_0 est affine, $\mathfrak{X}$ est affine (2.1.37).

2.4.12. On appelle schéma formel *pointé* (resp. schéma formel adique *pointé*) un couple $(\mathfrak{X}, x)$ formé d'un schéma formel (resp. d'un schéma formel adique) $\mathfrak{X}$ et d'un point $x \in \mathfrak{X}$. Un morphisme de schémas formels pointés $f\colon (\mathfrak{X}, x) \to (\mathfrak{Y}, y)$ est un morphisme de schémas formels $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ tel que $f(x) = y$.

Définition 2.4.13. Soit $(\mathfrak{X}, x)$ un schéma formel adique pointé. Un *voisinage étale élémentaire* de $(\mathfrak{X}, x)$ est un schéma formel pointé $(\mathfrak{Y}, y)$, où $\mathfrak{Y}$ est un $\mathfrak{X}$-schéma formel étale et y est un point de $\mathfrak{Y}$ au-dessus de x, à extension résiduelle triviale, c'est à dire $\kappa(y) \simeq \kappa(x)$.

Soient $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ un morphisme étale de schémas formels adiques, y un point de $\mathfrak{Y}$, x son image dans $\mathfrak{X}$, $\mathscr{J}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{X}$. Posons $\mathscr{K} = f^*(\mathscr{J})\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$, $\mathfrak{X}_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$, $\mathfrak{Y}_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K})$ et soit $f_0\colon \mathfrak{Y}_0 \to \mathfrak{X}_0$ le morphisme déduit de f. Alors, pour que $(\mathfrak{Y}, y)$ soit un voisinage étale élémentaire de $(\mathfrak{X}, x)$, il faut et il suffit que $(\mathfrak{Y}_0, y)$ soit un voisinage étale élémentaire de $(\mathfrak{X}_0, x)$.

Le théorème suivant est une version formelle renforcée d'un résultat de Raynaud-Gruson, établi initialement dans le cadre algébrique ([42] 1.1.1).

Théorème 2.4.14. *Soit $f\colon (\mathfrak{X}, x) \to (\mathscr{S}, s)$ un morphisme localement de type fini de schémas formels adiques pointés ; posons $n = \dim_x(\mathfrak{X}/\mathscr{S})$ (2.3.27). Alors, il existe un diagramme commutatif de schémas formels adiques pointés*

$$\begin{tikzcd}
(\mathfrak{Y}, y) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"'] & (\mathscr{T}, t) \arrow[r, "h"] & (\mathscr{S}', s') \arrow[d, "v"] \\
(\mathfrak{X}, x) \arrow[rr, "f"] & & (\mathscr{S}, s)
\end{tikzcd}$$

vérifiant les conditions suivantes :

(i) *$\mathfrak{Y}$, $\mathscr{T}$ et $\mathscr{S}'$ sont formels affines ; u et v sont des voisinages étales élémentaires ;*
(ii) *h est lisse à fibres géométriquement intègres de dimension n, et l'adhérence de t dans $\mathscr{T} \otimes_{\mathscr{S}'} \kappa(s')$ est géométriquement irréductible ;*
(iii) *g est fini et y est l'unique point de $\mathfrak{Y}$ au-dessus de t.*

Soient $\mathscr{I}$ un idéal de définition de type fini de $\mathscr{S}$, $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{I})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$, $\mathscr{S}_n = (\mathscr{S}, \mathscr{O}_{\mathscr{S}}/\mathscr{I}^{n+1})$ et $f_n\colon \mathfrak{X}_n \to \mathscr{S}_n$ le morphisme déduit de f. En vertu de ([42] 1.1.1), il existe un diagramme commutatif de schémas pointés

$$\begin{tikzcd}
(Y, y) \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "u_0"'] & (T, t) \arrow[r, "h_0"] & (S', s') \arrow[d, "v_0"] \\
(\mathfrak{X}_0, x) \arrow[rr, "f_0"] & & (\mathscr{S}_0, s)
\end{tikzcd}$$

vérifiant les conditions suivantes :

(a) Y, T et S' sont affines ; u_0 et v_0 sont des voisinages étales élémentaires ;
(b) h_0 est lisse à fibres géométriquement intègres de dimension n ;
(c) g_0 est fini et y est l'unique point de Y au-dessus de t.

De plus, il résulte de la démonstration de *loc. cit.* qu'on peut supposer l'adhérence de t dans $T \otimes_{S'} \kappa(s')$ géométriquement irréductible.

En vertu de 2.4.11, il existe deux morphismes étales $u\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ et $v\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ qui relèvent respectivement $u_0\colon Y \to \mathfrak{X}_0$ et $v_0\colon S' \to \mathscr{S}_0$, où $\mathfrak{Y}$ et $\mathscr{S}$ sont affines. Donc $u\colon (\mathfrak{Y}, y) \to (\mathfrak{X}, x)$ et $v\colon (\mathscr{S}', s') \to (\mathscr{S}, s)$ sont des voisinages étales élémentaires (2.4.13). Utilisons encore une fois 2.4.11 ; il existe alors un morphisme lisse $h\colon \mathscr{T} \to \mathscr{S}'$ qui relève h_0, où $\mathscr{T}$ est affine. On sait (2.2.14) que $\mathfrak{Y}$ (resp. $\mathscr{T}$) est une limite inductive d'un $(\mathscr{S}_n)$-système inductif adique $(\mathfrak{Y}_n)$ (resp. $(\mathscr{T}_n)$ tel que $\mathscr{T}_n \to \mathscr{S}_n$ soit lisse). On peut alors compléter le $\mathscr{S}_0$-morphisme $g_0\colon Y \to T$ en un système inductif de $\mathscr{S}_n$-morphismes $g_n\colon \mathfrak{Y}_n \to \mathscr{T}_n$ (pour $n \geq 0$). Il est immédiat de voir que pour $m \leq n$, g_m s'identifie à $g_n \times_{\mathscr{S}_n} \mathrm{id}_{\mathscr{S}_m}$; donc en vertu de 2.2.14 et 2.3.24, la suite (g_n) définit un $\mathscr{S}$-morphisme fini $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathscr{T}$ qui relève g_0, d'où la proposition.

Proposition 2.4.15. *Soient $\mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme lisse de schémas formels adiques, s un point de $\mathscr{S}$, C une composante connexe de $\mathfrak{X} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s)$ qui est géométriquement intègre de dimension n. Alors, il existe un voisinage étale élémentaire $(\mathscr{S}', s')$ de $(\mathscr{S}, s)$ et un ouvert U' de $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathscr{S}'$ tels que U' contienne C et tels que les fibres du morphisme $U' \to \mathscr{S}'$ soient géométriquement intègres de dimension n.*

Cela résulte de 2.4.11 et de l'assertion analogue pour les morphismes de schémas usuels :

Lemme 2.4.16 ([42] 1.1.3). *Soient $X \to S$ un morphisme lisse de schémas, s un point de S, C une composante connexe de $X \otimes_S \kappa(s)$ qui est géométriquement intègre de dimension n. Alors, il existe un voisinage étale élémentaire (S', s') de (S, s) et un ouvert U' de $X' = X \times_S S'$ tels que U' contienne C et tels que les fibres du morphisme $U' \to S'$ soient géométriquement intègres de dimension n.*

Soient $(\widetilde{S}, \widetilde{s})$ un hensélisé strict de (S, s), $\widetilde{X} = X \times_S \widetilde{S}$. Comme $\widetilde{X}$ est lisse sur $\widetilde{S}$ et que $C \otimes_{\kappa(s)} \kappa(\widetilde{s})$ est non vide, le morphisme $\widetilde{X} \to \widetilde{S}$ possède une section $\widetilde{\sigma}$ telle que $\widetilde{\sigma}(\widetilde{s}) \in C \otimes \kappa(\widetilde{s})$ ([31] 17.16.3). Considérons $(\widetilde{S}, \widetilde{s})$ comme limite projective filtrante de schémas finis et étales sur le hensélisé de S en s. Par passage à la limite, on trouve qu'il existe un voisinage étale élémentaire (S', s') de (S, s) et un morphisme fini étale surjectif $S_1 \to S'$, ayant un seul point s_1 au-dessus de s, tels que $X_1 = X \times_S S_1$ possède une section σ_1 au-dessus de S_1 et que $\sigma_1(s_1) \in C \otimes \kappa(s_1)$. La réunion des composantes connexes des fibres de $X_1 \to S_1$ qui rencontrent $\sigma_1(S_1)$ est un ouvert U_1 de X_1 ([31] 15.6.5). Comme $C \otimes \kappa(s_1)$ est connexe par hypothèse, U_1 contient $C \otimes \kappa(s_1)$. Le morphisme lisse $U_1 \to S_1$ admet une section et ses fibres sont connexes, elles sont donc géométriquement intègres ([42] 1.1.2).

Posons $X' = X \times_S S'$ et soit $p\colon X_1 \to X'$ la projection canonique. D'une part, p est fini, donc fermé, et par suite $p(X_1 - U_1)$ est fermé dans X'. D'autre part, $p(X_1 - U_1)$ ne rencontre pas $C = C \otimes \kappa(s')$. Alors $U' = X' - p(X_1 - U_1)$ est un ouvert de X', contenant C, tel que $p^{-1}(U')$ soit contenu dans U_1. A fortiori, les fibres de $U' \to S'$ sont géométriquement intègres ; quitte à restreindre S' à un voisinage ouvert de s', on peut supposer qu'elles sont de dimension n.

2.5 Complété formel d'un schéma le long d'un sous-schéma

2.5.1. Soient X un schéma (usuel), X' un sous-schéma fermé de X défini par un idéal quasi-cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_X$, Ψ l'injection canonique $X' \to X$ des espaces sous-jacents, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent. On appelle *complété de $\mathscr{F}$ le long de X'* et on désigne par $\mathscr{F}_{/X'}$ ou par $\widehat{\mathscr{F}}$ (lorsqu'aucune confusion n'est possible) le faisceau $\varprojlim_n \Psi^{-1}(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} (\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n))$.

On notera que cette définition est équivalente à celle de Grothendieck ([28] 10.8.2) ; plus précisément, le morphisme canonique

$$\Psi^{-1}\varprojlim_n (\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} (\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n)) \quad \to \quad \varprojlim_n \Psi^{-1}(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} (\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n)) \tag{2.5.1.1}$$

est bijectif. En effet, comme X' est fermé dans X, Ψ_* est pleinement fidèle, et il suffit de voir que $\Psi_*(2.5.1.1)$ est un isomorphisme. Considérons alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\Psi_*\Psi^{-1}\varprojlim_n (\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} (\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n)) \arrow[r, "\Psi_*(2.5.1.1)"] & \Psi_*\varprojlim_n \Psi^{-1}(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} (\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n)) \arrow[d, "v"] \\
\varprojlim_n (\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} (\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n)) \arrow[u, "u"] \arrow[r, "w"] & \varprojlim_n \Psi_*\Psi^{-1}(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} (\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n))
\end{tikzcd}$$

où u et w sont des morphismes d'adjonction, et v est la flèche canonique. Comme v et w sont des isomorphismes, on se réduit à montrer que u est un isomorphisme. Si on note V l'ouvert complémentaire de X' dans X et $j\colon V \to X$ l'injection canonique, le foncteur j^* commute aux limites projectives, car il admet un adjoint à gauche. On en conclut que

$$j^*\varprojlim_n (\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} (\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n)) = 0,$$

et par suite que u est un isomorphisme.

Il est immédiat que pour tout ouvert $U \subset X$, on a

$$(\mathscr{F}|U)_{/(U\cap X')} = (\mathscr{F}_{/X'})|(U \cap X').$$

Par passage à la limite projective, il est clair que $(\mathscr{O}_X)_{/X'}$ est un faisceau d'anneaux, et que $\mathscr{F}_{/X'}$ peut être considéré comme un $(\mathscr{O}_X)_{/X'}$-module. En outre, comme il existe une base de la topologie de X' formée d'ouverts quasi-compacts, on peut considérer $(\mathscr{O}_X)_{/X'}$ (resp. $\mathscr{F}_{/X'}$) comme un faisceau d'anneaux topologiques (resp. de groupes topologiques) limite projective des faisceaux d'anneaux (resp. de groupes) pseudo-discrets $\Psi^{-1}(\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n)$ (resp. $\Psi^{-1}(\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n))$), et $\mathscr{F}_{/X'}$ devient alors un $(\mathscr{O}_X)_{/X'}$-module topologique ([28] 0.3.9.1 et 0.3.9.2). Pour tout ouvert quasi-compact U de X, $\Gamma(U\cap X',(\mathscr{O}_X)_{/X'})$ (resp. $\Gamma(U\cap X',\mathscr{F}_{/X'})$) est alors limite projective des anneaux (resp. groupes) discrets $\Gamma(U,\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n)$ (resp. $\Gamma(U,\mathscr{F}/\mathscr{J}^n\mathscr{F})$).

On voit aussitôt que $\mathscr{F}_{/X'}$ est un foncteur additif de la catégorie des $\mathscr{O}_X$-modules quasi-cohérents, à valeurs dans la catégorie des $(\mathscr{O}_X)_{/X'}$-modules topologiques.

On appelle *complété de X le long de X'* et on note $X_{/X'}$ ou $\widehat{X}$ (si aucune confusion n'est à craindre) l'espace topologiquement annelé $(X',(\mathscr{O}_X)_{/X'})$.

Proposition 2.5.2. *Soient X un schéma, X' un sous-schéma fermé de X, défini par un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_X$. Alors :*

(i) *$\widehat{X}=X_{/X'}$ est un schéma formel adique ; $\mathscr{J}_{/X'}$ est un idéal de définition de type fini de $\widehat{X}$; on a des isomorphismes canoniques $\mathscr{O}_{\widehat{X}}/\mathscr{J}_{/X'}\simeq\mathscr{O}_{X'}$, $(\mathscr{J}^n)_{/X'}\simeq(\mathscr{J}_{/X'})^n$ $(n\geq 1)$ et $\mathscr{J}_{/X'}/\mathscr{J}^2_{/X'}\simeq(\mathscr{J}/\mathscr{J}^2)|X'$.*

(ii) *Si $X=\mathrm{Spec}(A)$ est un schéma affine, $\mathscr{J}=\widetilde{J}$, où J est un idéal de type fini de A, $\widehat{X}$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Spf}(\widehat{A})$, où $\widehat{A}$ est le séparé complété de A pour la topologie J-préadique.*

(iii) *Si $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent de type fini, alors pour tout entier $n\geq 1$, on a des isomorphismes canoniques $\mathscr{J}^n_{/X'}\mathscr{F}_{/X'}\simeq(\mathscr{J}^n\mathscr{F})_{/X'}$ et $\mathscr{F}_{/X'}/\mathscr{J}^n_{/X'}\mathscr{F}_{/X'}\simeq(\mathscr{F}/\mathscr{J}^n\mathscr{F})|X'$.*

(iv) *Si $\mathscr{A}$ est un idéal quasi-cohérent de type fini de $\mathscr{O}_X$, contenant localement une puissance de $\mathscr{J}$, alors $\mathscr{A}_{/X'}$ est un idéal ouvert de type fini de $\widehat{X}$, et $(\mathscr{A}_{/X'})^m=(\mathscr{A}^m)_{/X'}$ pour tout entier $m\geq 1$.*

(i) Cela résulte immédiatement de 2.1.36.

(ii) En effet, si $\widehat{J}$ désigne le séparé complété de J pour la topologie J-préadique, alors $\widehat{A}$ est un anneau $\widehat{J}$-adique tel que $\widehat{A}/\widehat{J}^n=A/J^n$ (1.8.7), d'où la conclusion.

(iii) Comme la suite canonique

$$0\to(\mathscr{J}^n\mathscr{F})_{/X'}\to\mathscr{F}_{/X'}\to(\mathscr{F}/\mathscr{J}^n\mathscr{F})|X'\to 0$$

est exacte, il suffit de montrer que $\mathscr{J}^n_{/X'}\mathscr{F}_{/X'}\simeq(\mathscr{J}^n\mathscr{F})_{/X'}$. La question étant locale, on peut se borner au cas affine envisagé dans (ii). On a alors $\mathscr{F}=\widetilde{M}$, où M est un A-module de type fini. Il résulte de 2.5.1 et 1.8.7 que, pour tout $f\in A$,

$$\Gamma(\mathrm{D}(f)\cap X',(\mathscr{J}^n\mathscr{F})_{/X'})=(J^nM)_{\{f\}}=J^nM_{\{f\}}=J^n\Gamma(\mathrm{D}(f)\cap X',\mathscr{F}_{/X'}).$$

Comme $J^n(\mathscr{F}_{/X'})$ est associé au préfaisceau $U\mapsto J^n\Gamma(U,\mathscr{F}_{/X'})$ et que les ouverts $\mathrm{D}(f)\cap X'$ forment une base de la topologie de X', on en déduit que $(\mathscr{J}^n\mathscr{F})_{/X'}=J^n(\mathscr{F}_{/X'})$. Remplaçant $\mathscr{F}$ par $\mathscr{O}_X$, on obtient que $\mathscr{J}^n_{/X'}=J^n\mathscr{O}_{\widehat{X}}$ (2.1.11), d'où notre assertion.

(iv) Les questions étant locales, on peut se borner au cas affine envisagé dans (ii). On a alors $\mathscr{A} = \widetilde{\mathfrak{a}}$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal de type fini de A, ouvert pour la topologie J-préadique. Soient $\widehat{\mathfrak{a}}$ (resp. $\widehat{J}$) le séparé complété de $\mathfrak{a}$ (resp. J) pour la topologie J-préadique. D'après 1.8.7, $\widehat{\mathfrak{a}}$ est un idéal ouvert de type fini de $\widehat{A}$ tel que $\widehat{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}\widehat{A}$ et $\widehat{\mathfrak{a}}/\widehat{J}^n\widehat{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}/J^n\mathfrak{a}$. On en déduit facilement que $\mathscr{A}_{/X'} = \widehat{\mathfrak{a}}^{\Delta}$, et par suite que $\mathscr{A}_{/X'} = \mathfrak{a}\mathscr{O}_{\widehat{X}}$ en vertu 2.1.13, d'où la conclusion.

2.5.3. Reprenons les notations et hypothèses de 2.5.1. On a un homomorphisme canonique de faisceaux d'anneaux $\theta\colon \mathscr{O}_X \to \Psi_*((\mathscr{O}_X)_{/X'}) = \varprojlim (\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n)$. On désigne par i_X le morphisme, dit *canonique*, $(\Psi, \theta)\colon X_{/X'} \to X$ d'espaces annelés. Pour tout $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent $\mathscr{F}$, on a un homomorphisme canonique fonctoriel $\gamma\colon \mathscr{F} \to \Psi_*(\mathscr{F}_{/X'})$ de $\mathscr{O}_X$-modules.

2.5.4. Soient X', X'' deux sous-schémas fermés d'un schéma X, définis par deux idéaux quasi-cohérents $\mathscr{J}'$, $\mathscr{J}''$ de $\mathscr{O}_X$. Supposons que pour tout ouvert affine U de X, il existe un entier $m > 0$ tel que $(\mathscr{J}'|U)^m \subset \mathscr{J}''|U$ et $(\mathscr{J}''|U)^m \subset \mathscr{J}'|U$. Dans ces conditions, pour tout $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent $\mathscr{F}$, les faisceaux de groupes topologiques $\mathscr{F}_{/X'}$ et $\mathscr{F}_{/X''}$ sont canoniquement isomorphes. Cette condition sur X' et X'' implique que ces deux sous-schémas ont même espace sous-jacent, et ces deux conditions sont équivalentes si les deux idéaux $\mathscr{J}'$ et $\mathscr{J}''$ sont de type fini ([28] 6.8.4).

Proposition 2.5.5. *Soient X un schéma, X' un sous-schéma fermé de X, défini par un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_X$, $\widehat{X} = X_{/X'}$ le schéma formel complété de X le long de X', $i\colon \widehat{X} \to X$ le morphisme canonique d'espaces annelés* (2.5.3). *Supposons la paire (X, X') quasi-idyllique* (1.12.21). *Alors :*

(i) *Pour toute suite exacte de $\mathscr{O}_X$-modules quasi-cohérents $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ telle que $\mathscr{F}$ soit de type fini, la suite de $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-modules $0 \to \mathscr{F}'_{/X'} \to \mathscr{F}_{/X'} \to \mathscr{F}''_{/X'} \to 0$ est exacte.*

(ii) *Pour tout $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent de type fini $\mathscr{F}$, l'homomorphisme canonique $\gamma^\sharp\colon i^*(\mathscr{F}) \to \mathscr{F}_{/X'}$ est un isomorphisme ; en particulier, $\mathscr{F}_{/X'}$ est un $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-module de type fini.*

(i) Il suffit de montrer que si $U = \mathrm{Spec}(B)$ est un ouvert affine de X, la suite

$$0 \to \Gamma(U \cap X', \mathscr{F}'_{/X'}) \to \Gamma(U \cap X', \mathscr{F}_{/X'}) \to \Gamma(U \cap X', \mathscr{F}''_{/X'}) \to 0$$

est exacte. On a alors $\mathscr{F}|U = \widetilde{M}$, $\mathscr{F}'|U = \widetilde{M'}$, $\mathscr{F}''|U = \widetilde{M''}$, où M, M', M'' sont trois B-modules tels que M soit de type fini et que la suite $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ soit exacte. Soit K l'idéal de B tel que $\mathscr{J}|U = \widetilde{K}$. Par définition, $\Gamma(U \cap X', \mathscr{F}_{/X'}) = \widehat{M}$ est le séparé complété de M pour la topologie K-préadique, et de même $\Gamma(U \cap X', \mathscr{F}'_{/X'}) = \widehat{M'}$ et $\Gamma(U \cap X', \mathscr{F}''_{/X'}) = \widehat{M''}$; notre assertion résulte alors de 1.8.26(i) et 1.12.16(i).

(ii) Il suffit évidemment de montrer la première assertion. La question étant locale, on peut se borner au cas où $X = \mathrm{Spec}(B)$ est affine, $\mathscr{J} = \widetilde{K}$ et K est un idéal de B. Supposons d'abord que $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, où M est un B-module de présentation finie. On a alors une suite exacte de B-modules $B^p \to B^q \to M \to 0$, qui induit, en vertu de (i), un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd} i^*(\mathscr{O}_X^p) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma^\sharp"] & i^*(\mathscr{O}_X^q) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma^\sharp"] & i^*(\widetilde{M}) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma^\sharp"] & 0 \\ \mathscr{O}_{\widehat{X}}^p \arrow[r] & \mathscr{O}_{\widehat{X}}^q \arrow[r] & \widetilde{M}_{/X'} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Il résulte aussitôt des définitions que $\gamma^\sharp \colon i^*(\mathscr{O}_X) \to \mathscr{O}_{\widehat{X}}$ est l'identité, ce qui entraîne l'assertion.

Supposons ensuite que $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, où M est un B-module de type fini, et posons $N = M_{K\text{-tor}}$ (1.8.30). En vertu de (i), on a un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd} & i^*(\widetilde{N}) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha'"'] & i^*(\widetilde{M}) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & i^*((M/N)^\sim) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha''"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \widetilde{N}_{/X'} \arrow[r] & \widetilde{M}_{/X'} \arrow[r] & ((M/N)^\sim)_{/X'} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

D'après 1.12.16(iii), M/N est un B-module de présentation finie, et $K^n N = 0$ pour un entier $n \geq 0$. Par suite α' et α'' sont des isomorphismes ; donc α est un isomorphisme.

Corollaire 2.5.6. *Sous les hypothèses de* (2.5.5), *si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont des $\mathscr{O}_X$-modules quasi-cohérents de type fini, il existe un isomorphisme canonique*

$$(\mathscr{F}_{/X'}) \otimes_{(\mathscr{O}_X)_{/X'}} (\mathscr{G}_{/X'}) \simeq (\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G})_{/X'}. \tag{2.5.6.1}$$

Proposition 2.5.7. *Soient X un schéma quasi-compact, X' un sous-schéma fermé de X, défini par un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_X$, $\widehat{X} = X_{/X'}$ le schéma formel complété de X le long de X'. Supposons la paire (X, X') quasi-idyllique* (1.12.21). *Pour qu'un idéal $\mathscr{A}$ de $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$ soit ouvert de type fini, il faut et il suffit qu'il soit le complété le long de X' d'un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{C}$ de $\mathscr{O}_X$ contenant une puissance de $\mathscr{J}$. De plus, $\mathscr{C}$ est uniquement déterminé par $\mathscr{A}$.*

Si $\mathscr{C}$ est un idéal quasi-cohérent de type fini de $\mathscr{O}_X$ contenant une puissance de $\mathscr{J}$, alors $\mathscr{C}_{/X'}$ est un idéal ouvert de type fini de $\widehat{X}$ en vertu de 2.5.2(iv). Inversement, soit $\mathscr{A}$ un idéal ouvert de type fini de $\widehat{X}$. Quitte à remplacer $\mathscr{J}$ par une puissance, on peut supposer $\mathscr{J}_{/X'} \subset \mathscr{A}$. Le quotient $\mathscr{A}/\mathscr{J}_{/X'}$ s'identifie à un idéal quasi-cohérent de type fini de $\mathscr{O}_{\widehat{X}}/\mathscr{J}_{/X'} = \mathscr{O}_{X'}$ (2.5.2). Notons $\mathscr{C}$ l'image réciproque de $\mathscr{A}/\mathscr{J}_{/X'}$ dans $\mathscr{O}_X$, qui est un idéal quasi-cohérent de type fini de $\mathscr{O}_X$ contenant $\mathscr{J}$. Pour tout entier $n \geq 1$, compte tenu des isomorphismes $\mathscr{O}_{\widehat{X}}/(\mathscr{J}_{/X'})^n \simeq (\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n)|X'$ et $\mathscr{J}_{/X'}/(\mathscr{J}_{/X'})^n \simeq (\mathscr{J}/\mathscr{J}^n)|X'$ (2.5.2), on a

$$\mathscr{A}/(\mathscr{J}_{/X'})^n \simeq (\mathscr{C}/\mathscr{J}^n)|X'.$$

Comme $\mathscr{A}$ est un idéal ouvert de $\widehat{X}$, il est isomorphe à la limite projective des $\mathscr{A}/(\mathscr{J}_{/X'})^n$. On en déduit que l'on a $\mathscr{A} = \mathscr{C}_{/X'}$. Si $\mathscr{C}'$ est un autre idéal quasi-cohérent de type fini de $\mathscr{O}_X$ contenant $\mathscr{J}^n$ $(n \geq 1)$ tel que $\mathscr{A} = \mathscr{C}'_{/X'}$, alors $(\mathscr{C}/\mathscr{J}^n)|X' = (\mathscr{C}'/\mathscr{J}^n)|X'$ en vertu de 2.5.5(i). Par suite on a $\mathscr{C}/\mathscr{J}^n = \mathscr{C}'/\mathscr{J}^n$; d'où $\mathscr{C} = \mathscr{C}'$.

Proposition 2.5.8. *Soient X un schéma, X' un sous-schéma fermé de X, $\widehat{X} = X_{/X'}$ le schéma formel complété de X le long de X', $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent de type fini. Supposons la paire (X, X') quasi-idyllique* (1.12.21). *Alors, le noyau de l'homomorphisme*

$$\Gamma(X, \mathscr{F}) \to \Gamma(X', \mathscr{F}_{/X'})$$

déduit de $\mathscr{F} \to \mathscr{F}_{/X'}$, est formé des sections nulles sur un voisinage de X'.

Il résulte de la définition de $\mathscr{F}_{/X'}$ que l'image canonique d'une telle section est nulle. Réciproquement, si $s \in \Gamma(X, \mathscr{F})$ a une image nulle dans $\Gamma(X', \mathscr{F}_{/X'})$, il suffit de voir que tout $x \in X'$ admet un voisinage dans X dans lequel s est nulle, et on peut donc se ramener au cas où $X = \operatorname{Spec}(B)$ est affine, $X' = \mathrm{V}(K)$, où K est un idéal de type fini de B, et $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, où M est un B-module de type fini. Alors $\Gamma(X', \mathscr{F}_{/X'})$ est le séparé complété $\widehat{M}$ de M pour la topologie K-préadique, et l'homomorphisme $\Gamma(X, \mathscr{F}) \to \Gamma(X', \mathscr{F}_{/X'})$ est l'homomorphisme canonique $M \to \widehat{M}$. Le noyau de cet homomorphisme est formé de sections $z \in M$ annulée par un élément de $1 + K$ (1.8.27, 1.8.25.4 et 1.12.14(i)). On a donc $(1 + f)s = 0$ pour un $f \in K$; pour tout $x \in X'$, on en déduit $(1_x + f_x)s_x = 0$, et comme $1 + f_x$ est inversible dans $\mathscr{O}_x$, on a $s_x = 0$, ce qui démontre la proposition.

Corollaire 2.5.9. *Sous les hypothèses de* (2.5.8)*, le support de $\mathscr{F}_{/X'}$ est égal à* $\operatorname{Supp}(\mathscr{F}) \cap X'$.

En effet, comme $\mathscr{F}_{/X'}$ est un $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-module de type fini (2.5.5), son support est fermé ([28] 0.5.2.2), et le corollaire résulte alors de 2.5.8.

2.5.10. Soient $f\colon X \to Y$ un morphisme de schémas, X' (resp. Y') un sous-schéma fermé de X (resp. Y), défini par un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{J}$ (resp. $\mathscr{K}$) de $\mathscr{O}_X$ (resp. $\mathscr{O}_Y$), $i\colon X' \to X$ et $j\colon Y' \to Y$ les injections canoniques. Supposons que $f \circ i$ soit majoré par j ; il revient au même de dire que $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_X \subset \mathscr{J}$. On a donc pour tout entier $n > 0$, $f^*(\mathscr{K}^n)\mathscr{O}_X \subset \mathscr{J}^n$; par suite, si on pose $X_n = (X', (\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^{n+1})|X')$ et $Y_n = (Y', (\mathscr{O}_Y/\mathscr{K}^{n+1})|Y')$, on déduit de f

un morphisme $f_n\colon X_n \to Y_n$ et il est immédiat que les f_n forment un système inductif. Nous désignons sa limite par $\hat{f}\colon X_{/X'} \to Y_{/Y'}$ et nous dirons que $\hat{f}$ *est le prolongement de f aux complétés de X et Y le long de X' et Y'*. Il résulte aussitôt de la définition précédente que $\hat{f}$ est un morphisme de schémas formels et le diagramme de morphismes d'espaces annelés

$$\begin{CD} X_{/X'} @>{\hat{f}}>> Y_{/Y'} \\ @V{i_X}VV @VV{i_Y}V \\ X @>{f}>> Y \end{CD} \tag{2.5.10.1}$$

est commutatif. On a $\hat{f}^*(\mathscr{K}_{/Y'})\mathscr{O}_{X_{/X'}} \subset \mathscr{J}_{/X'}$, et $f_n : X_n \to Y_n$ est le morphisme déduit de $\hat{f}$, en vertu de 2.2.2 et 2.5.2(i). Si en outre $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_X$, alors $\mathscr{J}_{/X'} = \hat{f}^*(\mathscr{K}_{/Y'})\mathscr{O}_{X_{/X'}}$, et $\hat{f}$ est un morphisme adique en vertu de 2.2.6.

Proposition 2.5.11. *Les hypothèses étant celles de* (2.5.10)*, supposons de plus les paires* (X, X') *et* (Y, Y') *quasi-idylliques* (1.12.21)*. Alors, pour tout $\mathscr{O}_Y$-module quasi-cohérent de type fini $\mathscr{G}$, il existe un isomorphisme canonique fonctoriel de $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-modules*

$$(f^*(\mathscr{G}))_{/X'} \xrightarrow{\sim} \hat{f}^*(\mathscr{G}_{/Y'}).$$

En effet, en vertu de 2.5.5(ii), $(f^*(\mathscr{G}))_{/X'}$ s'identifie à $i_X^*(f^*(\mathscr{G}))$ et $\hat{f}^*(\mathscr{G}_{/Y'})$ à $\hat{f}^*(i_Y^*\mathscr{G})$; la proposition résulte alors de la commutativité du diagramme (2.5.10.1).

2.6 Schémas formels idylliques

2.6.1. On dit qu'un schéma formel affine est *globalement idyllique* (resp. *globalement quasi-idyllique*, resp. *globalement idyllique rig-pur*) s'il est isomorphe à un spectre formel $\mathrm{Spf}(A)$, où A est un anneau idyllique (resp. quasi-idyllique , resp. idyllique rig-pur) (1.10.1 et 1.8.30.1).

Définition 2.6.2. On dit qu'un schéma formel est *idyllique* (resp. *quasi-idyllique*, resp. *idyllique rig-pur*) s'il est adique et si tout point admet un voisinage ouvert formel affine globalement idyllique (resp. globalement quasi-idyllique, resp. globalement idyllique rig-pur).

On peut faire les remarques suivantes :

2.6.2.1. La notion de schéma formel quasi-idyllique est secondaire.

2.6.2.2. Un schéma formel localement noethérien est idyllique (2.1.28).

2.6.2.3. Un schéma formel affine idyllique (resp. quasi-idyllique, resp. idyllique rig-pur) n'est pas nécessairement globalement idyllique (resp. globalement quasi-idyllique, resp. globalement idyllique rig-pur). On signale toutefois les énoncés 2.6.3, 2.6.12 et 2.10.15.

Proposition 2.6.3. *Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel affine globalement quasi-idyllique, $\mathfrak{X}$ un $\mathfrak{Y}$-schéma formel localement de type fini. Alors pour tout ouvert formel affine U de $\mathfrak{X}$, $\Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ est un anneau quasi-idyllique.*

Cela est mentionné à titre de rappel (2.3.12).

Corollaire 2.6.4. *Un schéma formel localement de type fini sur un schéma formel quasi-idyllique est quasi-idyllique.*

Corollaire 2.6.5. *Si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel quasi-idyllique, les ouverts formels affines globalement quasi-idylliques forment une base de la topologie de $\mathfrak{X}$.*

Proposition 2.6.6. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel quasi-idyllique, $\mathscr{J}$ un idéal de définition de $\mathfrak{X}$. Alors l'espace topologique sous-jacent à $\mathfrak{X}$ est localement noethérien ; en particulier, le schéma usuel $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$ est quasi-séparé.*

Il suffit d'établir la première assertion ([28] 6.1.13). La question étant locale, on peut clairement se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ est formel affine et A est topologiquement de type fini sur un anneau 1-valuatif R. Soient $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de R, t un élément non nul de $\mathfrak{m}$. Les schémas affines $\mathrm{Spec}(A/tA)$ et $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{m}A)$ ont même espace topologique sous-jacent. Comme A/tA est une algèbre de type finie sur R/tR, $A/\mathfrak{m}A$ est une algèbre de type finie sur $R/\mathfrak{m}$; elle est donc noethérienne, d'où la conclusion.

Corollaire 2.6.7. *Soit $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique de schémas formels adiques. Alors :*

(i) *Si $\mathfrak{X}$ est quasi-idyllique, f est quasi-séparé.*
(ii) *Si $\mathfrak{X}$ est quasi-compact et $\mathfrak{Y}$ est quasi-idyllique, f est quasi-compact.*

Cela résulte de 2.3.2, 2.6.6 et ([28] 6.1.10).

Corollaire 2.6.8. *Soient $\mathfrak{Z}$ un schéma formel quasi-idyllique, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ deux morphismes de schémas formels tels que g soit localement de type fini et que $g \circ f$ soit de présentation finie. Alors f est de présentation finie.*

En effet, $\mathfrak{X}$ est quasi-idyllique (2.6.4) et f est localement de présentation finie (2.3.18). Il résulte alors de 2.6.7(i) que f est quasi-séparé, et de 2.6.6 et ([28] 6.1.5(v)) que f est quasi-compact.

Proposition 2.6.9. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel quasi-idyllique, x un point de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{O}_x$ la fibre de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ en x. Alors :*

(i) *Soient $U = \mathrm{Spf}(A)$ un voisinage ouvert formel affine globalement quasi-idyllique de x dans $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{p}$ l'idéal premier ouvert de A correspondant à x. Alors $\mathscr{O}_x$ est fidèlement plat sur $A_{\mathfrak{p}}$.*
(ii) *Soient y une spécialisation de x dans $\mathfrak{X}$, $\mathscr{O}_y$ l'anneau local de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ en y. Alors l'homomorphisme canonique $\mathscr{O}_y \to \mathscr{O}_x$ est plat.*

Posons $S = A - \mathfrak{p}$, de sorte que $\mathscr{O}_x = A_{\{S\}}$ (1.8.12). La proposition (i) résulte alors de 1.12.7. Pour établir (ii), il suffit de montrer que, pour tout idéal de type fini I de $\mathscr{O}_y$, l'homomorphisme canonique $\sigma \colon I \otimes_{\mathscr{O}_y} \mathscr{O}_x \to \mathscr{O}_x$ est injectif ([12] chap. I §2.3 rem. 1). En vertu de 2.6.5, il existe un voisinage ouvert formel affine globalement quasi-idyllique $U = \mathrm{Spf}(A)$ de y dans $\mathfrak{X}$ et un idéal de type fini $\mathfrak{a}$ de A tels que $I = \mathfrak{a}\mathscr{O}_y$. On a $I = \mathfrak{a} \otimes_A \mathscr{O}_y$ d'après (i) ; donc σ s'identifie à la flèche canonique $\mathfrak{a} \otimes_A \mathscr{O}_x \to \mathscr{O}_x$, qui est injective en vertu de (i).

Proposition 2.6.10. *Si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel quasi-idyllique et quasi-compact, le foncteur sur le topos de Zariski de $\mathfrak{X}$ défini par $F \mapsto F(\mathfrak{X})$, commute aux limites inductives filtrantes.*

C'est un cas particulier élémentaire de ([1] VI 5.3). Rappelons la preuve. Soit $(F_i)_{i\in I}$ un système inductif filtrant de faisceaux de Zariski sur $\mathfrak{X}$. Sa limite inductive dans la catégorie des préfaisceaux de Zariski est représentable et se calcule terme à terme. En vertu de 2.6.6, toute famille couvrante du site de Zariski de $\mathfrak{X}$ admet une sous-famille couvrante finie. Il en résulte aussitôt que le préfaisceau limite inductive de $(F_i)_{i\in I}$ est un faisceau ([1] I 2.8.1).

Proposition 2.6.11. *Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel affine globalement quasi-idyllique, $f \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est localement de présentation finie.*
(ii) *Pour tout ouvert formel affine U de $\mathfrak{X}$, l'anneau admissible $\Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ est topologiquement de présentation finie sur $\Gamma(\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$.*
(iii) *Pour tout $x \in \mathfrak{X}$, il existe un voisinage ouvert formel affine U de x tel que l'anneau admissible $\Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ soit topologiquement de présentation finie sur $\Gamma(\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$.*

En effet, en vertu de 2.3.17, 2.2.8 et 1.10.4, (i) implique (ii) et (iii) entraîne (i) ; et il est clair que (ii) implique (iii).

Corollaire 2.6.12. *Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel affine globalement idyllique, $f \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme localement de présentation finie. Alors pour tout ouvert formel affine U de $\mathfrak{X}$, $\Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ est un anneau idyllique.*

Cela résulte de 2.6.11 et 1.10.8.

Corollaire 2.6.13. *Un schéma formel localement de présentation finie sur un schéma formel idyllique est idyllique.*

Corollaire 2.6.14. *Si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel idyllique (resp. idyllique rig-pur), l'espace topologiquement annelé induit sur tout ouvert de $\mathfrak{X}$ est encore un schéma formel idyllique (resp. idyllique rig-pur).*

Cela résulte de 2.6.13 et 1.12.6.

Corollaire 2.6.15. *Si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel idyllique* (*resp. idyllique rig-pur*), *les ouverts formels affines globalement idylliques* (*resp. globalement idylliques rig-purs*) *forment une base de la topologie de $\mathfrak{X}$.*

Proposition 2.6.16. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique rig-pur, $\mathfrak{Y}$ un schéma formel quasi-idyllique, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme localement de type fini* (*resp. de type fini*)*. Alors f est localement de présentation finie* (*resp. de présentation finie*)*.*

Il suffit, d'après 2.6.7, de montrer la première proposition : *si f est localement de type fini, il est localement de présentation finie.* La question étant locale sur $\mathfrak{X}$ et sur $\mathfrak{Y}$ (2.3.17), on peut se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ et $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$ sont formels affines, A est idyllique rig-pur (2.6.15), B est quasi-idyllique et f est associé à un homomorphisme topologiquement de type fini $\varphi\colon B \to A$ (2.3.12). L'assertion est évidente si B est noethérien (1.8.17). Supposons B topologiquement de type fini sur un anneau 1-valuatif R. Comme A est topologiquement de type fini sur R (1.8.21) et rig-pur, donc R-plat (1.9.12), il est topologiquement de présentation finie sur R (1.9.16). On en déduit que f est localement de présentation finie, en vertu de 2.3.18(iii).

Définition 2.6.17. Soient X un schéma, X' un sous-schéma fermé de X. On dit que la paire (X, X') est *idyllique* si elle vérifie l'une des conditions suivantes :

(a) X est localement noethérien.

(b) X est localement de présentation finie sur un anneau idyllique A, et X' est défini par un idéal de $\mathscr{O}_X$ de la forme $J\mathscr{O}_X$, où J est un idéal de définition de type fini de A.

Proposition 2.6.18. *Soient X un schéma, X' un sous-schéma fermé de X, $\widehat{X} = X_{/X'}$ le schéma formel complété de X le long de X'. Supposons la paire (X, X') idyllique. Alors :*

(i) *Le schéma formel $\widehat{X}$ est idyllique. Si, de plus, l'ouvert $X - X'$ est schématiquement dense dans X, $\widehat{X}$ est rig-pur.*

(ii) *Pour tout ouvert affine U de X, $\Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ est un anneau universellement cohérent* (1.4.1) *; en particulier $\mathscr{O}_X$ est un faisceau cohérent d'anneaux.*

(i) Reprenons les notations de 2.6.17. Dans le cas (a), $\widehat{X}$ est localement noethérien ([28] 10.8.4). Dans le cas (b), $\widehat{X}$ est localement de présentation finie sur $\mathrm{Spf}(A)$ (2.5.10), donc idyllique en vertu de 2.6.13. La seconde assertion résulte de 1.8.30.2 et 1.12.17.

(ii) Cela résulte de 1.12.15 et 1.4.2.

Corollaire 2.6.19. *Sous les hypothèses de* (2.6.18)*, le morphisme canonique d'espaces annelés $i : \widehat{X} \to X$* (2.5.3) *est plat.*

Notons d'abord que pour tout ouvert U de X, la paire $(U, X' \cap U)$ est idyllique, et le schéma formel complété de U le long de $X' \cap U$ s'identifie au schéma formel induit par $X_{/X'}$ sur l'ouvert $U \cap X'$. En vertu de 1.3.17, comme $\mathscr{O}_X$ est cohérent

(2.6.18), il suffit alors de montrer que le foncteur $\mathscr{F} \mapsto i^*(\mathscr{F})$ est exact sur la catégorie des $\mathscr{O}_X$-modules cohérents, ce qui résulte de 2.5.5.

Corollaire 2.6.20. *Sous les hypothèses de* (2.6.18)*, si* $\mathscr{F}$ *et* $\mathscr{G}$ *sont des* $\mathscr{O}_X$*-modules cohérents, il existe un isomorphisme canonique*

$$(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F},\mathscr{G}))_{/X'} \simeq \mathscr{H}om_{(\mathscr{O}_X)_{/X'}}(\mathscr{F}_{/X'},\mathscr{G}_{/X'}). \tag{2.6.20.1}$$

Cela résulte en effet de 1.3.5, 2.5.5, 2.6.19 et ([28] 0.5.7.6).

Corollaire 2.6.21. *Les hypothèses étant celles de* (2.6.18)*, soit de plus* $u\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ *un homomorphisme de* $\mathscr{O}_X$*-modules cohérents. Pour que* $u_{/X'}\colon \mathscr{F}_{/X'} \to \mathscr{G}_{/X'}$ *soit nul, il faut et il suffit que* u *soit nul dans un voisinage de* X'*.*

D'après 2.5.5(ii), $u_{/X'}$ s'identifie à $i^*(u)$. Donc si on considère u comme une section au-dessus de X du faisceau $\mathscr{H} = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F},\mathscr{G})$, $u_{/X'}$ est la section de $i^*(\mathscr{H}) = \mathscr{H}_{/X'}$ au-dessus de X' qui lui correspond (2.6.20.1). Il suffit alors d'appliquer 2.5.8.

Corollaire 2.6.22. *Les hypothèses étant celles de* (2.6.18)*, soit de plus* $u\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ *un homomorphisme de* $\mathscr{O}_X$*-modules cohérents. Pour que* $u_{/X'}$ *soit un monomorphisme* (*resp. un épimorphisme*)*, il faut et il suffit que* u *soit un monomorphisme* (*resp. un épimorphisme*) *dans un voisinage de* X'*.*

Soient $\mathscr{N}$ et $\mathscr{P}$ le noyau et le conoyau de u, de sorte qu'on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{N} \xrightarrow{v} \mathscr{F} \xrightarrow{u} \mathscr{G} \xrightarrow{w} \mathscr{P} \longrightarrow 0,$$

et donc (2.5.5(i)) la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{N}_{/X'} \xrightarrow{v_{/X'}} \mathscr{F}_{/X'} \xrightarrow{u_{/X'}} \mathscr{G}_{/X'} \xrightarrow{w_{/X'}} \mathscr{P}_{/X'} \longrightarrow 0.$$

Si $u_{/X'}$ est un monomorphisme (resp. un épimorphisme), on a $v_{/X'} = 0$ (resp. $w_{/X'} = 0$) ; donc il y a un voisinage de X' dans lequel $v = 0$ (resp. $w = 0$) en vertu de 2.6.21.

Proposition 2.6.23. *Soient* X *un schéma cohérent,* X' *un sous-schéma fermé de* X*,* U *l'ouvert* $X - X'$ *de* X*. Supposons la paire* (X, X') *idyllique.*

(i) *Pour tout* $\mathscr{O}_U$*-module cohérent* $\mathscr{F}$*, il existe un* $\mathscr{O}_X$*-module cohérent* $\mathscr{F}'$ *tel que* $\mathscr{F}'|U = \mathscr{F}$*.*

(ii) *Pour toute* $\mathscr{O}_U$*-algèbre cohérente* $\mathscr{B}$*, il existe une* $\mathscr{O}_X$*-algèbre cohérente* $\mathscr{B}'$ *telle que* $\mathscr{B}'|U = \mathscr{B}$*.*

(iii) *Pour tout* U*-schéma fini* V*, il existe un* X*-schéma fini et de présentation finie* Y *tel que* $Y \times_X U$ *soit* U*-isomorphe à* V*.*

On notera que le schéma U est noethérien.

(i) D'après ([28] 6.9.11), il existe un $\mathscr{O}_X$-module de présentation finie $\mathscr{F}'$ tel que $\mathscr{F}'|U = \mathscr{F}$, et il est cohérent en vertu de 2.6.18(ii).

(ii) Notons $\phi\colon X_1 \to X$ l'éclatement de X' dans X, qui est un morphisme propre de présentation finie d'après 1.13.3(ii). Supposons qu'il existe une $\mathscr{O}_{X_1}$-algèbre cohérente $\mathscr{B}_1$ telle que $\mathscr{B}_1|\phi^{-1}(U) = \phi_U^*(\mathscr{B})$; alors $\mathscr{B}' = \phi_*(\mathscr{B}_1)$ est une $\mathscr{O}_X$-algèbre cohérente en vertu de 1.4.8 et 2.6.18(ii), qui répond à la question. On se réduit ainsi au cas où X' est défini par un idéal inversible $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_X$, qui est de plus cohérent d'après 2.6.18(ii). Soit $(V_i)_{i\in I}$ un recouvrement fini de X par des ouverts affines tels que, pour tout $i \in I$, $J_i = \Gamma(V_i, \mathscr{J})$ soit un idéal principal de $A_i = \Gamma(V_i, \mathscr{O}_X)$; posons $B_i = \Gamma(V_i \cap U, \mathscr{B})$. D'après (i), il existe un $\mathscr{O}_X$-module cohérent $\mathscr{F}$ tel que $\mathscr{F}|U = \mathscr{B}$. On a $\mathscr{F}|V_i = \widetilde{M_i}$, où M_i est A_i-module cohérent (1.4.3). Quitte à remplacer $\mathscr{F}$ par $\mathscr{J}^n\mathscr{F}$ $(n \geq 0)$, on peut supposer que, pour tout $i \in I$, M_i est engendré par un nombre fini de sections de B_i entières sur A_i. Notons $j\colon U \to X$ l'injection canonique (qui est quasi-compacte), $\iota\colon \mathscr{F} \to j_*(\mathscr{B})$ l'homomorphisme d'adjonction et $\mathscr{B}'$ la sous-$\mathscr{O}_X$-algèbre de $j_*(\mathscr{B})$ engendrée par $\iota(\mathscr{F})$. Alors $\mathscr{B}'$ est une $\mathscr{O}_X$-algèbre quasi-cohérente ([28] 6.7.1) telle que $\mathscr{B}'|U = \mathscr{B}$. Montrons que $\mathscr{B}'$ est cohérente. La question étant locale, on peut se borner au cas où X est l'un des V_i. Soient $x_1, \dots, x_r$ des sections de B_i entières sur A_i, qui engendrent le A_i-module M_i. Notons B_i' la sous-A_i-algèbre de B_i engendrée par les x_i. Il est clair que B_i' est une A_i-algèbre finie et que l'on a $\mathscr{B}'|V_i = \widetilde{B_i'}$. Comme B_i' est J-pure, elle est de présentation finie sur A_i en vertu de 1.12.16(ii).

(iii) Cela résulte de (ii) et ([28] 6.2.10).

Remarque 2.6.24. On peut donner une démonstration légèrement différente de 2.6.23(ii). En effet, d'après 1.12.24, il existe un morphisme propre de présentation finie $f\colon Z \to X$ tel que $Z \times_X U$ soit U-isomorphe à $V = \mathrm{Spec}(\mathscr{B})$. Il résulte alors de 1.4.8 et 2.6.18(ii) que $f_*(\mathscr{O}_Z)$ est une $\mathscr{O}_X$-algèbre cohérente, qui répond à la question.

Corollaire 2.6.25. *Soient* (A, J) *un couple hensélien idyllique* (1.15.17)*,* $S = \mathrm{Spec}(A)$*,* U *l'ouvert* $S - \mathrm{V}(J)$ *de* S*,* X *un* S*-schéma de présentation finie,* $V = X \times_S U$*,* W *un* V*-schéma fini. Alors il existe un* X*-schéma fini et de présentation finie* Y *tel que* $Y \times_S U$ *soit* V*-isomorphe à* W*.*

Si A est noethérien, la proposition est un cas particulier de 2.6.23(iii). On peut donc se borner au cas où il existe un anneau idyllique A_0, un idéal de définition de type fini I et une A_0-algèbre de présentation finie A_1 tels que A soit le hensélisé I-préadique de A_1 et $J = IA$ (1.15.17). Posons $S_0 = \mathrm{Spec}(A_0)$, $S_1 = \mathrm{Spec}(A_1)$, et soient U_0 l'ouvert $S_0 - \mathrm{V}(I)$ de S_0, $U_1 = S_1 \times_{S_0} U_0$. Par descente ([31] 8.8.2 et 8.10.5), quitte à remplacer A_1 par un voisinage étale élémentaire de IA_1 (1.15.2), on peut supposer qu'il existe un S_1-schéma de présentation finie X_1 et si l'on pose $V_1 = X_1 \times_{S_1} U_1$, un V_1-schéma fini W_1 tels que X soit S-isomorphe à $X_1 \times_{S_1} S$ et que W soit V-isomorphe à $W_1 \times_{U_1} U$. En vertu de 2.6.23(iii), il existe un X_1-schéma fini et de présentation finie Y_1 tel que $Y_1 \times_{X_1} V_1$ soit V_1-isomorphe à W_1. Le X-schéma $Y = Y_1 \times_{X_1} X$ répond à la question.

2.7 Modules cohérents sur les schémas formels affines globalement idylliques

2.7.1. Dans tout ce paragraphe, A désigne un anneau préadique complet et séparé, J un idéal de définition de A, $X = \mathrm{Spec}(A)$, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$. Si $X' = \mathrm{Spec}(A/J)$ est le sous-schéma fermé de X défini par $\widetilde{J}$, il résulte des définitions que $\mathfrak{X}$ est identique à $X_{/X'}$. Pour tout A-module M, $M^\Delta = (\widetilde{M})_{/X'}$ est donc un $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$-module. En outre, si $u\colon M \to N$ est un homomorphisme de A-modules, il lui correspond naturellement un homomorphisme continu de $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$-modules $u^\Delta\colon M^\Delta \to N^\Delta$. On définit ainsi un foncteur additif

$$M \mapsto M^\Delta \tag{2.7.1.1}$$

de la catégorie des A-modules dans celle des $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$-modules. Cette définition ne dépend pas de l'idéal de définition J choisi (2.5.4).

Soit K un idéal ouvert de A. Comme A est un anneau préadique, les (J^nK) forment un système fondamental d'idéaux de définition de A. Le $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$-module K^Δ, suivant la définition précédente, est donc égal à l'idéal de $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$ déjà désigné par cette notation dans (2.1.8).

Théorème 2.7.2. *Soit A un anneau idyllique. Alors le foncteur* (2.7.1.1) *est une équivalence de catégories, de la catégorie des A-modules cohérents sur celle des $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$-modules cohérents.*

On établit en premier lieu la proposition suivante :

Proposition 2.7.2.1. *Soit A un anneau idyllique.*

(i) *Pour tout A-module de type fini M, on a un isomorphisme canonique fonctoriel*

$$\Gamma(\mathfrak{X}, M^\Delta) \xrightarrow{\sim} M. \tag{2.7.2.2}$$

(ii) *Pour toute suite exacte de A-modules* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *telle que M soit de type fini, la suite de $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$-modules* $0 \to M'^\Delta \to M^\Delta \to M''^\Delta \to 0$ *est exacte.*

Par définition, $\Gamma(\mathfrak{X}, M^\Delta)$ est le séparé complété de M pour la topologie J-adique ; mais comme A est idyllique et M de type fini, M est complet et séparé en vertu de 1.10.2, ce qui prouve (i). La proposition (ii) résulte de 2.5.5(i).

Montrons ensuite que, dans la catégorie des A-modules cohérents, le foncteur (2.7.1.1) est pleinement fidèle ; cela résulte de la proposition suivante :

Proposition 2.7.2.3. *Soient A un anneau idyllique, M, N deux A-modules cohérents. Alors il existe des isomorphismes canoniques fonctoriels*

$$(M \otimes_A N)^\Delta \xrightarrow{\sim} M^\Delta \otimes_{\mathscr{O}_\mathfrak{X}} N^\Delta, \tag{2.7.2.4}$$

$$(\mathrm{Hom}_A(M,N))^\Delta \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_\mathfrak{X}}(M^\Delta, N^\Delta). \tag{2.7.2.5}$$

De plus, l'application $u \mapsto u^{\Delta}$ est un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(M^{\Delta}, N^{\Delta}). \tag{2.7.2.6}$$

Les isomorphismes (2.7.2.4) et (2.7.2.5) sont des cas particuliers de (2.5.6.1) et (2.6.20.1). Comme $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ est un A-module cohérent, on peut lui appliquer (2.7.2.2), qui l'identifie à $\Gamma(\mathfrak{X}, (\mathrm{Hom}_A(M,N))^{\Delta})$, et utiliser (2.7.2.5), qui prouve que (2.7.2.6) est un isomorphisme.

Proposition 2.7.2.7. *Si A est un anneau idyllique, $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est un faisceau cohérent d'anneaux.*

Comme pour tout $f \in A$, $A_{\{f\}}$ est un anneau idyllique (2.6.12), on est ramené à prouver que le noyau de tout homomorphisme $v\colon \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}^n \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module de type fini. On a alors $v = u^{\Delta}$, où u est un A-homomorphisme $A^n \to A$ (2.7.2.6). Le noyau N de u est cohérent (1.10.3). On conclut de 2.7.2.1(ii) que le noyau de v est isomorphe à N^{Δ}, et qu'il est de type fini.

2.7.2.8. Les notations et hypothèses étant celles de 2.7.1, supposons de plus que J soit de type fini. Posons $\mathscr{J} = J^{\Delta}$, $A_n = A/J^{n+1}$ et $X_n = \mathrm{Spec}(A_n) = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$ pour $n \geq 0$ (2.1.11). Soit u_{mn} le morphisme de schémas $X_m \to X_n$ correspondant à l'homomorphisme canonique $A_n \to A_m$ pour $m \leq n$. Pour achever la démonstration de 2.7.2, il reste à établir la proposition suivante :

Proposition 2.7.2.9. *Soient A un anneau idyllique, J un idéal de définition de type fini de A, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent.*
(ii) *$\mathscr{F}$ est isomorphe à une limite projective* (2.1.38) *d'une suite $(\mathscr{F}_n)$ de $\mathscr{O}_{X_n}$-modules cohérents tels que $u_{mn}^*(\mathscr{F}_n) = \mathscr{F}_m$ pour $m \leq n$.*
(iii) *Il existe un A-module cohérent M tel que $\mathscr{F}$ soit isomorphe à M^{Δ}.*

Le système projectif $(\mathscr{F}_n)$ est alors isomorphe au système des $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{X_n}$.

Montrons d'abord que (iii) implique (i) : en effet, on a une suite exacte $A^p \to A^q \to M \to 0$ de A-modules, d'où l'on déduit (2.7.2.1) la suite exacte $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}^p \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}^q \to M^{\Delta} \to 0$; donc M^{Δ} est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent en vertu de 2.7.2.7.

Montrons ensuite que (i) implique (ii). Comme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est un faisceau d'anneaux cohérents (2.7.2.7) et que $\mathscr{J}^{n+1} = (J^{n+1})^{\Delta}$ est un idéal de type fini, donc cohérent, $\mathscr{F}_n = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{X_n}$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent (1.3.5), et donc un $\mathscr{O}_{X_n}$-module cohérent (1.3.6). Montrons que l'homomorphisme canonique $w\colon \mathscr{F} \to \varprojlim \mathscr{F}_n$ est bijectif. La question étant locale, remplaçant A par $A_{\{f\}}$ (2.6.12), on peut se borner au cas où $\mathscr{F}$ est conoyau d'un homomorphisme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}^p \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}^q$; cet homomorphisme est de la forme v^{Δ}, où v est un homomorphisme $A^p \to A^q$ de A-modules (2.7.2.6). Si on note N le conoyau de v, on a $\mathscr{F} \simeq N^{\Delta}$ en vertu de 2.7.2.1(ii). Il résulte alors de 2.5.2(iii) et des définitions que w est un isomorphisme.

Montrons enfin que (ii) implique (iii). Il résulte des hypothèses que $\mathscr{F}_n = \widetilde{M_n}$, où M_n est un A_n-module cohérent (1.4.3), et $M_m = M_n \otimes_{A_n} A_m$ pour $m \leq n$. En vertu de 1.10.11, la limite projective M du système projectif (M_n) est un A-module cohérent tel que $M_n = M \otimes_A A_n$ pour tout $n \geq 0$. Par suite, $\mathscr{F}$ est isomorphe à M^Δ, et $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_\mathfrak{X}} \mathscr{O}_{X_n}$ est isomorphe à $\mathscr{F}_n = \widetilde{M_n}$ en vertu de 2.5.2(iii).

Proposition 2.7.3. *Soient $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ un schéma formel affine globalement idyllique, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$-module cohérent, $\mathscr{G}$ un $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$-module, $M = \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{F})$, $N = \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{G})$. Alors l'application $u \mapsto \Gamma(\mathfrak{X}, u)$ est un isomorphisme bifonctoriel*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_\mathfrak{X}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(M, N). \tag{2.7.3.1}$$

En vertu de 2.7.2 et (2.7.2.2), M est un A-module cohérent et on a $\mathscr{F} = M^\Delta$. On a une suite exacte de A-modules $A^p \to A^q \to M \to 0$, d'où l'on déduit la suite exacte de $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$-modules $\mathscr{O}_\mathfrak{X}^p \to \mathscr{O}_\mathfrak{X}^q \to \mathscr{F} \to 0$ (2.7.2). Appliquant les foncteurs $\mathrm{Hom}_A(-, N)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_\mathfrak{X}}(-, \mathscr{G})$, on obtient un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_\mathfrak{X}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_\mathfrak{X}}(\mathscr{O}_\mathfrak{X}^q, \mathscr{G}) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_\mathfrak{X}}(\mathscr{O}_\mathfrak{X}^p, \mathscr{G}) \arrow[d, "\gamma"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M, N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(A^q, N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(A^p, N)
\end{tikzcd}$$

où les morphismes verticaux sont définis par l'évaluation en $\mathfrak{X}$. Comme β et γ sont clairement des isomorphismes, il en est de même de α.

Proposition 2.7.4. *Soient $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$ deux schémas formels affines globalement idylliques, $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme, N un B-module de type fini. Alors, il existe un isomorphisme canonique fonctoriel de $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$-modules*

$$f^*(N^\Delta) \xrightarrow{\sim} (N \otimes_B A)^\Delta.$$

En effet, il existe des idéaux de définition de type fini J (resp. K) de A (resp. B) tels que $KA \subset J$ (2.2.4), et la proposition n'est qu'un cas particulier de 2.5.11.

Corollaire 2.7.5. *Sous les hypothèses de* (2.7.4), *pour tout idéal de type fini $\mathfrak{b}$ de B, on a*

$$f^*(\mathfrak{b}^\Delta)\mathscr{O}_\mathfrak{X} = (\mathfrak{b}A)^\Delta.$$

Soit $j : \mathfrak{b} \to B$ l'injection canonique. Par définition, $f^*(\mathfrak{b}^\Delta)\mathscr{O}_\mathfrak{X}$ est l'image de l'homomorphisme $f^*(j^\Delta) : f^*(\mathfrak{b}^\Delta) \to \mathscr{O}_\mathfrak{X} = f^*(\mathscr{O}_\mathfrak{Y})$, qui s'identifie à

$$(j \otimes 1)^\Delta : (\mathfrak{b} \otimes_B A)^\Delta \to A^\Delta$$

d'après 2.7.4. Il résulte de 2.7.2.1 que l'image de $(j \otimes 1)^\Delta$ est $(\mathfrak{b}A)^\Delta$, d'où la conclusion.

2.7.6. Soient A un anneau idyllique, M un A-module cohérent, $f \in A$; posons $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ et $\mathscr{F} = M^\Delta$. En vertu de 2.5.1 et 1.10.12(iii), on a un isomorphisme fonctoriel de $A_{\{f\}}$-modules topologiques

$$\Gamma(\mathscr{D}(f), \mathscr{F}) = M_{\{f\}} \simeq M \otimes_A A_{\{f\}}. \tag{2.7.6.1}$$

Soient x un point de $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{p}$ l'idéal premier ouvert de A correspondant. Notons $\mathscr{O}_x$ (resp. $\mathscr{F}_x$) la fibre de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ (resp. $\mathscr{F}$) en x et $\kappa(x)$ le corps résiduel de $\mathscr{O}_x$. On déduit de (2.7.6.1), par passage à la limite inductive, un isomorphisme fonctoriel

$$\mathscr{F}_x \simeq M \otimes_A \mathscr{O}_x. \tag{2.7.6.2}$$

Compte tenu de 1.8.13, ce dernier induit un isomorphisme fonctoriel

$$\mathscr{F}_x \otimes_{\mathscr{O}_x} \kappa(x) \simeq M_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}}. \tag{2.7.6.3}$$

2.8 Modules cohérents sur les schémas formels idylliques

Proposition 2.8.1. *Si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel idyllique, alors $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est un faisceau d'anneaux cohérent*

En effet, le fait que $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ soit cohérent étant une question locale, on est ramené au cas d'un schéma formel affine globalement idyllique, et donc à 2.7.2.7.

Corollaire 2.8.2. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{A}$ un idéal de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$. Pour que $\mathscr{A}$ soit un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, il faut et il suffit qu'il soit un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module de type fini.*

En effet, tout sous-module de type fini d'un module cohérent est cohérent.

Proposition 2.8.3. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{A}$ un idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$. Si $\mathscr{A}$ contient un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$, alors $\mathscr{A}$ est un idéal ouvert cohérent.*

En effet, la question étant locale, on peut supposer $\mathfrak{X}$ formel affine globalement idyllique. La proposition résulte alors de 2.7.2.

Proposition 2.8.4. *Soient X un schéma, X' un sous-schéma fermé de X tels que la paire (X, X') soit idyllique* (2.6.17), *$\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module cohérent, $\widehat{X} = X_{/X'}$ le schéma formel complété de X le long de X', $\mathscr{F}_{/X'}$ le complété de $\mathscr{F}$ le long de X'. Alors $\mathscr{F}_{/X'}$ est un $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-module cohérent.*

En effet, la question étant locale, on peut supposer qu'il existe une suite exacte $\mathscr{O}_X^p \to \mathscr{O}_X^q \to \mathscr{F} \to 0$, ce qui entraîne que $\mathscr{F}_{/X'}$ est un $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-module de présentation finie (2.5.5), et donc cohérent (2.8.1).

Théorème 2.8.5. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}_n$ le schéma usuel $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$. On désigne par $u_{mn} \colon \mathfrak{X}_m \to \mathfrak{X}_n$ (pour $m \leq n$) et $u_n \colon \mathfrak{X}_n \to \mathfrak{X}$ les morphismes canoniques. Pour qu'un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module $\mathscr{F}$ soit cohérent, il faut et il suffit qu'il soit isomorphe à une limite projective d'une suite $(\mathscr{F}_n)$, où $\mathscr{F}_n$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$-module cohérent, tel que $u_{mn}^*(\mathscr{F}_n) = \mathscr{F}_m$ pour $m \leq n$* (2.1.38). *Le système projectif $(\mathscr{F}_n)$ est alors isomorphe au système des $u_n^*(\mathscr{F}) = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$.*

En effet, la question étant locale, on est ramené au cas d'un schéma formel affine globalement idyllique, et le théorème résulte alors de 2.7.2.9.

Proposition 2.8.6. *Sous les hypothèses de* (2.8.5), *si* $\mathscr{F}$ *et* $\mathscr{G}$ *sont deux* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$*-modules cohérents, l'application* $\theta \mapsto (u_n^*(\theta))$ *est un isomorphisme canonique fonctoriel de* $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$*-modules*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}}(\mathscr{F}_n, \mathscr{G}_n). \tag{2.8.6.1}$$

En outre, pour qu'un homomorphisme $\theta\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ *soit un épimorphisme, il faut et il suffit que l'homomorphisme correspondant* $\theta_0 = u_0^*(\theta)\colon \mathscr{F}_0 \to \mathscr{G}_0$ *le soit.*

Il résulte aussitôt de 2.8.5 que (2.8.6.1) est un isomorphisme. La deuxième proposition étant locale, on est ramené au cas d'un schéma formel affine globalement idyllique $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathscr{F} = M^{\Delta}$, $\mathscr{G} = N^{\Delta}$, $\theta = u^{\Delta}$, où M et N sont des A-modules cohérents et u un homomorphisme $M \to N$. Si l'on pose $u_0 = u \otimes_A (A/J)$, alors $\theta_0 = (u_0)^{\sim}$ en vertu de 2.5.2(iii). Comme θ et u (resp. θ_0 et u_0) sont simultanément surjectifs (2.7.2.1), l'assertion résulte de 1.8.5 et 1.10.2(ii).

Corollaire 2.8.7. *Les hypothèses étant celles de* (2.8.5), *soient de plus* $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ *deux* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$*-modules cohérents. Alors il existe des isomorphismes canoniques fonctoriels*

$$\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{G} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n (\mathscr{F}_n \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}} \mathscr{G}_n), \tag{2.8.7.1}$$

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}}(\mathscr{F}_n, \mathscr{G}_n). \tag{2.8.7.2}$$

L'isomorphisme (2.8.7.1) résulte de 2.8.5 et 1.3.5. L'isomorphisme (2.8.7.2) découle de (2.8.6.1) appliqué à des ouverts arbitraires de $\mathfrak{X}$.

2.8.8. On ignore si, lorsque $\mathfrak{X}$ est un schéma formel adique, le théorème 2.8.5 s'étend aux $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules *de présentation finie*. Toutefois, nous signalons le résultat suivant :

Proposition 2.8.9 ([28] 10.11.10). *Soient* $\mathfrak{X}$ *un schéma formel adique,* $\mathscr{J}$ *un idéal de définition de type fini de* $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}_n$ *le schéma usuel* $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$. *On désigne par* $u_{mn}\colon \mathfrak{X}_m \to \mathfrak{X}_n$ *(pour* $m \leq n$*) et* $u_n\colon \mathfrak{X}_n \to \mathfrak{X}$ *les morphismes canoniques. Pour qu'un* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$*-module* $\mathscr{E}$ *soit localement libre de type fini, il faut et il suffit qu'il soit limite projective d'une suite* $(\mathscr{E}_n)$, *où* $\mathscr{E}_n$ *est un* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$*-module localement libre de type fini et* $u_{mn}^*(\mathscr{E}_n) = \mathscr{E}_m$ *pour* $m \leq n$. *Le système projectif* $\mathscr{E}_n$ *est alors isomorphe au système des* $u_n^*(\mathscr{E}) = \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$.

2.8.10. Le théorème 2.8.5 montre qu'on peut considérer tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathscr{F}$ comme un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module topologique, en le considérant comme limite projective des faisceaux de groupes pseudo-discrets $\mathscr{F}_n$ ([28] 0.3.9.1). Il résulte alors de 2.8.6 que tout homomorphisme $u\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules est automatiquement continu ([28] 0.3.9.2).

2.8.11. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels idylliques, $\mathscr{G}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module cohérent. Comme $f^*(\mathscr{G})$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module de présentation finie, il est cohérent (1.3.10 et 2.8.1). Supposons de plus que f soit déployé, c'est à dire qu'il existe des idéaux de définition cohérents $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$ et $\mathscr{K}$ de $\mathfrak{Y}$ tels que $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathscr{J}$. Posons $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$, $\mathfrak{Y}_n = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}^{n+1})$, $\mathscr{G}_n = \mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_n}$ et soit $f_n\colon \mathfrak{X}_n \to \mathfrak{Y}_n$ le morphisme déduit de f. Compte tenu de (2.2.2.1), on a un isomorphisme canonique $f^*(\mathscr{G}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n} \simeq f_n^*(\mathscr{G}_n)$. Par suite, il résulte de 2.8.5 que $f^*(\mathscr{G})$ est isomorphe à la limite projective de la suite $(f_n^*(\mathscr{G}_n))$.

Proposition 2.8.12. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, $\mathscr{A}$ l'annulateur de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$. Alors $\mathscr{A}$ est cohérent, et les supports de $\mathscr{F}$ et de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}$ sont égaux.*

En effet, $\mathscr{A}$ est le noyau du morphisme canonique $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \to \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{F}, \mathscr{F})$; il est donc cohérent en vertu de 1.3.5 et 2.8.1. La seconde assertion étant locale, on peut supposer $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ formel affine globalement idyllique et $\mathscr{F} = M^{\Delta}$, où M est un A-module cohérent. On a alors $\mathscr{A} = \mathfrak{a}^{\Delta}$, où $\mathfrak{a}$ est l'annulateur de M dans A, en vertu de 2.7.2. Soit J un idéal de définition de type fini de A. D'après (2.7.6.3) et le lemme de Nakayama, le support de $\mathscr{F}$ est celui du module M/JM ; il est donc égal à $\mathrm{V}(J + \mathfrak{a})$ ([12] chap. II §4.4 cor. de prop. 18), et de même pour $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}$, d'où l'assertion.

2.8.13. Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, r un entier ≥ 0. Il existe alors un et un seul idéal cohérent $\mathrm{F}_r(\mathscr{F})$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, appelé le r-ième *idéal de Fitting* de $\mathscr{F}$, tel que pour tout ouvert formel affine globalement idyllique U de $\mathfrak{X}$, $\Gamma(U, \mathrm{F}_r(\mathscr{F}))$ soit le r-ième idéal de Fitting du $\Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-module $\Gamma(U, \mathscr{F})$ (1.7.2). Cela résulte par recollement à l'aide de 2.7.2 et (2.7.6.1).

Proposition 2.8.14. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique de schémas formels idylliques, $\mathscr{B}$ un idéal ouvert cohérent de $\mathfrak{Y}$. Alors $f^*(\mathscr{B})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est un idéal ouvert cohérent de $\mathfrak{X}$.*

En effet, $f^*(\mathscr{B})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent en vertu de 2.8.11, 2.8.1 et 1.3.4. Le fait qu'il soit ouvert est une question locale sur $\mathfrak{X}$ et sur $\mathfrak{Y}$; on peut donc supposer que $\mathscr{B}$ contient un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{Y}$. L'assertion recherchée résulte alors de 2.8.3.

Proposition 2.8.15. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, U un ouvert de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, $\mathscr{G}$ un sous-$(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|U)$-module cohérent de $\mathscr{F}|U$ tel que $(\mathscr{J}\mathscr{F})|U \subset \mathscr{G}$. Alors, il existe un sous-$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathscr{G}'$ de $\mathscr{F}$ tel que $\mathscr{G}'|U = \mathscr{G}$ et $\mathscr{J}\mathscr{F} \subset \mathscr{G}'$.*

Posons $\mathfrak{X}_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$, $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_0}$ et $\mathscr{G}_0 = \mathscr{G}/((\mathscr{J}\mathscr{F})|U)$, de sorte que $\mathscr{G}_0$ est un sous-$(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_0}|U)$-module de $\mathscr{F}_0|U$. L'espace sous-jacent à $\mathfrak{X}_0$ étant localement noethérien (2.6.6), il existe un sous-$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_0}$-module quasi-cohérent de type fini $\mathscr{G}_0'$ de $\mathscr{F}_0$ tel que $\mathscr{G}_0'|U = \mathscr{G}_0$, en vertu de ([28] 6.9.7). Comme $\mathscr{F}_0$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_0}$-module cohérent (2.8.1 et 1.3.6), il en est de même de $\mathscr{G}_0'$. Par suite

$\mathscr{G}'_0$ et $\mathscr{F}_0/\mathscr{G}'_0$ sont des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents (1.3.6). Le noyau $\mathscr{G}'$ du morphisme composé $\mathscr{F} \to \mathscr{F}_0 \to \mathscr{F}_0/\mathscr{G}'_0$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent qui répond à la question.

Corollaire 2.8.16. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, U un ouvert quasi-compact, $\mathscr{A}$ un idéal ouvert cohérent du schéma formel induit par $\mathfrak{X}$ sur U. Il existe alors un idéal ouvert cohérent $\mathscr{A}'$ de $\mathfrak{X}$ tel que $\mathscr{A}'|U = \mathscr{A}$.*

En effet, comme U est quasi-compact, il existe un idéal de définition cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$ tel que $(\mathscr{J}|U) \subset \mathscr{A}$. Appliquant 2.8.15 pour $\mathscr{F} = \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ et $\mathscr{G} = \mathscr{A}$, on obtient alors un idéal cohérent $\mathscr{A}'$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ tel que $\mathscr{A}'|U = \mathscr{A}$ et $\mathscr{J} \subset \mathscr{A}'$; donc $\mathscr{A}'$ est un idéal ouvert cohérent de $\mathfrak{X}$ (2.8.3).

2.8.17. Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel, $\mathscr{J}$ un idéal ouvert de $\mathfrak{X}$. Le support de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}$ est fermé dans $\mathfrak{X}$ ([28] 0.5.2.2) ; on le note $\mathrm{V}(\mathscr{J})$. Lorsque $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ est formel affine, $\mathscr{J} = J^{\Delta}$, où J est un idéal ouvert de A (2.1.10), et on a alors $\mathrm{V}(\mathscr{J}) = \mathrm{V}(J)$.

Proposition 2.8.18. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel adique quasi-compact, $\mathfrak{Y}$ un schéma formel idyllique quasi-compact, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique, $\mathscr{A}$ un idéal ouvert de type fini de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{B}$ un idéal ouvert de $\mathfrak{Y}$ tel que $f^*(\mathscr{B})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} = \mathscr{A}$. Alors, il existe un idéal ouvert cohérent $\mathscr{B}'$ de $\mathfrak{Y}$ contenu dans $\mathscr{B}$, tel que $f^*(\mathscr{B}')\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} = \mathscr{A}$ et $\mathrm{V}(\mathscr{B}') = \mathrm{V}(\mathscr{B})$ (2.8.17).*

Soient U l'ouvert complémentaire de $\mathrm{V}(\mathscr{B})$ dans $\mathfrak{Y}$, $\mathscr{K}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{Y}$ contenu dans $\mathscr{B}$, $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$, $\mathfrak{Y}_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{K})$, $f_0\colon \mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{Y}_0$ le morphisme déduit de f. L'espace sous-jacent à $\mathfrak{Y}_0$ est noethérien (2.6.6), et $\mathscr{B}/\mathscr{K}$ est un idéal quasi-cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_0}$ (2.1.10). Donc en vertu de ([28] 6.9.7), il existe un sous-$\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_0}$-module quasi-cohérent de type fini $\mathscr{L}$ de $\mathscr{B}/\mathscr{K}$ tel que $\mathscr{L}|U = \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_0}|U$. Compte tenu de ([28] 6.9.9), $\mathscr{B}/\mathscr{K}$ est limite inductive de ses sous-$\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_0}$-modules quasi-cohérents de type fini contenant $\mathscr{L}$. Un tel sous-module $\mathscr{I}$ est un idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_0}$ (2.8.1) tel que $\mathrm{V}(\mathscr{I}) = \mathrm{V}(\mathscr{B})$. Par ailleurs, on a $\mathscr{J} \subset \mathscr{A}$ et $f_0^*(\mathscr{B}/\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_0} = \mathscr{A}/\mathscr{J}$. Comme f_0^* commute aux limites inductives, on en déduit qu'il existe un idéal cohérent $\mathscr{I}$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_0}$, contenu dans $\mathscr{B}/\mathscr{K}$, tel que $f_0^*(\mathscr{I})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_0} = \mathscr{A}/\mathscr{J}$ et $\mathrm{V}(\mathscr{I}) = \mathrm{V}(\mathscr{B})$ ([28] 0.5.2.3). Le noyau $\mathscr{B}'$ du morphisme composé $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_0} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_0}/\mathscr{I}$ est un idéal ouvert cohérent de $\mathfrak{Y}$ (2.8.3), contenu dans $\mathscr{B}$, tel que $f^*(\mathscr{B}')\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} = \mathscr{A}$ et $\mathrm{V}(\mathscr{B}') = \mathrm{V}(\mathscr{B})$.

Proposition 2.8.19. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme fini et de présentation finie de schémas formels idylliques, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, $\mathscr{K}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{Y}$, $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$, $\mathfrak{Y}_n = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}^{n+1})$, $\mathscr{F}_n = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$ $(n \geq 0)$.*

(i) *Le $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module $f_*(\mathscr{F})$ est cohérent et, pour tout $n \geq 0$, l'homomorphisme canonique*

$$f_*(\mathscr{F}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_n} \to f_*(\mathscr{F}_n)$$

est bijectif ; en particulier, $f_*(\mathscr{F})$ est isomorphe à la limite projective de la suite $(f_*(\mathscr{F}_n))$.

(ii) *Soit* $g\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$ *un morphisme de schémas formels idylliques. On pose* $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}'$ *et on désigne par* $f'\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{Y}'$ *et* $g'\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ *les projections canoniques. Alors le morphisme de changement de base*

$$g^*(f_*(\mathscr{F})) \to f'_*(g'^*(\mathscr{F}))$$

est bijectif.

(i) L'isomorphisme canonique $\mathscr{F} \simeq \varprojlim \mathscr{F}_n$ (2.8.5) induit un isomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-modules

$$f_*(\mathscr{F}) \simeq \varprojlim f_*(\mathscr{F}_n).$$

Le morphisme $f_n\colon \mathfrak{X}_n \to \mathfrak{Y}_n$ déduit de f est fini et de présentation finie. Par suite, $f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n})$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_n}$-module de présentation finie ([28] 6.2.10), et donc cohérent. Comme f_n est affine, $f_*(\mathscr{F}_n)$ est un $f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n})$-module de présentation finie, et donc un $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_n}$-module cohérent (1.3.4). D'autre part, on a $f_*(\mathscr{F}_n) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_m} \simeq f_*(\mathscr{F}_m)$ pour tout $m \leq n$ ([28] 9.3.2). Donc la proposition résulte de 2.8.5.

(ii) Notons d'abord que f' est fini et de présentation finie (2.3.19 et 2.3.26), et $\mathfrak{X}'$ est idyllique (2.6.13). La question étant locale sur $\mathfrak{Y}$ et sur $\mathfrak{Y}'$, on peut se borner au cas où g est déployé (2.2.4). La proposition résulte alors de (i) et de l'assertion correspondante pour les schémas usuels ([28] 9.3.2) à l'aide de 2.2.15 et 2.8.11.

Corollaire 2.8.20. *Soient* $\mathscr{S}$ *un schéma formel idyllique,* $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ *un morphisme fini et de présentation finie,* $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathscr{S}$ *un morphisme adique. Alors on a une bijection canonique*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{X}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathscr{S}}\text{-}\mathrm{Alg}}(f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}), g_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})). \tag{2.8.20.1}$$

Soient $\mathscr{I}$ un idéal de définition cohérent de $\mathscr{S}$, $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{I})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathscr{K} = g^*(\mathscr{I})\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$, $\mathscr{S}_n = (\mathscr{S}, \mathscr{O}_{\mathscr{S}}/\mathscr{I}^{n+1})$, $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$ et $\mathfrak{Y}_n = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}^{n+1})$. On a un isomorphisme canonique de $\mathscr{O}_{\mathscr{S}}$-algèbres

$$g_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}) \simeq \varprojlim g_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_n})$$

qui induit, en vertu de 2.8.19(i), une bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathscr{S}}\text{-}\mathrm{Alg}}(f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}), g_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})) \simeq \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathscr{S}_n}\text{-}\mathrm{Alg}}(f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}), g_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_n})).$$

D'autre part, $\mathfrak{X}_n$ étant un $\mathscr{S}_n$-schéma affine (2.3.5), l'application canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}_n}(\mathfrak{Y}_n, \mathfrak{X}_n) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathscr{S}_n}\text{-}\mathrm{Alg}}(f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}), g_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_n}))$$

est bijective ([28] 9.1.5). Le corollaire s'ensuit en vertu de 2.2.14.

2.9 Sous-schémas des schémas formels idylliques

Proposition 2.9.1. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{A}$ un idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{Y}$ le support (fermé) de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}$, $\Psi\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ l'injection canonique.*

(i) *L'espace topologiquement annelé $(\mathfrak{Y}, \Psi^{-1}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}))$ est un schéma formel idyllique.*

(ii) *La flèche canonique $(\mathfrak{Y}, \Psi^{-1}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A})) \to (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ est un morphisme de présentation finie.*

(iii) *Si $\mathfrak{X}$ est localement noethérien (resp. noethérien), il en est de même de $(\mathfrak{Y}, \Psi^{-1}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}))$.*

(iv) *Supposons $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ affine globalement idyllique et $\mathscr{A} = \mathfrak{a}^{\Delta}$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal cohérent de A (2.7.2). Alors, l'algèbre topologique quotient $A/\mathfrak{a}$ est adique sur A, et $(\mathfrak{Y}, \Psi^{-1}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}))$ est canoniquement isomorphe à* $\mathrm{Spf}(A/\mathfrak{a})$ *au dessus de* $\mathrm{Spf}(A)$.

Notons d'abord que $\mathfrak{Y}$ est fermé ([28] 0.5.2.2). Soient $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}_n$ le schéma usuel $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$, v_{mn} le morphisme canonique $\mathfrak{X}_m \to \mathfrak{X}_n$ pour $m \leq n$. En vertu de 2.8.1 et 1.3.6, $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/(\mathscr{A} + \mathscr{J}^{n+1}) = (\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$-module cohérent ; il en est donc de même de $(\mathscr{A} + \mathscr{J}^{n+1})/\mathscr{J}^{n+1}$. Soient Y_n le sous-schéma fermé de $\mathfrak{X}_n$ défini par cet idéal, $i_n\colon Y_n \to \mathfrak{X}_n$ l'injection canonique. Pour $m \leq n$, $v_{mn} \circ i_m$ est majoré par i_n, puisque $v_{mn}^*((\mathscr{A} + \mathscr{J}^{n+1})/\mathscr{J}^{n+1})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_m} = (\mathscr{A} + \mathscr{J}^{m+1})/\mathscr{J}^{m+1}$. On en déduit un morphisme canonique $u_{mn}\colon Y_m \to Y_n$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} Y_m \arrow[r, "i_m"] \arrow[d, "u_{mn}"'] & \mathfrak{X}_m \arrow[d, "v_{mn}"] \\ Y_n \arrow[r, "i_n"] & \mathfrak{X}_n \end{tikzcd} \tag{2.9.1.1}$$

En fait, le diagramme (2.9.1.1) est cartésien ([28] 4.3.1) ; donc (Y_n) est un $(\mathfrak{X}_n)$-système inductif adique, et sa limite inductive est un $\mathfrak{X}$-schéma formel adique (2.2.14).

D'autre part, $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}$ est limite projective des faisceaux $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/(\mathscr{A} + \mathscr{J}^{n+1}) = (\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$ en vertu de 2.8.5. Il est clair que $\mathfrak{Y}$ contient l'espace sous-jacent à tous les Y_n. Si U désigne l'ouvert complémentaire de ce dernier dans $\mathfrak{X}$, alors $(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A})|U = 0$; en effet, la restriction à un ouvert commute aux limites projectives, car elle admet un adjoint à gauche, et $(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/(\mathscr{A} + \mathscr{J}^{n+1}))|U = 0$ par hypothèse. On en déduit que $\mathfrak{Y}$ est l'espace sous-jacent à tous les Y_n. Par suite, $(\mathfrak{Y}, \Psi^{-1}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}))$ est la limite inductive des Y_n (2.5.1.1), et le morphisme canonique $i\colon (\mathfrak{Y}, \Psi^{-1}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A})) \to (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ est la limite inductive des i_n ; donc i est un morphisme adique.

L'immersion fermée i_n est de présentation finie car $(\mathscr{A} + \mathscr{J}^{n+1})/\mathscr{J}^{n+1}$ est un idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$. La proposition (ii) s'ensuit, et entraîne (i) en vertu de 2.6.13, et (iii) en vertu de 2.3.14.

Montrons enfin (iv). La première assertion résulte de 1.10.2. Comme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A} = (A/\mathfrak{a})^{\triangle}$ en vertu de 2.7.2, la seconde assertion résulte de 2.7.2.9 et du fait que $(\mathfrak{Y}, \Psi^{-1}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}))$ est la limite inductive des Y_n.

On dira que $(\mathfrak{Y}, \Psi^{-1}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}))$ est le *sous-schéma* de $\mathfrak{X}$ défini par l'idéal cohérent $\mathscr{A}$.

Définition 2.9.2. On dit qu'un espace topologiquement annelé $(\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ est un *sous-schéma* d'un schéma formel idyllique $\mathfrak{X}$ si :

(a) $\mathfrak{Y}$ est un sous-espace localement fermé de $\mathfrak{X}$;
(b) si U désigne le plus grand ouvert de $\mathfrak{X}$ contenant $\mathfrak{Y}$ et tel que $\mathfrak{Y}$ soit fermé dans U, $(\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ est un sous-schéma de $(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|U)$ défini par un idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|U$.

On dit que le sous-schéma $(\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ de $\mathfrak{X}$ est *fermé* si $\mathfrak{Y}$ est fermé dans $\mathfrak{X}$.

On note $(\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ simplement par $\mathfrak{Y}$ lorsqu'aucune confusion n'est possible. On désigne par Ψ l'injection canonique $\mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ des espaces sous-jacents. On a donc un homomorphisme surjectif de faisceaux d'anneaux $\theta\colon \Psi^{-1}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \to \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$. On définit ainsi un morphisme de schémas formels $(\Psi, \theta)\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$, appelé *morphisme d'injection canonique.*

Définition 2.9.3. Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique. On dit qu'un morphisme de schémas formels $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ est une *immersion* (resp. une *immersion fermée*, resp. une *immersion ouverte*) s'il se factorise en

$$\mathfrak{Y} \xrightarrow{g} \mathfrak{Z} \xrightarrow{j} \mathfrak{X}$$

où g est un isomorphisme, $\mathfrak{Z}$ un sous-schéma (resp. un sous-schéma fermé, resp. un schéma formel induit sur un ouvert) de $\mathfrak{X}$ et j le morphisme d'injection canonique.

Proposition 2.9.4. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ une immersion. Alors f est de présentation finie ; en particulier, $\mathfrak{Y}$ est idyllique. Si en outre, f est une immersion fermée, alors f est fini.*

On peut évidemment se borner au cas où f est l'injection canonique d'un sous-schéma $\mathfrak{Y}$ de $\mathfrak{X}$. Si $\mathfrak{Y}$ est fermé dans $\mathfrak{X}$, la proposition résulte aussitôt de 2.9.1 et de sa preuve. Si $\mathfrak{Y}$ est le schéma formel induit sur un ouvert U de $\mathfrak{X}$, f est quasi-compact (2.6.6 et [28] 6.1.5(i)), et donc de présentation finie ([28] 6.3.8(i)). Le cas général s'obtient par composition.

Proposition 2.9.5. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ un morphisme de schémas formels, $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est une immersion (resp. une immersion ouverte, resp. une immersion fermée).*
(ii) *f est localement de présentation finie et, si l'on pose $\mathscr{K} = f^*(\mathscr{J})\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$, $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$ et $\mathfrak{Y}_n = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}^{n+1})$, le morphisme de schémas usuels*

$f_n\colon \mathfrak{Y}_n \to \mathfrak{X}_n$ déduit de f, est une immersion (resp. une immersion ouverte, resp. une immersion fermée) pour tout $n \geq 0$.

D'après la démonstration de 2.9.1, (i) entraîne (ii). Montrons la réciproque. Considérons d'abord le cas où les f_n sont des immersions ouvertes. L'espace sous-jacent à $\mathfrak{Y}$ est homéomorphe à un ouvert U de $\mathfrak{X}$, et f se factorise à travers un morphisme adique $g\colon \mathfrak{Y} \to (U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|U)$. Par suite, g est un isomorphisme en vertu de 2.2.14, d'où la proposition dans ce cas. Considérons ensuite le cas général. L'application $\Psi\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ induite par f sur les espaces sous-jacents est un homéomorphisme sur un sous-espace localement fermé de $\mathfrak{X}$. Soient U le plus grand ouvert de $\mathfrak{X}$ tel que $\Psi(\mathfrak{Y})$ soit fermé dans U, $g\colon \mathfrak{Y} \to (U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|U)$ le morphisme déduit de f. Comme g vérifie la condition (ii) en vertu de 2.3.18(iii), remplaçant f par g, on se réduit à la proposition suivante :

Proposition 2.9.6. *Sous les hypothèses de (2.9.5), pour que f soit une immersion fermée, il faut et il suffit que f soit localement de présentation finie et que f_0 soit une immersion fermée.*

Il n'y a que la suffisance de la condition à établir. On sait que $\mathfrak{Y}$ est idyllique (2.6.13) et f est un morphisme fini et de présentation finie (2.3.24). Donc $f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent (2.8.19), et l'homomorphisme $\theta\colon \mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \to f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ induit par f est surjectif (2.8.6). Par suite, le noyau $\mathscr{A}$ de θ est un idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$. Soient $\mathfrak{Z}$ le sous-schéma fermé de $\mathfrak{X}$ défini par l'idéal $\mathscr{A}$, $i\colon \mathfrak{Z} \to \mathfrak{X}$ le morphisme d'injection canonique. Il clair que $f(\mathfrak{Y}) = \mathfrak{Z}$, et l'isomorphisme $f^{-1}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}) \xrightarrow{\sim} f^{-1}f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$, composé de la flèche induite par θ et du morphisme d'adjonction, fournit un isomorphisme $h\colon \mathfrak{Y} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Z}$ tel que $f = i \circ h$.

Corollaire 2.9.7. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}_n$ le schéma usuel $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$. Pour qu'un idéal $\mathscr{A}$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ soit cohérent, il faut et il suffit qu'il soit limite projective d'une suite $(\mathscr{A}_n)$, où $\mathscr{A}_n$ est un idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$, tel que $\mathscr{A}_n\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_m} = \mathscr{A}_m$ pour $m \leq n$. On a alors $\mathscr{A}_n = \mathscr{A}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$ pour tout $n \geq 0$.*

Si $\mathscr{A}$ est cohérent, il est limite projective du système des $\mathscr{A}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$, en vertu de 2.8.5 et des suites exactes $0 \to \mathscr{A}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n} \to (\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n} \to 0$. Inversement, soient, pour tout $n \geq 0$, $\mathscr{A}_n$ un idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$, tels que $\mathscr{A}_n\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_m} = \mathscr{A}_m$ pour $m \leq n$. On note Y_n le sous-schéma de $\mathfrak{X}_n$ défini par l'idéal $\mathscr{A}_n$. Donc (Y_n) est un $(\mathfrak{X}_n)$-système inductif adique, et sa limite inductive $\mathfrak{Y}$ est un $\mathfrak{X}$-schéma adique (2.2.14). D'après 2.9.5, $\mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ est une immersion fermée. Soit $\mathscr{A}$ l'idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ défini par $\mathfrak{Y}$. Il résulte de la démonstration de 2.9.1 que $\mathscr{A}_n = \mathscr{A}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$, ce qui entraîne que $\mathscr{A}$ est la limite projective des $\mathscr{A}_n$.

Corollaire 2.9.8. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ un morphisme de schémas formels.*

(i) *Soit (V_λ) un recouvrement de $f(\mathfrak{Y})$ par des ouverts de $\mathfrak{X}$. Pour que f soit une immersion (resp. une immersion ouverte), il faut et il suffit que pour* *chaque λ, la restriction $f^{-1}(V_\lambda) \to V_\lambda$ de f soit une immersion (resp. une immersion ouverte).*

(ii) *Soit (U_λ) un recouvrement ouvert de $\mathfrak{X}$. Pour que f soit une immersion fermée, il faut et il suffit que pour chaque λ, la restriction $f^{-1}(U_\lambda) \to U_\lambda$ de f soit une immersion fermée.*

En effet, cela résulte de 2.9.5, 2.3.17 et des assertions correspondantes pour les schémas usuels ([28] 4.2.4).

Proposition 2.9.9. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels idylliques, $\mathfrak{Y}'$ un sous-schéma (resp. un sous-schéma fermé, resp. un schéma formel induit sur un ouvert) de $\mathfrak{Y}$, $j\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$ l'injection canonique. Alors :*

(i) *La projection $p\colon \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{X}$ est une immersion (resp. une immersion fermée, resp. une immersion ouverte), et le sous-schéma de $\mathfrak{X}$ associé à p (dit image réciproque de $\mathfrak{Y}'$ par f) a pour espace sous-jacent $f^{-1}(\mathfrak{Y}')$.*

(ii) *Si $\mathfrak{Y}'$ est un sous-schéma fermé de $\mathfrak{Y}$ défini par un idéal cohérent $\mathscr{B}$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$, alors le sous-schéma de $\mathfrak{X}$ image réciproque de $\mathfrak{Y}'$ par f est défini par l'idéal cohérent $f^*(\mathscr{B})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$.*

Les assertions étant locales sur $\mathfrak{X}$ et sur $\mathfrak{Y}$ (2.9.8), on peut se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$ sont formels affines globalement idylliques ; donc f est un morphisme déployé (2.2.4), associé à un homomorphisme continu $\varphi\colon B \to A$. La première assertion de (i) résulte de 2.9.5, 2.3.19, 2.2.15 et ([28] 4.3.1). Montrons ensuite (ii). Soient J un idéal de définition de type fini de A, $\mathfrak{b}$ l'idéal cohérent de B tel que $\mathscr{B} = \mathfrak{b}^\Delta$ (2.7.2). Alors $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}' = \mathrm{Spf}(A\widehat{\otimes}_B(B/\mathfrak{b}))$ et $A\widehat{\otimes}_B(B/\mathfrak{b}) \simeq A/\mathfrak{b}A$ puisque $A/\mathfrak{b}A$ est complet et séparé pour la topologie J-adique (1.8.8 et 1.10.2). Donc le sous-schéma de $\mathfrak{X}$ image réciproque de $\mathfrak{Y}'$ par f est défini par l'idéal $(\mathfrak{b}A)^\Delta$ (2.9.1). Mais $(\mathfrak{b}A)^\Delta = f^*(\mathfrak{b}^\Delta)\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ en vertu 2.7.5, d'où la proposition (ii). Enfin, (ii) implique la dernière assertion de (i).

Proposition 2.9.10. *Le composé de deux immersions (resp. de deux immersions fermées, resp. de deux immersions ouvertes) de schémas formels idylliques est une immersion (resp. une immersion fermée, resp. une immersion ouverte).*

En effet, cela résulte de 2.9.5, 2.3.18 et des assertions correspondantes pour les schémas usuels ([28] 4.3.6).

Proposition 2.9.11. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ deux morphismes de schémas formels idylliques vérifiant l'une des conditions suivantes :*

(i) *g est adique et f est localement de présentation finie.*

(ii) *g est localement de type fini.*

Alors si $g \circ f$ est une immersion (resp. une immersion fermée), f est une immersion (resp. une immersion fermée si g est séparé).

Lorsque $g \circ f$ est une immersion, (ii) implique (i) (2.3.18 et 2.9.4) ; on peut donc se borner au cas (i). La proposition résulte alors de 2.9.5, 2.3.2 et des assertions correspondantes pour les schémas usuels ([28] 4.3.6).

Proposition 2.9.12. *Soit $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme localement de présentation finie de schémas formels idylliques. Alors :*

(i) *Le morphisme diagonal $\Delta_f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{X}$ est une immersion de schémas formels idylliques.*

(ii) *Pour que f soit séparé* (2.3.1)*, il faut et il suffit que Δ_f soit une immersion fermée.*

Comme la première projection $\mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ est localement de présentation finie (2.3.19), $\mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{X}$ est idyllique (2.6.13), et la première proposition résulte de 2.9.11. La seconde proposition découle de la première et des définitions.

Proposition 2.9.13. *Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel idyllique quasi-compact, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ une immersion, $\mathscr{A}$ un idéal ouvert cohérent de $\mathfrak{X}$. Alors il existe un idéal ouvert cohérent $\mathscr{B}$ de $\mathfrak{Y}$ tel que $f^*(\mathscr{B})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} = \mathscr{A}$.*

On peut évidemment se borner au cas où $\mathfrak{X}$ est un sous-schéma de $\mathfrak{Y}$, f étant l'injection canonique. Si $\mathfrak{X}$ est le schéma formel induit sur un ouvert de $\mathfrak{Y}$, il est quasi-compact (2.9.4), et la proposition résulte de 2.8.16. Supposons que $\mathfrak{X}$ soit le sous-schéma de $\mathfrak{Y}$ défini par un idéal cohérent $\mathscr{I}$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$. Soient $\mathfrak{Z}$ le sous-schéma de $\mathfrak{X}$ défini par l'idéal $\mathscr{A}$, $i\colon \mathfrak{Z} \to \mathfrak{X}$ l'injection canonique. Le composé $f \circ i$ étant une immersion fermée (2.9.10), il définit un idéal cohérent $\mathscr{B}'$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$. On a clairement $\mathscr{I} \subset \mathscr{B}'$ et $f^*(\mathscr{B}')\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} = (\mathscr{B}'/\mathscr{I})|\mathfrak{X} = \mathscr{A}$ (2.9.9). D'autre part, il existe un idéal de définition cohérent $\mathscr{K}$ de $\mathfrak{Y}$ tel que $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathscr{A}$. Alors $\mathscr{B} = \mathscr{B}' + \mathscr{K}$ est un idéal ouvert cohérent de $\mathfrak{Y}$ (2.8.3) tel que $f^*(\mathscr{B})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} = \mathscr{A}$. Enfin, le cas d'un sous-schéma quelconque de $\mathfrak{Y}$ se déduit des deux cas précédents.

2.10 Clôture rigide d'un module

2.10.1. Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel adique, $\mathscr{J}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module. On appelle *clôture rigide* de $\mathscr{F}$, et l'on note $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ (cf. [31] 5.9), le $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module

$$\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{J}^n, \mathscr{F}). \tag{2.10.1.1}$$

Si $\mathscr{J}'$ est un second idéal de définition de type fini de $\mathfrak{X}$, il existe un recouvrement ouvert (U_λ) de $\mathfrak{X}$ et des entiers positifs (n_λ), tels que $\mathscr{J}^{n_\lambda}|U_\lambda \subset \mathscr{J}'|U_\lambda$ et $\mathscr{J}'^{n_\lambda}|U_\lambda \subset \mathscr{J}|U_\lambda$ pour tout λ. Donc les familles filtrantes décroissantes $\mathscr{J}^n|U_\lambda$ et $\mathscr{J}'^n|U_\lambda$ sont cofinales l'une de l'autre, ce qui prouve que $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ ne dépend pas de l'idéal de définition $\mathscr{J}$ à isomorphisme canonique près.

On a un homomorphisme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-linéaire canonique fonctoriel

$$c_{\mathscr{F}}\colon \mathscr{F} \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}). \tag{2.10.1.2}$$

On munit $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ d'une structure d'anneau en définissant le produit de deux morphismes $u\colon \mathscr{J}^n \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ et $v\colon \mathscr{J}^m \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ comme étant $u \circ (v|\mathscr{J}^{n+m})$;

l'homomorphisme $c_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}$ fait de $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ une $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbre et non seulement un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module. De même, on munit $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ d'une structure canonique de $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-module, compatible avec sa structure de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module.

La correspondance $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ est un foncteur de la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules dans la catégorie des $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-modules.

On peut préciser la terminologie et faire les remarques suivantes :

2.10.1.3. Le foncteur $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ est exact à gauche. En effet chacun des foncteurs $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{J}^n, \mathscr{F})$ est exact à gauche, et les limites inductives filtrantes commutent aux limites projectives finies.

2.10.1.4. On appelle *sous-module de torsion* (resp. *transformé strict*) de $\mathscr{F}$ et on note $\mathscr{F}_{\mathrm{tor}}$ (resp. $\overline{\mathscr{F}}$) le noyau (resp. l'image) de l'homomorphisme $c_{\mathscr{F}}$ (2.10.1.2). On dit que $\mathscr{F}$ est *rig-nul* (resp. *rig-pur*) si $\mathscr{F} = \mathscr{F}_{\mathrm{tor}}$ (resp. $\mathscr{F}_{\mathrm{tor}} = 0$) (cf. [31] 5.9.9).

2.10.1.5. Pour tout ouvert U de $\mathfrak{X}$, on a des isomorphismes fonctoriels $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})|U \simeq \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}|U)$ et $c_{\mathscr{F}}|U \simeq c_{\mathscr{F}|U}$; par suite, on a $\mathscr{F}_{\mathrm{tor}}|U = (\mathscr{F}|U)_{\mathrm{tor}}$.

2.10.1.6. Soient $u : \mathscr{J} \to \mathscr{F}$ un morphisme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-linéaire, $s \in \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}))$ la section correspondante. On vérifie immédiatement que $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(u) \colon \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{J}) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ est le morphisme $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-linéaire défini par s et l'isomorphisme canonique $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{J}) = \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$; en particulier, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \arrow[r, "s"] & \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) \\ \mathscr{J} \arrow[u, "i"] \arrow[r, "u"] & \mathscr{F} \arrow[u, "c_{\mathscr{F}}"'] \end{tikzcd}$$

où i est l'injection canonique est commutatif.

Proposition 2.10.2. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module, x un point de $\mathfrak{X}$. Alors :*

(i) *On a un isomorphisme canonique fonctoriel*

$$(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}))_x \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X},x}}(\mathscr{J}_x^n, \mathscr{F}_x). \tag{2.10.2.1}$$

(ii) *La fibre de $\mathscr{F}_{\mathrm{tor}}$ en x est le sous-module de $\mathscr{J}_x$-torsion de $\mathscr{F}_x$* (1.8.30).

La proposition (i) résulte de (1.3.12.1) et du fait que les foncteurs fibres commutent aux limites inductives ; et la proposition (ii) s'en déduit aussitôt.

Proposition 2.10.3. *Soient X un schéma, X' un sous-schéma fermé de X, défini par un idéal quasi-cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_X$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent. Suppo-*

sons la paire (X, X') *idyllique* (2.6.17). *Alors l'homomorphisme canonique*

$$\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{J}^n, \mathscr{F}) \to \mathscr{H}^0_{X/X'}(\mathscr{F}) \tag{2.10.3.1}$$

est bijectif ([31] 5.9.1).

Notons U l'ouvert $X - X'$ de X et $j\colon U \to X$ l'injection canonique, de sorte que $\mathscr{H}^0_{X/X'}(\mathscr{F}) = j_*(\mathscr{F}|U)$. Lorsque X est quasi-compact, le morphisme canonique

$$\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{J}^n, \mathscr{F}) \to \Gamma(U, \mathscr{F}) \tag{2.10.3.2}$$

est bijectif en vertu de 1.8.34, 1.12.16(i) et 2.6.18.

D'autre part, $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{J}^n, \mathscr{F})$ est le faisceau associé au préfaisceau

$$V \mapsto \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_V}(\mathscr{J}^n|V, \mathscr{F}|V). \tag{2.10.3.3}$$

Par suite, l'isomorphisme (2.10.3.2), appliqué à la restriction de la situation à des ouverts quasi-compacts de X, montre que (2.10.3.1) est un isomorphisme.

Corollaire 2.10.4. *Soient* X *un schéma,* X' *un sous-schéma fermé de* X*, défini par un idéal quasi-cohérent* $\mathscr{J}$ *de* $\mathscr{O}_X$*,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_X$*-module quasi-cohérent,* $\widehat{X} = X_{/X'}$ *le schéma formel complété de* X *le long de* X'*,* $i\colon \widehat{X} \to X$ *le morphisme canonique d'espaces annelés* (2.5.3). *Supposons la paire* (X, X') *idyllique. Alors on a un* $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$*-morphisme canonique fonctoriel*

$$i^*(\mathscr{H}^0_{X/X'}(\mathscr{F})) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}_{/X'}), \tag{2.10.4.1}$$

qui est un isomorphisme si $\mathscr{F}$ *est de type fini.*

On a un morphisme canonique fonctoriel de $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-modules

$$i^*(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{J}^n, \mathscr{F})) \to \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\widehat{X}}}((\mathscr{J}_{/X'})^n, \mathscr{F}_{/X'}), \tag{2.10.4.2}$$

qui est un isomorphisme si $\mathscr{F}$ est de type fini. En effet, cela résulte de 2.5.5(ii) et ([28] 0.5.7.6), car i est plat (2.6.19) et $\mathscr{J}$ est de présentation finie (2.6.18). D'autre part, on a un isomorphisme canonique (2.10.3.1)

$$i^*(\mathscr{H}^0_{X/X'}(\mathscr{F})) \to i^*(\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{J}^n, \mathscr{F})) \tag{2.10.4.3}$$

Il suffit alors de définir le morphisme (2.10.4.1) comme le composé du morphisme (2.10.4.3) et de la limite inductive des morphismes (2.10.4.2), puisque i^* commute aux limites inductives.

Proposition 2.10.5. *Soient A un anneau idyllique, J un idéal de définition de type fini de A, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(A)$, U l'ouvert $X - \mathrm{V}(J)$ de X, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module, $M = \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{F})$. Alors on a des isomorphismes canoniques*

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})) &\simeq \Gamma(U, \widetilde{M}), & (2.10.5.1)\\ \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_{\mathrm{tor}}) &= M_{\mathrm{tor}}. & (2.10.5.2)\end{aligned}$$

En effet, en vertu de 2.6.10 et 2.7.3, on a

$$\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})) \simeq \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Hom}_A(J^n, M).$$

L'isomorphisme (2.10.5.1) résulte alors de 1.8.34, 1.10.2(i) et 1.10.3(i) ; et l'égalité (2.10.5.2) s'en déduit par 1.8.30.2.

Corollaire 2.10.6. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{A}$ une $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbre. Alors $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{A})$ est une $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-algèbre et non seulement un $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-module, et le morphisme $c_{\mathscr{A}}$* (2.10.1.2) *est un homomorphisme d'anneaux.*

Soit $\mathfrak{B}$ la base pour la topologie de $\mathfrak{X}$ formée des ouverts formels affines globalement idylliques (2.6.15). Il résulte de (2.10.5.1) que $U \mapsto \Gamma(U, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{A}))$ est un faisceau de $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-algèbres sur $\mathfrak{B}$ dans le sens de ([28] 3.2.1). Par suite, le faisceau (ordinaire) correspondant, qui s'identifie canoniquement à $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{A})$, est un faisceau de $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-algèbres. D'autre part, $c_{\mathscr{A}}$ est clairement un homomorphisme de faisceaux d'anneaux sur $\mathfrak{B}$, d'où la seconde assertion.

Corollaire 2.10.7. *Soient A un anneau, J un idéal de type fini de A, M un A-module, $X = \mathrm{Spec}(A)$, $X' = \mathrm{Spec}(A/J)$, U l'ouvert $X - X'$ de X, $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, $\widehat{X} = X_{/X'}$ le schéma formel complété de X le long de X', $\widehat{A}$ (resp. $\widehat{M}$) le séparé complété de A (resp. M) pour la topologie J-préadique, $\mathscr{G}$ le $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent associé à $\widehat{M}$. Supposons la paire (X, X') idyllique. Alors on a des isomorphismes canoniques*

$$\begin{aligned} \Gamma(\widehat{X}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}_{/X'})) &\simeq \Gamma(U, \mathscr{G}), & (2.10.7.1)\\ \Gamma(\widehat{X}, (\mathscr{F}_{/X'})_{\mathrm{tor}}) &= (\widehat{M})_{\mathrm{tor}}. & (2.10.7.2)\end{aligned}$$

Si, en outre, M est de type fini sur A, on a un isomorphisme canonique

$$\Gamma(U, \mathscr{G}) \simeq \Gamma(U, \mathscr{F}) \otimes_A \widehat{A}. \qquad (2.10.7.3)$$

On notera d'abord que $\widehat{A}$ est un anneau idyllique (2.6.12) et que $\Gamma(\widehat{X}, \mathscr{F}_{/X'}) = \widehat{M}$. Donc la première assertion est une conséquence immédiate de 2.10.5. Supposons M de type fini sur A. Soient f_i $(1 \leq i \leq r)$ des éléments de A qui engendrent J, de sorte que $\mathfrak{U} = (\mathrm{D}(f_i))$ est un recouvrement ouvert de U. On a $\Gamma(U, \mathscr{G}) = \mathrm{H}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{G})$ et $\Gamma(U, \mathscr{F}) = \mathrm{H}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$, où $\mathrm{H}^0(\mathfrak{U}, -)$ désigne la cohomologie de Čech relativement à $\mathfrak{U}$ ([30] 1.4.1). Comme $\widehat{A}$ est A-plat (1.12.17) et que $\widehat{M} \simeq M \otimes_A \widehat{A}$ (1.12.16), on a un isomorphisme canonique $\mathrm{H}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{G}) \simeq \mathrm{H}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \otimes_A \widehat{A}$; d'où l'isomorphisme (2.10.7.3).

Corollaire 2.10.8. *Soient X un schéma, X' un sous-schéma fermé de X, défini par un idéal quasi-cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_X$, $\widehat{X} = X_{/X'}$ le schéma formel complété de X le long de X', $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ une suite exacte de $\mathscr{O}_X$-modules quasi-cohérents telle que $\mathscr{F}$ soit de type fini. Supposons la paire (X, X') idyllique. Alors la suite*

$$0 \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}'_{/X'}) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}_{/X'}) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}''_{/X'}) \tag{2.10.8.1}$$

est exacte.

Si, en outre, $\mathscr{J}$ est localement monogène, la suite

$$0 \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}'_{/X'}) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}_{/X'}) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}''_{/X'}) \to 0 \tag{2.10.8.2}$$

est exacte.

Soit $V = \mathrm{Spec}(A)$ un ouvert affine de X. On a $\mathscr{J}|V = \widetilde{J}$, où J est un idéal de type fini de A, $\mathscr{F}|V = \widetilde{M}$, $\mathscr{F}'|V = \widetilde{M}'$, $\mathscr{F}''|V = \widetilde{M}''$, où M, M', M'' sont trois A-modules tels que M soit de type fini et que la suite $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ soit exacte. On en déduit par complétion J-préadique une suite exacte $0 \to \widehat{M}' \to \widehat{M} \to \widehat{M}'' \to 0$ (1.8.26(i) et 1.12.16(i)). Il résulte alors de (2.10.7.1) que la suite

$$0 \to \Gamma(X' \cap V, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}'_{/X'})) \to \Gamma(X' \cap V, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}_{/X'})) \to \Gamma(X' \cap V, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}''_{/X'}))$$

est exacte ; donc la suite (2.10.8.1) est exacte. Si J est monogène, le schéma $V - \mathrm{V}(J)$ est affine et la suite

$$0 \to \Gamma(X' \cap V, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}'_{/X'})) \to \Gamma(X' \cap V, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}_{/X'})) \to \Gamma(X' \cap V, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}''_{/X'})) \to 0$$

est exacte, d'où la dernière assertion.

Proposition 2.10.9. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ deux $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules, $u \colon \mathscr{F} \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G})$ un morphisme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-linéaire.*

(i) *Si $\mathfrak{X}$ est quasi-compact et si $\mathscr{F}$ est de type fini, il existe un idéal de définition cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$ tel que $u(\mathscr{J}\mathscr{F})$ soit contenu dans l'image du morphisme canonique $c_{\mathscr{G}}$* (2.10.1.2).

(ii) *Si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont cohérents, il en est de même de* $\ker(u)$.

(i) La question étant locale, on peut supposer que l'on a un morphisme surjectif $v : \mathscr{O}^n_{\mathfrak{X}} \to \mathscr{F}$; le composé uv est défini par n sections $s_1, \dots, s_n \in \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G}))$. D'après 2.6.10, il existe un idéal de définition cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$ et des homomorphismes $u_i : \mathscr{J} \to \mathscr{G}$ qui définissent les s_i. L'assertion résulte alors de la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}^n \arrow[r, "v"] & \mathscr{F} \arrow[r, "u"] & \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G}) \\ \oplus_{i=1}^n \mathscr{J} \arrow[u, "i"] \arrow[rr, "\sum_i u_i"] & & \mathscr{G} \arrow[u, "c_{\mathscr{G}}"'] \end{tikzcd}$$

où i est la flèche canonique (2.10.1.6).

(ii) La question étant locale, on peut se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ est formel affine globalement idyllique, $\mathscr{F} = M^\Delta$ et $\mathscr{G} = N^\Delta$, où M et N sont des A-modules cohérents. Soit J un idéal de définition cohérent de A. D'après (2.10.5.1), u induit un morphisme A-linéaire

$$\Gamma(\mathfrak{X}, u) \colon M \to \Gamma(\mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J), \widetilde{N}).$$

En vertu de 1.9.14, le noyau P de $\Gamma(\mathfrak{X}, u)$ est un A-module de type fini, donc cohérent (en tant que sous-module de M). Montrons que $\ker(u) \simeq P^\Delta$ (ce qui prouvera la proposition). Pour tout $f \in A$, u induit un morphisme $A_{\{f\}}$-linéaire :

$$\Gamma(\mathscr{D}(f), u) \colon M_{\{f\}} \to \Gamma(\mathrm{Spec}(A_{\{f\}}) - \mathrm{V}(JA_{\{f\}}), (N_{\{f\}})^\sim).$$

On a $M_{\{f\}} \simeq M \otimes_A A_{\{f\}}$, $N_{\{f\}} \simeq N \otimes_A A_{\{f\}}$ et $P_{\{f\}} \simeq P \otimes_A A_{\{f\}}$ (1.12.16). Comme $A_{\{f\}}$ est A-plat (1.12.6), $\Gamma(\mathscr{D}(f), u)$ s'identifie à $\Gamma(\mathfrak{X}, u) \otimes_A A_{\{f\}}$ ([30] 1.4.1). On en déduit que l'on a $\Gamma(\mathscr{D}(f), \ker(u)) \simeq P_{\{f\}}$, d'où l'assertion.

Proposition 2.10.10. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module. Considérons les conditions suivantes :*

(i) $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) = 0$.
(ii) $\mathscr{F}$ *est rig-nul* (2.10.1.4).
(iii) $\mathscr{J}\mathscr{F} = 0$ *pour un idéal de définition cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$.*

Alors (iii)$\Rightarrow$(i)$\Leftrightarrow$(ii)*. De plus, si $\mathfrak{X}$ est quasi-compact et si $\mathscr{F}$ est de type fini, les trois conditions sont équivalentes.*

On a clairement (iii)$\Rightarrow$(i)$\Rightarrow$(ii). Supposons $\mathscr{F}$ rig-nul. Soient U un ouvert formel affine globalement idyllique de $\mathfrak{X}$, $M = \Gamma(U, \mathscr{F})$. On a alors $M = M_{\mathrm{tor}}$ (2.10.5.2) et par suite $\Gamma(U, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})) = 0$ (2.10.5.1) ; d'où l'implication (ii)$\Rightarrow$(i).

Supposons que $\mathfrak{X}$ soit quasi-compact, que $\mathscr{F}$ soit de type fini et que $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) = 0$. Montrons qu'il existe un idéal de définition cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$ tel que l'image de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{J}, \mathscr{F})$ soit nulle (ce qui impliquera que $\mathscr{J}\mathscr{F} = 0$). La question étant locale, on peut se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ est affine globalement idyllique et $\mathscr{F}$ est engendré par des sections $x_1, \ldots, x_m$ de $M = \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{F})$. Compte tenu de 2.6.10, il existe un idéal de définition de type fini J de A tel que l'image de chacun des x_i dans $\mathrm{Hom}_A(J, M)$ soit nulle, ce qui démontre notre assertion.

Corollaire 2.10.11. *Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique. Alors tout sous-$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module (resp. tout quotient) d'un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module rig-nul est rig-nul.*

L'assertion non respée résulte de 2.10.1.3 et 2.10.10. L'assertion respée est une conséquence immédiate de la définition (2.10.1.4).

Corollaire 2.10.12. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module. Alors :*

(i) *$\mathscr{F}_{\mathrm{tor}}$ est le plus grand sous-module rig-nul de $\mathscr{F}$.*
(ii) *Le transformé strict $\overline{\mathscr{F}}$ de $\mathscr{F}$ est le plus grand quotient rig-pur de $\mathscr{F}$.*
(iii) *Pour tout sous-module rig-nul $\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}$, le morphisme surjectif canonique $\mathscr{F} \to \mathscr{F}/\mathscr{G}$ induit un isomorphisme entre les transformés stricts.*

Pour (i), il suffit d'observer que $\mathscr{F}_{\mathrm{tor}}$ est rig-nul en vertu de (2.10.5.2). L'assertion (iii) résulte du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{G} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{F}/\mathscr{G} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) \arrow[r] & \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}/\mathscr{G}) &
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes (2.10.1.3 et 2.10.10). Si on prend $\mathscr{G} = \mathscr{F}_{\mathrm{tor}}$, le diagramme ci-dessus montre que $\overline{\mathscr{F}}$ est rig-pur, d'où l'assertion (ii).

Proposition 2.10.13. *Soient A un anneau idyllique, M un A-module de type fini, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$; alors $(M^{\Delta})_{\mathrm{tor}} = (M_{\mathrm{tor}})^{\Delta}$.*

Supposons d'abord que M soit rig-pur (resp. rig-nul). Pour tout $f \in A$, on a $\Gamma(\mathscr{D}(f), (M^{\Delta})_{\mathrm{tor}}) = (M_{\{f\}})_{\mathrm{tor}}$ (2.10.5.2). Par ailleurs, on a un isomorphisme $M_{\{f\}} \simeq M \otimes_A A_{\{f\}}$ (1.12.16) et $A_{\{f\}}$ est A-plat (1.12.6). On en déduit que $M_{\{f\}}$ est rig-pur (resp. rig-nul), d'où la proposition.

Considérons ensuite le cas général. On sait que M_{tor} est de type fini (1.10.2) ; posons $\overline{M} = M/M_{\mathrm{tor}}$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (M_{\mathrm{tor}})^{\Delta} \arrow[r] \arrow[d] & M^{\Delta} \arrow[r] \arrow[d, "c_{M^{\Delta}}"] & \overline{M}^{\Delta} \arrow[r] \arrow[d, "c_{\overline{M}^{\Delta}}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(M^{\Delta}) \arrow[r] & \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\overline{M}^{\Delta}) &
\end{tikzcd}$$

Compte tenu de ce qui a été vu précédemment, et en vertu de 2.7.2.1(ii), 2.10.1.3 et 2.10.10, les lignes de ce diagramme sont exactes et le morphisme $c_{\overline{M}^{\Delta}}$ est injectif, d'où la proposition.

Corollaire 2.10.14. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Alors $\mathscr{F}_{\mathrm{tor}}$ et $\overline{\mathscr{F}}$ sont cohérents.*

En effet, il suffit de montrer que $\mathscr{F}_{\mathrm{tor}}$ est cohérent (1.3.4), ce qui résulte de 2.10.13 et 1.10.3(iii).

Corollaire 2.10.15. *Pour qu'un schéma formel idyllique $\mathfrak{X}$ soit rig-pur, il faut et il suffit que $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ soit rig-pur. En particulier, pour qu'un schéma formel affine globalement idyllique $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ soit rig-pur, il faut et il suffit que A soit rig-pur.*

Si $\mathfrak{X}$ est rig-pur, $(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})_{\mathrm{tor}} = 0$ en vertu de 2.10.13. Inversement, si $(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})_{\mathrm{tor}} = 0$, $\mathfrak{X}$ est rig-pur en vertu de (2.10.5.2).

Définition 2.10.16. On appelle *transformé strict* d'un schéma formel idyllique $\mathfrak{X}$ le sous-schéma fermé défini par l'idéal cohérent $(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})_{\mathrm{tor}}$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$.

Proposition 2.10.17. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique de schémas formels idylliques, $\mathfrak{Y}'$ le transformé strict de $\mathfrak{Y}$, $j\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$ l'injection canonique. Si $\mathfrak{X}$ est rig-pur, f se factorise uniquement en*

$$\mathfrak{X} \xrightarrow{g} \mathfrak{Y}' \xrightarrow{j} \mathfrak{Y},$$

où g est un morphisme adique. De plus, si f est localement de présentation finie (resp. de présentation finie), il en est de même de g.

La première assertion étant locale sur $\mathfrak{X}$ et sur $\mathfrak{Y}$, on peut se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B)$ et $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A)$ sont formels affines globalement idylliques et f est associé à un homomorphisme adique $\varphi\colon A \to B$. Alors $\mathfrak{Y}'$ est le sous-schéma fermé de $\mathfrak{Y}$ défini par l'idéal cohérent A_{tor} (2.10.13). Comme $B_{\mathrm{tor}} = 0$ (2.10.15), φ induit un homomorphisme adique $\varphi'\colon A/A_{\mathrm{tor}} \to B$, d'où la première assertion. La seconde assertion résulte de 2.3.18 et 2.6.8.

Proposition 2.10.18. *Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique ayant localement un idéal de définition monogène. Alors le foncteur $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ est exact.*

La question étant locale (2.10.1.5), on peut supposer que $\mathfrak{X}$ admet un idéal de définition localement monogène $\mathscr{J}$. Soient $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module, x un point de $\mathfrak{X}$. On a un isomorphisme canonique fonctoriel (2.10.2.1)

$$(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}))_x \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X},x}}(\mathscr{J}_x^n, \mathscr{F}_x).$$

D'autre part, le sous-module de $\mathscr{J}_x$-torsion de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X},x}$ est de type fini d'après 2.10.2(ii) et 2.10.14. Donc en vertu de 1.8.34(a), si t est un générateur de $\mathscr{J}_x$, on a un isomorphisme canonique fonctoriel

$$\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X},x}}(\mathscr{J}_x^n, \mathscr{F}_x) \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}_x[t^{-1}].$$

On en déduit que le foncteur $\mathscr{F} \mapsto (\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}))_x$ est exact ; d'où la proposition.

Corollaire 2.10.19. *Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique ayant localement un idéal de définition monogène.*

(i) *Pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathscr{F}$, l'homomorphisme*

$$\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) \tag{2.10.19.1}$$

déduit de $c_{\mathscr{F}}$ (2.10.1.2) est bijectif.

(ii) *Soient $u : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents, $v : \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G})$ un homomorphisme $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-linéaire tels que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) \arrow[r, "v"] & \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G}) \\ \mathscr{F} \arrow[u, "c_{\mathscr{F}}"] \arrow[r, "u"] & \mathscr{G} \arrow[u, "c_{\mathscr{G}}"'] \end{tikzcd}$$

soit commutatif; alors $v = \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(u)$.

(i) La question étant locale sur $\mathfrak{X}$, on peut supposer que l'on a une suite exacte de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules $\mathscr{O}^q_{\mathfrak{X}} \to \mathscr{O}^p_{\mathfrak{X}} \to \mathscr{F} \to 0$, auquel cas la conclusion résulte de 2.10.18.

(ii) Cela résulte aussitôt de (i).

Corollaire 2.10.20. *Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique ayant localement un idéal de définition monogène. Alors $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ est $\mathfrak{X}$-plat.*

En effet, $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ étant cohérent (2.8.1), on se ramène à vérifier la condition 1.3.17(ii) pour tout ouvert de $\mathfrak{X}$. Il suffit alors de montrer que le foncteur $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ est exact en $\mathscr{F}$ dans la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents, ce qui résulte de 2.10.18 et 2.10.19(i).

Corollaire 2.10.21. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique ayant localement un idéal de définition monogène, $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents. Alors il existe des isomorphismes canoniques fonctoriels*

$$\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) \otimes_{\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})} \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G}), \tag{2.10.21.1}$$

$$\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{F},\mathscr{G})) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}om_{\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}), \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G})). \tag{2.10.21.2}$$

En effet, l'isomorphisme (2.10.21.1) résulte de 2.10.19(i), et l'isomorphisme (2.10.21.2) de 2.10.19(i), 2.10.20 et ([28] 0.5.7.6).

Proposition 2.10.22. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $u\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules.*

(i) *Supposons $\mathscr{G}$ de type fini. Alors si $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(u)$ est un isomorphisme, le noyau et le conoyau de u sont rig-nuls.*

(ii) *Supposons que $\mathfrak{X}$ admette localement un idéal de définition monogène. Alors si le noyau et le conoyau de u sont rig-nuls, $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(u)$ est un isomorphisme.*

(i) On peut clairement se borner au cas où $\mathfrak{X}$ est quasi-compact. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{F}_{\mathrm{tor}} \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & \mathscr{F} \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & \overline{\mathscr{F}} \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{G}_{\mathrm{tor}} \arrow[r] & \mathscr{G} \arrow[r] & \overline{\mathscr{G}} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où v et w sont déduits de u. Il résulte de 2.10.11 et 2.10.12(i) que $\ker(v)$ et $\operatorname{coker}(v)$ sont rig-nuls. D'autre part, il résulte des hypothèses que w est injectif. Appliquons 2.10.9(i) au morphisme $a = (\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(u))^{-1} \circ i \colon \overline{\mathscr{G}} \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$, où $i \colon \overline{\mathscr{G}} \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G})$ est l'injection canonique. On en déduit qu'il existe un idéal de définition cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$ tel que $a(\mathscr{J}\overline{\mathscr{G}}) \subset c_{\mathscr{F}}(\mathscr{F})$. Par suite, $\mathscr{J}\operatorname{coker}(w) = 0$, d'où la proposition.

(ii) Cela résulte de 2.10.10 et 2.10.18.

Corollaire 2.10.23. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module. Alors :*

(i) *L'homomorphisme canonique $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{J}\mathscr{F}) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ est bijectif.*

(ii) *Si $\mathfrak{X}$ admet localement un idéal de définition monogène, l'homomorphisme canonique $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\overline{\mathscr{F}})$ est bijectif.*

L'assertion (i) résulte de 2.10.1.3, et l'assertion (ii) de 2.10.12(i) et 2.10.22(ii).

Proposition 2.10.24. *Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique ayant localement un idéal de définition monogène.*

(i) *Pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathscr{F}$, $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ est un $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-module cohérent.*

(ii) *Si $\mathfrak{X}$ est quasi-compact, tout $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-module cohérent F est de la forme $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ pour un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathscr{F}$.*

(iii) *Si $\mathfrak{X}$ est quasi-compact, toute suite exacte courte de $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-modules cohérents est la "clôture rigide" d'une suite exacte courte de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents.*

(i) Il résulte de 2.10.1.5 et 2.10.18 que $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ est un $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-module de type fini. Il suffit clairement de montrer que pour tout homomorphisme $u \colon \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})^n \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$, $\ker(u)$ est de type fini. On peut se borner au cas où $\mathfrak{X}$ est quasi-compact. Soient $x_i \in \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}))$ $(1 \leq i \leq n)$ les sections définies par u. D'après 2.6.10, chaque x_i est défini par un homomorphisme $v_i : \mathscr{J} \to \mathscr{F}$ où $\mathscr{J}$ est un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$. Si l'on pose $v = \sum_{i=1}^n v_i \colon \oplus_{i=1}^n \mathscr{J} \to \mathscr{F}$, on a $u = \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(v)$ (2.10.1.6). On en déduit, en vertu de 2.10.18, que $\ker(u) = \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\ker(v))$ et qu'il est de type fini.

(ii) Il existe un recouvrement ouvert fini $(U_i)_{i\in I}$ de $\mathfrak{X}$ tel que, pour tout $i \in I$, si l'on pose $\mathfrak{X}_i = (U_i, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|U_i)$, on ait une suite exacte

$$\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_i})^{n_i} \xrightarrow{u_i} \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_i})^{m_i} \longrightarrow F|U_i \longrightarrow 0\ .$$

D'après la preuve de (i), il existe un idéal de définition cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$ et, pour tout $i \in I$, un homomorphisme $v_i\colon \oplus_{k=1}^{n_i} (\mathscr{J}|U_i) \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_i}^{m_i}$ tel que $u_i = \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(v_i)$. Le conoyau $\mathscr{F}_i$ de v_i est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_i}$-module cohérent, et en vertu de 2.10.18, on a un isomorphisme de $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_i})$-modules

$$F|U_i \quad \simeq \quad \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}_i). \tag{2.10.24.1}$$

Nous allons construire $\mathscr{F}$ par recollement en procédant par récurrence sur le cardinal de I ; on se réduit aussitôt au cas où $I = \{1, 2\}$. Remplaçant $\mathscr{F}_i$ par son transformé strict, on peut le supposer rig-pur (2.10.12, 2.10.14 et 2.10.23). On pose $U = U_1 \cap U_2$, $\mathfrak{Y} = (U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|U)$, $\mathscr{F}_{1,2} = \mathscr{F}_1|U$ et $\mathscr{F}_{2,1} = \mathscr{F}_2|U$. On déduit de (2.10.24.1) un isomorphisme de $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$-modules

$$v\colon \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}_{1,2}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}_{2,1}). \tag{2.10.24.2}$$

D'après 2.10.9(i), il existe un entier $n \geq 1$ tel que $v(\mathscr{J}^n\mathscr{F}_{1,2}) \subset \mathscr{F}_{2,1} \subset \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}_{2,1})$. Remplaçant $\mathscr{F}_1$ par $\mathscr{J}^n\mathscr{F}_1$, ce qui est permis en vertu de 2.10.23(i), on peut supposer $v(\mathscr{F}_{1,2}) \subset \mathscr{F}_{2,1}$. Par suite, v induit un morphisme injectif $u\colon \mathscr{F}_{1,2} \to \mathscr{F}_{2,1}$. D'après 2.10.9(i), il existe un entier $m \geq 0$ tel que $v^{-1}(\mathscr{J}^m\mathscr{F}_{2,1}) \subset \mathscr{F}_{1,2}$; donc on a $\mathscr{J}^m\mathscr{F}_{2,1} \subset u(\mathscr{F}_{1,2})$. En vertu de 2.8.15, il existe un sous-$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_2}$-module cohérent $\mathscr{F}'_2$ de $\mathscr{F}_2$ tel que $\mathscr{F}'_2|U = u(\mathscr{F}_{1,2})$ et $\mathscr{J}^m\mathscr{F}_2 \subset \mathscr{F}'_2$. Par recollement, il existe un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathscr{F}$ tel que $\mathscr{F}|U_1 = \mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}|U_2 = \mathscr{F}'_2$ ([28] 0.3.3.1). Le morphisme canonique $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}'_2) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}_2)$ étant bijectif (2.10.18 et 2.10.10), on déduit de (2.10.24.1) des isomorphismes $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})|U_1 \simeq F|U_1$ et $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})|U_2 \simeq F|U_2$. Ces derniers se recollent en un isomorphisme $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) \simeq F$ car $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(u) = v$ en vertu de 2.10.19(ii).

(iii) Compte tenu de 2.10.18, il suffit de montrer que si $v : F \to G$ est un monomorphisme de $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-modules cohérents, il existe un monomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents $u : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ tel que $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(u) = v$. D'après (ii), il existe $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents tels que $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) = F$ et $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G}) = G$; on peut supposer $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ rig-purs (2.10.12, 2.10.14 et 2.10.23). D'après 2.10.9(i), il existe un idéal de définition cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$ tel que $v(\mathscr{J}\mathscr{F}) \subset \mathscr{G}$. Remplaçant $\mathscr{F}$ par $\mathscr{J}\mathscr{F}$, ce qui est permis en vertu de 2.10.23(i), on peut supposer $v(\mathscr{F}) \subset \mathscr{G}$. Par suite, v induit un homomorphisme injectif $u : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$, et la relation $v = \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(u)$ résulte de 2.10.19(ii).

Corollaire 2.10.25. *Si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel idyllique, quasi-compact et ayant localement un idéal de définition monogène, toute $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-algèbre cohérente B est de la forme $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{B})$ pour une $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbre cohérente $\mathscr{B}$.*

Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement fini de $\mathfrak{X}$ par des ouverts formels affines tels que pour tout $i \in I$, $A_i = \Gamma(U_i, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ soit un anneau idyllique ayant un idéal de définition principal J_i engendré par t_i. D'après 2.10.24(ii) et 2.10.23(ii), B est de la forme $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ pour un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent rig-pur $\mathscr{F}$. On a $\mathscr{F}|U_i = M_i^{\Delta}$ où M_i est un A_i-module cohérent rig-pur, et $\Gamma(U_i, B) = (M_i)_{t_i}$ (2.10.5.1). Quitte à remplacer $\mathscr{F}$ par $\mathscr{J}\mathscr{F}$ où $\mathscr{J}$ est un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$ (2.10.23), on peut supposer que pour tout $i \in I$, M_i est engendré par un nombre fini de sections de $\Gamma(U_i, B)$ entières sur A_i. Soient $\mathscr{B}$ la sous-$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbre de B engendrée par $\mathscr{F}$, $\iota\colon \mathscr{F} \to \mathscr{B}$ l'homomorphisme canonique.

Montrons d'abord que $\mathscr{B}$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. La question étant locale, on peut se borner au cas où $\mathfrak{X}$ est l'un des ouverts U_i. On a alors un homomorphisme surjectif $u\colon \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}^n \to \mathscr{F}$ défini par des sections $x_1, \dots, x_n \in \Gamma(\mathfrak{X}, B)$ entières sur $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$; chaque x_i vérifie une relation $P_i(x_i) = 0$, où P_i est un polynôme unitaire de degré > 0 à coefficients dans $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$. Par suite, $\mathscr{B}$ est l'image de l'homomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbres

$$v\colon \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\xi_1, \dots, \xi_n]/(P_1(\xi_1), \dots, P_n(\xi_n)) \to B$$

défini par $v(\xi_i) = x_i$, et il résulte de 2.10.9(ii) que $\mathscr{B}$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent.

Montrons ensuite que le morphisme canonique de $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-algèbres (2.10.19)

$$\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{B}) = \mathscr{B} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \to B \tag{2.10.25.1}$$

est un isomorphisme (ce qui prouvera le corollaire). Comme $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\iota)$ est un inverse à droite de (2.10.25.1), il suffit de montrer que $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\iota)$ est un isomorphisme de $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-modules. D'une part, $\mathscr{F}$ étant rig-pur, ι est injectif, et il en est de même de $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\iota)$ en vertu de 2.10.1.3. D'autre part, d'après 2.10.9(i), il existe un idéal de définition cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$ tel que l'on ait $\mathscr{J}\mathscr{B} \subset \mathscr{F} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) = B$; par suite, $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\iota)$ est surjectif en vertu de 2.10.23(i).

Lemme 2.10.26. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique de schémas formels idylliques, $\mathscr{K}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{Y}$, $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module. Alors le morphisme*

$$\varinjlim_{n\geq 0} \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{J}^n, \mathscr{F}) \to \varinjlim_{n\geq 0} \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(f^*(\mathscr{K}^n), \mathscr{F}) \tag{2.10.26.1}$$

déduit des morphismes canoniques $f^*(\mathscr{K}^n) \to \mathscr{J}^n$ est bijectif.

Il suffit de montrer que si $U = \mathrm{Spf}(A)$ est un ouvert formel affine globalement idyllique de $\mathfrak{X}$ et $V = \mathrm{Spf}(B)$ est un ouvert formel affine globalement idyllique de $\mathfrak{Y}$ tels que $f(U) \subset V$, l'évaluation du morphisme (2.10.26.1) au-dessus de U est un isomorphisme. Soient $\varphi\colon B \to A$ l'homomorphisme adique déduit de f, $K = \Gamma(V, \mathscr{K})$, $J = KA$, $M = \Gamma(U, \mathscr{F})$, $W = \mathrm{Spec}(A)$, $W_{\mathfrak{g}}$ l'ouvert $W - \mathrm{V}(J)$ de W. D'après 2.6.10, 2.7.3 et 2.7.4, l'évaluation du morphisme (2.10.26.1) au-dessus de U est le morphisme

$$\varinjlim_{n\geq 0} \mathrm{Hom}_A(J^n, M) \to \varinjlim_{n\geq 0} \mathrm{Hom}_A(K^n \otimes_B A, M) \tag{2.10.26.2}$$

déduit des morphismes canoniques $K^n \otimes_B A \to J^n$; c'est un isomorphisme en vertu de 1.8.33(b).

2.10.27. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique de schémas formels idylliques, $\mathscr{G}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module, $\mathscr{K}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{Y}$, $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$. On a un morphisme fonctoriel

$$\alpha_f(\mathscr{G})\colon f^{-1}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G})) \quad\to\quad \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(f^*\mathscr{G}) \tag{2.10.27.1}$$

défini par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(\varinjlim \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}}(\mathscr{K}^n,\mathscr{G})) \arrow[r, "\alpha_f(\mathscr{G})"] & \varinjlim \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{J}^n, f^*(\mathscr{G})) \arrow[d, "w"] \\
\varinjlim f^{-1}(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}}(\mathscr{K}^n,\mathscr{G})) \arrow[u, "v"] \arrow[r, "u"] & \varinjlim \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(f^*(\mathscr{K}^n), f^*(\mathscr{G}))
\end{tikzcd}$$

où u, v et w sont les morphismes canoniques ; en effet, v et w sont des isomorphismes (2.10.26). On désigne par

$$\beta_f(\mathscr{G})\colon \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G}) \quad\to\quad f_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(f^*\mathscr{G})) \tag{2.10.27.2}$$

le morphisme adjoint de $\alpha_f(\mathscr{G})$. Il est clair que $\alpha_f(\mathscr{G})$ et $\beta_f(\mathscr{G})$ ne dépendent pas de l'idéal de définition $\mathscr{K}$ à isomorphisme canonique près, et le diagramme

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}\mathscr{G} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f^{-1}(c_{\mathscr{G}})"'] & f^*(\mathscr{G}) \arrow[d, "c_{f^*(\mathscr{G})}"] \\
f^{-1}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G})) \arrow[r, "\alpha_f(\mathscr{G})"] & \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(f^*(\mathscr{G}))
\end{tikzcd} \tag{2.10.27.3}$$

où i est le morphisme canonique, est commutatif.

On vérifie aisément que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}}(\mathscr{K}^n,\mathscr{G}) \arrow[r, "\beta_f(\mathscr{G})"] \arrow[d, "a"'] & f_*(\varinjlim \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{J}^n, f^*(\mathscr{G}))) \arrow[d, "f_*(w)"] \\
\varinjlim f_*(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}}(f^*(\mathscr{K}^n), f^*(\mathscr{G}))) \arrow[r, "b"] & f_*(\varinjlim \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}}(f^*(\mathscr{K}^n), f^*(\mathscr{G})))
\end{tikzcd} \tag{2.10.27.4}$$

où a et b sont les morphismes canoniques est commutatif.

2.10.27.5. Si U est un ouvert de $\mathfrak{X}$ et V est un ouvert de $\mathfrak{Y}$ tels que $f(U) \subset V$, et si l'on note $f'\colon U \to V$ la restriction de f, on a $\alpha_f(\mathscr{G})|U = \alpha_{f'}(\mathscr{G}|V)$.

2.10.27.6. Si $\mathscr{B}$ est une $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-algèbre, $\alpha_f(\mathscr{B})$ et $\beta_f(\mathscr{B})$ sont des homomorphismes d'anneaux (2.10.6) ; en particulier, $\alpha_f(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ et $\beta_f(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ sont des homomorphismes d'anneaux. De plus, $\alpha_f(\mathscr{G})$ et $\beta_f(\mathscr{G})$ sont des di-homomorphismes relatifs à $\alpha_f(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ et $\beta_f(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ respectivement.

Pour établir la première assertion, il suffit de montrer que $\alpha_f(\mathscr{B})$ ou $\beta_f(\mathscr{B})$ est un homomorphisme d'anneaux. La question pour $\alpha_f(\mathscr{B})$ étant locale sur $\mathfrak{X}$ et sur $\mathfrak{Y}$, on peut se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ et $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$ sont formels affines globalement idylliques ; donc f est affine adique. Montrons alors que $\beta_f(\mathscr{B})$ est un homomorphisme d'anneaux. Compte tenu de 2.10.27.5, 2.3.7 et 2.6.12, il suffit encore de montrer que l'évaluation de $\beta_f(\mathscr{B})$ au-dessus de $\mathfrak{Y}$ est un homomorphisme d'anneaux. Soient $\varphi\colon B \to A$ l'homomorphisme adique déduit de f, $K = \Gamma(\mathfrak{Y}, \mathscr{K})$, $J = \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{J})$, $S = \Gamma(\mathfrak{Y}, \mathscr{B})$, $T = \Gamma(\mathfrak{X}, f^*(\mathscr{B}))$. On notera que l'on a $J = KA$ (2.2.8), mais en général l'homomorphisme canonique $S \otimes_B A \to T$ n'est pas bijectif (cf. 2.7.4). D'après (2.10.5.1) et la preuve de 2.10.26, l'évaluation de $\beta_f(\mathscr{B})$ au-dessus de $\mathfrak{Y}$ s'identifie au morphisme canonique

$$\Gamma(\mathrm{Spec}(B) - \mathrm{V}(K), \widetilde{S}) \to \Gamma(\mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J), \widetilde{T}),$$

qui est clairement un homomorphisme d'anneaux. La seconde assertion se démontre de même.

2.10.28. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ deux morphismes adiques de schémas formels idylliques, $h = g \circ f$, $\mathscr{H}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{Z}}$-module. Il résulte de la définition (2.10.27) que le diagramme

$$\begin{tikzcd} f^{-1}g^{-1}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{H})) \arrow[r, "f^{-1}(\alpha_g(\mathscr{H}))"] \arrow[d, equal] & f^{-1}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(g^*\mathscr{H})) \arrow[r, "\alpha_f(g^*\mathscr{H})"] & \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(f^*(g^*\mathscr{H})) \arrow[d, equal] \\ h^{-1}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{H})) \arrow[rr, "\alpha_h(\mathscr{H})"] & & \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(h^*\mathscr{H}) \end{tikzcd} \tag{2.10.28.1}$$

est commutatif. Par adjonction, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{H}) \arrow[r, "\beta_h(\mathscr{H})"] \arrow[d, "\beta_g(\mathscr{H})"'] & h_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(h^*\mathscr{H})) \arrow[d, equal] \\ g_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(g^*\mathscr{H})) \arrow[r, "g_*(\beta_f(g^*\mathscr{H}))"] & g_*(f_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(f^*(g^*\mathscr{H})))) \end{tikzcd} \tag{2.10.28.2}$$

est aussi commutatif.

2.10.29. Soit $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique de schémas formels idylliques. L'homomorphisme d'anneaux $\alpha_f(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ définit un morphisme d'espaces annelés

$$f_{\mathsf{g}}\colon (\mathfrak{X}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})) \to (\mathfrak{Y}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})). \tag{2.10.29.1}$$

Suivant la convention (1.1.11), nous utilisons pour les modules la notation f_{g}^{-1} (ou f^{-1}) pour désigner l'image inverse au sens des faisceaux abéliens et nous réservons la notation f^*_{g} pour l'image inverse au sens des modules. Pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module $\mathscr{G}$, $\alpha_f(\mathscr{G})$ définit un homomorphisme

$$f^*_{\mathsf{g}}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G})) = f^{-1}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G})) \otimes_{f^{-1}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}))} \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \ \to\ \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(f^*(\mathscr{G})). \tag{2.10.29.2}$$

Proposition 2.10.30. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique de schémas formels idylliques tel que $\mathfrak{Y}$ admette localement un idéal de définition monogène, $\mathscr{G}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module cohérent. Alors l'homomorphisme* (2.10.29.2)

$$f^*_{\mathsf{g}}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G})) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(f^*(\mathscr{G}))$$

est bijectif.

La question étant local sur $\mathfrak{X}$ et sur $\mathfrak{Y}$, on peut supposer que l'on a une suite exacte de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-modules $\mathscr{O}^q_{\mathfrak{Y}} \to \mathscr{O}^p_{\mathfrak{Y}} \to \mathscr{G} \to 0$, auquel cas la proposition résulte de 2.10.18.

2.10.31. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique et quasi-compact de schémas formels idylliques, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module, $\mathscr{K}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{Y}$, $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$. On a un morphisme fonctoriel

$$\iota_f(\mathscr{F})\colon \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(f_*\mathscr{F}) \to f_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})) \tag{2.10.31.1}$$

défini par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}}(\mathscr{K}^n, f_*\mathscr{F}) \arrow[r, "\iota_f(\mathscr{F})"] & f_*(\varinjlim \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{J}^n, \mathscr{F})) \arrow[d, "w"] \\
\varinjlim f_*(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(f^*(\mathscr{K}^n), \mathscr{F})) \arrow[u, "v"] \arrow[r, "u"] & f_*(\varinjlim \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(f^*(\mathscr{K}^n), \mathscr{F}))
\end{tikzcd}$$

où u et w sont les morphismes canoniques et v est la limite des isomorphismes d'adjonction ; en effet, w est un isomorphisme (2.10.26). Il est clair que $\iota_f(\mathscr{F})$ ne dépend pas de l'idéal de définition $\mathscr{K}$ à isomorphisme canonique près. On peut faire les remarques suivantes :

2.10.31.2. $\iota_f(\mathscr{F})$ est un isomorphisme ; on note

$$\jmath_f(\mathscr{F})\colon f_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(f_*\mathscr{F}) \tag{2.10.31.3}$$

l'isomorphisme inverse. En effet, comme les topos de Zariski $\mathfrak{X}_{\mathrm{zar}}$ et $\mathfrak{Y}_{\mathrm{zar}}$ sont algébriques et que le morphisme $f\colon \mathfrak{X}_{\mathrm{zar}} \to \mathfrak{Y}_{\mathrm{zar}}$ est cohérent (2.6.6), le foncteur f_* commute aux limites inductives filtrantes ([1] VI 5.1).

2.10.31.4. On a $f_*(c_{\mathscr{F}}) = \iota_f(\mathscr{F}) \circ c_{f_*\mathscr{F}}$.

2.10.31.5. Pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module $\mathscr{G}$, le morphisme composé

$$\jmath_f(f^*\mathscr{G}) \circ \beta_f(\mathscr{G}) \colon \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G}) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(f_*f^*\mathscr{G})$$

est induit par l'homomorphisme d'adjonction $\mathscr{G} \to f_*f^*\mathscr{G}$. Cela résulte aussitôt des définitions et (2.10.27.4).

Proposition 2.10.32. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique et quasi-compact de schémas formels idylliques, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module. Alors :*

(i) *On a un isomorphisme fonctoriel $f_*(\mathscr{F}_{\mathrm{tor}}) \xrightarrow{\sim} (f_*\mathscr{F})_{\mathrm{tor}}$.*

(ii) *On a un morphisme fonctoriel injectif*

$$\overline{f_*(\mathscr{F})} \to f_*(\overline{\mathscr{F}}) \tag{2.10.32.1}$$

déduit de $\iota_f(\mathscr{F})$ (2.10.31.1). *Il est bijectif si f est fini et de présentation finie et $\mathscr{F}$ est cohérent.*

(i) Cela résulte de 2.10.31.2 et 2.10.31.4.

(ii) Le morphisme (2.10.32.1) résulte de 2.10.31.4. Il est injectif en vertu de 2.10.31.2. La seconde assertion résulte de 2.8.6, 2.8.19 et 2.10.14.

Lemme 2.10.33. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique et quasi-compact de schémas formels idylliques, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module injectif. Alors $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ est f_*-acyclique.*

Soient $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$. Pour tout entier $n \geq 0$, $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{J}^n, \mathscr{F})$ est flasque ([1] V 4.10), et donc f_*-acyclique ([1] V 5.2). Comme les topos de Zariski $\mathfrak{X}_{\mathrm{zar}}$ et $\mathfrak{Y}_{\mathrm{zar}}$ sont algébriques et que le morphisme de topos $f\colon \mathfrak{X}_{\mathrm{zar}} \to \mathfrak{Y}_{\mathrm{zar}}$ est cohérent (2.6.6), les foncteurs dérivés $\mathrm{R}^q f_*$, $q \in \mathbb{N}$, commutent aux limites inductives filtrantes ([1] VI 5.1). Par suite, $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ est f_*-acyclique.

2.10.34. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique et quasi-compact de schémas formels idylliques tel que $\mathfrak{Y}$ admette localement un idéal de définition monogène, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module. Il résulte de 2.10.18 et 2.10.33 que pour tout entier $q \geq 0$, l'isomorphisme $\jmath_f(\mathscr{F})$ (2.10.31.3) se dérive en un isomorphisme fonctoriel

$$\jmath_f^q(\mathscr{F}) \colon \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathrm{R}^q f_*\mathscr{F}). \tag{2.10.34.1}$$

2.11 Étude cohomologique des faisceaux cohérents

Proposition 2.11.1. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel affine globalement idyllique, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent ; alors on a $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}) = 0$ pour tout $q > 0$.*

Soient $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n} = \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1}$, $\mathscr{F}_n = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$ $(n \geq 0)$. D'après 2.8.5, $\mathscr{F}_n$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$-module cohérent et $\mathscr{F} = \varprojlim \mathscr{F}_n$; plus précisément, si on pose $A = \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$, $J = \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{J})$, $M = \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{F})$ et $M_n = M/J^{n+1}M$, alors M est A-module cohérent, $\mathscr{F} = M^{\Delta}$ et $\mathscr{F}_n = \widetilde{M_n}$

(2.7.2.9 et (2.7.2.2)). Pour tout $f \in A$ et tout $n \geq 0$, on a $\Gamma(\mathscr{D}(f), \mathscr{F}_n) = (M_n)_f$ et $\mathrm{H}^i(\mathscr{D}(f), \mathscr{F}_n) = 0$ pour $i > 0$. Par suite, les conditions de ([30] 0.13.3.1) sont remplies, en prenant pour base $\mathfrak{B}$ de la topologie de $\mathfrak{X}$ l'ensemble des ouverts $\mathscr{D}(f)$ pour $f \in A$; le système projectif $(\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n))_{n \geq 0}$ vérifie évidemment la condition (ML) (1.17.1). La proposition résulte de loc. cit. par récurrence sur q.

Corollaire 2.11.2. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel affine globalement idyllique, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent ; alors on a* $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})) = 0$ *pour tout* $q > 0$.

En effet, comme le topos de Zariski de $\mathfrak{X}$ est cohérent (2.6.6), le foncteur $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, -)$ commute aux limites inductives filtrantes de faisceaux abéliens ([1] VI 5.3). L'assertion s'ensuit en vertu de 2.11.1.

2.11.3. Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel, $\mathfrak{U} = (U_\alpha)$ un recouvrement ouvert de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module. Nous désignerons par $\mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ le complexe de Čech des cochaînes alternées relatif au recouvrement $\mathfrak{U}$, à coefficients dans $\mathscr{F}$ ([1] V 2.3.3), et par $\mathrm{H}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ ses groupes de cohomologie.

Corollaire 2.11.4. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathfrak{U} = (U_\alpha)$ un recouvrement de $\mathfrak{X}$ par des ouverts affines globalement idylliques, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Si toute intersection finie des ensembles U_α est un schéma formel affine globalement idyllique, les modules de cohomologie* $\mathrm{H}^\bullet(\mathfrak{X}, \mathscr{F})$ *et* $\mathrm{H}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ *(sur* $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$*) sont canoniquement isomorphes.*

Cela résulte de 2.11.1 et ([1] V 3.3).

Théorème 2.11.5. *Soient $f \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme propre de présentation finie de schémas formels idylliques, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Alors pour tout entier $q \geq 0$, le $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module* $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})$ *est cohérent.*

Soient $\mathscr{K}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{Y}$, $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n} = \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1}$, $\mathscr{F}_n = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$ $(n \geq 0)$; on a alors $\mathscr{F} = \varprojlim \mathscr{F}_n$ (2.8.5). Aux homomorphismes canoniques $\mathscr{F} \to \mathscr{F}_n$ correspondent canoniquement des homomorphismes $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}) \to \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n)$, donnant à la limite un homomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}) \quad \to \quad \varprojlim_n \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n). \tag{2.11.5.1}$$

Il résulte de 2.11.5 que $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})$, étant cohérent, est naturellement muni d'une structure de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module topologique ; on considérera les $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n)$ comme des faisceaux de groupes pseudo-discrets ([28] 0.3.9.1). Nous allons montrer en même temps que 2.11.5 le corollaire suivant.

Corollaire 2.11.6. *Chacun des homomorphismes* (2.11.5.1) *est un isomorphisme topologique. En outre, si $\mathfrak{Y}$ est quasi-compact, le système projectif* $(\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n))_{n \geq 0}$ *satisfait à la condition* (ML) ([30] 0.13.1.1).

Nous commençons par établir 2.11.5 et 2.11.6 lorsque $\mathfrak{Y}$ est un schéma formel affine globalement idyllique.

Corollaire 2.11.7. *Sous les hypothèses de* (2.11.5)*, supposons en outre que* $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A)$*, où A est un anneau idyllique. Soit J un idéal de définition de type fini de A, et posons $\mathscr{F}_n = \mathscr{F}/J^{n+1}\mathscr{F}$ pour $n \geq 0$. Alors les* $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F})$ *sont des A-modules cohérents ; le système projectif* $(\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n))_{n\geq 0}$ *satisfait à la condition* (ML) *pour tout q ; si on pose*

$$\mathrm{N}_{q,n} \quad = \quad \ker(\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n)), \tag{2.11.7.1}$$

la topologie sur $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F})$ *définie par la filtration* $(\mathrm{N}_{q,n})_{n\geq 0}$ *est la topologie J-adique ; enfin, l'homomorphisme canonique*

$$\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}) \quad \to \quad \varprojlim_n \mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n) \tag{2.11.7.2}$$

est un isomorphisme topologique pour tout q (*le premier membre étant muni de la topologie J-adique, les* $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n)$ *de la topologie discrète*).

Notons d'abord que si la proposition est vraie, elle le reste quand on remplace J par tout idéal de définition de type fini J' de A. En effet, on a $J'^r \subset J$ et $J^r \subset J'$ pour un entier $r \geq 0$; si l'on pose $\mathscr{F}'_n = \mathscr{F}/J'^{n+1}\mathscr{F}$, on a des homomorphismes canoniques $\mathscr{F}'_{r(n+1)} \to \mathscr{F}_n$ et $\mathscr{F}_{r(n+1)} \to \mathscr{F}'_n$, compatibles aux projections canoniques de $\mathscr{F}$ dans ces modules ; il en résulte un isomorphisme topologique

$$\varprojlim_n \mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}'_n) \quad \to \quad \varprojlim_n \mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n)$$

compatible aux flèches (2.11.7.2) ; si $(\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n))_{n\geq 0}$ satisfait à la condition (ML), il en est de même de $(\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}'_n))_{n\geq 0}$; enfin, si l'on pose $\mathrm{N}'_{q,n} = \ker(\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}'_n))$, les filtrations $(\mathrm{N}_{q,n})_{n\geq 0}$ et $(\mathrm{N}'_{q,n})_{n\geq 0}$ définissent la même topologie sur $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F})$.

On sait en vertu de ([30] 3.4.4) que la proposition est vraie si A est noethérien. On supposera désormais que A est topologiquement de présentation finie sur un anneau 1-valuatif R et $J = tA$, où t est un élément non nul de l'idéal maximal de R. Il existe alors un entier r tel que $t^r\mathscr{F}_{\mathrm{tor}} = 0$ (2.10.13 et 1.10.2).

Soient $\mathfrak{U} = (U_\alpha)$ un recouvrement fini de $\mathfrak{X}$ par des ouverts formels affines globalement idylliques, $\mathrm{C}^\bullet = \mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ (2.11.3) ; on pose $A_n = A/t^{n+1}A$ et $\mathrm{C}^\bullet_n = \mathrm{C}^\bullet \otimes_A A_n$. Toute intersection des ensembles U_α est un schéma formel affine globalement idyllique (2.6.12). Par suite, pour tout i, C^i est complet et séparé pour la topologie (t)-adique, et $t^r\mathrm{C}^i_{(t)\text{-tor}} = 0$ (2.10.5.2). Par ailleurs, on a, pour tout q et tout $n \geq 0$, des isomorphismes canoniques $\mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F}_n) \simeq \mathrm{C}^\bullet_n$ (2.7.2.9 et (2.7.2.2)), $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n) \simeq \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n)$ et $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}) \simeq \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)$ (2.11.4).

Si on pose $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$, le morphisme $f_n \colon \mathfrak{X}_n \to \mathrm{Spec}(A/J^{n+1})$ déduit de f est propre de présentation finie, et A/J^{n+1} est universellement cohérent (1.12.15 et 1.4.2). On conclut de 1.4.8 que $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n) = \mathrm{H}^q(\mathfrak{X}_n, \mathscr{F}_n)$ est un A-module cohérent pour tout q et tout $n \geq 0$.

On peut maintenant démontrer la proposition 2.11.7 par une récurrence descendante sur q. Il existe un entier q_0 tel que l'énoncé soit vrai par tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent en degré $q \geq q_0$. Supposons l'énoncé vrai par tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent en degré $q+1$, et montrons le en degré q. Compte tenu de l'hypothèse de récurrence et de la relation $\mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, t^{n+1}\mathscr{F}) = t^{n+1}\mathrm{C}^\bullet$ (2.7.2.1), les conditions de 1.17.7 sont remplies, et la proposition s'ensuit.

Corollaire 2.11.7.3. *Sous les hypothèses de* (2.11.7)*, on a, pour tout $g \in A$, un isomorphisme topologique canonique*

$$\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}) \otimes_A A_{\{g\}} \quad \stackrel{\sim}{\to} \quad \varprojlim_n \, ((\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n))_g),$$

où le premier membre est muni de la topologie J-adique, et les $(\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n))_g$ de la topologie discrète.

En vertu de 1.10.12(iii), $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}) \otimes_A A_{\{g\}}$ est isomorphe au séparé complété de $(\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}))_g$ pour la topologie J-adique ; un système fondamental de voisinages de 0 pour cette topologie est $\mathrm{N}_{q,n} \otimes_A A_g$; ce dernier est le noyau de l'application $(\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}))_g \to (\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n))_g$ et par suite le groupe séparé associé à $(\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}))_g$ s'identifie à un sous-groupe G de $\varprojlim_n \, ((\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n))_g)$. Mais le système projectif $((\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n))_g)$ vérifie la condition (ML), et l'image de $(\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}))_g$ dans chacun des $(\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n))_g$ est égale à l'image commune des $(\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k))_g$ pour $k \geq n$ assez grand. On en déduit aussitôt que G est partout dense dans $\varprojlim_n \, ((\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n))_g)$, et comme ce dernier groupe est complet et séparé, le corollaire est démontré.

2.11.8. Revenons maintenant à la démonstration de 2.11.5 et 2.11.6. Prouvons d'abord ces propositions dans le cas $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A)$ envisagé dans 2.11.7. Pour tout $g \in A$, appliquons 2.11.7 au schéma formel affine globalement idyllique induit par $\mathfrak{Y}$ sur l'ouvert $\mathfrak{Y}_g = \mathscr{D}(g)$, qui est égal à $\mathrm{Spf}(A_{\{g\}})$, et au schéma formel induit par $\mathfrak{X}$ sur $f^{-1}(\mathfrak{Y}_g)$. Comme $\mathscr{F}_n$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$-module cohérent, on a

$$\mathrm{H}^q(f^{-1}(\mathfrak{Y}_g), \mathscr{F}_n) = \Gamma(\mathfrak{Y}_g, \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n))$$

pour tout $n \geq 0$ ([30] 1.4.11). L'homomorphisme canonique

$$\mathrm{H}^q(f^{-1}(\mathfrak{Y}_g), \mathscr{F}) \to \varprojlim_n \, \Gamma(\mathfrak{Y}_g, \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n))$$

est un isomorphisme ; mais on a

$$\varprojlim_n \, \Gamma(\mathfrak{Y}_g, \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n)) = \Gamma(\mathfrak{Y}_g, \varprojlim_n \, \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n))$$

et comme le faisceau $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})$ est associé au préfaisceau $\mathfrak{Y}_g \mapsto \mathrm{H}^q(f^{-1}(\mathfrak{Y}_g), \mathscr{F})$ sur les $\mathfrak{Y}_g$, on a bien montré que l'homomorphisme (2.11.5.1) est bijectif. Prouvons ensuite que $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module cohérent, et de façon plus précise que l'on a

$$\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}) = (\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}))^\Delta. \tag{2.11.8.1}$$

D'une part, $\mathscr{F}_n$ étant un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$-module cohérent, on a ([30] 1.4.13)

$$\Gamma(\mathfrak{Y}_g, \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n)) = \Gamma(\mathfrak{Y}, \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n)) \otimes_A A_g = (\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n))_g.$$

D'autre part, en vertu de 2.11.7.3, on a

$$\varprojlim_n ((\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n))_g) = \mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}) \otimes_A A_{\{g\}} = \Gamma(\mathfrak{Y}_g, (\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}))^{\Delta}).$$

Cela démontre (2.11.8.1) puisque $\Gamma(\mathfrak{Y}_g, \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})) = \varprojlim_n \Gamma(\mathfrak{Y}_g, \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n))$. On en déduit que (2.11.5.1), qui est continu en vertu de ([28] 0.3.9.2), est un isomorphisme topologique. Enfin, les $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n)$ étant des A-modules cohérents (1.4.8, 1.12.15, 1.4.2), il résulte des relations $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n) = (\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n))^{\Delta}$ que le système projectif $(\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n))_{n\geq 0}$ vérifie (ML) (2.7.2.1).

Une fois 2.11.5 et 2.11.6 démontrés dans le cas où le schéma formel $\mathfrak{Y}$ est affine globalement idyllique, il est immédiat de passer de là au cas général pour 2.11.5 et la première assertion de 2.11.6, qui sont locales sur $\mathfrak{Y}$, et pour la seconde assertion de 2.11.6 puisque $\mathfrak{Y}$ est quasi-compact.

Lemme 2.11.9. *Soient A un anneau idyllique ayant un idéal de définition monogène $J = tA$, $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A)$, $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme propre et de présentation finie de schémas formels, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent ; posons $\mathscr{F}_n = \mathscr{F}/J^{n+1}\mathscr{F}$. S'il existe deux entiers $n > r \geq 0$ tels que $t^r \mathscr{F}_{\mathrm{tor}} = 0$ et $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n) = 0$, alors $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}) = 0$.*

Soient $\mathfrak{U} = (U_\alpha)$ un recouvrement fini de $\mathfrak{X}$ par des ouverts formels affines globalement idylliques, $\mathrm{C}^\bullet = \mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ (2.11.3) ; on pose $A_n = A/t^{n+1}A$ et $\mathrm{C}^\bullet_n = \mathrm{C}^\bullet \otimes_A A_n$. D'une part $t^r \mathrm{C}^i_{(t)\text{-tor}} = 0$ pour tout i (2.10.5.2). D'autre part on a, pour tout q et tout $n \geq 0$, des isomorphismes canoniques $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n) \simeq \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n)$ et $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}) \simeq \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)$ (2.11.4). Le lemme résulte alors de 1.17.6.

Proposition 2.11.10. *Soient A un anneau idyllique, J un idéal de définition de type fini de A, $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A)$, $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme propre et de présentation finie de schémas formels. On pose $\mathfrak{Y}_n = \mathrm{Spec}(A/J^{n+1})$, $\mathfrak{X}_n = \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}_n$, et pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_n = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n} = \mathscr{F}/J^{n+1}\mathscr{F}$. Soit $\mathscr{L}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module inversible tel que $\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}/J\mathscr{L}$ soit un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_0}$-module ample ; pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module $\mathscr{F}$ et tout entier k, posons $\mathscr{F}(k) = \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes k}$.*

(i) *Pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathscr{F}$, il existe un entier k_0 tel que, pour tout $k \geq k_0$, les propriétés suivantes aient lieu :*
   (a) *On a $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}(k)) = 0$ pour tout $q > 0$.*
   (b) *L'homomorphisme canonique $\mathrm{H}^0(\mathfrak{X}, \mathscr{F}(k)) \to \mathrm{H}^0(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_0(k))$ est surjectif.*

(ii) *Supposons A noethérien ou J monogène. Alors pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathscr{F}$, il existe un entier k_1 tel que, pour tout $k \geq k_1$ et tout $n \geq 0$, l'homomorphisme canonique $\mathrm{H}^0(\mathfrak{X}, \mathscr{F}(k)) \to \mathrm{H}^0(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n(k))$ soit surjectif.*

Observons d'abord que la condition (b) est équivalente à la condition $\mathrm{H}^1(\mathfrak{X}, J\mathscr{F}(k)) = 0$, qui est un cas particulier de (a) pour le faisceau cohérent $J\mathscr{F}$; donc pour (i), il suffit de montrer qu'on peut trouver un entier k_0 satisfaisant à la condition (a). On sait en vertu de ([30] 5.2.3) que la proposition est vraie lorsque A est noethérien.

(i) On peut se borner au cas où A est topologiquement de présentation finie sur un anneau 1-valuatif R, et $J = tA$, où t est un élément non nul de l'idéal maximal de R ([29] 4.5.13). Il existe un entier $r \geq 0$ tel que $t^r\mathscr{F}_{\mathrm{tor}} = 0$ (2.10.13 et 1.10.2) ; on se donne un entier $n > r$. Le morphisme $f_n : \mathfrak{X}_n \to \mathfrak{Y}_n$ déduit de f est propre de présentation finie, A/J^{n+1} est universellement cohérent (1.12.15 et 1.4.2), et $\mathscr{L}_n$ est ample pour f_n ([29] 4.5.13 et 4.6.6). On conclut de 1.4.10 qu'il existe un entier k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$ et tout $q > 0$, on ait $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n(k)) = 0$; comme $t^r(\mathscr{F}(k))_{\mathrm{tor}} = 0$ pour tout k, la propriété (a) en résulte par 2.11.9.

(ii) On peut se borner au cas où $J = tA$ est monogène. Il existe un entier $r \geq 0$ tel que $t^r\mathscr{F}_{\mathrm{tor}} = 0$. D'après (i), il existe un entier k_1 tel que pour tout $k \geq k_1$ et tout $0 \leq m \leq r$, on ait $\mathrm{H}^1(\mathfrak{X}, t^m\mathscr{F}(k)) = 0$. Comme $t^r(\mathscr{F}(k))_{\mathrm{tor}} = 0$ pour tout k, la multiplication par t^p induit un isomorphisme $t^r\mathscr{F}(k) \to t^{r+p}\mathscr{F}(k)$ (2.10.5.2). D'où $\mathrm{H}^1(\mathfrak{X}, t^n\mathscr{F}(k)) = 0$ pour tout $k \geq k_1$ et tout $n \geq 0$, ce qui entraîne la proposition.

Corollaire 2.11.11. *Les hypothèses étant celles de* (2.11.10)*, pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathscr{F}$, il existe un entier k_0 tel que pour $k \geq k_0$, $\mathscr{F}(k)$ soit engendré par ses sections au-dessus de $\mathfrak{X}$; en d'autre termes, $\mathscr{F}$ est isomorphe au quotient d'un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module de la forme $(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}(-k))^m$.*

Comme $\mathfrak{X}_0$ est quasi-compact et quasi-séparé, il résulte de l'hypothèse sur $\mathscr{L}_0$ et de ([29] 4.5.5) qu'il existe k_0 tel que, pour $k \geq k_0$, $\mathscr{F}_0(k)$ soit engendré pas ses sections au-dessus de $\mathfrak{X}$; par ailleurs, on peut supposer k_0 pris assez grand pour que l'homomorphisme $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{F}(k)) \to \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_0(k))$ soit surjectif pour $k \geq k_0$ (2.11.10). Il existe donc un nombre fini de sections $s_i \in \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{F}(k))$ dont les images dans $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_0(k))$ engendrent $\mathscr{F}_0(k)$ ([28] 0.5.2.3). Comme J est contenu dans l'idéal maximal de l'anneau local en tout point de $\mathfrak{X}$, il résulte du lemme de Nakayama que les s_i engendrent $\mathscr{F}(k)$.

Proposition 2.11.12. *Soient $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme propre de présentation finie de schémas formels idylliques, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent rig-nul. Alors pour tout entier $q \geq 0$, le $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})$ est rig-nul.*

La question étant locale sur $\mathfrak{Y}$, on peut le supposer quasi-compact ; donc $\mathfrak{X}$ est quasi-compact. Il existe alors un idéal de définition cohérent $\mathscr{K}$ de $\mathfrak{Y}$ tel que si l'on pose $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, on ait $\mathscr{J}\mathscr{F} = 0$ (2.10.10). Il résulte de 2.11.6 que $\mathscr{K}\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}) = 0$, donc $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})$ est rig-nul (2.10.10).

2.12 Théorème de comparaison de la théorie "algébrique" à la théorie "formelle"

2.12.1. Soient (Y, Y') une paire idyllique (2.6.17), $f\colon X \to Y$ un morphisme propre de présentation finie, X' l'image réciproque de Y' par f ; donc (X, X') est une paire idyllique. Nous désignons par $\widehat{X}$ et $\widehat{Y}$ les schémas formels complétés de X et Y le long de X' et Y' respectivement, par $\hat{f}$ le prolongement de f à ces complétés, qui est un morphisme propre $\widehat{X} \to \widehat{Y}$ de schémas formels idylliques (2.5.10). Pour tout $\mathscr{O}_X$-module cohérent $\mathscr{F}$, nous désignons par $\widehat{\mathscr{F}}$ son complété $\mathscr{F}_{/X'}$ le long de X', qui est un $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-module cohérent (2.8.4).

Soient $\mathscr{K}$ l'idéal quasi-cohérent de type fini de $\mathscr{O}_Y$ qui définit Y', $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_X$, qui est l'idéal de $\mathscr{O}_X$ définissant X' ; on sait alors que $\mathscr{J}$ et $\mathscr{K}$ sont cohérents (2.6.18). Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module cohérent, et considérons pour tout $n \geq 0$ les $\mathscr{O}_X$-modules cohérents $\mathscr{F}_n = \mathscr{F}/\mathscr{J}^{n+1}\mathscr{F}$. En vertu de 1.4.8 et 2.6.18, les $\mathscr{O}_Y$-modules $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})$ et $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n)$ sont cohérents pour tout q. On a des homomorphismes canoniques

$$\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}) \otimes_{\mathscr{O}_Y} (\mathscr{O}_Y/\mathscr{K}^{n+1}\mathscr{O}_Y) \to \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n) \tag{2.12.1.1}$$

donnant à la limite un homomorphisme fonctoriel

$$\varphi_q\colon (\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}))^\wedge \to \varprojlim_n \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n), \tag{2.12.1.2}$$

où le premier membre désigne le complété $(\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}))_{/Y'}$ de $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})$ le long de Y'. D'ailleurs (2.12.1.1) peut être considéré comme un homomorphisme continu de $(\mathscr{O}_Y/\mathscr{K}^{n+1})$-modules pseudo-discrets. Par suite φ_q est un homomorphisme continu de $\mathscr{O}_{\widehat{Y}}$-modules topologiques.

Soit $i\colon \widehat{X} \to X$ le morphisme canonique d'espaces annelés (2.5.3), de sorte que on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X_n \arrow[r, "h_n"] \arrow[dr, "i_n"'] & \widehat{X} \arrow[d, "i"] \\ & X \end{tikzcd}$$

où X_n est le sous-schéma de X défini par l'idéal $\mathscr{J}^{n+1}$, i_n l'injection canonique, h_n le morphisme d'espaces annelés correspondant à l'identité sur les espaces sous-jacents et à l'homomorphisme canonique $\mathscr{O}_{\widehat{X}} \to (\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^{n+1})|X'$ (2.5.2). Comme $\widehat{\mathscr{F}} = i^*(\mathscr{F})$ à isomorphisme canonique près (2.5.5), l'homomorphisme canonique $\mathrm{H}^q(\widehat{X}, \widehat{\mathscr{F}}) \to \mathrm{H}^q(X_n, h_n^*(\widehat{\mathscr{F}}))$ s'écrit aussi

$$\mathrm{H}^q(\widehat{X}, \widehat{\mathscr{F}}) \to \mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}_n); \tag{2.12.1.3}$$

ces homomorphismes forment évidemment un système projectif, d'où par passage à la limite, un homomorphisme canonique

$$\psi_{q,X}\colon \mathrm{H}^q(\widehat{X},\widehat{\mathscr{F}}) \to \varprojlim_n \mathrm{H}^q(X,\mathscr{F}_n). \tag{2.12.1.4}$$

Remplaçant X par un ouvert de la forme $f^{-1}(V)$, où V est un ouvert affine de Y, on a des homomorphismes canoniques ([30] 1.4.11)

$$\psi_{q,V}\colon \mathrm{H}^q(\widehat{X}\cap f^{-1}(V),\widehat{\mathscr{F}}) \to \varprojlim_n \Gamma(V,\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n)); \tag{2.12.1.5}$$

ces homomorphismes définissent un homomorphisme canonique de faisceaux

$$\psi_q\colon \mathrm{R}^q \hat{f}_*(\widehat{\mathscr{F}}) \to \varprojlim_n \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n). \tag{2.12.1.6}$$

Soit enfin $j\colon \widehat{Y} \to Y$ le morphisme canonique d'espaces annelés ; comme $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})$ est un $\mathscr{O}_Y$-module cohérent, on a $j^*(\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})) = (\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}))^\wedge$ à isomorphisme canonique près (2.5.5), et on a donc un homomorphisme canonique

$$\theta_q\colon (\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}))^\wedge = j^*(\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})) \to \mathrm{R}^q \hat{f}_*(i^*(\mathscr{F})) = \mathrm{R}^q \hat{f}_*(\widehat{\mathscr{F}}). \tag{2.12.1.7}$$

Il résulte aussitôt que le diagramme

$$\begin{tikzcd} (\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}))^\wedge \arrow[rr, "\theta_q"] \arrow[dr, "\varphi_q"'] & & \mathrm{R}^q \hat{f}_*(\widehat{\mathscr{F}}) \arrow[dl, "\psi_q"] \\ & \varprojlim_n \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n) & \end{tikzcd} \tag{2.12.1.8}$$

est commutatif.

Théorème 2.12.2. *Soient (Y,Y') une paire idyllique, $f\colon X \to Y$ un morphisme propre de présentation finie de schémas, X' l'image réciproque de Y' par f. Alors, pour tout $\mathscr{O}_X$-module cohérent $\mathscr{F}$, $\mathrm{R}^q \hat{f}_*(\widehat{\mathscr{F}})$ est un $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-module cohérent et les homomorphismes φ_q, ψ_q et θ_q du diagramme* (2.12.1.8) *sont des isomorphismes topologiques.*

On a $(i_n)_*(h_n^*(\widehat{\mathscr{F}})) = \mathscr{F}_n$ et l'homomorphisme (2.12.1.6) n'est autre que l'homomorphisme (2.11.5.1). Par suite, le fait que ψ_q soit un isomorphisme topologique est un cas particulier de 2.11.6. Il suffira donc de prouver que φ_q est un isomorphisme topologique ; comme $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})$ est cohérent (1.4.8 et 2.6.18), il en résultera que $\mathrm{R}^q \hat{f}_*(\widehat{\mathscr{F}})$ est cohérent.

Nous commençons par établir la forme affine de 2.12.2 :

Corollaire 2.12.3. *Les hypothèses étant celles de* (2.12.2)*, supposons en outre* $Y = \mathrm{Spec}(B)$*, et* $\mathscr{K} = \widetilde{K}$*, où* K *est un idéal de type fini de* B*, de sorte que* $\mathscr{F}_n = \mathscr{F}/K^{n+1}\mathscr{F}$*. La topologie définie sur* $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{F})$ *par les noyaux des homomorphismes canoniques* $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}_n)$ *est la topologie* K*-préadique ; soit* $(\mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}))^\wedge$ *le séparé complété de* $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{F})$ *pour cette topologie ; l'homomorphisme canonique*

$$\varphi_q \colon (\mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}))^\wedge \to \varprojlim_n \mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}_n) \tag{2.12.3.1}$$

est un isomorphisme topologique ; enfin, l'homomorphisme canonique

$$\psi_q \colon \mathrm{H}^q(\widehat{X}, \widehat{\mathscr{F}}) \to \varprojlim_n \mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}_n) \tag{2.12.3.2}$$

est un isomorphisme.

L'isomorphisme (2.12.3.2) est mentionné ici à titre de rappel (2.11.7). En vertu de ([30] 4.1.7), on sait que la proposition est vraie si B est noethérien. On peut donc se borner au cas où il existe un anneau 1-valuatif R et un anneau idyllique A, tels que B soit de présentation finie sur A, A soit topologiquement de présentation finie sur R, et $K = IB$, où I est un idéal de définition de type fini de A. Notons que si la proposition est vraie, elle reste vraie lorsqu'on remplace I par tout idéal de définition de type fini de A (voir la preuve de 2.11.7). On supposera désormais que $K = tB$, où t est un élément non nul de l'idéal maximal de R.

Soient $\mathfrak{U} = (U_\alpha)$ un recouvrement fini de X par des ouverts affines, $\mathrm{C}^\bullet = \mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ (2.11.3) ; on pose $A_n = A/t^{n+1}A$ et $\mathrm{C}^\bullet_n = \mathrm{C}^\bullet \otimes_A A_n$. On a alors, pour tout q et tout $n \geq 0$, des isomorphismes canoniques $\mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F}_n) \simeq \mathrm{C}^\bullet_n$, $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}_n) \simeq \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n)$ et $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}) \simeq \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)$. En vertu de 1.12.14(iii), il existe un entier $r \geq 0$ tel que $t^r \mathrm{C}^i_{(t)\text{-tor}} = 0$ pour tout i. Il existe un entier $h \geq 0$ tel que $t^h(\mathrm{H}^q(t^r\mathrm{C}^\bullet))_{(t)\text{-tor}} = 0$ pour tout q. En effet, $t^r\mathscr{F}$ étant un $\mathscr{O}_X$-module cohérent, $\mathrm{H}^q(t^r\mathrm{C}^\bullet) \simeq \mathrm{H}^q(X, t^r\mathscr{F})$ est un B-module cohérent (1.4.8 et 2.6.18), et il suffit de lui appliquer 1.12.14(iii). Les assertions recherchées résultent alors de 1.17.3.

2.12.4. Passons maintenant à la démonstration de 2.12.2. Pour tout ouvert affine V de Y, $\Gamma(V, (\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}))^\wedge)$ est le séparé complété de $\Gamma(V, \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}))$ pour la topologie K-préadique (si $\mathscr{K}|V = \widetilde{K}$) puisque $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})$ est un $\mathscr{O}_Y$-module cohérent, et

$$\Gamma(V, \varprojlim_n \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n)) = \varprojlim_n \Gamma(V, \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n));$$

le fait que φ_q soit un isomorphisme topologique résulte alors de 2.12.3 et ([30] 1.4.11).

Corollaire 2.12.5. *Sous les hypothèses de* (2.12.2)*, pour tout ouvert affine* $V \subset Y$*, l'homomorphisme canonique*

$$\mathrm{H}^q(\widehat{X} \cap f^{-1}(V), \widehat{\mathscr{F}}) \to \Gamma(\widehat{Y} \cap V, \mathrm{R}^q \hat{f}_*(\widehat{\mathscr{F}}))$$

est bijectif.

2.13 Un théorème d'existence de faisceaux algébriques cohérents

2.13.1. Soient A un anneau idyllique, J un idéal de définition de type fini de A. Si $Y = \mathrm{Spec}(A)$, le schéma formel affine $\mathrm{Spf}(A)$ s'identifie au complété $\widehat{Y}$ de Y le long du sous-schéma fermé Y' défini par l'idéal J. Soient $f : X \to Y$ un morphisme propre de présentation finie, X' l'image réciproque de Y' par f ; donc (X, X') est une paire idyllique (2.6.17). Nous désignons par $\widehat{X}$ le complété de X le long de X' et par $\hat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ le prolongement de f aux complétés. Pour tout $\mathscr{O}_X$-module cohérent $\mathscr{F}$, nous notons $\widehat{\mathscr{F}}$ son complété $\mathscr{F}_{/X'}$ le long de X', qui est un $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-module cohérent (2.8.4).

Proposition 2.13.2. *Pour tout $\mathscr{O}_X$-module cohérent $\mathscr{F}$, les homomorphismes canoniques* (2.12.1.7)

$$\theta_q : \mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^q(\widehat{X}, \widehat{\mathscr{F}})$$

sont des isomorphismes.

Comme $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{F})$ est un A-module cohérent (1.4.8 et 2.6.18), donc complet et séparé pour la topologie J-adique (1.10.2), la proposition n'est qu'un cas particulier de 2.12.3.

Proposition 2.13.3. *Soient $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ deux $\mathscr{O}_X$-modules cohérents. Alors, pour tout entier $n \geq 0$, on a un isomorphisme canonique de A-modules cohérents*

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{O}_X}(X; \mathscr{F}, \mathscr{G}) \simeq \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{O}_{\widehat{X}}}(\widehat{X}; \widehat{\mathscr{F}}, \widehat{\mathscr{G}}). \tag{2.13.3.1}$$

Il existe une suite spectrale birégulière $\mathrm{E}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ dont l'aboutissement est $\mathrm{Ext}_{\mathscr{O}_X}(X; \mathscr{F}, \mathscr{G})$ et dont les termes E_2 sont donnés par $\mathrm{E}_2^{pq} = \mathrm{H}^p(X, \mathscr{E}xt^q_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G}))$; on note $\mathrm{E}(\widehat{\mathscr{F}}, \widehat{\mathscr{G}})$ la suite spectrale analogue relative à $\widehat{\mathscr{F}}$ et $\widehat{\mathscr{G}}$. On sait que $\mathscr{E}xt^q_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ est un $\mathscr{O}_X$-module cohérent (2.6.18 et [30] 0.12.3.3). On conclut que les E_2^{pq} sont des A-modules cohérents (1.4.8 et 2.6.18), et par suite il en est de même des termes E_r^{pq} de la suite spectrale et de son aboutissement. D'autre part, si $i : \widehat{X} \to X$ est le morphisme canonique (2.5.3), $\widehat{\mathscr{F}}$ et $\widehat{\mathscr{G}}$ s'identifient canoniquement à $i^*(\mathscr{F})$ et $i^*(\mathscr{G})$ (2.5.5) et i est plat (2.6.19). Donc pour tout $q \geq 0$, le $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-homomorphisme canonique $u_q : i^*(\mathscr{E}xt^q_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})) \to \mathscr{E}xt^q_{\mathscr{O}_{\widehat{X}}}(\widehat{\mathscr{F}}, \widehat{\mathscr{G}})$ est un isomorphisme ([30] 0.12.3.5) ; autrement dit, $\mathscr{E}xt^q_{\mathscr{O}_{\widehat{X}}}(\widehat{\mathscr{F}}, \widehat{\mathscr{G}})$ s'identifie au complété $(\mathscr{E}xt^q_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G}))^\wedge$. On conclut alors de 2.13.2 que pour tout $p \geq 0$, $\mathrm{H}^p(\widehat{X}, \mathscr{E}xt^q_{\mathscr{O}_{\widehat{X}}}(\widehat{\mathscr{F}}, \widehat{\mathscr{G}}))$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{H}^p(X, \mathscr{E}xt^q_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G}))$. On voit donc qu'on a, à un isomorphisme canonique près, $\mathrm{E}_2^{pq}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) = \mathrm{E}_2^{pq}(\widehat{\mathscr{F}}, \widehat{\mathscr{G}})$. Cela étant, on sait que la donné du morphisme plat i définit un homomorphisme canonique de suites spectrales ([30] 0.12.3.4)

$$\varphi : \mathrm{E}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \to \mathrm{E}(\widehat{\mathscr{F}}, \widehat{\mathscr{G}})$$

dont le terme E_2 (resp. l'aboutissement) se réduit à l'homomorphisme

$$\varphi_2^{pq} : \mathrm{H}^p(X, \mathscr{E}xt^q(\mathscr{F}, \mathscr{G})) \to \mathrm{H}^p(\widehat{X}, \mathscr{E}xt^q(\widehat{\mathscr{F}}, \widehat{\mathscr{G}}))$$
$$(\text{resp. } \varphi^n : \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{O}_X}(X, \mathscr{F}, \mathscr{G}) \to \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{O}_{\widehat{X}}}(\widehat{X}, \widehat{\mathscr{F}}, \widehat{\mathscr{G}}))$$

déduit de u_q (resp. u_0) par fonctorialité. Comme les φ_2^{pq} sont des isomorphismes, il en est de même des φ^n.

Corollaire 2.13.4. *Soient $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ deux $\mathscr{O}_X$-modules cohérents. Alors l'homomorphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\widehat{X}}}(\widehat{\mathscr{F}}, \widehat{\mathscr{G}}) \tag{2.13.4.1}$$

qui, à tout homomorphisme $u \colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$, fait correspondre son complété $\hat{u} : \widehat{\mathscr{F}} \to \widehat{\mathscr{G}}$, est un isomorphisme. De plus, pour que $\hat{u}$ soit injectif (*resp. surjectif*)*, il faut et il suffit que u le soit.*

La première assertion est un cas particulier de 2.13.3. Pour démontrer la seconde, notons en vertu de 2.6.22 que $\hat{u}$ est injectif (resp. surjectif) si et seulement s'il existe un voisinage de X' dans lequel u soit injectif (resp. surjectif). La conclusion résulte donc du lemme suivant :

Lemme 2.13.5. *Tout voisinage de X' dans X est identique à X.*

Si V est un voisinage ouvert de X' dans X, $f(X - V)$ est fermé dans Y, et ne rencontre pas Y' ; mais cela est impossible à moins que $X - V$ ne soit vide, puisque J est contenu dans le radical de A ([12] chap. III §2.13 lem. 3), d'où la conclusion.

2.13.6. Nous dirons provisoirement qu'un $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-module cohérent est algébrisable s'il est isomorphe à un complété $\widehat{\mathscr{F}}$ d'un $\mathscr{O}_X$-module cohérent $\mathscr{F}$.

Lemme 2.13.7. *Soient $\mathscr{F}', \mathscr{G}'$ deux $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-modules cohérents algébrisables. Pour tout homomorphisme $u : \mathscr{F}' \to \mathscr{G}'$,* $\ker(u)$, $\mathrm{im}(u)$ *et* $\mathrm{coker}(u)$ *sont algébrisables.*

En effet, on a $\mathscr{F}' = \widehat{\mathscr{F}}$, $\mathscr{G}' = \widehat{\mathscr{G}}$, où $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont des $\mathscr{O}_X$-modules cohérents, et on a $u = \hat{v}$, où $v : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est un homomorphisme (2.13.4). En vertu de 2.5.5(i), $\ker(\hat{v})$ est isomorphe à $(\ker(v))^\wedge$, donc algébrisable ; démonstration analogue pour $\mathrm{im}(u)$ et $\mathrm{coker}(u)$.

Théorème 2.13.8. *Les hypothèses étant celles de* (2.13.1)*, supposons de plus que le morphisme f soit projectif. Alors le foncteur $\mathscr{F} \mapsto \widehat{\mathscr{F}}$ est une équivalence de la catégorie des $\mathscr{O}_X$-modules cohérents et de la catégorie des $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-modules cohérents.*

Notons tout d'abord que sous les hypothèses de (2.13.1), il revient au même de demander que f soit projectif ou qu'il existe un $\mathscr{O}_X$-module inversible ample $\mathscr{L}$ (1.4.8, 1.12.15 et [29] 5.5.4(i)). On pose $Y_n = \mathrm{Spec}(A/J^{n+1})$, $X_n = \widehat{X} \times_{\widehat{Y}} Y_n$, et pour tout $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-module $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_n = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\widehat{X}}} \mathscr{O}_{X_n} = \mathscr{F}/J^{n+1}\mathscr{F}$. Alors X_n est égal au sous-schéma fermé $X \times_Y Y_n = f^{-1}(Y_n)$ de X ; si $\widehat{\mathscr{L}}$ est le complété de $\mathscr{L}$, on a $\widehat{\mathscr{L}_0} = \mathscr{L}/J\mathscr{L}$ qui est un $\mathscr{O}_{X_0}$-module ample ([29] 4.6.13). On peut donc appliquer à $\widehat{\mathscr{L}}$ et tout $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-module cohérent $\mathscr{F}$ le corollaire 2.11.11 ; on voit donc que $\mathscr{F}$ est isomorphe à un quotient de $\mathscr{G} = (\widehat{\mathscr{L}}^{\otimes(-k)})^m$ pour des entiers $k > 0$ et $m > 0$ convenables. Or, il est clair que $\mathscr{G}$ est le complété de $(\mathscr{L}^{\otimes(-k)})^m$ (2.5.5), donc est algébrisable. Le noyau $\mathscr{H}$ de l'homomorphisme canonique $\mathscr{G} \to \mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-module cohérent (1.3.4). On voit de même qu'il existe un $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-module cohérent algébrisable $\mathscr{K}$ et un homomorphisme $v : \mathscr{K} \to \mathscr{G}$ tel que $\mathscr{H} = \mathrm{im}(v)$. On a alors $\mathscr{F} = \mathrm{coker}(v)$, et $\mathscr{F}$ est algébrisable en vertu de 2.13.7.

Corollaire 2.13.9. *Sous les hypothèses de* (2.13.8)*, l'application $Z \mapsto Z_{/Z\cap X'}$ est une bijection de l'ensemble des sous-schémas fermés de présentation finie Z de X, sur l'ensemble des sous-schémas fermés de $\widehat{X}$.*

On notera d'abord que pour qu'un sous-schéma fermé de X soit de présentation finie, il faut et il suffit qu'il soit défini par un idéal cohérent de $\mathscr{O}_X$ (2.6.18). Un sous-schéma fermé de $\widehat{X}$ est de la forme $(T, (\mathscr{O}_{\widehat{X}}/\mathscr{A})|T)$, où $\mathscr{A}$ est un idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$ (2.9.1). Il résulte de 2.13.8 que $\mathscr{O}_{\widehat{X}}/\mathscr{A}$ est isomorphe à un $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-module de la forme $\widehat{\mathscr{F}}$, où $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_X$-module cohérent ; en outre, il résulte de 2.13.4 que l'homomorphisme canonique $\mathscr{O}_{\widehat{X}} \to \mathscr{O}_{\widehat{X}}/\mathscr{A}$ est de la forme $\hat{u}$, où $u\colon \mathscr{O}_X \to \mathscr{F}$ est un homomorphisme surjectif de $\mathscr{O}_X$-modules. Donc $\mathscr{F}$ est de la forme $\mathscr{O}_X/\mathscr{N}$, où $\mathscr{N}$ est un idéal cohérent de $\mathscr{O}_X$, et $\mathscr{A} = \widehat{\mathscr{N}}$ (2.5.5) ; d'où la conclusion.

2.14 Invariants normaux d'une immersion

2.14.1. Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $f = (\Psi, \theta)\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ une immersion. Il résulte aussitôt de la définition (2.9.3) que l'homomorphisme $\theta\colon \Psi^*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \to \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$ est surjectif, de sorte que $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$ s'identifie à un faisceau d'anneaux quotient $\Psi^*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})/\mathscr{A}_f$. Suivant ([31] 16.1.2), le faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-augmenté $\Psi^*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})/\mathscr{A}_f^{r+1}$ est appelé le r-ième *invariant normal* de f. L'espace annelé $(\mathfrak{Y}, \Psi^*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})/\mathscr{A}_f^{r+1})$ est appelé *r-ième voisinage infinitésimal* de $\mathfrak{Y}$ dans $\mathfrak{X}$, et noté $\mathfrak{Y}_f^{(r)}$ ou simplement $\mathfrak{Y}^{(r)}$. Le faisceau d'anneaux gradués associé au faisceau d'anneaux filtrés $\Psi^*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$

$$\mathrm{Gr}_\bullet(f) = \oplus_{r\geq 0}(\mathscr{A}_f^r/\mathscr{A}_f^{r+1}) \tag{2.14.1.1}$$

est appelé le faisceau d'anneaux gradués associé à f ; c'est un faisceau d'algèbres graduées sur le faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}} = \mathrm{Gr}_0(f)$. Le faisceau $\mathrm{Gr}_1(f) = \mathscr{A}_f/\mathscr{A}_f^2$ est appelé le *faisceau conormal* de f ; on le note aussi $\mathscr{N}_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{X}}$.

2.14.2. Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathfrak{Y}$ un sous-schéma de $\mathfrak{X}$, $j = (\Psi, \theta)\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ l'injection canonique. On désigne par U le plus grand ouvert de $\mathfrak{X}$

contenant $\mathfrak{Y}$ tel que $\mathfrak{Y}$ soit fermé dans U, par $\mathscr{A}$ l'idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|U$ qui définit $\mathfrak{Y}$ comme sous-schéma fermé de $(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|U)$, par $j_0 = (\Psi_0, \theta_0)\colon \mathfrak{Y} \to (U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|U)$ l'injection canonique. Compte tenu de l'exactitude du foncteur Ψ_0^*, on a $\mathscr{A}_j = \Psi_0^*(\mathscr{A})$, $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{(r)}} = \Psi_0^*((\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|U)/\mathscr{A}^{r+1})$ et $\mathrm{Gr}_r(j) = \Psi_0^*(\mathscr{A}^r/\mathscr{A}^{r+1}) = j_0^*(\mathscr{A}^r/\mathscr{A}^{r+1})$. On en déduit que $\mathfrak{Y}^{(r)}$ est le sous-schéma fermé de $(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|U)$ défini par l'idéal cohérent $\mathscr{A}^{r+1}$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|U$, et $\mathrm{Gr}_r(j)$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module cohérent (2.8.11).

Proposition 2.14.3. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ une immersion. Alors :*

(i) *Les $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-modules $\mathrm{Gr}_r(f)$ sont cohérents.*

(ii) *Les $\mathfrak{Y}^{(r)}$ forment un système inductif de schémas formels idylliques, ayant tous pour espace sous-jacent l'espace $\mathfrak{Y}$. Pour $0 \leq r \leq t$, le morphisme de transition $h_{rt}\colon \mathfrak{Y}^{(r)} \to \mathfrak{Y}^{(t)}$ est une immersion fermée, et le morphisme canonique $h_r\colon \mathfrak{Y}^{(r)} \to \mathfrak{X}$ est une immersion.*

2.14.4. Soient $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$ deux schémas formels idylliques, $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$, $f'\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{X}'$ deux immersions ; considérons un diagramme commutatif de morphismes de schémas formels

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{Y}' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "u"'] & \mathfrak{X}' \arrow[d, "v"] \\ \mathfrak{Y} \arrow[r, "f"] & \mathfrak{X} \end{tikzcd} \tag{2.14.4.1}$$

Posons $u = (\rho, \lambda)$. D'après ([31] 16.2.1), pour tout $r \geq 0$, il existe un morphisme canonique de schémas formels

$$w_r = (\rho, \nu_r)\colon \mathfrak{Y}'^{(r)} \to \mathfrak{Y}^{(r)}, \tag{2.14.4.2}$$

qui pour $n = 0$ n'est autre que u. En outre, les diagrammes

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{Y}'^{(r)} \arrow[r, "h'_{rt}"] \arrow[d, "w_r"'] & \mathfrak{Y}'^{(t)} \arrow[r, "h'_t"] \arrow[d, "w_t"'] & \mathfrak{X}' \arrow[d, "v"] \\ \mathfrak{Y}^{(r)} \arrow[r, "h_{rt}"] & \mathfrak{Y}^{(t)} \arrow[r, "h_t"] & \mathfrak{X} \end{tikzcd}$$

sont commutatifs pour $r \leq t$.

Par passage aux quotients à partir des homomorphismes ν_r, et en tenant compte de l'exactitude du foncteur ρ^*, on obtient un ρ-morphisme d'algèbres graduées

$$\mathrm{gr}(u)\colon \rho^*(\mathrm{Gr}_\bullet(f)) \to \mathrm{Gr}_\bullet(f'). \tag{2.14.4.3}$$

Il en résulte un homomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'}$-algèbres graduées

$$\mathrm{Gr}(u) = \mathrm{gr}(u) \otimes 1\colon u^*(\mathrm{Gr}_\bullet(f)) \to \mathrm{Gr}_\bullet(f'). \tag{2.14.4.4}$$

Proposition 2.14.5. *Les hypothèses étant celles de* (2.14.4), *supposons de plus que* $\mathfrak{Y}' = \mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}'$, *$f'$ et u étant les projections canoniques. Alors* $\mathfrak{Y}'^{(r)} = \mathfrak{Y}^{(r)} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}'$ *et* $\mathrm{Gr}(u)$ *est surjectif.*

On peut se borner au cas où $\mathfrak{Y}$ est un sous-schéma fermé de $\mathfrak{X}$ défini par un idéal cohérent $\mathscr{A}$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, f étant l'injection canonique. Alors $\mathfrak{Y}^{(r)}$ est le sous-schéma de $\mathfrak{X}$ défini par l'idéal $\mathscr{A}^{r+1}$, et la proposition résulte de 2.9.9.

Proposition 2.14.6. *Considérons un diagramme cartésien de morphismes de schémas formels idylliques*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "v"'] & \mathfrak{Y}' \arrow[d, "u"] \\ \mathfrak{X} \arrow[r, "g"] & \mathfrak{Y} \end{tikzcd} \tag{2.14.6.1}$$

tel que g et g' soient adiques. Soient $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ une section de g, $f'\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{X}'$ la section de g' déduite de f par le changement de base u. Supposons que f soit une immersion (*donc f' est aussi une immersion*). *On note $\mathfrak{Y}^{(r)}$* (*resp. $\mathfrak{Y}'^{(r)}$*) *le r-ième voisinage infinitésimal de $\mathfrak{Y}$ dans $\mathfrak{X}$* (*resp. de $\mathfrak{Y}'$ dans $\mathfrak{X}'$*), *$h_r\colon \mathfrak{Y}^{(r)} \to \mathfrak{X}$, $h'_r\colon \mathfrak{Y}'^{(r)} \to \mathfrak{X}'$ et $w_r\colon \mathfrak{Y}'^{(r)} \to \mathfrak{Y}^{(r)}$ les morphismes canoniques. On munit $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{(r)}}$* (*resp. $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'^{(r)}}$*) *de la structure de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-algèbre définie par g* (*resp. de la structure de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'}$-algèbre définie par g'*). *Alors :*

(i) *On a* $\mathfrak{Y}'^{(r)} = \mathfrak{Y}^{(r)} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}'$.

(ii) *La $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-algèbre $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{(r)}}$ est cohérente ; le morphisme $g \circ h_r$ est fini et de présentation finie.*

(iii) *L'homomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'}$-algèbres*

$$u^{-1}(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{(r)}}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'^{(r)}} \tag{2.14.6.2}$$

déduit de w_r est bijectif. En outre, le morphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'}$-modules (2.14.4.4)

$$\mathrm{Gr}_1(u)\colon u^*(\mathrm{Gr}_1(f)) \to \mathrm{Gr}_1(f') \tag{2.14.6.3}$$

est bijectif.

(i) Notons d'abord que les morphismes f' et u identifient $\mathfrak{Y}'$ au produit $\mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}'$ (pour les morphismes structuraux $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ et $v\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$). Par suite, f' est une immersion (2.9.9) et la conclusion de (i) résulte de 2.14.5.

(ii) La $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-algèbre $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{(r)}}$ est munie d'une augmentation canonique $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{(r)}} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$. L'algèbre graduée associée à la filtration de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{(r)}}$ définie par l'idéal d'augmentation s'identifie à $\oplus_{0 \le i \le r} \mathrm{Gr}_i(f)$. Par suite, la $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-algèbre $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{(r)}}$ est cohérent, et le morphisme $g \circ h_r$ est fini et de présentation finie (car il est adique et affine).

(iii) D'après (i), le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{Y}'^{(r)} \arrow[r, "h'_r"] \arrow[d, "w_r"'] & \mathfrak{X}' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "v"] & \mathfrak{Y}' \arrow[d, "u"] \\
\mathfrak{Y}^{(r)} \arrow[r, "h_r"] & \mathfrak{X} \arrow[r, "g"] & \mathfrak{Y}
\end{tikzcd}$$

identifie $\mathfrak{Y}'^{(r)}$ au produit $\mathfrak{Y}^{(r)} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}'$. On en déduit, en vertu de (ii) et 2.8.19(ii), que l'homomorphisme (2.14.6.2) est bijectif. D'autre part, l'homomorphisme (2.14.6.2) est compatible avec les augmentations canoniques. Comme $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{(r)}}$ est somme directe (en tant que $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module) de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$ et de l'idéal d'augmentation $\mathscr{A}_f/\mathscr{A}_f^{r+1}$, on voit donc que l'homomorphisme (2.14.6.2) restreint à $(\mathscr{A}_f/\mathscr{A}_f^{r+1}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'}$ est une bijection de ce dernier sur $\mathscr{A}_{f'}/\mathscr{A}_{f'}^{r+1}$. Pour $r = 1$, cela montre que $\mathrm{Gr}_1(u)$ est bijectif.

Remarque 2.14.7. Soient $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Y}'$ des schémas formels idylliques, $g\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme localement de présentation finie, $u\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$ un morphisme, $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}'$, $g'\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{Y}'$ la projection canonique. Soient $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ une section de g (donc une immersion) et $f'\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{X}'$ la section de g' déduite de f par le changement de base u. Alors g' est localement de présentation finie (2.3.19), $\mathfrak{X}'$ est idyllique (2.6.13) et la proposition 2.14.6 s'applique dans ce cas.

2.14.8. Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$, $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ une immersion fermée. On déduit de f des immersions de schémas usuels $f_n\colon \mathfrak{Y}_n \to \mathfrak{X}_n$ en posant $\mathscr{K} = f^*(\mathscr{J})\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$, $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$, $\mathfrak{Y}_n = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}^{n+1})$ (2.9.5). Le diagramme de morphismes de schémas formels

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{Y}_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "u_n"'] & \mathfrak{X}_n \arrow[d, "v_n"] \\
\mathfrak{Y} \arrow[r, "f"] & \mathfrak{X}
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les morphismes canoniques est cartésien (2.2.9). Appliquant (2.14.4.4), on obtient un homomorphisme surjectif (2.14.5) de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_n}$-algèbres graduées

$$\mathrm{Gr}(u_n)\colon u_n^*(\mathrm{Gr}_\bullet(f)) \to \mathrm{Gr}_\bullet(f_n). \tag{2.14.8.1}$$

En vertu de 2.14.3(i) et 2.8.5, ces homomorphismes donnent à la limite, en chaque degré r, un homomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-modules topologiques

$$\mathrm{Gr}_r(f) \to \varprojlim_n \mathrm{Gr}_r(f_n). \tag{2.14.8.2}$$

Proposition 2.14.9. *Les hypothèses étant celles de* (2.14.8), *supposons de plus que les* (f_n) *soient des immersions régulières de même codimension. Alors l'homomorphisme* $\mathrm{Gr}(u_n)$ (2.14.8.1) *est bijectif pour tout* $n \geq 0$, *et l'homomorphisme* (2.14.8.2) *est un isomorphisme topologique de* $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$*-modules localement libres de type fini.*

La seconde assertion résulte immédiatement de la première à l'aide de 2.8.9. Pour la première assertion, la question étant locale, on peut se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ est formel affine globalement idyllique, $\mathfrak{Y}$ est un sous-schéma de $\mathfrak{X}$ défini par un idéal cohérent $\mathscr{A}$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$. Il existe un entier $N \geq 0$ tel que $\mathscr{A} \cap \mathscr{J}^{N+1} \subset \mathscr{J}\mathscr{A}$ (1.10.2, 2.7.2.1 et (2.7.2.4)). Montrons d'abord que $\mathrm{Gr}(u_n)$ (2.14.8.1) est un isomorphisme pour tout $n \geq N$ Posons $\mathfrak{a} = \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{A})$ et $J = \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{J})$. Quitte à se localiser un peu plus sur $\mathfrak{X}$, on peut supposer les conditions suivantes remplies :

(i) Il existe une suite d'éléments $(a_i)_{1 \leq i \leq t}$ de A qui est (A/J^{n+1})-régulière et qui engendre $\mathfrak{a}/(\mathfrak{a} \cap J^{n+1})$;

(ii) $\mathfrak{a} \cap J^{n+1} \subset J\mathfrak{a}$ (toujours en vertu de 2.7.2.1 et (2.7.2.4)).

Par suite, les a_i engendrent $\mathfrak{a}/J\mathfrak{a}$, et donc aussi $\mathfrak{a}$ (1.8.5). En vertu de ([31] 16.9.13.2), on a, pour tout $r \geq 0$,

$$\mathfrak{a}^r \cap J^{n+1} = \mathfrak{a}^r J^{n+1} + \mathfrak{a}^{r+1} \cap J^{n+1}. \tag{2.14.9.1}$$

L'homomorphisme $\mathrm{Gr}(u_n)$ en degré r est associé au morphisme surjectif de (A/J^{n+1})-modules

$$(\mathfrak{a}^r/\mathfrak{a}^{r+1}) \otimes_A (A/J^{n+1}) \to (\mathfrak{a}^r + J^{n+1})/(\mathfrak{a}^{r+1} + J^{n+1}).$$

Ce dernier a pour noyau

$$\frac{\mathfrak{a}^r \cap (\mathfrak{a}^{r+1} + J^{n+1})}{\mathfrak{a}^{r+1} + \mathfrak{a}^r J^{n+1}} = \frac{\mathfrak{a}^{r+1} + \mathfrak{a}^r \cap J^{n+1}}{\mathfrak{a}^{r+1} + \mathfrak{a}^r J^{n+1}},$$

qui est nul d'après (2.14.9.1). Par suite, $\mathrm{Gr}(u_n)$ est un isomorphisme pour tout $n \geq N$. Pour achever la preuve, il suffit d'observer que, pour tout entier $r \geq 0$ et tout couple d'entiers (m, n) tel que $0 \leq m \leq n$, l'homomorphisme canonique surjectif $\mathrm{Gr}_r(f_n) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_n}} \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_m} \to \mathrm{Gr}_r(f_m)$ est bijectif, puisque les deux membres sont des $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_m}$-modules localement libres de même rang.

Proposition 2.14.10. *Soient* $g\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ *un morphisme localement de type fini de schémas formels idylliques,* $\mathscr{K}$ *un idéal de définition cohérent de* $\mathfrak{Y}$, $\mathscr{J} = g^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ *; posons* $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$, $\mathfrak{Y}_n = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}^{n+1})$ $(n \geq 0)$ *et soit* $g_n\colon \mathfrak{X}_n \to \mathfrak{Y}_n$ *le morphisme déduit de* g. *Soient* $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ *une section de* g, *donc une immersion* (2.9.11), $f_n\colon \mathfrak{Y}_n \to \mathfrak{X}_n$ *la section de* g_n *déduite de* f. *Alors la composante de degré* 1 *de l'homomorphisme* (2.14.8.1) *est bijective, et l'homomorphisme* (2.14.8.2) *pour* $r = 1$ *est un isomorphisme topologique.*

Cela résulte de 2.14.7 et 2.8.5.

2.14.11. Considérons le cas particulier du diagramme (2.14.4.1) où $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X}$, v étant l'identité, $\mathfrak{Y}$ est un sous-schéma de $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}'$ est un sous-schéma de $\mathfrak{Y}$, f, u et $f' = f \circ u$ les injections canoniques. Comme ρ^* est un foncteur exact, on a $\rho^*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}) = \rho^*(\Psi^*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})/\mathscr{A}_f) = \Psi'^*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})/\rho^*(\mathscr{A}_f)$, et comme $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'}$ s'identifie à $\Psi'^*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})/\mathscr{A}_{f'}$, on voit que l'on a $\mathscr{A}_u = \mathscr{A}_{f'}/\rho^*(\mathscr{A}_f)$. On en déduit un homomorphisme canonique de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'}$-algèbres graduées

$$\mathrm{Gr}_\bullet(f') \to \mathrm{Gr}_\bullet(u). \tag{2.14.11.1}$$

Proposition 2.14.12. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathfrak{Y}$ un sous-schéma de $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}'$ un sous-schéma de $\mathfrak{Y}$, $j\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$ l'injection canonique. On a alors une suite exacte canonique de faisceaux conormaux*

$$j^*(\mathscr{N}_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{X}}) \to \mathscr{N}_{\mathfrak{Y}'/\mathfrak{X}} \to \mathscr{N}_{\mathfrak{Y}'/\mathfrak{Y}} \to 0,$$

où les flèches sont les composantes de degré 1 *des homomorphismes canoniques* (2.14.4.4) *et* (2.14.11.1).

La question étant locale, on peut se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A/\mathfrak{a})$, $\mathfrak{Y}' = \mathrm{Spf}(A/\mathfrak{b})$, A étant un anneau idyllique, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ étant deux idéaux cohérents de A tels que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$. Compte tenu de 2.7.2.1 et 2.7.4, tout revient à voir que la suite canonique $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{b} \to \mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2 \to (\mathfrak{b}/\mathfrak{a})/(\mathfrak{b}/\mathfrak{a})^2 \to 0$ est exacte, ce qui est immédiat.

2.15 Invariants différentiels fondamentaux d'un morphisme

2.15.1. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme localement de présentation finie de schémas formels idylliques, $\Delta_f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{X}$ le morphisme diagonal correspondant, qui est une immersion de schémas formels idylliques (2.9.12). On désigne par $\mathscr{P}^r_f$ ou $\mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$, et l'on appelle *faisceau des parties principales d'ordre r de f*, le faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-augmentés, r-ième invariant normal de Δ_f (2.14.1). On pose $\mathscr{P}^\infty_f = \mathscr{P}^\infty_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}} = \varprojlim \mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$, $\mathrm{Gr}_r(\mathscr{P}_f) = \mathrm{Gr}_r(\mathscr{P}_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) = \mathrm{Gr}_r(\Delta_f)$; le $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module $\mathrm{Gr}_1(\Delta_f)$, idéal d'augmentation de $\mathscr{P}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$, est aussi noté Ω^1_f ou $\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$, et appelé le $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module des 1-*différentielles* de f, ou de $\mathfrak{X}$ par rapport à $\mathscr{S}$, ou du $\mathscr{S}$-schéma formel $\mathfrak{X}$.

Il résulte de cette définition que les $\mathrm{Gr}_n(\mathscr{P}_f)$ sont des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents (2.14.3), et pour tout ouvert U de $\mathfrak{X}$, on a $\mathscr{P}^r_f|U = \mathscr{P}^r_{f|U}$, $\mathrm{Gr}_r(\mathscr{P}_f)|U = \mathrm{Gr}_r(\mathscr{P}_{f|U})$ et $\Omega^1_f|U = \Omega^1_{f|U}$.

2.15.2. Notons p_1, p_2 les deux projections canoniques du produit $\mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{X}$. Chacun de ces morphismes définit, pour tout r, un homomorphisme d'anneaux $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \to \mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ inverse à droite de l'augmentation $\mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$. La structure de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbre sur $\mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ déduite de p_1 (resp. p_2) sera nommée gauche (resp. droite), et quand on regardera $\mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ comme une $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbre sans préciser, il sera sous-entendu qu'il s'agit de la structure gauche. On désigne par d^r_f, ou $d^r_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$, ou simplement d^r, l'homomorphisme d'anneaux $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \to \mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ déduit de p_2. Pour tout ouvert U de $\mathfrak{X}$ et tout $t \in \Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$, on pose $dt = d^1 t - t$, et on dit que dt est la *différentielle* de t (élément de $\Gamma(U, \Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})$, aussi noté $d_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}(t)$).

2.15.3. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$, $f'\colon \mathfrak{X}' \to \mathscr{S}'$ deux morphismes localement de présentation finie de schémas formels idylliques. Considérons un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f'"'] & \mathfrak{X} \arrow[d, "f"] \\ \mathscr{S}' \arrow[r, "w"] & \mathscr{S} \end{tikzcd} \tag{2.15.3.1}$$

On en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\Delta_{f'}"'] & \mathfrak{X} \arrow[d, "\Delta_f"] \\ \mathfrak{X}' \times_{\mathscr{S}'} \mathfrak{X}' \arrow[r, "v"] & \mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{X} \end{tikzcd}$$

où v est induit par u et w. Comme il a été expliqué dans 2.14.4, il en résulte des homomorphismes de faisceaux d'anneaux augmentés

$$\nu_r\colon \rho^*(\mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \to \mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}'/\mathscr{S}'} \tag{2.15.3.2}$$

où l'on a posé $u = (\rho, \lambda)$. On vérifie aussitôt que ν_r est un ρ-morphisme d'algèbres quand on munit $\mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ (resp. $\mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}'/\mathscr{S}'}$) de la structure de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ (resp. $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$) algèbre choisie dans (2.15.2). On en déduit donc un homomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$-algèbres augmentées

$$\mathrm{P}^r(u)\colon u^*(\mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) = \mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}'} \to \mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}'/\mathscr{S}'}. \tag{2.15.3.3}$$

Il en résulte un homomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$-algèbres graduées

$$\mathrm{Gr}(u) = \mathrm{gr}(u) \otimes 1\colon u^*(\mathrm{Gr}_\bullet(\mathscr{P}_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})) \to \mathrm{Gr}_\bullet(\mathscr{P}_{\mathfrak{X}'/\mathscr{S}'}). \tag{2.15.3.4}$$

Proposition 2.15.4. *Les hypothèses étant celles de* (2.15.3)*, supposons de plus que* $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathscr{S}'$*,* f' *et* u *étant les projections canoniques. Alors les homomorphismes canoniques* $\mathrm{P}^r(u)$ (2.15.3.3) *et* $\mathrm{Gr}_1(u)$ (2.15.3.4) *sont bijectifs.*

En effet, on a alors $\mathfrak{X}' \times_{\mathscr{S}'} \mathfrak{X}' = (\mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{X}) \times_{\mathscr{S}} \mathscr{S}'$ et compte tenu de 2.14.7, on peut appliquer 2.14.6(iii) en remplaçant g par la première projection $p_1\colon \mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ et f par la diagonale Δ_f.

Proposition 2.15.5. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme localement de présentation finie de schémas formels idylliques, $\mathscr{I}$ un idéal de définition cohérent de $\mathscr{S}$, $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{I})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$, $\mathscr{S}_n = (\mathscr{S}, \mathscr{O}_{\mathscr{S}}/\mathscr{I}^{n+1})$, $f_n\colon \mathfrak{X}_n \to \mathscr{S}_n$ le morphisme déduit de f. Alors le $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$-module $\Omega^1_{\mathfrak{X}_n/\mathscr{S}_n}$ est canoniquement isomorphisme à $\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$; en particulier, le $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ est limite projective de la suite $(\Omega^1_{\mathfrak{X}_n/\mathscr{S}_n})$.*

En effet, on a alors $\mathfrak{X}_n \times_{\mathscr{S}_n} \mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{X}) \times_{\mathscr{S}} \mathscr{S}_n$ et on peut appliquer 2.14.10 en remplaçant g par la première projection $p_1\colon \mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ et f par la diagonale Δ_f.

2.15.6. Soient A un anneau idyllique, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie, $\mathscr{S} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B)$. Alors $\Delta_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ correspond à l'homomorphisme surjectif $\varpi\colon B\widehat{\otimes}_A B \to B$ tel que $\varpi(b\widehat{\otimes}b') = bb'$, de noyau $\mathfrak{J}$ cohérent ; $\mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ est le faisceau structural du schéma formel $\mathrm{Spf}((B\widehat{\otimes}_A B)/\mathfrak{J}^{r+1})$; $\mathrm{Gr}_r(\mathscr{P}_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})$ est le $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent correspondant au B-module $\mathfrak{J}^r/\mathfrak{J}^{r+1}$. Il résulte de 2.15.5 et 1.8.7(ii) que $\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ est le $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent associé au séparé complété $\widehat{\Omega}^1_{B/A}$ du B-module topologique $\Omega^1_{B/A}$ (1.14.1).

Proposition 2.15.7. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ deux morphismes localement de présentation finie de schémas formels idylliques. Considérons les homomorphismes canoniques de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbres augmentées* (2.15.3.3)

$$g_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}\colon \mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Z}} \to \mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \tag{2.15.7.1}$$

$$f_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}\colon f^*(\mathscr{P}^r_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}) \to \mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Z}}. \tag{2.15.7.2}$$

Alors $g_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}$ est surjectif, et son noyau est l'image par $f_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}$ de l'idéal d'augmentation de $f^*(\mathscr{P}^r_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}})$.

Il suffit de calquer la démonstration de ([31] 16.4.18), en utilisant 2.9.9 au lieu de (EGA I 4.4.5).

Corollaire 2.15.8. *Avec les notations de* (2.15.7), *on a une suite exacte canonique de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents*

$$f^*(\Omega^1_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}) \to \Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Z}} \to \Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \to 0.$$

Proposition 2.15.9. *Soient $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ un morphisme localement de présentation finie de schémas formels idylliques, $j\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ une immersion fermée, $\mathscr{A}$ l'idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$ correspondant à j. Alors on a $\mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} = \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, l'homomorphisme canonique $j_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}\colon j^*(\mathscr{P}^r_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}) \to \mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Z}}$ est surjectif, et son noyau est l'idéal de $j^*(\mathscr{P}^r_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}})$ engendré par $j^*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}.d^r_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}(\mathscr{A}))$.*

La première assertion résulte du fait que la diagonale $\Delta_j\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{X}$ est un isomorphisme. Soient ϖ_1, ϖ_2 les deux homomorphismes d'algèbres $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}} \to \mathscr{P}^r_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}$ correspondant respectivement aux deux projections canoniques p_1, p_2 de $\mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{Z}} \mathfrak{Y}$

sur $\mathfrak{Y}$. La $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbre $j^*(\mathscr{P}^r_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}})$ s'identifie donc à $\mathscr{P}^r_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}/\varpi_1(\mathscr{A})\mathscr{P}^r_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}$ et son quotient par l'idéal engendré par $j^*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}.d^r_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}(\mathscr{A}))$ à $\mathscr{P}^r_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}/(\varpi_1(\mathscr{A})+\varpi_2(\mathscr{A}))\mathscr{P}^r_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}$. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\Delta_{f\circ j}"'] & \mathfrak{Y} \arrow[d, "\Delta_f"] \\
\mathfrak{X}\times_{\mathfrak{Z}}\mathfrak{X} \arrow[r, "j\times_{\mathfrak{Z}} j"] & \mathfrak{Y}\times_{\mathfrak{Z}}\mathfrak{Y}
\end{tikzcd}$$

est cartésien car Δ_j est un isomorphisme. Soit $\Delta^r_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Z}}$ (resp. $\Delta^r_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}$) le voisinage infinitésimal d'ordre r de $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$) pour l'immersion $\Delta_{f\circ j}$ (resp. Δ_f). D'après 2.14.5, on a un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}
\Delta^r_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Z}} \arrow[r] \arrow[d, "\Delta_{f\circ j}"'] & \Delta^r_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}} \arrow[d, "\Delta_f"] \\
\mathfrak{X}\times_{\mathfrak{Z}}\mathfrak{X} \arrow[r, "j\times_{\mathfrak{Z}} j"] & \mathfrak{Y}\times_{\mathfrak{Z}}\mathfrak{Y}
\end{tikzcd}$$

Or $j\times_{\mathfrak{Z}} j$ est une immersion fermée et le sous-schéma de $\mathfrak{Y}\times_{\mathfrak{Z}}\mathfrak{Y}$ qui lui est associé est défini par l'idéal cohérent $(p_1^*(\mathscr{A})+p_2^*(\mathscr{A}))\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}\times_{\mathfrak{Z}}\mathfrak{Y}}$ (2.9.9). Donc $\mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Z}}$ s'identifie au quotient de $\mathscr{P}^r_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}$ par l'idéal engendré par l'image dans $\mathscr{P}^r_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}$ de $p_1^*(\mathscr{A})+p_2^*(\mathscr{A})$, qui n'est rien d'autre que l'idéal engendré par $\varpi_1^*(\mathscr{A})+\varpi_2^*(\mathscr{A})$.

Corollaire 2.15.10. *Soient $f\colon \mathfrak{Y}\to\mathfrak{Z}$ un morphisme localement de présentation finie de schémas formels idylliques, $j\colon \mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$ une immersion. On a une suite exacte canonique de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents*

$$\mathscr{N}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}\to j^*(\Omega^1_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}})\to\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Z}}\to 0.$$

Proposition 2.15.11. *Soient $\mathfrak{X}\to\mathscr{S}$, $\mathfrak{Y}\to\mathscr{S}$ deux morphismes localement de présentation finie de schémas formels idylliques, $\mathfrak{Z}=\mathfrak{X}\times_{\mathscr{S}}\mathfrak{Y}$, $p\colon \mathfrak{X}\times_{\mathscr{S}}\mathfrak{Y}\to\mathfrak{X}$ et $q\colon \mathfrak{X}\times_{\mathscr{S}}\mathfrak{Y}\to\mathfrak{Y}$ les projections canoniques. Alors l'homomorphisme canonique*

$$p_{\mathfrak{Z}/\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}\oplus q_{\mathfrak{Z}/\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}\colon p^*(\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})\oplus q^*(\Omega^1_{\mathfrak{Y}/\mathscr{S}})\to\Omega^1_{(\mathfrak{X}\times_{\mathscr{S}}\mathfrak{Y})/\mathscr{S}}$$

est bijectif.

Il suffit de calquer la démonstration de ([31] 16.4.23), en utilisant 2.15.4 et 2.15.7 au lieu de ([31] 16.4.5 et 16.4.18).

Proposition 2.15.12. *Soit $f\colon \mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$ un morphisme localement de présentation finie de schémas formels idylliques. Pour que f soit non ramifié, il faut et il suffit que $\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}=0$.*

La proposition se ramène à l'assertion correspondante pour les morphismes de schémas usuels ([31] 17.4.1) à l'aide de 2.4.7 et 2.15.5.

Proposition 2.15.13. *Soit $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme lisse de schémas formels idylliques.*

(i) *Le $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module $\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$ est localement libre de type fini.*

(ii) *Soit $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathscr{S}$ un morphisme localement de présentation finie de schémas formels idylliques. Alors la suite de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules* (2.15.7)

$$0 \to f^*(\Omega^1_{\mathfrak{Y}/\mathscr{S}}) \to \Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}} \to \Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \to 0 \tag{2.15.13.1}$$

est exacte et localement scindée.

Le proposition (i) et l'exactitude de (2.15.13.1) se ramènent aux assertions correspondantes pour les morphismes de schémas usuels ([31] 17.2.3) à l'aide de 2.8.9, 2.8.11 et 2.15.5. La dernière assertion de (ii) se déduit de (i).

Proposition 2.15.14 (Critère jacobien). *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme lisse de schémas formels idylliques, $j\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ une immersion, $h = f \circ j\colon \mathfrak{Y} \to \mathscr{S}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *h est lisse.*

(ii) *La suite de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-modules* (2.15.10)

$$0 \to \mathscr{N}_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{X}} \to j^*(\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \to \Omega^1_{\mathfrak{Y}/\mathscr{S}} \to 0 \tag{2.15.14.1}$$

est exacte et localement scindée.

(iii) *Pour tout $y \in \mathfrak{Y}$, l'homomorphisme canonique*

$$(\mathscr{N}_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{X}})_y \to (j^*(\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}))_y$$

est inversible à gauche.

(iv) *Pour tout $y \in \mathfrak{Y}$, l'homomorphisme canonique*

$$\mathscr{N}_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{X}} \otimes \kappa(y) \to (j^*(\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})) \otimes \kappa(y)$$

est injectif.

Notons d'abord que les conditions (ii), (iii) et (iv) sont équivalentes (2.15.10, 2.15.13(i) et 1.3.15). Montrons ensuite que les conditions (i) et (ii) sont équivalentes. On peut se borner au cas où $\mathscr{S} = \mathrm{Spf}(A)$ et $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B)$ sont formels affines globalement idylliques, avec $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B/\mathfrak{I})$, où $\mathfrak{I}$ est un idéal cohérent de B, et B est une A-algèbre topologiquement de présentation finie et formellement lisse (2.4.2). Compte tenu de 2.15.6, il suffit alors d'appliquer le critère jacobien (1.14.5).

2.15.15. Conservons les hypothèses de (2.15.14), supposons de plus h lisse. Soient $\mathscr{I}$ un idéal de définition cohérent de $\mathscr{S}$, $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{I})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathscr{K} = h^*(\mathscr{I})\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$. Posons $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$, $\mathfrak{Y}_n = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}^{n+1})$, $\mathscr{S}_n = (\mathscr{S}, \mathscr{O}_{\mathscr{S}}/\mathscr{I}^{n+1})$ $(n \geq 0)$ et soient $f_n\colon \mathfrak{X}_n \to \mathscr{S}_n$, $h_n\colon \mathfrak{Y}_n \to \mathscr{S}_n$, $j_n\colon \mathfrak{Y}_n \to \mathfrak{X}_n$ les morphismes déduits de f, h

et j respectivement. Il résulte de ([31] 17.12.1) que j_n est une immersion régulière et que la suite de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_n}$-modules

$$0 \to \mathscr{N}_{\mathfrak{Y}_n/\mathfrak{X}_n} \to j_n^*(\Omega^1_{\mathfrak{X}_n/\mathscr{S}_n}) \to \Omega^1_{\mathfrak{Y}_n/\mathscr{S}_n} \to 0 \tag{2.15.15.1}$$

est exacte et localement scindée. D'autre part, la suite de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_n}$-modules

$$0 \to \mathscr{N}_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{X}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_n} \to j_n^*(\Omega^1_{\mathfrak{X}_n/\mathscr{S}_n}) \to \Omega^1_{\mathfrak{Y}_n/\mathscr{S}_n} \to 0 \tag{2.15.15.2}$$

est exacte et localement scindée d'après 2.15.14(ii). On en déduit que l'homomorphisme canonique $\mathscr{N}_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{X}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_n} \to \mathscr{N}_{\mathfrak{Y}_n/\mathfrak{X}_n}$ est bijectif pour tout $n \geq 0$.

2.16 Dérivations et déformations infinitésimales

Définition 2.16.1 ([31] 16.5.1). Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme de schémas formels, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module. Une *$\mathscr{S}$-dérivation* de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ dans $\mathscr{F}$ est un morphisme de $f^{-1}(\mathscr{O}_{\mathscr{S}})$-modules $d\colon \mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \to \mathscr{F}$ tel que, pour tous ouvert U de $\mathfrak{X}$ et $x, y \in \Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$, on ait

$$d(xy) = xd(y) + yd(x). \tag{2.16.1.1}$$

Les $\mathscr{S}$-dérivations de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ dans $\mathscr{F}$ forment un $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-module $\mathrm{Dér}_{\mathscr{S}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}, \mathscr{F})$.

Une autre interprétation consiste à considérer la $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbre des nombres duaux sur $\mathscr{F}$

$$\mathrm{D}_{\mathfrak{X}}(\mathscr{F}) = \mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \oplus \mathscr{F} = \mathrm{S}_{\mathfrak{X}}(\mathscr{F}) / \oplus_{i \geq 2} \mathrm{S}^i_{\mathfrak{X}}(\mathscr{F}), \tag{2.16.1.2}$$

où $\mathrm{S}_{\mathfrak{X}}(\mathscr{F})$ est l'algèbre symétrique de $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$. On désigne par $\mathscr{O}_{\mathscr{S}}$-Alg$/\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ la catégorie des $f^{-1}(\mathscr{O}_{\mathscr{S}})$-algèbres au-dessus de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$. Alors l'application $d \mapsto \mathrm{id}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} + d$ est un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{Dér}_{\mathscr{S}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathscr{S}}\text{-}\mathrm{Alg}/\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}, \mathrm{D}_{\mathfrak{X}}(\mathscr{F})). \tag{2.16.1.3}$$

2.16.2. Soient $\mathscr{S}$ un schéma formel adique, $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme adique, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Considérons $\mathrm{D}_{\mathfrak{X}}(\mathscr{F})$ comme une $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbre topologique (2.8.10) et posons $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(\mathrm{D}_{\mathfrak{X}}(\mathscr{F}))$. Notons $p\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ le morphisme structural et $i\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ la section de p définie par l'augmentation canonique $\mathrm{D}_{\mathfrak{X}}(\mathscr{F}) \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$. On peut identifier canoniquement $\mathfrak{Y}$ à l'espace topologiquement annelé $(\mathfrak{X}, \mathrm{D}_{\mathfrak{X}}(\mathscr{F}))$. Il résulte de 2.8.5 que tout $f^{-1}(\mathscr{O}_{\mathscr{S}})$-homomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ dans $\mathrm{D}_{\mathfrak{X}}(\mathscr{F})$ est automatiquement continu ([28] 0.3.9.2). Par suite, on peut interpréter les $\mathscr{S}$-dérivations de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ dans $\mathscr{F}$ comme les $\mathscr{S}$-morphismes h de $\mathfrak{Y}$ dans $\mathfrak{X}$ tel que $h \circ i = \mathrm{id}_{\mathfrak{X}}$ (2.16.1.3).

Proposition 2.16.3. *Soient A un anneau adique, B une A-algèbre adique qui est un anneau idyllique, M un B-module cohérent, $\mathscr{S} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B)$, $\mathscr{F} = M^{\Delta}$. Notons* $\mathrm{Dér}_A(B, M)$ *le B-module des A-dérivations de B dans M. Alors l'application $D \mapsto \Gamma(D)$ qui, à toute $\mathscr{S}$-dérivation de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ dans $\mathscr{F}$ fait correspondre l'application $t \mapsto D(t)$ de B dans M, est un isomorphisme de B-modules de* $\mathrm{Dér}_{\mathscr{S}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}, \mathscr{F})$ *sur* $\mathrm{Dér}_A(B, M)$.

Cela résulte de l'interprétation donnée dans (2.16.2) des $\mathscr{S}$-dérivations, de l'interprétation des A-dérivations en termes de l'algèbre $\mathrm{D}_B(M)$ des nombres duaux sur M ([31] 0.20.1.6), et du fait que tout A-homomorphisme de B dans $\mathrm{D}_B(M)$ est automatiquement continu.

Proposition 2.16.4. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme localement de présentation finie de schémas formels idylliques, $\mathscr{P}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ le faisceau des parties principales d'ordre 1 de f, $\varepsilon\colon \mathscr{P}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ l'augmentation canonique, $j_1, j_2\colon \mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \rightrightarrows \mathscr{P}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ les homomorphismes déduits respectivement des deux projections canoniques p_1, p_2 de $\mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{X}$. On rappelle que l'on considère $\mathscr{P}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ comme une $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbre par j_1* (2.15.2).

(i) *Il existe un isomorphisme unique de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbres augmentées*

$$\varphi\colon \mathscr{P}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}_{\mathfrak{X}}(\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \tag{2.16.4.1}$$

qui se réduit à l'identité dans $\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$.

(ii) *L'homomorphisme $d_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$* (2.15.2) *est une $\mathscr{S}$-dérivation de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ dans $\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$, ayant la propriété universelle suivante : pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathscr{F}$, l'application $u \mapsto u \circ d_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ est un isomorphisme*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}, \mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Dér}_{\mathscr{S}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}, \mathscr{F}). \tag{2.16.4.2}$$

(i) Il est immédiat que φ est nécessairement le morphisme $z \mapsto (\varepsilon(z), z - j_1(\varepsilon(z)))$, et l'isomorphisme réciproque est le morphisme $(x,t) \mapsto j_1(x) + t$.

(ii) Comme on a $d_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}} = j_2 - j_1 = \varphi \circ (j_2 - j_1)$ par définition, il est immédiat que $d_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ est une $\mathscr{S}$-dérivation de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ dans $\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$. D'autre part, l'homomorphisme (2.16.4.2) est injectif d'après 1.14.2(i) et 2.15.6. Pour établir la surjectivité de cet homomorphisme, considérons une $\mathscr{S}$-dérivation $D\colon \mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \to \mathscr{F}$. Pour tout ouvert formel affine globalement idyllique $V = \mathrm{Spec}(B)$ de $\mathfrak{X}$ tel que $f(V)$ soit contenu dans un ouvert formel affine globalement idyllique $U = \mathrm{Spf}(A)$ de $\mathscr{S}$, $D_V\colon B \to \Gamma(V, \mathscr{F})$ est une A-dérivation. Donc il existe un unique B-homomorphisme $u_V\colon \Omega^1_{B/A} \to \Gamma(V, \mathscr{F})$ tel que $D_V = u_V \circ d_{B/A}$ ([31] 0.20.4.8). Comme $\Gamma(V, \mathscr{F})$ est un B-module cohérent, u_V induit par prolongement aux complétés un B-homomorphisme $\hat{u}_V\colon \widehat{\Omega}^1_{B/A} \to \Gamma(V, \mathscr{F})$. On a clairement $D_V = \hat{u}_V \circ \hat{d}_{B/A}$, et $\hat{u}_V$ est uniquement déterminé par cette relation. Il résulte donc de 2.16.3 que pour tout ouvert formel affine globalement idyllique $W \subset V$, on a $\hat{u}_V|W = \hat{u}_W$. Par suite, les $\hat{u}_V$ définissent un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-homomorphisme $\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}} \to \mathscr{F}$ répondant à la question.

2.16.5. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme localement de présentation finie de schémas formels idylliques, $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathscr{S}$ un morphisme adique de schémas formels idylliques, $\mathfrak{Y}_0$ un sous-schéma fermé de $\mathfrak{Y}$ défini par un idéal cohérent *de carré nul* $\mathscr{I}$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$. Supposons donné un $\mathscr{S}$-morphisme $u_0\colon \mathfrak{Y}_0 \to \mathfrak{X}$, de sorte qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{Y}_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "j"'] & \mathfrak{X} \arrow[d, "f"] \\ \mathfrak{Y} \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dotted, "u"] & \mathscr{S} \end{tikzcd} \tag{2.16.5.1}$$

On désigne par $\mathrm{P}_f(\mathfrak{Y}, u_0)$ l'ensemble des $\mathscr{S}$-morphismes $u\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ tels que $u_0 = u \circ j$ (autrement dit, l'ensemble des flèches pointillées u qui complètent le diagramme précédent de façon à le laisser commutatif).

Si $h\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$ est un morphisme adique de schémas formels idylliques, on pose $\mathfrak{Y}'_0 = \mathfrak{Y}' \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}_0$ et on note $h_0\colon \mathfrak{Y}'_0 \to \mathfrak{Y}_0$ la projection canonique. On sait (2.9.9) que $\mathfrak{Y}_0$ s'identifie au sous-schéma fermé de $\mathfrak{Y}$ défini par l'idéal $\mathscr{I}\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'}$. On peut donc considérer le foncteur contravariant

$$(\mathfrak{Y}', h) \mapsto \mathrm{P}_f(\mathfrak{Y}', u_0 \circ h_0). \tag{2.16.5.2}$$

Celui-ci définit par restriction au site de Zariski de $\mathfrak{Y}$ un faisceau, que l'on note $\mathscr{P}_f(\mathfrak{Y}, u_0)$.

2.16.6. Conservons les hypothèses de (2.16.5). Soient $\mathscr{P}^{(1)}_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ le premier voisinage infinitésimal du morphisme diagonal $\Delta_f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{X}$, $\delta_1\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{P}^{(1)}_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ le morphisme canonique, $\pi_1, \pi_2\colon \mathscr{P}^{(1)}_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}} \rightrightarrows \mathfrak{X}$ les morphismes déduits des projections canoniques p_1, p_2 de $\mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{X}$. On notera que le morphisme π_1 est fini et de présentation finie, et la $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbre $\pi_{1*}(\mathscr{O}_{\mathscr{P}^{(1)}_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}})$ s'identifie canoniquement au faisceau $\mathscr{P}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ des parties principales d'ordre 1 de f. Pour tous $u, v \in \mathrm{P}_f(\mathfrak{Y}, u_0)$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{Y}_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "j"'] & \mathfrak{X} \arrow[d, "\Delta_f"] \\ \mathfrak{Y} \arrow[r, "{(u,v)}"] & \mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{X} \end{tikzcd}$$

est commutatif. Comme $\mathscr{I}$ est de carré nul, le morphisme (u, v) se factorise uniquement à travers un morphisme $w\colon \mathfrak{Y} \to \mathscr{P}^{(1)}_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{Y}_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "j"'] & \mathfrak{X} \arrow[d, "\delta_1"] \\ \mathfrak{Y} \arrow[r, "w"] \arrow[dr, "u"'] & \mathscr{P}^{(1)}_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}} \arrow[d, "\pi_1"] \\ & \mathfrak{X} \end{tikzcd} \tag{2.16.6.1}$$

soit commutatif. Lorsqu'on fixe $u \in \mathrm{P}_f(\mathfrak{Y}, u_0)$, il est clair que l'application $v \mapsto w$ est un isomorphisme de $\mathrm{P}_f(\mathfrak{Y}, u_0)$ sur l'ensemble G_u des morphismes $w\colon \mathfrak{Y} \to \mathscr{P}^{(1)}_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ tel que le diagramme (2.16.6.1) soit commutatif. D'autre part, G_u s'identifie à l'ensemble des homomorphismes de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbres $\rho\colon \mathscr{P}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}} \to u_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{P}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & u_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}) \arrow[d, "u_*(\theta_j)"] \\ \mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \arrow[r, "\theta_{u_0}"'] & u_{0*}(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_0}) \end{tikzcd}$$

où ε est l'augmentation canonique, soit commutatif (2.8.20.1). Par suite, G_u est canoniquement isomorphe au module $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}, u_*(\mathscr{I}))$ (2.16.4.1). Comme $\mathscr{I}$ est de carré nul, il peut être considéré comme un $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_0}$-module. On obtient une application canonique

$$\mathrm{P}_f(\mathfrak{Y}, u_0) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_0}}(u_0^*(\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}), \mathscr{I}) \to \mathrm{P}_f(\mathfrak{Y}, u_0). \tag{2.16.6.2}$$

Nous avons démontré la proposition suivante :

Proposition 2.16.7. *Sous les hypothèses de* (2.16.5)*, s'il n'est pas vide,* $\mathrm{P}_f(\mathfrak{Y}, u_0)$ *est un torseur sous* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_0}}(u_0^*(\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}), \mathscr{I})$*.*

Corollaire 2.16.8. *Sous les hypothèses de* (2.16.5)*, il existe sur* $\mathscr{P}_f(\mathfrak{Y}, u_0)$ *une structure de pseudo-torseur sous le* $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_0}$*-module* $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_0}}(u_0^*(\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}), \mathscr{I})$ ([31] 16.5.15)*.*

Corollaire 2.16.9. *Sous les hypothèses de* (2.16.5)*, supposons de plus* $\mathfrak{Y}$ *formel affine globalement idyllique ; s'il existe un recouvrement ouvert* $(\mathfrak{Y}_i)_{i \in I}$ *de* $\mathfrak{Y}$ *et, pour tout* $i \in I$*, un* $\mathscr{S}$*-morphisme* $u_i\colon \mathfrak{Y}_i \to \mathfrak{X}$ *tel que si* $p_i\colon \mathfrak{Y}_i \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}_0 \to \mathfrak{Y}_i$ *et* $q_i\colon \mathfrak{Y}_i \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}_0 \to \mathfrak{Y}_0$ *sont les projections canoniques, on ait* $u_i \circ p_i = u_0 \circ q_i$*, alors il existe un* $\mathscr{S}$*-morphisme* $u\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ *tel que* $u \circ j = u_0$*.*

En effet, comme $\mathfrak{Y}_0$ est formel affine globalement idyllique et que $\mathscr{G} = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_0}}(u_0^*(\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}), \mathscr{I})$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_0}$-module cohérent, le faisceau $\mathscr{P}_f(\mathfrak{Y}, u_0)$, qui est par hypothèse un torseur sous $\mathscr{G}$, et non seulement un pseudo-torseur, est trivial en vertu de 2.11.1.

Lemme 2.16.10. *Soient* S *un schéma cohérent,* U *un ouvert quasi-compact de* S*,* X *un* S*-schéma séparé de type fini,* F *un* $\mathscr{O}_X$*-module quasi-cohérent. Notons* $\mathrm{D}_X(F) = \mathscr{O}_X \oplus F$ *la* $\mathscr{O}_X$*-algèbre des nombres duaux sur* F*,* $Y = \mathrm{Spec}(\mathrm{D}_X(F))$*,* $p\colon Y \to X$ *le morphisme structural et* $i\colon X \to Y$ *la section canonique de* p*. Soit* $h\colon Y_U \to X_U$ *un* U*-morphisme tel que* $\mathrm{id}_{X_U} = h \circ i_U$*. Alors il existe un éclatement* Y_U*-admissible* $\psi\colon Y' \to Y$ *et un* S*-morphisme* $h'\colon Y' \to X$ *qui prolonge* h *tels que si l'on note* X' *le transformé strict de* X *par* ψ *et* $i'\colon X' \to Y'$ *et* $\varphi\colon X' \to X$ *les morphismes canoniques, on ait* $h' \circ i' = \varphi$*.*

On notera que U est un ouvert rétro-compact de S et X et Y sont des schémas cohérents. Par le théorème de plongement de Nagata ([16], [14] 4.1), il existe un S-schéma propre Z et une immersion ouverte $j\colon X \to Z$ au-dessus de S. D'après 1.13.18, il existe un éclatement Y_U-admissible $\psi\colon Y' \to Y$ et un S-morphisme $g'\colon Y' \to Z$ tels que le digramme

$$\begin{tikzcd} Y_U \arrow[r, "j_U \circ h"] \arrow[d] & Z_U \arrow[d] \\ Y' \arrow[r, "g'"] & Z \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Supposons que ψ soit l'éclatement dans Y d'un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{B}$ tel que $\mathscr{B}|Y_U = \mathscr{O}_{Y_U}$. Il existe un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{K}$ de $\mathscr{O}_Y$ tel que $Y = Y_U \cup \mathrm{V}(\mathscr{K})$ et $\mathscr{K}|Y_U = \mathscr{O}_{Y_U}$ ([28] 6.9.7). Remplaçons Y' par l'éclatement de $\mathscr{K}\mathscr{B}$ dans Y, de sorte que Y_U est schématiquement dense dans Y'. Notons X' le transformé strict de X par ψ, $i'\colon X' \to Y'$ et $\varphi\colon X' \to X$ les morphismes canoniques. D'une part, les S-morphismes $g' \circ i'$ et $j \circ \varphi$ de X' dans Z coïncident au-dessus de l'ouvert schématiquement dense X_U de X', et sont donc égaux ([28] 5.4.1). D'autre part, comme les espaces sous-jacents à Y_U et $i_U(X_U)$ sont égaux, les espaces sous-jacents à Y' et $i'(X')$ sont aussi égaux. On en déduit que g' est majoré par j, *i.e.*, g' se factorise en $Y' \xrightarrow{h'} X \xrightarrow{j} Z$, où h' est un S-morphisme tel qu'on ait $h' \circ i' = \varphi$.

Proposition 2.16.11. *Soient A un anneau adique, B une A-algèbre adique qui est un anneau idyllique, K un idéal de définition de B, M un B-module cohérent, $X = \mathrm{Spec}(B)$, V l'ouvert $X - \mathrm{V}(K)$ de X, $d\colon B \to \Gamma(V, \widetilde{M})$ une A-dérivation. Alors il existe un B-module cohérent N, une A-dérivation $d'\colon B \to N$ et un B-homomorphisme $\alpha\colon N \to \Gamma(V, \widetilde{M})$ tels que $d = \alpha \circ d'$.*

Soit $\mathrm{D}_B(M) = B \oplus M$ la B-algèbre des nombres duaux sur M. Posons $S = \mathrm{Spec}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(B)$, $Y = \mathrm{Spec}(\mathrm{D}_B(M))$ et soient $p\colon Y \to X$ le morphisme canonique, $i\colon X \to Y$ la section de p définie par l'augmentation canonique $\mathrm{D}_B(M) \to B$. Soient J un idéal de définition de A, U l'ouvert $S - \mathrm{V}(J)$ de S, $j\colon U \to S$ l'injection canonique. On notera que V est l'image réciproque de U dans X. La A-dérivation d induit un A-homomorphisme $h^*\colon B \to \Gamma(Y_U, \mathscr{O}_Y)$ et par suite, un S-morphisme $h\colon Y_U \to X$, tel que $h \circ i_U$ soit l'injection canonique $j_X\colon V \to X$ ([28] 0.20.1.6). D'après 2.16.10, il existe un éclatement Y_U-admissible $\psi\colon Y' \to Y$ et un S-morphisme $h'\colon Y' \to X$ qui prolonge h tels que si l'on note X' le transformé strict de X par ψ et $i'\colon X' \to Y'$ et $\varphi\colon X' \to X$ les morphismes canoniques, on ait $h' \circ i' = \varphi$. Quitte à remplacer ψ par un éclatement Y_U-admissible qu'il majore, on peut supposer Y_U et X_U schématiquement denses dans Y' et X' (cf. la preuve de 2.16.10). Par suite ψ, φ et i' sont de présentation finie (1.12.22). Soit I' l'idéal de $\mathscr{O}_{Y'}$ associé à l'immersion fermée i', qui est donc de type fini. Comme I'^2 est nul sur Y_U et que l'homomorphisme $\mathscr{O}_{Y'} \to j_{Y'*}(\mathscr{O}_{Y'}|Y_U)$ est injectif, I'^2 est nul. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i'"'] & X \arrow[d] \\ Y' \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & S \end{tikzcd}$$

où le morphisme pointillé est soit h', soit $p \circ \psi$. La différence de ces deux morphismes correspond à un $\mathscr{O}_{X'}$-homomorphisme $u\colon \varphi^*(\Omega^1_{X/S}) \to I'$ ([31] 16.5.17). Posons $G = \varphi_*(I')$, $N = \Gamma(X, G)$ et soient $v\colon \Omega^1_{X/S} \to G$ l'adjoint de u, $d'\colon B \to N$ la A-dérivation associée à $\Gamma(X, v)$. On a $G|V \simeq \widetilde{M}|V$, ce qui induit un B-homomorphisme $\alpha\colon N \to \Gamma(V, \widetilde{M})$, et on a clairement $d = \alpha \circ d'$. Comme $\mathscr{O}_{Y'}$ est un anneau cohérent d'après 2.6.18(ii), I' est un idéal cohérent de $\mathscr{O}_{Y'}$, et donc un $\mathscr{O}_{X'}$-module cohérent (1.3.6). Par suite, G est un $\mathscr{O}_X$-module cohérent (1.4.8 et 1.12.15), et N est un B-module cohérent (1.4.3). La proposition est démontrée.

Corollaire 2.16.12. *Soient A un anneau idyllique, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie, K un idéal de définition de B, M un B-module cohérent, $X = \mathrm{Spec}(B)$, V l'ouvert $X - \mathrm{V}(K)$ de X. Alors le morphisme canonique $\Omega^1_{B/A} \to \widehat{\Omega}^1_{B/A}$ induit un isomorphisme*

$$\mathrm{Hom}_B(\widehat{\Omega}^1_{B/A}, \Gamma(V, \widetilde{M})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, \Gamma(V, \widetilde{M})). \tag{2.16.12.1}$$

En effet, l'homomorphisme (2.16.12.1) est injectif d'après 1.14.2(i). Pour montrer qu'il est surjectif, considérons un B-homomorphisme $u\colon \Omega^1_{B/A} \to \Gamma(V, \widetilde{M})$, et notons d la A-dérivation $u \circ d_{B/A}$ de B dans $\Gamma(V, \widetilde{M})$. En vertu de 2.16.11, il existe un B-module cohérent N, une A-dérivation $d'\colon B \to N$ et un B-homomorphisme $\alpha\colon N \to \Gamma(V, \widetilde{M})$ tels que $d = \alpha \circ d'$. Par suite, on a $u = \alpha \circ u'$, où $u'\colon \Omega^1_{B/A} \to N$ est le B-homomorphisme associé à d' ([31] 0.20.4.8). Comme N est cohérent, u' induit par prolongement aux complétés un B-homomorphisme $\hat{u}'\colon \widehat{\Omega}^1_{B/A} \to N$. Il est claire que $\alpha \circ \hat{u}'$ répond à la question.

Proposition 2.16.13. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme localement de présentation finie de schémas formels idylliques, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, $d\colon \mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ une $\mathscr{S}$-dérivation de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ dans la clôture rigide $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ de $\mathscr{F}$* (2.10.1.1). *Supposons $\mathfrak{X}$ quasi-compact. Alors il existe un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathscr{F}_1$, une $\mathscr{S}$-dérivation $d_1\colon \mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \to \mathscr{F}_1$ et un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-homomorphisme $\iota\colon \mathscr{F}_1 \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ tels que $d = \iota \circ d_1$.*

Il suffit de montrer qu'il existe un idéal de définition cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$ tel que l'image de d soit contenue dans l'image canonique $\mathscr{F}_1$ de $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{J}, \mathscr{F})$ dans $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$. En effet, si l'on note $\iota\colon \mathscr{F}_1 \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ l'injection canonique, on a $d = \iota \circ d_1$, où $d_1\colon \mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \to \mathscr{F}_1$ est un morphisme de faisceaux abéliens, qui est automatiquement une $\mathscr{S}$-dérivation, et $\mathscr{F}_1$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent en vertu de 2.10.9(ii).

La question étant locale sur $\mathfrak{X}$ et $\mathscr{S}$, on peut supposer qu'il existe des sections $x_i \in \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ $(1 \leq i \leq n)$ telles que les sections $d_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}(x_i)$ engendrent $\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ (1.14.2). Il existe un idéal de définition cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$ tel que, pour tout $1 \leq i \leq n$, $d(x_i)$ soit défini par un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-homomorphisme $u_i \colon \mathscr{J} \to \mathscr{F}$ (2.6.10). Pour montrer que cet idéal $\mathscr{J}$ répond à la question, il suffit de montrer que pour tout ouvert formel affine globalement idyllique $V = \mathrm{Spf}(B)$ de $\mathfrak{X}$ tel que $f(V)$ soit contenu dans un ouvert formel affine globalement idyllique $U = \mathrm{Spf}(A)$ de $\mathscr{S}$, l'image de l'application $d_V \colon B \to \Gamma(V, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}))$ est contenue dans le sous-B-module de $\Gamma(V, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}))$ engendré par les $d(x_i)|V$ $(1 \leq i \leq n)$. D'après 2.16.11 et (2.10.5.1), il existe un B-module cohérent N, une A-dérivation $d' \colon B \to N$ et un B-homomorphisme $\alpha \colon N \to \Gamma(V, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}))$ tels que $d_V = \alpha \circ d'$. Il existe un B-homomorphisme $u \colon \Omega^1_{B/A} \to N$ tel que $d' = u \circ d_{B/A}$. Comme N est cohérent, u induit par prolongement aux complétés un B-homomorphisme $\hat{u} \colon \widehat{\Omega}^1_{B/A} \to N$; on a $d' = \hat{u} \circ \hat{d}_{B/A}$ et par suite $d_V = \alpha \circ \hat{u} \circ \hat{d}_{B/A}$. Comme le $(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|V)$-module $\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}|V$ est engendré par les $d_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}(x_i)|V$ $(1 \leq i \leq n)$, le B-module $\widehat{\Omega}^1_{B/A}$ est engendré par les $\hat{d}_{B/A}(x_i|V)$ $(1 \leq i \leq n)$ (2.7.2). On en déduit que l'image de d_V est contenue dans le sous-B-module engendré par les $d_V(x_i|V) = d(x_i)|V$ $(1 \leq i \leq n)$.

Corollaire 2.16.14. *Soient $f \colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme localement de présentation finie de schémas formels idylliques, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, $d_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ la $\mathscr{S}$-dérivation canonique de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ dans $\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$* (2.15.2). *Alors l'application $u \mapsto u \circ d_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ est un isomorphisme*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Dér}_{\mathscr{S}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})). \tag{2.16.14.1}$$

La question étant locale sur $\mathfrak{X}$, on peut le supposer quasi-compact. Le morphisme (2.16.14.1) est injectif d'après 1.14.2(i) et 2.15.6, et il est surjectif en vertu de 2.16.13 et (2.16.4.2).

Corollaire 2.16.15. *Soient A un anneau idyllique, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie, M un B-module cohérent ; posons $\mathscr{S} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B)$ et $\mathscr{F} = M^{\Delta}$. Alors l'application $D \mapsto \Gamma(D)$ qui, à toute $\mathscr{S}$-dérivation de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ dans $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ fait correspondre l'application $t \mapsto D(t)$ de B dans $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}))$, est un isomorphisme de B-modules*

$$\mathrm{Dér}_{\mathscr{S}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Dér}_A(B, \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}))). \tag{2.16.15.1}$$

En effet, d'après 2.7.3, l'application $u \mapsto \Gamma(\mathfrak{X}, u)$ est un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(\widehat{\Omega}^1_{B/A}, \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}))). \tag{2.16.15.2}$$

Le corollaire résulte alors de (2.10.5.1), (2.16.12.1), (2.16.14.1) et (2.16.15.2).

2.16.16. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme adique de schémas formels idylliques, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module. Rappelons que f définit un morphisme d'espaces annelés (2.10.29.1)

$$f_{\mathsf{g}}\colon (\mathfrak{X}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})) \to (\mathscr{S}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathscr{S}})).$$

Les $f^{-1}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathscr{S}}))$-dérivations de $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ dans $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ forment un $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}))$-module noté $\mathrm{Dér}_{\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathscr{S}})}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}), \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}))$.

Si f est localement de présentation finie, on a une $f^{-1}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathscr{S}}))$-dérivation canonique

$$\delta_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}\colon \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \tag{2.16.16.1}$$

définie de la façon suivante. Soit $\mathscr{P}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ le faisceau des parties principales d'ordre 1 de f (2.15.2). Compte tenu de (2.16.4.1), donner $\delta_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ équivaut à donner un homomorphisme de $f^{-1}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathscr{S}}))$-algèbres $u\colon \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{P}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})$ au-dessus de $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$. Soient $\mathscr{P}^{(1)}_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ le premier voisinage infinitésimal du morphisme diagonal $\Delta_f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{X}$, $\pi_1, \pi_2\colon \mathscr{P}^{(1)}_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}} \rightrightarrows \mathfrak{X}$ les morphismes déduits des projections canoniques p_1, p_2 de $\mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{X}$. On prend alors pour u l'homomorphisme $\alpha_{\pi_2}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ (2.10.27.1).

Proposition 2.16.17. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme localement de présentation finie de schémas formels idylliques tel que $\mathfrak{X}$ admette localement un idéal de définition monogène, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Alors l'homomorphisme canonique $c_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}\colon \mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$* (2.10.1.2) *induit un isomorphisme*

$$\mathrm{Dér}_{\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathscr{S}})}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}), \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Dér}_{\mathscr{S}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})). \tag{2.16.17.1}$$

Montrons d'abord l'injectivité du morphisme (2.16.17.1). Soit

$$d\colon \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$$

une $f^{-1}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathscr{S}}))$-dérivation telle que $d \circ c_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} = 0$. Pour montrer que d est nulle, il suffit de montrer que $d_V = \Gamma(V, d)$ est nulle pour tout ouvert formel affine globalement idyllique $V = \mathrm{Spf}(B)$ de $\mathfrak{X}$ tel que B admette un idéal de définition monogène engendré par $t \in B$ et que $f(V)$ soit contenu dans un ouvert formel affine globalement idyllique $U = \mathrm{Spf}(A)$ de $\mathscr{S}$. Posons $M = \Gamma(V, \mathscr{F})$, de sorte que d_V est une A-dérivation de B_t dans M_t (2.10.5.1). Comme on a $d_V(B) = 0$ par hypothèse, d_V est nulle, et par suite d est nulle.

Montrons ensuite la surjectivité de l'homomorphisme (2.16.17.1). On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \arrow[d, "\delta_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}"'] & \mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \arrow[l, "c_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}"'] \arrow[d, "d_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}"] \\
\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) & \Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}} \arrow[l, "c_{\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}}"']
\end{tikzcd}$$

d'où l'on déduit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{D\acute{e}r}_{\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathscr{S}})}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}),\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})) \arrow[r, "u"] & \mathrm{D\acute{e}r}_{\mathscr{S}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}},\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})) \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}),\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})) \arrow[u, "a"] \arrow[r, "v"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}},\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})) \arrow[u, "b"']
\end{tikzcd}$$

On sait (2.16.14) que b est un isomorphisme, et il résulte de 2.10.19(i) que v est un isomorphisme. Par suite u est surjectif.

Nous avons aussi démontré le corollaire suivant :

Corollaire 2.16.18. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme localement de présentation finie de schémas formels idylliques tel que $\mathfrak{X}$ admette localement un idéal de définition monogène, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, $\delta_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ la $f^{-1}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathscr{S}}))$-dérivation canonique de $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ dans $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})$* (2.16.16.1). *Alors l'application $u \mapsto u \circ \delta_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ est un isomorphisme*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}),\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D\acute{e}r}_{\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathscr{S}})}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}),\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})). \tag{2.16.18.1}$$

Chapitre 3

Éclatements admissibles

Nous développons dans ce chapitre la notion d'*éclatement admissible* d'un schéma formel idyllique, c'est à dire de centre un idéal ouvert de type fini. Les objets et les propriétés relatifs aux schémas formels idylliques qui sont stables par éclatements admissibles seront qualifiés de *rigides*. Nous avons déjà introduit un exemple important, à savoir la clôture rigide d'un module. Nous démontrons le théorème d'*acyclicité de Tate* (3.5.5) qui établit le caractère rigide de cette notion pour les modules cohérents. Nous introduisons un autre exemple : les *points rigides* d'un schéma formel idyllique.

3.1 Éclatements admissibles

3.1.1. Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel adique, $\mathscr{J}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{A}$ un idéal ouvert de type fini de $\mathfrak{X}$. Pour tout entier $n \geq 0$, on note $\mathfrak{X}_n$ le schéma usuel $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_\mathfrak{X}/\mathscr{J}^{n+1})$ et on pose

$$\mathfrak{X}'_n = \mathrm{Proj}(\oplus_{m\geq 0}\mathscr{A}^m \otimes_{\mathscr{O}_\mathfrak{X}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}). \tag{3.1.1.1}$$

Pour $m \leq n$, si on note u_{mn} le morphisme canonique $\mathfrak{X}_m \to \mathfrak{X}_n$, il existe un morphisme canonique $u'_{mn}\colon \mathfrak{X}'_m \to \mathfrak{X}'_n$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}'_m \arrow[r, "u'_{mn}"] \arrow[d] & \mathfrak{X}'_n \arrow[d] \\ \mathfrak{X}_m \arrow[r, "u_{mn}"] & \mathfrak{X}_n \end{tikzcd} \tag{3.1.1.2}$$

où les flèches verticales sont les projections canoniques soit cartésien ; autrement dit la suite $(\mathfrak{X}'_n)$ forme un $(\mathfrak{X}_n)$-système inductif adique (2.2.13). Donc d'après 2.2.14, sa limite inductive $\mathfrak{X}'$ est un $\mathfrak{X}$-schéma formel adique. Le morphisme structural $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ est clairement de type fini.

A. Abbes, *Éléments de Géométrie Rigide*, Progress in Mathematics 286,
DOI 10.1007/978-3-0348-0012-9_3, © Springer Basel AG 2010

3.1.1.3. Supposons que $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ soit un schéma formel affine adique (2.1.7). On a $\mathscr{J} = J^{\Delta}$ et $\mathscr{A} = \mathfrak{a}^{\Delta}$, où J est un idéal de définition de type fini de A et $\mathfrak{a}$ est un idéal ouvert de type fini de A (2.1.10, 2.1.11 et 2.1.13). Soient $X = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = \mathrm{Spec}(A/J)$, $\phi\colon X' \to X$ l'éclatement de $\widetilde{\mathfrak{a}}$ dans X, $Y' = \phi^{-1}(Y)$; on a alors $\mathfrak{X} = X_{/Y}$. On montrera (3.1.3) que $\mathfrak{X}'$ est canoniquement isomorphe au complété $X'_{/Y'}$ de X' le long de Y', φ étant le prolongement de ϕ aux complétés.

3.1.1.4. On voit à l'aide de 3.1.1.3 que $(\mathfrak{X}', \varphi)$ ne dépend pas de l'idéal de définition $\mathscr{J}$, à isomorphisme canonique près. On dit que $\mathfrak{X}'$ (ou φ) est *l'éclatement* de $\mathscr{A}$ dans $\mathfrak{X}$.

3.1.1.5. La restriction de φ au-dessus d'un ouvert U de $\mathfrak{X}$ est l'éclatement de $\mathscr{A}|U$ dans U.

Définition 3.1.2. Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel adique, U un ouvert de $\mathfrak{X}$, $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ un morphisme de type fini.

(i) On dit que φ est un *éclatement admissible* s'il est isomorphe à l'éclatement dans $\mathfrak{X}$ d'un idéal ouvert de type fini.

(ii) On dit que φ est un *éclatement admissible et U-admissible* s'il est isomorphe à l'éclatement dans $\mathfrak{X}$ d'un idéal ouvert de type fini $\mathscr{A}$ tel que le support $\mathrm{V}(\mathscr{A})$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}$ soit disjoint de U.

Lemme 3.1.3. *Soient X un schéma, Y un sous-schéma fermé de X défini par un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_X$, U l'ouvert $X - Y$ de X, $\mathscr{A}$ un idéal quasi-cohérent de type fini de $\mathscr{O}_X$ tel que $\mathscr{A}|U = \mathscr{O}_X|U$, $\phi\colon X' \to X$ l'éclatement de $\mathscr{A}$ dans X, $Y' = \phi^{-1}(Y)$, $\widehat{X} = X_{/Y}$ le schéma formel complété de X le long de Y, $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \widehat{X}$ l'éclatement de $\mathscr{A}_{/Y}$ dans $\widehat{X}$. Alors $\mathfrak{X}'$ est canoniquement isomorphe au schéma formel $\widehat{X}' = X'_{/Y'}$ complété de X' le long de Y', φ étant le prolongement de ϕ aux complétés.*

On notera d'abord que la condition $\mathscr{A}|U = \mathscr{O}_X|U$ est équivalente au fait que $\mathscr{A}$ contient localement une puissance de $\mathscr{J}$ ([28] 6.8.4). En vertu de 2.5.2, $\widehat{X}$ est un schéma formel adique, $\mathscr{J}_{/Y}$ est un idéal de définition de type fini de $\widehat{X}$, $\mathscr{A}_{/Y}$ est un idéal ouvert de type fini de $\widehat{X}$, $(\mathscr{J}_{/Y})^n = (\mathscr{J}^n)_{/Y}$, $(\mathscr{A}_{/Y})^m = (\mathscr{A}^m)_{/Y}$, et on a des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} \mathscr{O}_{\widehat{X}}/\mathscr{J}^n_{/Y} &\simeq (\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n)|Y, \\ \mathscr{A}^m_{/Y} \otimes_{\mathscr{O}_{\widehat{X}}} (\mathscr{O}_{\widehat{X}}/\mathscr{J}^n_{/Y}) &\simeq (\mathscr{A}^m \otimes_{\mathscr{O}_X} (\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n))|Y. \end{aligned}$$

Ces derniers impliquent le lemme.

Proposition 3.1.4. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{A}$ un idéal ouvert cohérent de $\mathfrak{X}$, $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ l'éclatement de $\mathscr{A}$ dans $\mathfrak{X}$.*

(i) *L'idéal $\mathscr{A}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$ est inversible.*

(ii) *Si $\mathfrak{X}$ est rig-pur ou si $\mathscr{A}$ est un idéal de définition de $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$ est idyllique rig-pur et φ est de présentation finie.*

(iii) *Si $\mathfrak{X}$ est rig-pur, φ est surjectif.*

Comme $\mathfrak{X}'$ est un schéma formel adique, on peut se réduire au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ est formel affine globalement idyllique et $\mathscr{A} = \mathfrak{a}^{\Delta}$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal ouvert de type fini de A. Soit J un idéal de définition de type fini de A. Posons $X = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = \mathrm{Spec}(A/J)$ et soient $\phi\colon X' \to X$ l'éclatement de $\widetilde{\mathfrak{a}}$ dans X, $Y' = \phi^{-1}(Y)$, de sorte que $\mathfrak{X} = X_{/Y}$, $\mathfrak{X}' = X'_{/Y'}$ et φ est le prolongement de ϕ aux complétés (3.1.3).

(i) Il résulte de 2.5.5(i) et de l'isomorphisme canonique $\varphi^*(\mathfrak{a}^{\Delta}) \simeq (\phi^*(\widetilde{\mathfrak{a}}))_{/Y'}$ (2.5.11) que l'on a $\mathfrak{a}^{\Delta}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'} = (\widetilde{\mathfrak{a}}\mathscr{O}_{X'})_{/Y'}$. La proposition s'ensuit en vertu de 2.8.9 et du fait que $\widetilde{\mathfrak{a}}\mathscr{O}_{X'}$ est un idéal inversible de $\mathscr{O}_{X'}$ ([29] 8.1.7).

(ii) Il résulte de 1.8.30.2 et 1.13.3 que $\mathscr{O}_{X'}$ est J-pur et ϕ est de présentation finie. On en déduit par 1.12.17 que $\mathfrak{X}'$ est idyllique rig-pur.

(iii) Comme φ est propre, donc fermé, il suffit de montrer que si $\mathfrak{X}$ est non vide, $\mathfrak{X}'$ est non vide (3.1.1.5). Si $\mathfrak{X}' = \emptyset$, alors $\mathfrak{a}^m \otimes_A A/J = 0$ pour un entier m suffisamment grand ([29] 2.3.8) ; d'où $\mathfrak{a}^m = 0$ par le lemme de Nakayama. Comme $\mathfrak{a}$ est ouvert, on en déduit que $J^n = 0$ pour un entier $n \geq 1$. Mais A est rig-pur, donc $A = 0$, ce qui est exclu.

Remarque 3.1.5. On notera, pour les applications de 3.1.4(ii), que si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel idyllique, si $\mathscr{J}$ est un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$ et si $\mathscr{A}$ est un idéal ouvert cohérent de $\mathfrak{X}$, alors $\mathscr{A}\mathscr{J}$ est un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$.

3.1.6. Soient A un anneau idyllique, $X = \mathrm{Spec}(A)$, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, J un idéal de définition de type fini de A, $\mathfrak{a}$ un idéal ouvert de type fini de A, $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ un système fini de générateurs de $\mathfrak{a}$. Notons $\phi\colon X' \to X$ l'éclatement de $\widetilde{\mathfrak{a}}$ dans X et $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ l'éclatement de $\mathfrak{a}^{\Delta}$ dans $\mathfrak{X}$. Pour tout $0 \leq i \leq n$, soit U_i l'ouvert maximal de X' où a_i engendre $\widetilde{\mathfrak{a}}\mathscr{O}_{X'}$. Comme $\widetilde{\mathfrak{a}}\mathscr{O}_{X'}$ est inversible, les $(U_i)_{0 \leq i \leq n}$ forment un recouvrement ouvert de X'. On sait que U_i est le schéma affine associé à la A-algèbre A_i définie de la façon suivante :

$$A'_i = A\left[\frac{a_0}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i}\right] = \frac{A[\xi_0, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n]}{(a_k - a_i\xi_k)_{k \neq i}}, \tag{3.1.6.1}$$

$$A_i = \frac{A'_i}{(A'_i)_{a_i\text{-tor}}}. \tag{3.1.6.2}$$

Soient $\widehat{A}_i$ (resp. $\widehat{A}'_i$) le séparé complété de A_i (resp. A'_i) pour la topologie J-adique, $\widehat{U}_i = \mathrm{Spf}(\widehat{A}_i)$. On a alors

$$\widehat{A}'_i \simeq A\left\langle\frac{a_0}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i}\right\rangle = \frac{A\langle\xi_0, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_n\rangle}{(a_k - a_i\xi_k)_{k \neq i}}, \tag{3.1.6.3}$$

et cet anneau est plat sur A'_i (1.12.16(iv) et 1.12.17).

Proposition 3.1.7. *Conservons les hypothèses de* (3.1.6).

(i) *Pour tout* $0 \leq i \leq n$*, on a*

$$\widehat{A}_i \simeq \frac{\widehat{A}'_i}{(\widehat{A}'_i)_{a_i\text{-tor}}}. \tag{3.1.7.1}$$

Si, en outre, A *est rig-pur, alors* $(A'_i)_{a_i\text{-tor}} = (A'_i)_{J\text{-tor}}$ *et* $(\widehat{A}'_i)_{a_i\text{-tor}} = (\widehat{A}'_i)_{J\text{-tor}}$.

(ii) *Les* $(\widehat{U}_i)_{1\leq i\leq n}$ *forment un recouvrement ouvert de* $\mathfrak{X}'$ *; pour tout* $0 \leq i \leq n$, $\widehat{U}_i$ *est l'ouvert maximal de* $\mathfrak{X}'$ *où* a_i *engendre l'idéal inversible* $\mathfrak{a}^{\Delta}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$.

(i) On note $\sigma\colon A'_i \to A_i$ l'homomorphisme canonique et $\widehat{\sigma}\colon \widehat{A}'_i \to \widehat{A}_i$ son prolongement aux complétés J-adiques. En vertu de 1.12.16(iv), $\widehat{\sigma}$ est surjectif et $\ker(\widehat{\sigma}) = (A'_i)_{a_i\text{-tor}}\widehat{A}'_i$; donc $\ker(\widehat{\sigma}) \subset (\widehat{A}'_i)_{a_i\text{-tor}}$. D'autre part, comme a_i est A_i-régulier et que $\widehat{A}_i$ est A_i-plat (1.12.17), $(\widehat{A}_i)_{a_i\text{-tor}} = 0$; d'où $(\widehat{A}'_i)_{a_i\text{-tor}} \subset \ker(\widehat{\sigma})$. Par suite $(\widehat{A}'_i)_{a_i\text{-tor}} = \ker(\widehat{\sigma})$, ce qui démontre (3.1.7.1).

Supposons A rig-pur. Alors A_i est J-pur (1.13.3), et donc $(A'_i)_{J\text{-tor}} \subset (A'_i)_{a_i\text{-tor}}$. D'autre part, $\mathfrak{a}$ étant un idéal ouvert de A et $a_iA'_i = \mathfrak{a}A'_i$, on a $(A'_i)_{a_i\text{-tor}} \subset (A'_i)_{J\text{-tor}}$. On en déduit la relation $(A'_i)_{a_i\text{-tor}} = (A'_i)_{J\text{-tor}}$. On démontre de même la relation $(\widehat{A}'_i)_{J\text{-tor}} = (\widehat{A}'_i)_{a_i\text{-tor}}$.

(ii) La première assertion est évidente. Il est clair que a_i engendre l'idéal $\mathfrak{a}^{\Delta}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$ sur $\widehat{U}_i$. Supposons que a_i engendre $\mathfrak{a}^{\Delta}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$ en un point $x \in \mathfrak{X}'\backslash\widehat{U}_i$; donc $x \in \widehat{U}_j$ avec $j \neq i$. Par conséquent, la section $a_i/a_j \in \widehat{A}_j = \Gamma(\widehat{U}_j, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}'})$ est inversible au voisinage de x ; ce qui est impossible car en tant que section de A_j, a_i/a_j s'annule sur $U_j\backslash U_i$.

Proposition 3.1.8. *Soient* $\mathfrak{Y}$ *un schéma formel idyllique,* U, V *deux ouverts quasi-compacts de* $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{X} = (V, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}|V)$, $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ *un éclatement admissible et* $(U \cap V)$*-admissible. Alors il existe un éclatement admissible et* U*-admissible* $\psi\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$ *qui prolonge* φ.

Supposons que φ soit l'éclatement dans $\mathfrak{X}$ d'un idéal ouvert cohérent $\mathscr{A}$ tel que $\mathrm{V}(\mathscr{A})$ soit disjoint de $U \cap V$. D'après 2.8.16, il existe un idéal ouvert cohérent $\mathscr{B}$ de $\mathfrak{Y}$ tel que $\mathscr{B}|V = \mathscr{A}$ et $\mathscr{B}|U = \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}|U$. Il suffit alors de prendre pour $\psi\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$ l'éclatement de $\mathscr{B}$ dans $\mathfrak{Y}$.

Proposition 3.1.9. *Soient* $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ *un morphisme adique de schémas formels idylliques,* $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ *l'éclatement dans* $\mathfrak{X}$ *d'un idéal ouvert cohérent* $\mathscr{A}$*. Supposons que* $\mathscr{A}\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$ *soit un idéal inversible de* $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$*. Alors il existe un et un seul morphisme* $f'\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}'$ *tel que* $f = \varphi \circ f'$*. En outre, si* f *est localement de présentation finie (resp. localement de type fini, resp. de présentation finie, resp. de type fini), il en est de même de* f'.

Montrons d'abord la première proposition. On peut se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ est affine globalement idyllique, puis au cas où $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$ est affine globalement idyllique ; donc f est associé à un homomorphisme adique $u\colon A \to B$.

Soient J un idéal de définition de type fini de A, $\mathfrak{a}$ l'idéal ouvert de type fini de A tel que $\mathscr{A} = \mathfrak{a}^{\Delta}$. Posons $X = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = \mathrm{Spec}(B)$ et soient $g\colon Y \to X$ le morphisme déduit de u, $\phi\colon X' \to X$ l'éclatement de $\widetilde{\mathfrak{a}}$ dans X, de sorte que f (resp. φ) est le complété de g (resp. ϕ) le long de $\mathrm{V}(J)$. Comme $\mathscr{A}\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}} = (\mathfrak{a}B)^{\Delta}$ (2.7.5), $\mathfrak{a}B$ est un idéal inversible de B ([28] 10.10.8 et 10.10.8.2). Il existe alors un unique morphisme $g'\colon Y \to X'$ tel que $g = \phi \circ g'$. Le complété f' de g' le long de $\mathrm{V}(J)$ répond à la question. Reste à prouver l'unicité de f'. Soient $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ un système fini de générateurs de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{X}'_i$ (resp. $\mathfrak{Y}_i$) l'ouvert maximal de $\mathfrak{X}'$ (resp. $\mathfrak{Y}$) où a_i engendre l'idéal $\mathscr{A}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$ (resp. $\mathscr{A}\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$). On a évidemment $f'^{-1}(\mathfrak{X}'_i) \subset \mathfrak{Y}_i$. Pour $i \neq j$, $f'^{-1}(\mathfrak{X}'_i) \cap \mathfrak{Y}_j$ est l'ouvert maximal de $f'^{-1}(\mathfrak{X}'_i)$ où la section $a_j/a_i \in \Gamma(f'^{-1}(\mathfrak{X}'_i), \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ est inversible ; par suite $f'^{-1}(\mathfrak{X}'_i) \cap \mathfrak{Y}_j = f'^{-1}(\mathfrak{X}'_i \cap \mathfrak{X}'_j)$. Comme les $(\mathfrak{X}'_i)$ recouvrent $\mathfrak{X}'$, on conclut que $f'^{-1}(\mathfrak{X}'_i) = \mathfrak{Y}_i$ pour tout i. Pour achever la preuve, il suffit d'observer que f' est uniquement déterminé sur tout ouvert affine globalement idyllique $U = \mathrm{Spf}(C)$ de $\mathfrak{Y}$ contenu dans l'un des $\mathfrak{Y}_i$. En effet, la restriction de f' à U est induite par un homomorphisme de A-algèbres $w\colon \widehat{A}_i \to C$, où l'anneau $\widehat{A}_i$ est défini dans 3.1.6. La relation (3.1.7.1) et le fait que l'image de a_i dans C engendre l'idéal inversible $\mathscr{A}\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$ sur U montrent que w est uniquement déterminé.

Enfin, la dernière proposition résulte de 2.3.18, 2.6.6, 2.6.8 et ([28] 6.1.5(v)).

Corollaire 3.1.10. *Soient $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ un morphisme adique de schémas formels idylliques, $\mathscr{A}$ un idéal ouvert cohérent de $\mathfrak{X}$. Si φ est isomorphe à l'éclatement de $\mathscr{A}$ dans $\mathfrak{X}$, alors l'isomorphisme est unique.*

Lemme 3.1.11. *Soient A un anneau idyllique, rig-pur et ayant un idéal de définition principal engendré par $t \in A$, B une sous-A-algèbre finie de A_t ; considérons B comme une A-algèbre adique* (1.10.2). *Alors l'homomorphisme canonique $\varphi\colon \mathrm{Spf}(B) \to \mathrm{Spf}(A)$ est un éclatement admissible.*

Soient f_i $(1 \leq i \leq n)$ des générateurs de la A-algèbre B, a_i $(1 \leq i \leq n)$ des éléments de A, r un entier ≥ 1 tels que $a_i = t^r f_i \in A_t$ pour tout i. Posons $X = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = \mathrm{Spec}(B)$, $a_0 = t^r$, $\mathfrak{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ et soit $\phi\colon X' \to X$ l'éclatement de $\widetilde{\mathfrak{a}}$ dans X. Il suffit de montrer que Y et X' sont X-isomorphes (3.1.3 et 1.10.2(ii)). Reprenons les notations de (3.1.6) ; on voit aussitôt que B s'identifie à A_0. Donc Y est l'ouvert maximal de X' où a_i engendre $\widetilde{\mathfrak{a}}\mathscr{O}_{X'}$. Comme Y est fini sur X, l'immersion ouverte $j\colon Y \to X'$ est aussi fermée. D'autre part, l'ouvert $U = \mathrm{Spec}(A_t)$ étant schématiquement dense dans X (1.8.30.2), $\phi^{-1}(U)$ est schématiquement dense dans X' en vertu de 1.13.3(i). Comme $\phi^{-1}(U) \subset Y$, on en déduit que j est un isomorphisme.

Proposition 3.1.12. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, quasi-compact et ayant localement un idéal de définition inversible, $\mathscr{B}$ une sous-$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbre cohérente de $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$* (2.10.1) *; considérons $\mathscr{B}$ comme une $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbre topologique* (2.8.10). *Alors il existe un éclatement admissible $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ et un $\mathfrak{X}$-morphisme $f\colon \mathfrak{X}' \to$*

$\mathrm{Spf}(\mathscr{B})$ (2.3.9) *tels que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{B} \arrow[r, "f^\sharp"] \arrow[d] & \varphi_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}) \arrow[d, "\varphi_*(c_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}})"] \\ \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \arrow[r, "\beta_\varphi(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})"] & \varphi_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'})) \end{tikzcd} \tag{3.1.12.1}$$

où $c_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}}$ *est le morphisme canonique* (2.10.1.2) *et* $\beta_\varphi(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ *est le morphisme* (2.10.27.2) *soit commutatif.*

Notons $u\colon \mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \to \mathscr{B}$ et $v\colon \mathscr{B} \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ les homomorphismes structuraux, de sorte qu'on a $v \circ u = c_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}$ (2.10.1.2). Il résulte de (2.10.5.1) (appliqué au-dessus d'ouverts formels affines globalement idylliques $\mathrm{Spf}(A)$ de $\mathfrak{X}$ tels que A admette un idéal de définition principal) que $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(u)$ est un isomorphisme et que l'on a

$$\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(u) \circ v = c_{\mathscr{B}}. \tag{3.1.12.2}$$

En vertu de (2.10.5.1), 3.1.8 et 3.1.11, il existe un recouvrement ouvert fini $(U_i)_{i\in I}$ de $\mathfrak{X}$ et pour tout $i \in I$, un éclatement $\varphi_i\colon \mathfrak{X}'_i \to \mathfrak{X}$ d'un idéal ouvert cohérent $\mathscr{A}_i$ dans $\mathfrak{X}$ tels que la restriction de φ_i au-dessus de U_i soit isomorphe à celle du morphisme structural $\mathrm{Spf}(\mathscr{B}) \to \mathfrak{X}$. Il résulte de 2.10.31 et (3.1.12.2) que pour tout $i \in I$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{B}|U_i \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "v|U_i"'] & \varphi_{i*}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'_i})|U_i \arrow[d, "\varphi_{i*}(c_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'_i}})|U_i"] \\ \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})|U_i \arrow[r, "\beta_{\varphi_i}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})|U_i"] & \varphi_{i*}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'_i}))|U_i \end{tikzcd} \tag{3.1.12.3}$$

est commutatif. Posons $\mathscr{A} = \prod_{i\in I} \mathscr{A}_i$, qui est un idéal ouvert cohérent de $\mathfrak{X}$ (2.1.27), et soit $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ l'éclatement de $\mathscr{A}$ dans $\mathfrak{X}$. Comme $\mathfrak{X}$ est rig-pur, φ est de présentation finie et $\mathfrak{X}'$ est idyllique rig-pur (3.1.4). D'après 3.1.9, pour tout $i \in I$, il existe un morphisme $f_i\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}'_i$ tel que $\varphi_i \circ f_i = \varphi$; de plus, les restrictions de f_i au-dessus de U_i se recollent en un $\mathfrak{X}$-morphisme $f\colon \mathfrak{X}' \to \mathrm{Spf}(\mathscr{B})$. Enfin, compte tenu de 2.10.27, la commutativité des diagrammes (3.1.12.3) entraîne celle de (3.1.12.1).

Proposition 3.1.13. *Soient* $\mathfrak{X}$ *un schéma formel idyllique,* $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ *deux idéaux ouverts cohérents de* $\mathfrak{X}$*,* $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ *l'éclatement de* $\mathscr{A}$ *dans* $\mathfrak{X}$*. Alors,* $\mathscr{B}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$ *est un idéal ouvert de type fini de* $\mathfrak{X}'$*, et si l'on note* $\psi\colon \mathfrak{X}'' \to \mathfrak{X}'$ *son éclatement dans* $\mathfrak{X}'$*, le composé* $\varphi \circ \psi$ *est l'éclatement de* $\mathscr{A}\mathscr{B}$ *dans* $\mathfrak{X}$*.*

Notons d'abord que $\mathscr{A}\mathscr{B}$ est un idéal ouvert cohérent de $\mathfrak{X}$ (2.1.27). Les questions étant locales sur $\mathfrak{X}$, on peut se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ est affine globalement idyllique, $\mathscr{A} = \mathfrak{a}^\Delta$ et $\mathscr{B} = \mathfrak{b}^\Delta$, où $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux ouverts de type fini de A. Posons $X = \mathrm{Spec}(A)$ et soient $\phi\colon X' \to X$ l'éclatement de $\widetilde{\mathfrak{a}}$ dans X, $\rho\colon X'' \to X'$ l'éclatement de $\mathfrak{b}\mathscr{O}_{X'}$ dans X'. Soient J un idéal de définition de type fini de A, $Y = \mathrm{Spec}(A/J)$, $Y' = \phi^{-1}(Y)$. On a alors $\mathfrak{X}' = X'_{/Y'}$ et $\varphi^*(\mathscr{B}) = \phi^*(\widetilde{\mathfrak{b}})_{/Y'}$ (2.5.11). Par suite, $\mathscr{B}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'} = (\mathfrak{b}\mathscr{O}_{X'})_{/Y'}$ est un idéal ouvert de type fini de $\mathfrak{X}'$ (2.5.5), $\mathfrak{X}''$ est le complété de X'' le long de $\rho^{-1}(Y')$ et ψ est le prolongement de ρ aux complétés (3.1.3). Donc $\varphi \circ \psi$ est le prolongement de $\phi \circ \rho$ aux complétés. Comme $\phi \circ \rho$ est l'éclatement de $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^\sim$ dans X, la proposition s'ensuit (3.1.3).

Proposition 3.1.14. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique quasi-compact, U un ouvert de $\mathfrak{X}$, $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ un éclatement admissible et U-admissible, $\psi\colon \mathfrak{X}'' \to \mathfrak{X}'$ un éclatement admissible et $\varphi^{-1}(U)$-admissible. Alors $\varphi \circ \psi$ est un éclatement admissible et U-admissible.*

Supposons que φ soit l'éclatement dans $\mathfrak{X}$ d'un idéal ouvert cohérent $\mathscr{A}$ tel que $\mathrm{V}(\mathscr{A})$ soit disjoint de U (3.1.2), et que ψ soit l'éclatement dans $\mathfrak{X}'$ d'un idéal ouvert de type fini $\mathscr{B}$ tel que $\mathrm{V}(\mathscr{B})$ soit disjoint de $\varphi^{-1}(U)$. On peut remplacer U par l'ouvert plus grand $\mathfrak{X} - \mathrm{V}(\mathscr{A}) - \varphi(\mathrm{V}(\mathscr{B}))$. Posons $\mathscr{A}' = \mathscr{A}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$. On établit en premier lieu le lemme suivant :

Lemme 3.1.15. *Il existe un idéal ouvert cohérent $\mathscr{L}$ de $\mathfrak{X}$ et deux entiers $i, j \geq 1$ tels que $\mathscr{L}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'} = \mathscr{A}'^i\mathscr{B}^j$ et que $\mathrm{V}(\mathscr{L})$ soit disjoint de U.*

Supposons d'abord $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ affine globalement idyllique et $\mathscr{A} = \mathfrak{a}^\Delta$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal ouvert de type fini de A. Soient $X = \mathrm{Spec}(A)$, $\phi\colon X' \to X$ l'éclatement de $\widetilde{\mathfrak{a}}$ dans X, J un idéal de définition de type fini de A, $Y = \mathrm{Spec}(A/J)$, $Y' = \phi^{-1}(Y)$; on a donc $\mathfrak{X}' = X'_{/Y'}$, φ étant le prolongement de ϕ aux complétés. D'après 2.5.7, il existe un unique idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{C}$ de $\mathscr{O}_{X'}$, contenant une puissance de J, tel que $\mathscr{C}_{/Y'} = \mathscr{B}$.

Soit V l'ouvert $X - \mathrm{V}(\mathfrak{a}) - \phi(\mathrm{V}(\mathscr{C}))$, de sorte que $V \cap \mathrm{V}(J) = U$. On dira qu'un couple (i, j) d'entiers ≥ 1 est admissible s'il existe un idéal de type fini L de A tel que $L\mathscr{O}_{X'} = \mathfrak{a}^i\mathscr{C}^j$ et que $\mathrm{V}(L)$ soit disjoint de V ; en particulier, L est ouvert ([28] 6.8.4). Si (i, j) est admissible, $(\ell i + k, \ell j)$ l'est aussi pour tous $k \geq 0$ et $\ell \geq 1$. D'après la preuve de ([42] 5.1.4), il existe au moins un couple admissible. On associe à chaque couple admissible (i, j) un idéal ouvert canonique K de A tel que $K\mathscr{O}_{X'} = \mathfrak{a}^i\mathscr{C}^j$ et que $\mathrm{V}(K)$ soit disjoint de V, de la façon suivante. Soit L un idéal de type fini de A tel que $L\mathscr{O}_{X'} = \mathfrak{a}^i\mathscr{C}^j$ et que $\mathrm{V}(L)$ soit disjoint de V. Considérons l'homomorphisme canonique $u\colon \mathscr{O}_X \to \phi_*(\mathscr{O}_{X'})$ et l'idéal $\phi_*(\mathfrak{a}^i\mathscr{C}^j)$ de $\phi_*(\mathscr{O}_{X'})$. L'image réciproque $u^{-1}(\phi_*(\mathfrak{a}^i\mathscr{C}^j))$ est un idéal quasi-cohérent de $\mathscr{O}_X$, défini par un idéal K de A contenant L ; d'où par adjonction $K\mathscr{O}_{X'} = \mathfrak{a}^i\mathscr{C}^j$. Montrons qu'on a

$$K^\Delta\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'} = \mathscr{A}'^i\mathscr{B}^j. \tag{3.1.15.1}$$

On notera que cela ne résulte pas de 2.5.11 car K n'est pas forcement de type fini sur A. Mais si n est un entier ≥ 1 tel que $J^n \subset K$ et $(J^n\mathscr{O}_{X'})_{/Y'} \subset \mathscr{A}'^i\mathscr{B}^j$, on a

$$\frac{K^{\Delta}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}}{(J^n\mathscr{O}_{X'})_{/Y'}} = \frac{K\mathscr{O}_{X'}}{J^n\mathscr{O}_{X'}} = \frac{\mathfrak{a}^i\mathscr{C}^j}{J^n\mathscr{O}_{X'}} = \frac{\mathscr{A}'^i\mathscr{B}^j}{(J^n\mathscr{O}_{X'})_{/Y'}}, \tag{3.1.15.2}$$

d'où (3.1.15.1).

Pour $f \in A$, recommençons la construction précédente au-dessus de l'ouvert $\mathscr{D}(f) = \mathrm{Spf}(A_{\{f\}})$ de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ étant remplacés par leurs restrictions. Comme $A_{\{f\}}$ est A-plat (1.12.6) et $\mathfrak{a}_{\{f\}} = \mathfrak{a} \otimes_A A_{\{f\}}$ (1.10.12), X' est remplacé par $X' \otimes_A A_{\{f\}}$ et $\mathscr{C}$ est changé en $\mathscr{C} \otimes_A A_{\{f\}}$. On en déduit aussitôt que si (i,j) est un couple admissible relativement à A, il l'est aussi relativement à $A_{\{f\}}$ et l'idéal ouvert canonique de $A_{\{f\}}$ qui lui est associé est $K \otimes_A A_{\{f\}}$. Montrons que $K_{\{f\}} = K \otimes_A A_{\{f\}}$ (on rappelle que K n'est pas nécessairement de type fini sur A). On a évidemment $K \otimes_A A_{\{f\}} = KA_{\{f\}} \subset K_{\{f\}}$. Comme $A_{\{f\}}$ est A-plat, si $J^n \subset K$, alors

$$(KA_{\{f\}})/(J^nA_{\{f\}}) = K_f/(J^n)_f = K_{\{f\}}/(J^n)_{\{f\}},$$

d'où notre assertion (1.8.11).

Considérons maintenant le cas général. Soit $(\mathfrak{X}_\alpha)$ un recouvrement fini de $\mathfrak{X}$ par des ouverts affines globalement idylliques. Pour chaque α, achevons la construction précédente au-dessus de $\mathfrak{X}_\alpha$, $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ étant remplacés par leurs restrictions ; on choisit un couple d'entiers admissible (i_α, j_α) et on note $\mathscr{K}_\alpha$ l'idéal ouvert canonique de $\mathfrak{X}_\alpha$ qui lui est associé. On peut clairement supposer tous les couples (i_α, j_α) égaux. Dans ces conditions, les $\mathscr{K}_\alpha$ se recollent en un idéal ouvert $\mathscr{K}$ de $\mathfrak{X}$ tel que $\mathscr{K}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'} = \mathscr{A}'^i\mathscr{B}^j$ et que $\mathrm{V}(\mathscr{K})$ soit disjoint de U. Reste à modifier $\mathscr{K}$ en un idéal ouvert cohérent $\mathscr{L}$ de $\mathfrak{X}$ vérifiant les mêmes conditions, ce qu'on peut faire en vertu de 2.8.18.

3.1.16. Revenons maintenant à la preuve de 3.1.14 ; montrons que $\varphi \circ \psi$ est l'éclatement de $\mathscr{A}\mathscr{L}$ dans $\mathfrak{X}$, où $\mathscr{L}$ est l'idéal ouvert cohérent de $\mathfrak{X}$ défini dans 3.1.15. La question étant locale sur $\mathfrak{X}$, on peut se borner au cas affine considéré au début de la démonstration de 3.1.15. Reprenons alors les mêmes notations, et notons $\rho\colon X'' \to X'$ l'éclatement de $\mathscr{C}$ dans X'. Alors $\mathfrak{X}''$ est le complété de X'' le long de $\rho^{-1}(Y')$, et ψ est le prolongement de ρ aux complétés (3.1.3) ; donc $\varphi \circ \psi$ est le prolongement de $\phi \circ \rho$ aux complétés. Soit L l'idéal ouvert de type fini de A tel que $\mathscr{L} = L^{\Delta}$. Il résulte de la relation $\mathscr{L}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'} = \mathscr{A}'^i\mathscr{B}^j$ que $L\mathscr{O}_{X'} = \mathfrak{a}^i\mathscr{C}^j$ (cf. (3.1.15.2)). Par suite, $\phi \circ \rho$ est l'éclatement de $(\mathfrak{a}L)^{\sim}$ dans X, et $\varphi \circ \psi$ est l'éclatement de $\mathscr{A}\mathscr{L}$ dans $\mathfrak{X}$ (3.1.3).

Proposition 3.1.17.

(i) *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique de schémas formels idylliques, $\psi\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$ un éclatement admissible de présentation finie. Il existe alors* *un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X}' \arrow[dr, "\vartheta"] \arrow[drr, bend left, "f'"] \arrow[ddr, bend right, "\varphi"'] & & \\
& \mathfrak{Y}' \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{X} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{Y}' \arrow[d, "\psi"] \\
& \mathfrak{X} \arrow[r, "f"] & \mathfrak{Y}
\end{tikzcd}$$

où $\mathfrak{X}'$ est idyllique rig-pur, ϑ et φ sont des éclatements admissibles de présentation finie. En outre, si f est localement de présentation finie (*resp. localement de type fini, resp. de présentation finie, resp. de type fini*)*, il en est de même de f'.*

(ii) *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\varphi_i\colon \mathfrak{X}_i \to \mathfrak{X}$ $(i = 1, 2)$ deux éclatements admissibles. Il existe alors un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X}' \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & \mathfrak{X}_1 \arrow[d, "\varphi_1"] \\
\mathfrak{X}_2 \arrow[r, "\varphi_2"] & \mathfrak{X}
\end{tikzcd} \qquad (3.1.17.1)$$

où $\mathfrak{X}'$ est idyllique rig-pur, f_1 et f_2 sont des éclatements admissibles, et le morphisme composé $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ est un éclatement admissible de présentation finie.

Supposons, en outre, que $\mathfrak{X}$ soit rig-pur et que φ_1 et φ_2 soient U-admissibles, où U est un ouvert de $\mathfrak{X}$. Alors le diagramme (3.1.17.1) *peut être choisi de sorte que φ soit U-admissible.*

(iii) *Pour tout diagramme commutatif de morphismes adiques de schémas formels idylliques*

$$\mathfrak{X} \rightrightarrows \mathfrak{Y} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{Y}' \qquad (3.1.17.2)$$

où ψ est un éclatement admissible, il existe un diagramme commutatif

$$\mathfrak{X}' \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{X} \rightrightarrows \mathfrak{Y} \qquad (3.1.17.3)$$

où $\mathfrak{X}'$ est idyllique rig-pur et φ est un éclatement admissible de présentation finie.

(i) Supposons que ψ soit l'éclatement dans $\mathfrak{Y}$ d'un idéal ouvert cohérent $\mathscr{B}$. Alors $\mathscr{A} = f^*(\mathscr{B})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est un idéal ouvert cohérent de $\mathfrak{X}$ (2.8.14). Soient $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$, $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ l'éclatement de $\mathscr{J}\mathscr{A}$ dans $\mathfrak{X}$. En vertu de 3.1.4 et 3.1.9, $\mathfrak{X}'$ est idyllique rig-pur, φ est de présentation finie, et il existe un morphisme adique $f'\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{Y}'$ tel que $f \circ \varphi = \psi \circ f'$. Posons $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Y}' \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{X}$ et $\vartheta = (f', \varphi)\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{Z}$; alors $\mathfrak{Z}$ est un schéma formel idyllique et ϑ est un morphisme de présentation finie (2.6.8). Soient $q\colon \mathfrak{Z} \to \mathfrak{X}$, $p\colon \mathfrak{Z} \to \mathfrak{Y}'$ les projections canoniques, $\rho\colon \mathfrak{X}'' \to \mathfrak{Z}$ l'éclatement de $q^*(\mathscr{A}\mathscr{J})\mathscr{O}_{\mathfrak{Z}}$ dans $\mathfrak{Z}$. En vertu de 3.1.4 et 3.1.9, il existe deux morphismes adiques $u\colon \mathfrak{X}'' \to \mathfrak{X}'$ et $u'\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}''$ tels que $\rho \circ u' = \vartheta$ et $q \circ \rho = q \circ \vartheta \circ u$. Composant la seconde relation avec f, on obtient $\psi \circ p \circ \rho = \psi \circ p \circ \vartheta \circ u$. On en déduit, toujours par 3.1.4 et 3.1.9, que $p \circ \rho = p \circ \vartheta \circ u$. Les deux relations $q \circ \rho = q \circ \vartheta \circ u$ et $p \circ \rho = p \circ \vartheta \circ u$ entraînent que $\rho = \vartheta \circ u$. Utilisant une dernière fois 3.1.9, on conclut que u et u' sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. La dernière assertion est immédiate.

(ii) Supposons que φ_1 (resp. φ_2) soit l'éclatement dans $\mathfrak{X}$ d'un idéal ouvert cohérent $\mathscr{A}_1$ (resp. $\mathscr{A}_2$). Soient $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$, $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ l'éclatement de $\mathscr{J}\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2$ dans $\mathfrak{X}$, f_1 l'éclatement de $\varphi_1^*(\mathscr{J}\mathscr{A}_2)\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_1}$ dans $\mathfrak{X}_1$, f_2 l'éclatement de $\varphi_2^*(\mathscr{J}\mathscr{A}_1)\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_2}$ dans $\mathfrak{X}_2$. Alors, $\mathfrak{X}'$ est idyllique rig-pur, φ est de présentation finie (3.1.4) et le diagramme (3.1.17.1) est commutatif (3.1.13).

Si $\mathfrak{X}$ est rig-pur et si $\mathrm{V}(\mathscr{A}_i) \cap U = \emptyset$ $(i = 1, 2)$, on peut prendre pour $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ l'éclatement de $\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2$ dans $\mathfrak{X}$ (3.1.4), pour f_1 l'éclatement de $\varphi_1^*(\mathscr{A}_2)\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_1}$ dans $\mathfrak{X}_1$ et pour f_2 l'éclatement de $\varphi_2^*(\mathscr{A}_1)\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_2}$ dans $\mathfrak{X}_2$.

(iii) Supposons que ψ soit l'éclatement dans $\mathfrak{Y}'$ d'un idéal ouvert cohérent $\mathscr{B}'$. Soient $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$, $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ l'éclatement de $\mathscr{B}'\mathscr{J}$ dans $\mathfrak{X}$ (2.8.14). On sait (3.1.4 et 3.1.9) alors que $\mathfrak{X}'$ est idyllique rig-pur, φ est de présentation finie et le diagramme (3.1.17.3) est commutatif.

3.2 Dilatations

3.2.1. Soient S, S' deux anneaux gradués à degrés positifs, $\theta\colon S' \to S$ un homomorphisme d'anneaux gradués. Suivant ([29] 2.8.1), on désigne par $\mathbf{G}(\theta)$ la partie ouverte de $X = \mathrm{Proj}(S)$ réunion des $\mathrm{D}_+(\theta(f'))$, où f' parcourt l'ensemble des éléments homogènes de S'_+. En vertu de *loc. cit.* 2.8.2 et 2.8.3, il existe un morphisme affine canonique du schéma induit $\mathbf{G}(\theta)$ dans $\mathrm{Proj}(S')$, dit associé à θ. Soient S'' un troisième anneau gradué à degrés positifs, $\theta'\colon S'' \to S'$ un homomorphisme d'anneaux gradués, et posons $\theta'' = \theta \circ \theta'$. D'après *loc. cit.* 2.8.4, on a $\mathbf{G}(\theta'') \subset \mathbf{G}(\theta)$, et si ϑ, ϑ' et ϑ'' sont les morphismes associés à θ, θ' et θ'', on a $\vartheta(\mathbf{G}(\theta'')) \subset \mathbf{G}(\theta')$ et $\vartheta'' = \vartheta' \circ (\vartheta | \mathbf{G}(\theta''))$.

3.2.2. Soient Y un schéma, $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}'$ deux $\mathscr{O}_Y$-algèbres graduées quasi-cohérentes à degrés positifs ; posons $X = \mathrm{Proj}(\mathscr{S})$, $X' = \mathrm{Proj}(\mathscr{S}')$ et soient p, p' les morphismes structuraux de X et X' dans Y. Soit $\theta\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ un $\mathscr{O}_Y$-homomorphisme d'algèbres graduées. Pour tout ouvert affine U de Y, on pose $A_U = \Gamma(U, \mathscr{O}_Y)$, $S_U = \Gamma(U, \mathscr{S})$ et $S'_U = \Gamma(U, \mathscr{S})$; l'homomorphisme θ définit un homomorphisme $\theta_U\colon S'_U \to S_U$ de A_U-algèbres graduées. Il lui correspond dans $p^{-1}(U)$ un ensemble ouvert $\mathbf{G}(\theta_U)$ et un morphisme $\vartheta_U\colon \mathbf{G}(\theta_U) \to p'^{-1}(U)$. D'après ([29] 3.5.1), il existe une partie ouvert $\mathbf{G}(\theta)$ de X et un Y-morphisme affine $\vartheta\colon \mathbf{G}(\theta) \to X'$ dit associé à θ, tels que, pour tout ouvert affine U de Y, $\mathbf{G}(\theta)\cap p^{-1}(U)=\mathbf{G}(\theta_U)$ et ϑ_U soit la restriction de ϑ au-dessus de U.

3.2.3. Soient $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ deux schémas formels idylliques, $f\colon \mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$ un morphisme déployé (2.2.3), $\mathscr{J}$ (resp. $\mathscr{K}$) un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$) tels que $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}\subset\mathscr{J}$, $\mathscr{A}$ (resp. $\mathscr{B}$) un idéal ouvert cohérent de $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$) tels que $f^*(\mathscr{B})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}\subset\mathscr{A}$.

Pour tout entier $n\geq 0$, f définit un morphisme de schémas usuels $f_n\colon \mathfrak{X}_n\to\mathfrak{Y}_n$ en posant $\mathfrak{X}_n=(\mathfrak{X},\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$ et $\mathfrak{Y}_n=(\mathfrak{Y},\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}^{n+1})$ (2.2.1), de sorte que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d] & \mathfrak{Y}_n \arrow[d] \\ \mathfrak{X} \arrow[r, "f"] & \mathfrak{Y} \end{tikzcd} \tag{3.2.3.1}$$

où les flèches verticales sont les flèches canoniques est commutatif.

On note $\varphi\colon \mathfrak{X}'\to\mathfrak{X}$ l'éclatement de $\mathscr{A}$ dans $\mathfrak{X}$, $(\mathfrak{X}'_n)$ le $(\mathfrak{X}_n)$-système inductif adique associé (3.1.1), $\psi\colon \mathfrak{Y}'\to\mathfrak{Y}$ l'éclatement de $\mathscr{B}$ dans $\mathfrak{Y}$ et $(\mathfrak{Y}'_n)$ le $(\mathfrak{Y}_n)$-système inductif adique associé.

On a un homomorphisme canonique de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbres graduées

$$\theta\colon f^*(\oplus_{m\geq 0}\mathscr{B}^m)\to\oplus_{m\geq 0}\mathscr{A}^m. \tag{3.2.3.2}$$

Compte tenu de (3.2.3.1), θ induit un système projectif de morphismes de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$-algèbres graduées

$$\theta_n\colon f_n^*(\oplus_{m\geq 0}\mathscr{B}^m\otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}}\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_n})\to\oplus_{m\geq 0}\mathscr{A}^m\otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}.$$

Il correspond par (3.2.2) à θ_n un ensemble ouvert $\mathbf{G}(\theta_n)$ de $\mathfrak{X}'_n$ et un $\mathfrak{X}_n$-morphisme affine $\vartheta_n\colon \mathbf{G}(\theta_n)\to\mathfrak{X}_n\times_{\mathfrak{Y}_n}\mathfrak{Y}'_n$. On note $f'_n\colon \mathbf{G}(\theta_n)\to\mathfrak{Y}'_n$ le composé de ϑ_n et de la projection canonique.

Il résulte de la définition (3.2.2) que pour $m\leq n$, $\mathbf{G}(\theta_m)=\mathfrak{X}'_m\cap\mathbf{G}(\theta_n)$ et le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbf{G}(\theta_m) \arrow[r, "\vartheta_m"] \arrow[d] & \mathfrak{X}_m\times_{\mathfrak{Y}_m}\mathfrak{Y}'_m \arrow[d] \\ \mathbf{G}(\theta_n) \arrow[r, "\vartheta_n"] & \mathfrak{X}_n\times_{\mathfrak{Y}_n}\mathfrak{Y}'_n \end{tikzcd} \tag{3.2.3.3}$$

où les flèches verticales sont les flèches canoniques est cartésien ; autrement dit, ϑ_m s'identifie à $\mathrm{id}_{\mathfrak{X}_m}\times_{\mathfrak{X}_n}\vartheta_n$. Il en résulte que la limite inductive $\mathfrak{X}'_{(\mathscr{B})}$ de la suite $(\mathbf{G}(\theta_n))$ est le schéma formel induit sur un ouvert de $\mathfrak{X}'$, et la limite inductive des ϑ_n est un $\mathfrak{X}$-morphisme adique $\vartheta\colon \mathfrak{X}'_{(\mathscr{B})}\to\mathfrak{X}\times_{\mathfrak{Y}}\mathfrak{Y}'$. On note $f'\colon \mathfrak{X}'_{(\mathscr{B})}\to\mathfrak{Y}'$ le composé de ϑ et de la projection canonique ; f' est la limite inductive de la suite (f'_n) (2.2.2 et 2.2.15).

3.2.3.4. On dit que $\mathfrak{X}'_{(\mathscr{B})}$ est la *dilatation* de $\mathscr{A}$ par rapport à $\mathscr{B}$, ϑ est le morphisme canonique et f' est le relèvement canonique de f.

3.2.3.5. Supposons que $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ et $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$ soient affines globalement idylliques ; donc f est défini par un homomorphisme continu $u\colon B \to A$. Soient J (resp. K) l'idéal de définition de type fini de A (resp. B) tel que $\mathscr{J} = J^{\Delta}$ (resp. $\mathscr{K} = K^{\Delta}$), $\mathfrak{a}$ (resp. $\mathfrak{b}$) l'idéal ouvert de type fini de A (resp. B) tel que $\mathscr{A} = \mathfrak{a}^{\Delta}$ (resp. $\mathscr{B} = \mathfrak{b}^{\Delta}$). On a $u(K) \subset J$ et $u(\mathfrak{b}) \subset \mathfrak{a}$ (2.7.5). Posons $X = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = \mathrm{Spec}(B)$ et soient $g\colon X \to Y$ le morphisme déduit de u, X' l'éclatement de $\widetilde{\mathfrak{a}}$ dans X, Y' l'éclatement de $\widetilde{\mathfrak{b}}$ dans Y. Donc $\mathfrak{X}'$ est le complété de X' le long de $\mathrm{V}(J)$ et $\mathfrak{Y}'$ est le complété de Y' le long de $\mathrm{V}(K)$. En particulier, $\mathfrak{X}'_n$ est un sous-schéma fermé de X' et $\mathfrak{Y}'_n$ est un sous-schéma fermé de Y'. L'homomorphisme de A-algèbres graduées

$$\kappa\colon\ \oplus_{m\geq 0}\, \mathfrak{b}^m \otimes_B A \to \oplus_{m\geq 0}\mathfrak{a}^m$$

détermine un ensemble ouvert $\mathbf{G}(\kappa)$ de X' et un morphisme $\varkappa\colon \mathbf{G}(\kappa) \to X \times_Y Y'$ (3.2.1). On a $\mathbf{G}(\theta_n) = \mathfrak{X}'_n \cap \mathbf{G}(\kappa)$ et θ_n est le composé

$$\mathfrak{X}_n \times_X \mathbf{G}(\kappa) \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathfrak{X}_n} \times_X \varkappa} \mathfrak{X}_n \times_X (X \times_Y Y') \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}_n \times_{\mathfrak{Y}_n} \mathfrak{Y}'_n\,.$$

Par conséquent, $\mathfrak{X}'_{(\mathscr{B})}$ est canoniquement isomorphe aux complétés de $\mathbf{G}(\kappa)$ le long de $\mathrm{V}(J)$ et ϑ est le prolongement de $\varkappa$ aux complétés.

3.2.3.6. Supposons $\mathscr{A} = f^*(\mathscr{B})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$. Il résulte de ([29] 3.6.2) que $\mathfrak{X}'_{(\mathscr{B})} = \mathfrak{X}'$ et ϑ_n est une immersion fermée pour tout $n \geq 0$. Si de plus φ et ψ sont de présentation finie, alors $\vartheta\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}'$ est une immersion fermée de schémas formels idylliques. En effet, $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$ et $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}'$ sont idylliques (2.6.13 et 2.3.19), et ϑ est un morphisme localement de présentation finie (2.3.18), donc une immersion fermée (2.9.5).

3.2.3.7. Supposons $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ une immersion (resp. une immersion ouverte, resp. une immersion fermée) et $\mathscr{A} = f^*(\mathscr{B})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, de sorte que $\mathfrak{X}'$ est la dilatation de $\mathscr{A}$ par rapport à $\mathscr{B}$ (3.2.3.6). Si φ et ψ sont de présentation finie, ϑ est une immersion fermée (resp. un isomorphisme si f est une immersion ouverte) ; par suite, f' est une immersion (resp. une immersion ouverte, resp. une immersion fermée).

Proposition 3.2.4. *Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel idyllique quasi-compact, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ une immersion* (*resp. une immersion ouverte, resp. une immersion fermée*), *$\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ un éclatement admissible. Alors :*

(i) *Il existe un diagramme commutatif* (*resp. cartésien si f est une immersion ouverte*)

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{Y}'' \arrow[rr, "\psi"] & & \mathfrak{Y} \\ \mathfrak{X}'' \arrow[u, "f''"] \arrow[r, "t"] & \mathfrak{X}' \arrow[r, "\varphi"] & \mathfrak{X} \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd} \tag{3.2.4.1}$$

tel que ψ et $\varphi \circ t$ soient des éclatements admissibles de présentation fini, que f'' soit une immersion (*resp. une immersion ouverte, resp. une immersion fermée*) *et que t soit un morphisme de présentation finie.*

(ii) *Si $\mathfrak{Y}$ est noethérien* (*resp. $\mathfrak{Y}$ est rig-pur et φ est de présentation finie*), *le diagramme* (3.2.4.1) *peut être choisi de sorte que t est un isomorphisme.*

Supposons que φ soit l'éclatement dans $\mathfrak{X}$ d'un idéal ouvert cohérent $\mathscr{A}$. D'après 2.9.13, il existe un idéal ouvert cohérent $\mathscr{B}$ de $\mathfrak{Y}$ tel que $f^*(\mathscr{B})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} = \mathscr{A}$.

(i) Soient $\mathscr{K}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{Y}$, $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\psi\colon \mathfrak{Y}'' \to \mathfrak{Y}$ l'éclatement de $\mathscr{K}\mathscr{B}$ dans $\mathfrak{Y}$, $\phi\colon \mathfrak{X}'' \to \mathfrak{X}$ l'éclatement de $\mathscr{J}\mathscr{A}$ dans $\mathfrak{X}$. Alors ψ et ϕ sont de présentation finie, $\mathfrak{X}''$ et $\mathfrak{Y}''$ sont rig-purs (3.1.4). D'après 3.1.9, il existe un morphisme de présentation finie $t\colon \mathfrak{X}'' \to \mathfrak{X}'$ tel que $\phi = \varphi \circ t$. Comme $f^*(\mathscr{K}\mathscr{B})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} = \mathscr{J}\mathscr{A}$, le relèvement canonique $f''\colon \mathfrak{X}'' \to \mathfrak{Y}''$ de f vérifie les propriétés requises (3.2.3.7).

(ii) Compte tenu de 3.1.4(ii), on peut prendre pour $\psi\colon \mathfrak{Y}'' \to \mathfrak{Y}$ l'éclatement de $\mathscr{B}$ dans $\mathfrak{Y}$.

3.2.5. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ deux morphismes déployés de schémas formels idylliques, $\mathscr{A}$ (resp. $\mathscr{B}$, resp. $\mathscr{C}$) un idéal ouvert cohérent de $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$, resp. $\mathfrak{Z}$) tels que $\mathscr{B}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathscr{A}$ et $\mathscr{C}\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}} \subset \mathscr{B}$. On note $\mathfrak{X}'$ l'éclatement de $\mathscr{A}$ dans $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}'$ l'éclatement de $\mathscr{B}$ dans $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}'$ l'éclatement de $\mathscr{C}$ dans $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{X}'_{(\mathscr{B})}$ la dilatation de $\mathscr{A}$ par rapport à $\mathscr{B}$, $\mathfrak{Y}'_{(\mathscr{C})}$ la dilatation de $\mathscr{B}$ par rapport à $\mathscr{C}$, $\vartheta\colon \mathfrak{X}'_{(\mathscr{B})} \to \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}'$ et $\vartheta'\colon \mathfrak{Y}'_{(\mathscr{C})} \to \mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{Z}} \mathfrak{Z}'$ les morphismes canoniques. Supposons qu'au moins l'une des hypothèses suivantes soit vérifiée :

(i) $\mathfrak{X}$ est localement noethérien.

(ii) $\mathfrak{Y}$ est quasi-compact.

(iii) f est adique.

Alors $h = g \circ f$ est déployé. En effet, dans chacun de ces cas, on peut trouver des idéaux de définition cohérents $\mathscr{J}$ (resp. $\mathscr{K}$, resp. $\mathscr{L}$) de $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$, resp. $\mathfrak{Z}$) tels que $\mathscr{K}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathscr{J}$ et $\mathscr{L}\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}} \subset \mathscr{K}$. On note $\mathfrak{X}'_{(\mathscr{C})}$ la dilatation de $\mathscr{A}$ par rapport à $\mathscr{C}$ et $\vartheta''\colon \mathfrak{X}'_{(\mathscr{C})} \to \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Z}} \mathfrak{Z}'$ le morphisme canonique. Il résulte alors de 3.2.1 que $\mathfrak{X}'_{(\mathscr{C})} \subset \mathfrak{X}'_{(\mathscr{B})}$, $\vartheta(\mathfrak{X}'_{(\mathscr{C})}) \subset \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}'_{(\mathscr{C})}$ et $\vartheta'' = (\mathrm{id}_{\mathfrak{X}} \times_{\mathfrak{Y}} \vartheta') \circ (\vartheta|\mathfrak{X}'_{(\mathscr{C})})$.

Proposition 3.2.6. *Les hypothèses étant celles de* (3.2.3), *soient de plus $\mathscr{W}$ un schéma formel idyllique, $g\colon \mathscr{W} \to \mathfrak{X}$ un morphisme adique tels que $\mathscr{A}\mathscr{O}_{\mathscr{W}}$ soit un idéal inversible et que $\mathscr{B}\mathscr{O}_{\mathscr{W}} = \mathscr{A}\mathscr{O}_{\mathscr{W}}$; notons $g'\colon \mathscr{W} \to \mathfrak{X}'$ l'unique morphisme tel que $g = \varphi \circ g'$* (3.1.9). *Alors g' se factorise à travers $\mathfrak{X}'_{(\mathscr{B})}$.*

D'une part, $\mathscr{W}$ s'identifie à la dilatation de $\mathscr{A}\mathscr{O}_{\mathscr{W}}$ par rapport à $\mathscr{A}$ (3.2.3.6) et g' est le relèvement canonique de g (3.1.9). D'autre part, $\mathscr{W}$ s'identifie aussi à la dilatation de $\mathscr{A}\mathscr{O}_{\mathscr{W}}$ par rapport à $\mathscr{B}$ car $\mathscr{B}\mathscr{O}_{\mathscr{W}} = \mathscr{A}\mathscr{O}_{\mathscr{W}}$. La proposition résulte alors de 3.2.5.

Proposition 3.2.7. *Sous les hypothèses de* (3.2.3)*, on a*

$$(\mathscr{B}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'})|\mathfrak{X}'_{(\mathscr{B})} = (\mathscr{A}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'})|\mathfrak{X}'_{(\mathscr{B})}. \tag{3.2.7.1}$$

Si de plus φ est de présentation finie, $\mathfrak{X}'_{(\mathscr{B})}$ est l'ouvert maximal de $\mathfrak{X}'$ où la relation (3.2.7.1) *est vérifiée.*

La relation (3.2.7.1) étant locale sur $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$, on peut se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ et $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$ sont affines globalement idylliques ; reprenons les notations de 3.2.3.5. On a $\mathscr{A}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'} \simeq (\widetilde{\mathfrak{a}}\mathscr{O}_{X'})_{/\mathfrak{X}'_0}$ et $\mathscr{B}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'} \simeq (\widetilde{\mathfrak{b}}\mathscr{O}_{X'})_{/\mathfrak{X}'_0}$ (2.5.5 et 2.5.11). Il suffit de montrer que $(\widetilde{\mathfrak{b}}\mathscr{O}_{X'})|\mathbf{G}(\kappa) = (\widetilde{\mathfrak{a}}\mathscr{O}_{X'})|\mathbf{G}(\kappa)$. On pose $S = \oplus_{n\geq 0}\mathfrak{a}^n$, de sorte que $X' = \mathrm{Proj}(S)$. Pour $a \in \mathfrak{a}$, si on note a' l'élément a vu comme un élément homogène de degré un de S, l'image inverse de a engendre l'idéal $\widetilde{\mathfrak{a}}\mathscr{O}_{X'}$ sur l'ouvert $\mathrm{D}_+(a')$. Donc l'inclusion $\widetilde{\mathfrak{b}}\mathscr{O}_{X'} \subset \widetilde{\mathfrak{a}}\mathscr{O}_{X'}$ induit une égalité sur les ouverts $\mathrm{D}_+(u(b)')$ pour $b \in \mathfrak{b}$. Mais on a $\mathbf{G}(\kappa) = \cup_{b\in\mathfrak{b}}\mathrm{D}_+(u(b)')$, ce qui entraîne l'assertion.

Pour la seconde partie de la proposition, observons d'abord que $\mathfrak{X}'$ est un schéma formel idyllique (2.6.13) et $\mathscr{B}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'} \subset \mathscr{A}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$. Soient U l'ouvert maximal de $\mathfrak{X}'$ tel que $(\mathscr{B}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'})|U = (\mathscr{A}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'})|U$ ([28] 0.5.2.2), $j\colon U \to \mathfrak{X}'$ l'injection canonique. On a $\mathfrak{X}'_{(\mathscr{B})} \subset U$ d'après (3.2.7.1). Mais j se factorise à travers $\mathfrak{X}'_{(\mathscr{B})}$ en vertu de 3.2.6 ; donc $\mathfrak{X}'_{(\mathscr{B})} = U$.

Corollaire 3.2.8. *Sous les hypothèses de* (3.2.3)*, si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont des idéaux de définition de $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ respectivement, alors $f'\colon \mathfrak{X}'_{(\mathscr{B})} \to \mathfrak{Y}'$ est un morphisme adique.*

Posons $\mathscr{A}' = \mathscr{A}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$ et $\mathscr{B}' = \mathscr{B}\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'}$. Le corollaire découle de la relation $f'^*(\mathscr{B}')\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'_{(\mathscr{B})}} = \mathscr{A}'|\mathfrak{X}'_{(\mathscr{B})}$ (3.2.7.1), car φ et ψ sont adiques.

Corollaire 3.2.9. *Sous les hypothèses de* (3.2.5)*, si $\varphi : \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ est de présentation finie, alors $\mathfrak{X}'_{(\mathscr{C})} = f'^{-1}(\mathfrak{Y}'_{(\mathscr{C})})$ où $f'\colon \mathfrak{X}'_{(\mathscr{B})} \to \mathfrak{Y}'$ est le relèvement canonique de f.*

Posons $U = f'^{-1}(\mathfrak{Y}'_{(\mathscr{C})})$. On sait (3.2.5) que $\mathfrak{X}'_{(\mathscr{C})} \subset U \subset \mathfrak{X}'_{(\mathscr{B})}$. On a $(\mathscr{C}\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'})|\mathfrak{Y}'_{(\mathscr{C})} = (\mathscr{B}\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'})|\mathfrak{Y}'_{(\mathscr{C})}$ (3.2.7.1) ; d'où $(\mathscr{C}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'})|U = (\mathscr{B}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'})|U$. Comme $U \subset \mathfrak{X}'_{(\mathscr{B})}$, on a $(\mathscr{B}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'})|U = (\mathscr{A}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'})|U$. On en déduit que $(\mathscr{C}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'})|U = (\mathscr{A}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'})|U$ et par suite que $U \subset \mathfrak{X}'_{(\mathscr{C})}$ (3.2.7), ce qui achève la preuve.

3.3 Points rigides d'un schéma formel idyllique

Définition 3.3.1. Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique. On dit qu'un sous-schéma (resp. un sous-schéma fermé) $\mathscr{P}$ de $\mathfrak{X}$ est un *point rigide* (resp. un *point rigide fermé*) de $\mathfrak{X}$, si $\mathscr{P}$ est un schéma formel affine et si $\Gamma(\mathscr{P}, \mathscr{O}_{\mathscr{P}})$ est un ordre 1-valuatif (1.11.1) ; l'espace sous-jacent à $\mathscr{P}$ est appelé *spécialisation* de $\mathscr{P}$. On note $\langle\mathfrak{X}\rangle$ l'ensemble des points rigides de $\mathfrak{X}$.

S'il existe un idéal de définition cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$ tel que $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$ soit un schéma de Jacobson, alors tout point rigide de $\mathfrak{X}$ est fermé ([28] 0.2.8.2).

Proposition 3.3.2. *Soient A un anneau idyllique, J un idéal de définition de type fini de A, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(A)$, X_{g} l'ouvert $X - \mathrm{V}(J)$ de X. Alors l'ensemble des points rigides fermés de $\mathfrak{X}$ est isomorphe à l'ensemble des points fermés de X_{g}.*

Cela résulte de 1.11.8.

Proposition 3.3.3. *Soient A un anneau idyllique, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathscr{P}$ un point rigide fermé de $\mathfrak{X}$, $U = \mathrm{Spf}(B)$ un ouvert formel affine de $\mathfrak{X}$ contenant $\mathscr{P}$; notons $\mathfrak{p}$ (resp. $\mathfrak{q}$) l'idéal premier de A (resp. B) correspondant à $\mathscr{P}$ (3.3.2). Alors l'homomorphisme canonique $A_{\mathfrak{p}} \to B_{\mathfrak{q}}$ induit un isomorphisme entre les séparés complétés de ces anneaux locaux pour les topologies définies par leurs idéaux maximaux respectifs.*

Notons d'abord que B est idyllique (2.6.12). Il existe $f \in A$ tel que $\mathscr{P} \subset \mathscr{D}(f) \subset U$; on a donc $\mathscr{D}(f) = \mathrm{Spf}(A_{\{f\}}) = \mathrm{Spf}(B_{\{f\}})$. On se réduit aussitôt au cas où $U = \mathscr{D}(f)$ et $B = A_{\{f\}}$. L'assertion résulte alors de 1.12.18 (appliqué à la A-algèbre A_f).

Proposition 3.3.4. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, B un ordre 1-valuatif, $\mathscr{P} = \mathrm{Spf}(B)$, $f \colon \mathscr{P} \to \mathfrak{X}$ un morphisme (localement) de type fini. Alors :*

- (i) *Il existe un ouvert formel affine globalement idyllique $U = \mathrm{Spf}(A)$ de $\mathfrak{X}$ contenant l'image de f tel que, si l'on note $\varphi \colon A \to B$ l'homomorphisme déduit de f, B soit un A-module cohérent. Dans ce cas, $\mathfrak{a} = \ker(\varphi)$ est un idéal cohérent de A, et $A/\mathfrak{a}$ muni de la topologie quotient de celle de A est un ordre 1-valuatif.*
- (ii) *Le morphisme f est de présentation finie.*
- (iii) *Il existe un unique point rigide $\mathscr{Q}$ de $\mathfrak{X}$ tel que l'injection canonique $j \colon \mathscr{Q} \to \mathfrak{X}$ majore f, c'est à dire que f se factorise en*

$$\mathscr{P} \xrightarrow{g} \mathscr{Q} \xrightarrow{j} \mathfrak{X},$$

où g est un morphisme de présentation finie ; le morphisme g est nécessairement unique.

(i) Soient p l'unique point sous-jacent à $\mathscr{P}$, $U = \mathrm{Spf}(A)$ un ouvert formel affine globalement idyllique de $\mathfrak{X}$ contenant $f(p)$, J un idéal de définition de type fini de A, $\varphi \colon A \to B$ l'homomorphisme déduit de f. Montrons que quitte à restreindre U, B est un A-module cohérent. Cela résulte de 1.11.2 (sans changer U) si A/J est un anneau de Jacobson. On peut donc se borner au cas où A noethérien (1.11.3). Compte tenu de 1.11.4, on peut supposer B un anneau de valuation discrète complet d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. On a $JB = \mathfrak{m}^n$ pour un entier $n > 0$. On note C l'image de l'homomorphisme canonique $A/J \to B/\mathfrak{m}$. Comme $B/\mathfrak{m}$ est une C-algèbre de type fini, le point générique de $\mathrm{Spec}(C)$ est isolé dans $\mathrm{Spec}(C)$

([28] 6.4.4). Remplaçant U par un ouvert formel affine contenant $f(p)$, on peut supposer C un corps. Il en résulte que $B/\mathfrak{m}$ est fini sur C ([12] chap. V §3.4 théo. 3). Par suite, $B/\mathfrak{m}$ est une (A/J)-algèbre finie ; donc B/JB est une (A/J)-algèbre finie, et B est un A-module de type fini (1.8.5), d'où la première assertion. La seconde assertion est immédiate.

(ii) Cela résulte de (i), 1.10.4 et ([28] 6.2.10).

(iii) L'existence de $\mathscr{Q}$ est déjà démontrée dans (i). Montrons l'unicité. Comme l'espace sous-jacent à $\mathscr{Q}$ est $f(p)$, $f(p)$ est localement fermé dans $\mathfrak{X}$. Soient $U = \mathrm{Spf}(A)$ un ouvert formel affine globalement idyllique de $\mathfrak{X}$ tel que $f(p)$ soit fermé dans U, $\varphi\colon A \to B$ l'homomorphisme déduit de f, $\mathfrak{a} = \ker(\varphi)$. D'après (i), on peut choisir U de sorte que $\mathrm{Spf}(A/\mathfrak{a})$ est un point rigide fermé de U. Comme $\mathscr{Q}$ est fermé dans U, f se factorise uniquement en

$$\mathscr{P} \longrightarrow \mathrm{Spf}(A/\mathfrak{a}) \longrightarrow \mathscr{Q} \longrightarrow U \longrightarrow \mathfrak{X}\,.$$

Par suite, $\mathrm{Spf}(A/\mathfrak{a})$ s'identifie à un point rigide fermé de $\mathscr{Q}$. Mais en vertu de 3.3.2, $\mathscr{Q}$ est l'unique point rigide fermé de $\mathscr{Q}$, donc $\mathscr{Q} = \mathrm{Spf}(A/\mathfrak{a})$.

3.3.5. Il résulte de 3.3.4 que tout morphisme localement de type fini de schémas formels idylliques $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ détermine uniquement une application de $\langle\mathfrak{X}\rangle$ dans $\langle\mathfrak{Y}\rangle$, que l'on note encore $f\colon \langle\mathfrak{X}\rangle \to \langle\mathfrak{Y}\rangle$. La correspondance ainsi définie $\mathfrak{X} \mapsto \langle\mathfrak{X}\rangle$ est fonctorielle.

Proposition 3.3.6. *Soient A un anneau idyllique, $\mathfrak{a}$ un idéal ouvert de type fini de A, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ l'éclatement de $\mathfrak{a}^{\triangle}$ dans $\mathfrak{X}$. Supposons vérifiée l'une des conditions suivantes :*

(a) *A est noethérien.*
(b) *A est rig-pur.*
(c) *$\mathfrak{a}$ est un idéal de définition de A.*

Soient $\mathscr{Q}$ un point rigide fermé de $\mathfrak{X}'$, $U = \mathrm{Spf}(B)$ un ouvert formel affine de $\mathfrak{X}'$ contenant $\mathscr{Q}$; notons $\mathfrak{q}$ l'idéal premier de B correspondant à $\mathscr{Q}$ et $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de A correspondant à $\varphi(\mathscr{Q})$ (ce dernier est fermé dans $\mathfrak{X}$). Alors l'homomorphisme canonique $A_{\mathfrak{p}} \to B_{\mathfrak{q}}$ induit un isomorphe entre les séparés complétés de ces anneaux locaux pour les topologies définies par leurs idéaux maximaux respectifs.

Notons d'abord que φ est de présentation finie (3.1.4), que B est idyllique (2.6.12) et que $\mathfrak{q}$ est au-dessus de $\mathfrak{p}$. Soit J un idéal de définition de type fini de A. Posons $X = \mathrm{Spec}(A)$ et soit $\phi\colon X' \to X$ l'éclatement de $\widetilde{\mathfrak{a}}$ dans X, de sorte que $\mathfrak{X}'$ est le complété de X' le long de $\mathrm{V}(J\mathscr{O}_{X'})$ (3.1.3). Alors ϕ est de présentation finie (1.13.3). Compte tenu de 3.3.3, il suffit de montrer l'assertion pour un ouvert formel affine de $\mathfrak{X}'$ contenant $\mathscr{Q}$ et contenu dans U. On peut donc supposer U algébrisable, *i.e.*, qu'il existe un ouvert affine $\mathrm{Spec}(C)$ de X' tel que B soit le séparé complété de C pour la topologie J-adique. L'assertion résulte alors de 1.12.18 (appliqué à la A-algèbre C).

Proposition 3.3.7. *Soient $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}'$ deux schémas formels idylliques, $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ un éclatement admissible, $\mathscr{P} = \mathrm{Spf}(A)$ un point rigide de $\mathfrak{X}$, K le corps des fractions de A. Alors il existe un unique point rigide $\mathscr{Q} = \mathrm{Spf}(B)$ de $\mathfrak{X}'$ au-dessus de $\mathscr{P}$; on a $B \otimes_A K \simeq K$; et si $\mathscr{P}$ est fermé, $\mathscr{Q}$ est fermé.*

Supposons que φ soit l'éclatement dans $\mathfrak{X}$ d'un idéal ouvert cohérent $\mathscr{A}$. Soient $j\colon \mathscr{P} \to \mathfrak{X}$ l'injection canonique, $\mathfrak{a} = \Gamma(\mathscr{P}, j^*(\mathscr{A})\mathscr{O}_{\mathscr{P}})$, $\overline{A}$ la clôture intégrale de A dans K. En vertu de 1.11.4, $\overline{A}$ est un anneau 1-valuatif ; donc $\mathfrak{a}\overline{A}$ est un idéal inversible. Par suite, il existe une sous-algèbre C de $\overline{A}$, finie sur A, telle que $\mathfrak{a}C$ soit un idéal inversible. Compte tenu de 1.11.6, C est un ordre 1-valuatif, topologiquement de présentation finie sur A. Soit $u\colon \mathrm{Spf}(C) \to \mathscr{P}$ le morphisme canonique. Il existe un morphisme de type fini $u'\colon \mathrm{Spf}(C) \to \mathfrak{X}'$ relevant $j \circ u$ (3.1.9). En vertu de 3.3.4, il existe un unique point rigide $\mathscr{Q} = \mathrm{Spf}(B)$ de $\mathfrak{X}'$ tel que l'injection canonique $h\colon \mathscr{Q} \to \mathfrak{X}'$ majore u', c'est à dire que u' se factorise en

$$\mathrm{Spf}(C) \xrightarrow{v} \mathscr{Q} \xrightarrow{h} \mathfrak{X}' ,$$

où v est un morphisme de présentation finie. Il résulte encore de 3.3.4 que $\mathscr{Q}$ relève $\mathscr{P}$, et v est associé à un homomorphisme injectif de A-algèbres $B \to C$; d'où $B \otimes_A K \simeq K$. Si $\mathscr{P}$ est fermé, $\mathscr{Q}$ est fermé, en vertu de 1.11.5 et ([29] 5.4.3). Reste à montrer l'unicité du relèvement. Soient $\mathscr{Q}' = \mathrm{Spf}(B')$ un point rigide de $\mathfrak{X}'$ au-dessus de $\mathscr{P}$, $h'\colon \mathscr{Q}' \to \mathfrak{X}'$ l'injection canonique. En vertu de 1.11.7, il existe un ordre 1-valuatif D, quotient topologique de $B'\widehat{\otimes}_A C = B' \otimes_A C$. L'idéal $\mathfrak{a}B'$ est inversible, car il est monogène ouvert et B' est rig-pur ; et de même pour $\mathfrak{a}D$. Par suite, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spf}(C) \arrow[r, "u'"] & \mathfrak{X}' \\
\mathrm{Spf}(D) \arrow[r] \arrow[u] & \mathscr{Q}' \arrow[u, "h'"']
\end{tikzcd}$$

est commutatif (3.1.9). On en déduit, toujours par 3.3.4, que $\mathscr{Q}' = \mathscr{Q}$.

Corollaire 3.3.8. *Soient $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}'$ deux schémas formels idylliques, $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ un éclatement admissible. Alors l'application $\varphi\colon \langle \mathfrak{X}' \rangle \to \langle \mathfrak{X} \rangle$ est bijective.*

Proposition 3.3.9. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme étale de schémas formels idylliques, $\mathscr{Q}$ un point rigide de $\mathscr{S}$ de spécialisation $s \in \mathscr{S}$, x un point de $\mathfrak{X}$ tel que $f(x) = s$. Alors il existe un point rigide $\mathscr{P}$ de $\mathfrak{X}$ de spécialisation x tel que $f(\mathscr{P}) = \mathscr{Q}$. De plus, si $\Gamma(\mathscr{Q}, \mathscr{O}_{\mathscr{Q}})$ est un anneau 1-valuatif ou si l'extension $\kappa(s) \to \kappa(x)$ est triviale, $\mathscr{P}$ est unique.*

On peut clairement se borner au cas où $\mathscr{S} = \mathscr{Q} = \mathrm{Spf}(A)$ est formel affine, A étant un ordre 1-valuatif, et f est séparé. Soient $\mathscr{I}$ est un idéal de définition cohérent de $\mathscr{S}$, $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{I})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$, $\mathscr{S}_0 = (\mathscr{S}, \mathscr{O}_{\mathscr{S}}/\mathscr{I})$, $f_0\colon \mathfrak{X}_0 \to \mathscr{S}_0$ le morphisme déduit de f. Comme $\mathscr{S}_0$ est un schéma local hensélien (1.11.1.3), quitte à remplacer $\mathfrak{X}$ par un ouvert, on peut supposer l'espace topologique sous-jacent à $\mathfrak{X}_0$ réduit à x et le morphisme f_0 fini ([31] 18.5.11). Alors f est fini (2.3.24), et $\mathfrak{X}$ est un schéma formel affine dont l'anneau B est une A-algèbre locale, finie et topologiquement de présentation finie sur A (2.6.11). Le A-module B est cohérent en vertu de 1.10.11 et ([28] 6.2.10) ; donc B est une A-algèbre finie et de présentation finie sur A. De plus, B est A-plat (2.4.8 et 1.12.4) et $\Omega^1_{B/A} = 0$ (2.4.8 et 1.10.2(ii)). Par suite B est étale sur A. Tout point générique de $\mathrm{Spec}(B)$ définit par 3.3.2 un point rigide fermé de $\mathfrak{X}$ qui répond à la question.

Si A est un anneau 1-valuatif, alors B est local et normal ([31] 11.3.13), donc intègre ; par suite B est un anneau 1-valuatif.

Supposons enfin l'extension $\kappa(s) \to \kappa(x)$ triviale. Notons $\overline{A}$ la clôture intégrale de A dans son corps des fractions, qui est un anneau 1-valuatif (1.11.4). L'anneau $B \otimes_A \overline{A}$ est local et normal, donc intègre. On en déduit que B est intègre, et donc un ordre 1-valuatif.

Proposition 3.3.10. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique rig-pur, x un point localement fermé de $\mathfrak{X}$. Alors il existe un point rigide de $\mathfrak{X}$ de spécialisation x.*

On peut se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ est formel affine globalement idyllique rig-pur et x est fermé dans $\mathfrak{X}$. La proposition résulte alors de 1.11.8 et 1.11.10 lorsque A est noethérien, et de ([7] 7.1.5/4) lorsque A est topologiquement de présentation finie sur un anneau 1-valuatif.

Corollaire 3.3.11. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique rig-pur, $(U_i)_{i\in I}$ un ensemble* fini *d'ouverts de $\mathfrak{X}$; posons $\mathscr{U}_i = (U_i, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|U_i)$. Pour que $\mathfrak{X} = \cup_{i\in I} U_i$, il faut et il suffit que $\langle\mathfrak{X}\rangle = \cup_{i\in I}\langle\mathscr{U}_i\rangle$.*

Proposition 3.3.12. *Soient A un ordre* 1*-valuatif, K le corps des fractions de A, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ un éclatement admissible. Alors $\mathfrak{X}'$ est formel affine et $\Gamma(\mathfrak{X}', \mathscr{O}_{\mathfrak{X}'})$ est un ordre* 1*-valuatif fini sur A, de corps des fractions isomorphe à K.*

Observons d'abord que φ est de présentation finie et $\mathfrak{X}'$ est idyllique rig-pur (3.1.4). Supposons que φ soit l'éclatement de $\mathfrak{a}^{\Delta}$ dans $\mathfrak{X}$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal ouvert de type fini de A. Soit $\phi\colon X' \to X$ l'éclatement de $\widetilde{\mathfrak{a}}$ dans $X = \mathrm{Spec}(A)$. Il résulte de 3.3.8 et 3.3.10 que l'espace topologique sous-jacent à $\mathfrak{X}'$ est un point ; en particulier, X' possède un unique point au-dessus du point fermé de X (3.1.3). Donc X' est affine, et son anneau B est local, intègre, de corps des fractions K. Procédant comme dans la preuve de 3.3.7, on construit une sous-A-algèbre C de K, finie sur A, telle que l'idéal $\mathfrak{a}C$ soit inversible. On a alors un homomorphisme de A-algèbres $B \to C$. Par suite B est entière sur A, et donc finie sur A car ϕ est de type fini. On en déduit que B est un ordre 1-valuatif, topologiquement de présentation finie sur A (1.11.6), et par suite $\mathfrak{X}' = \mathrm{Spf}(B)$.

Proposition 3.3.13. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Supposons que pour tout point rigide $\mathscr{P}$ de $\mathfrak{X}$, si l'on note $i\colon \mathscr{P} \to \mathfrak{X}$ l'injection canonique, $i^*\mathscr{F}$ soit rig-nul* (2.10.1.4). *Alors $\mathscr{F}$ est rig-nul.*

Soient $U = \mathrm{Spf}(A)$ un ouvert formel affine globalement idyllique de $\mathfrak{X}$, J un idéal de définition de type fini de A, V l'ouvert complémentaire de $\mathrm{Spec}(A/J)$ dans $\mathrm{Spec}(A)$, $M = \Gamma(U, \mathscr{F})$. En vertu de 2.10.10 et (2.10.5.1), il suffit de montrer que $\widetilde{M}|V = 0$, ou encore que $M_{\mathfrak{p}} = 0$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A qui définit un point fermé de V ([28] 0.5.2.2). On sait (1.11.8) que $\mathrm{Spf}(A/\mathfrak{p})$ est un point rigide de $\mathfrak{X}$ fermé dans U. Donc compte tenu de l'hypothèse, $M/\mathfrak{p}M$ est J-nul (2.10.13), et l'assertion résulte du lemme de Nakayama.

Proposition 3.3.14. *Soient Y un schéma, Y' un sous-schéma fermé de Y, $f\colon X \to Y$ un morphisme propre de présentation finie de schémas, X' l'image inverse de Y' par f. Supposons la paire (Y, Y') idyllique* (2.6.17). *Soient $\widehat{X} = X_{/X'}$, $\widehat{Y} = Y_{/Y'}$ les schémas formels complétés de X et Y le long de X' et Y' respectivement, $\hat{f}\colon \widehat{X} \to \widehat{Y}$ le prolongement de f aux complétés. Alors si f surjectif, l'application $\hat{f}\colon \langle \widehat{X} \rangle \to \langle \widehat{Y} \rangle$ est surjective.*

On peut clairement se borner au cas où $Y = \mathrm{Spec}(A)$ est affine. Soient $\mathscr{P} = \mathrm{Spf}(R)$ un point rigide de $\widehat{Y}$, K le corps des fractions de R, $i\colon \mathscr{P} \to \widehat{Y}$ l'injection canonique. On déduit de i un homomorphisme $A \to R$ et par suite une section $u \in Y(R)$. Par hypothèse, il existe une extension finie K' de K et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(K') \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(K) \arrow[r] & Y \end{tikzcd} \tag{3.3.14.1}$$

La clôture intégrale S de R dans K', munie de la topologie déduite de celle de R, est un anneau 1-valuatif (cf. la preuve de 1.11.4). Par le critère valuatif de propreté, il existe une sous-R-algèbre R' de S, finie sur R et de corps des fractions K', telle que le diagramme (3.3.14.1) s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(K') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Spec}(R') \arrow[r, "u'"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}(K) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(R) \arrow[r, "u"] & Y \end{tikzcd} \tag{3.3.14.2}$$

D'après 1.11.6, R' munie de la topologie déduite de celle de R, est un ordre 1-valuatif. En vertu de 3.3.4(iii), il existe un point rigide $\mathscr{Q}$ de $\widehat{X}$ tel que le morphisme $\mathrm{Spf}(R') \to \widehat{X}$ déduit de u' par prolongement aux complétés, se factorise à travers l'injection canonique $\mathscr{Q} \to \widehat{X}$. Par une deuxième application de 3.3.4(iii), on voit que $\mathscr{P} = \hat{f}(\mathscr{Q})$.

3.4 Disques et couronnes formels

3.4.1. Dans cette section, $\mathscr{S}$ désigne un schéma formel idyllique ayant un idéal de définition inversible $\mathscr{I}$ et $\mathscr{D}$ la droite affine formelle au-dessus de $\mathscr{S}$ de paramètre T (2.3.11). Soient $\mathscr{D}'$ l'éclatement de $T\mathscr{O}_{\mathscr{D}} + \mathscr{I}\mathscr{O}_{\mathscr{D}}$ dans $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}_{\mathscr{I}}$ l'ouvert maximal de $\mathscr{D}'$ où l'on a $T\mathscr{O}_{\mathscr{D}_{\mathscr{I}}} + \mathscr{I}\mathscr{O}_{\mathscr{D}_{\mathscr{I}}} = \mathscr{I}\mathscr{O}_{\mathscr{D}_{\mathscr{I}}}$ (ou ce qui revient au même, $T\mathscr{O}_{\mathscr{D}_{\mathscr{I}}} \subset \mathscr{I}\mathscr{O}_{\mathscr{D}_{\mathscr{I}}}$), $\mathscr{C}_{\mathscr{I}}$ l'ouvert maximal de $\mathscr{D}'$ où l'on a $T\mathscr{O}_{\mathscr{C}_{\mathscr{I}}} + \mathscr{I}\mathscr{O}_{\mathscr{C}_{\mathscr{I}}} = T\mathscr{O}_{\mathscr{C}_{\mathscr{I}}}$ (ou ce qui revient au même, $\mathscr{I}\mathscr{O}_{\mathscr{C}_{\mathscr{I}}} \subset T\mathscr{O}_{\mathscr{C}_{\mathscr{I}}}$). On a alors $\mathscr{D}' = \mathscr{D}_{\mathscr{I}} \cup \mathscr{C}_{\mathscr{I}}$, et $\mathscr{D}_{\mathscr{I}}$ et $\mathscr{C}_{\mathscr{I}}$ sont des ouverts rétro-compacts de $\mathscr{D}'$ (*i.e.*, les injections canoniques $\mathscr{D}_{\mathscr{I}} \to \mathscr{D}'$ et $\mathscr{C}_{\mathscr{I}} \to \mathscr{D}'$ sont quasi-compactes). Comme $\mathscr{S}$ est rig-pur, $\mathscr{D}$ est rig-pur en vertu de 1.12.4 (voir aussi 5.1.2 et 5.1.13). Par suite, $\mathscr{D}'$ est idyllique, rig-pur et de présentation finie sur $\mathscr{D}$ (3.1.4). Il résulte de 3.3.8 que les applications $\langle \mathscr{D}_{\mathscr{I}} \rangle \to \langle \mathscr{D} \rangle$ et $\langle \mathscr{C}_{\mathscr{I}} \rangle \to \langle \mathscr{D} \rangle$ sont injectives ; on peut décrire leurs images grâce au lemme 3.4.4 ci-dessous.

Définition 3.4.2. On appelle $\mathscr{D}_{\mathscr{I}}$ le *disque formel de rayon* $\mathscr{I}$ au-dessus de $\mathscr{S}$, et $\mathscr{C}_{\mathscr{I}}$ la *couronne formelle standard d'épaisseur* $\mathscr{I}$ au-dessus de $\mathscr{S}$.

La terminologie sera justifiée dans 3.4.4. La condition que $\mathscr{I}$ est inversible est introduite seulement pour la commodité des calculs. Elle est toutefois suffisante pour les applications rigides puisqu'il est loisible d'éclater un idéal de définition cohérent (cf. 4.3.11 et 7.1.20).

Lemme 3.4.3. *Supposons que $\mathscr{S} = \mathrm{Spf}(A)$ soit formel affine globalement idyllique et que $\mathscr{I} = I^{\Delta}$, où I est un idéal de définition monogène de A engendré par $f \in A$. Posons*

$$D'(f) = \frac{A\langle T, U\rangle}{(T - Uf)} \quad \textit{et} \quad D(f) = \frac{D'(f)}{(D'(f))_{(f)\text{-tor}}}; \tag{3.4.3.1}$$

$$C'(f) = \frac{A\langle T, V\rangle}{(f - VT)} \quad \textit{et} \quad C(f) = \frac{C'(f)}{(C'(f))_{(f)\text{-tor}}}. \tag{3.4.3.2}$$

On a alors $\mathscr{D}_{\mathscr{I}} = \mathrm{Spf}(D(f))$ et $\mathscr{C}_{\mathscr{I}} = \mathrm{Spf}(C(f))$.

Cela résulte de 3.1.7.

Lemme 3.4.4. *Soient $\mathscr{P} = \mathrm{Spf}(R)$ un point rigide de $\mathscr{D}$, $\mathscr{P}' = \mathrm{Spf}(R')$ l'unique point rigide de $\mathscr{D}'$ qui relève $\mathscr{P}$ (3.3.7), K le corps des fractions de R, $\overline{R}$ la clôture intégrale de R dans K, I l'idéal de définition de type fini de R tel que $\mathscr{I}\mathscr{O}_{\mathscr{P}} = I^{\Delta}$. Alors :*

- (i) *Pour que $\mathscr{P}' \subset \mathscr{D}_{\mathscr{I}}$, il faut et il suffit que $T\overline{R} \subset I\overline{R}$.*
- (ii) *Pour que $\mathscr{P}' \subset \mathscr{C}_{\mathscr{I}}$, il faut et il suffit que $I\overline{R} \subset T\overline{R}$.*

On rappelle d'abord que $\overline{R}$ est un anneau 1-valuatif (1.11.4). On observe ensuite que l'idéal I est inversible, engendré par $\pi \in R$. Notons t l'image de T dans R. L'idéal $tR' + \pi R'$ est inversible. Pour que $\mathscr{P}' \subset \mathscr{D}_{\mathscr{I}}$ (resp. $\mathscr{P}' \subset \mathscr{C}_{\mathscr{I}}$), il faut et il suffit que $t \in \pi R'$ (resp. $\pi \in tR'$). En effet, la condition est clairement nécessaire, et elle est suffisante en vertu de 3.4.3 et de l'unicité du $\mathscr{D}$-morphisme $\mathscr{P}' \to \mathscr{D}'$. Il suffit donc de montrer que si $t \in \pi\overline{R}$ (resp. $\pi \in t\overline{R}$), alors $t \in \pi R'$ (resp. $\pi \in tR'$). L'assertion est clairement satisfaite si $t = 0$ (car $\pi \neq 0$). Supposons $t \neq 0$ et posons $x = t/\pi \in K$. On rappelle que K est le corps des fractions de R' (3.3.7). Comme $\mathscr{D}' = \mathscr{D}_{\mathscr{I}} \cup \mathscr{C}_{\mathscr{I}}$, on a $x \in R'$ ou $x^{-1} \in R'$. Supposons $x \in \overline{R}$ et $x^{-1} \in R'$. Comme x est entier sur R, on a $x^d + a_1x^{d-1} + \cdots + a_d = 0$, où $a_1, \ldots, a_d \in R$. Multipliant par x^{-d+1}, on voit que $x \in R'$. De même, si $x^{-1} \in \overline{R}$ et $x \in R'$, alors $x^{-1} \in R'$. L'assertion est démontrée.

3.4.5. Soit n un entier ≥ 1. On désigne par $\mathscr{D}^{(n)}$ l'éclatement de $T^n\mathscr{O}_{\mathscr{D}} + \mathscr{I}\mathscr{O}_{\mathscr{D}}$ dans $\mathscr{D}$, par $\mathscr{D}_{\mathscr{I},n}$ l'ouvert maximal de $\mathscr{D}^{(n)}$ où l'on a $T^n\mathscr{O}_{\mathscr{D}_{\mathscr{I},n}} \subset \mathscr{I}\mathscr{O}_{\mathscr{D}_{\mathscr{I},n}}$ et par $\mathscr{C}_{\mathscr{I},n}$ l'ouvert maximal de $\mathscr{D}^{(n)}$ où l'on a $\mathscr{I}\mathscr{O}_{\mathscr{C}_{\mathscr{I},n}} \subset T^n\mathscr{O}_{\mathscr{C}_{\mathscr{I},n}}$. On appelle $\mathscr{D}_{\mathscr{I},n}$ le *disque formel de rayon* $\mathscr{I}^{1/n}$ au-dessus de $\mathscr{S}$, et $\mathscr{C}_{\mathscr{I},n}$ la *couronne formelle standard d'épaisseur* $\mathscr{I}^{1/n}$ au-dessus de $\mathscr{S}$. On a $\mathscr{D}_{\mathscr{I},1} = \mathscr{D}_{\mathscr{I}}$ et $\mathscr{C}_{\mathscr{I},1} = \mathscr{C}_{\mathscr{I}}$. Le schéma formel $\mathscr{D}^{(n)}$ est idyllique, rig-pur et de présentation finie sur $\mathscr{D}$ (3.1.4) ; $\mathscr{D}_{\mathscr{I},n}$ et $\mathscr{C}_{\mathscr{I},n}$ sont des ouverts rétro-compacts de $\mathscr{D}^{(n)}$ et on a $\mathscr{D}^{(n)} = \mathscr{D}_{\mathscr{I},n} \cup \mathscr{C}_{\mathscr{I},n}$. En vertu de 3.3.8, les applications $\langle\mathscr{D}_{\mathscr{I},n}\rangle \to \langle\mathscr{D}\rangle$ et $\langle\mathscr{C}_{\mathscr{I},n}\rangle \to \langle\mathscr{D}\rangle$ sont injectives ; on peut décrire leurs images grâce au lemme 3.4.7 ci-dessous.

Lemme 3.4.6. *Supposons que* $\mathscr{S} = \mathrm{Spf}(A)$ *soit formel affine globalement idyllique et que* $\mathscr{I} = I^{\Delta}$*, où* I *est un idéal de définition monogène de* A *engendré par* $f \in A$*. Pour tout entier* $n \geq 1$*, posons*

$$D'(f;n) = \frac{A\langle T, U\rangle}{(T^n - Uf)} \quad \textit{et} \quad D(f;n) = \frac{D'(f;n)}{(D'(f;n))_{(f)\text{-tor}}}; \tag{3.4.6.1}$$

$$C'(f;n) = \frac{A\langle T, V\rangle}{(f - VT^n)} \quad \textit{et} \quad C(f;n) = \frac{C'(f;n)}{(C'(f;n))_{(f)\text{-tor}}}. \tag{3.4.6.2}$$

On a alors $\mathscr{D}_{\mathscr{I},n} = \mathrm{Spf}(D(f;n))$ *et* $\mathscr{C}_{\mathscr{I},n} = \mathrm{Spf}(C(f;n))$ (3.4.5).

Cela résulte de 3.1.7.

Lemme 3.4.7. *Conservons les hypothèses de* (3.4.5) *et soient* $\mathscr{P} = \mathrm{Spf}(R)$ *un point rigide de* $\mathscr{D}$*,* $\mathscr{P}' = \mathrm{Spf}(R')$ *l'unique point rigide de* $\mathscr{D}^{(n)}$ *qui relève* $\mathscr{P}$ (3.3.7)*,* K *le corps des fractions de* R*,* $\overline{R}$ *la clôture intégrale de* R *dans* K*,* I *l'idéal de définition de type fini de* R *tel que* $\mathscr{I}\mathscr{O}_{\mathscr{P}} = I^{\Delta}$*. Alors :*

(i) *Pour que* $\mathscr{P}' \subset \mathscr{D}_{\mathscr{I},n}$*, il faut et il suffit que* $T^n\overline{R} \subset I\overline{R}$*.*

(ii) *Pour que* $\mathscr{P}' \subset \mathscr{C}_{\mathscr{I},n}$*, il faut et il suffit que* $I\overline{R} \subset T^n\overline{R}$*.*

La preuve est identique à 3.4.4.

3.4.8. Conservons les hypothèses de (3.4.5) et soit m un entier ≥ 1. On a

$$T^{mn}\mathscr{O}_{\mathscr{D}^{(n)}} + \mathscr{I}^m\mathscr{O}_{\mathscr{D}^{(n)}} = (T^n\mathscr{O}_{\mathscr{D}^{(n)}} + \mathscr{I}\mathscr{O}_{\mathscr{D}^{(n)}})^m. \tag{3.4.8.1}$$

En effet, il suffit de montrer cette égalité sur chacun des ouverts $\mathscr{D}_{\mathscr{I},n}$ et $\mathscr{C}_{\mathscr{I},n}$ de $\mathscr{D}^{(n)}$, ce qui est immédiat. Donc en vertu de 3.1.9, il existe un unique $\mathscr{D}$-morphisme

$$\psi_{n,m}\colon \mathscr{D}^{(n)} \to \mathscr{D}^{(mn)}. \tag{3.4.8.2}$$

Il résulte aussitôt de 3.4.6 que l'on a $\psi_{n,m}(\mathscr{D}_{\mathscr{I},n}) \subset \mathscr{D}_{\mathscr{I}^m,mn}$ et $\psi_{n,m}(\mathscr{C}_{\mathscr{I},n}) \subset \mathscr{C}_{\mathscr{I}^m,mn}$.

Soit $\mathscr{I}'$ un idéal de définition inversible de $\mathscr{S}$ tel que $\mathscr{I}' \subset \mathscr{I}$. Comme $\mathscr{I}'\mathscr{O}_{\mathscr{D}_{\mathscr{I}',n}}$ est inversible, $T^n\mathscr{O}_{\mathscr{D}_{\mathscr{I}',n}} + \mathscr{I}\mathscr{O}_{\mathscr{D}_{\mathscr{I}',n}} = \mathscr{I}\mathscr{O}_{\mathscr{D}_{\mathscr{I}',n}}$ est inversible. Donc en vertu de 3.1.9, il existe un unique $\mathscr{D}$-morphisme $\mathscr{D}_{\mathscr{I}',n} \to \mathscr{D}^{(n)}$. Ce dernier se factorise à travers $\mathscr{D}_{\mathscr{I},n}$ en vertu de 3.4.6 ; il induit donc un $\mathscr{D}$-morphisme

$$\mathscr{D}_{\mathscr{I}',n} \to \mathscr{D}_{\mathscr{I},n}. \tag{3.4.8.3}$$

De même, on a un $\mathscr{D}$-morphisme canonique

$$\mathscr{C}_{\mathscr{I},n} \to \mathscr{C}_{\mathscr{I}',n}. \tag{3.4.8.4}$$

Les mêmes arguments montrent que pour tout entier $n' \geq n$, on a des $\mathscr{D}$-morphismes canoniques

$$\mathscr{D}_{\mathscr{I},n} \to \mathscr{D}_{\mathscr{I},n'}, \tag{3.4.8.5}$$
$$\mathscr{C}_{\mathscr{I},n'} \to \mathscr{C}_{\mathscr{I},n}. \tag{3.4.8.6}$$

Lemme 3.4.9. *Sous les hypothèses de* (3.4.5), *pour tout entier $m \geq 1$, les applications*

$$\langle \mathscr{D}_{\mathscr{I},n} \rangle \to \langle \mathscr{D}_{\mathscr{I}^m,mn} \rangle, \tag{3.4.9.1}$$
$$\langle \mathscr{C}_{\mathscr{I},n} \rangle \to \langle \mathscr{C}_{\mathscr{I}^m,mn} \rangle, \tag{3.4.9.2}$$

induites par $\psi_{n,m}$ (3.4.8.2) *sont bijectives.*

Comme les applications $\langle \mathscr{D}_{\mathscr{I},n} \rangle \to \langle \mathscr{D} \rangle$ et $\langle \mathscr{C}_{\mathscr{I},n} \rangle \to \langle \mathscr{D} \rangle$ sont injectives (3.3.8), il suffit de montrer que (3.4.9.1) et (3.4.9.2) sont surjectives, ce qui résulte de 3.4.7. En effet, avec les notations de 3.4.7, l'idéal I est principal, engendré par $\pi \in R$. La condition $T^n\overline{R} \subset I\overline{R}$ (resp. $I\overline{R} \subset T^n\overline{R}$) est donc équivalente à $nv(T) \geq v(\pi)$ (resp. $nv(T) \leq v(\pi)$), où v est la valuation de K.

3.5 Le théorème d'acyclicité de Tate

Proposition 3.5.1. *Soient A un anneau idyllique, $\mathfrak{a}$ un idéal ouvert de type fini de A, $X = \mathrm{Spec}(A)$, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\phi\colon X' \to X$ l'éclatement de $\widetilde{\mathfrak{a}}$ dans X, $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ l'éclatement de $\mathfrak{a}^{\Delta}$ dans $\mathfrak{X}$. Supposons ϕ de présentation finie. Alors, pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathscr{F}$,*

(i) $\mathrm{R}^q\varphi_*(\varphi^*\mathscr{F})$ *est un* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$*-module cohérent pour tout* q *;*
(ii) $\mathrm{R}^q\varphi_*(\varphi^*\mathscr{F})$ *est rig-nul pour tout* $q \geq 1$ (2.10.1.4) *;*
(iii) *l'homomorphisme d'adjonction* $\mathscr{F} \to \varphi_*(\varphi^*\mathscr{F})$ *induit un isomorphisme* (2.10.1)

$$\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi_*(\varphi^*\mathscr{F}))). \tag{3.5.1.1}$$

La proposition (i) est mentionnée ici à titre de rappel (2.11.5). Soient J un idéal de définition de type fini de A, M le A-module cohérent tel que $\mathscr{F} = M^{\Delta}$, $Y = \mathrm{Spec}(A/J)$, $Y' = \phi^{-1}(Y)$. Alors $\mathfrak{X}'$ s'identifie au complété de X' le long de Y', φ étant le prolongement de ϕ aux complétés, et $\varphi^*\mathscr{F}$ s'identifie à $(\phi^*(\widetilde{M}))_{/Y'}$ (2.5.11). Comme $\mathscr{O}_{X'}$ est cohérent (2.6.18), $\phi^*(\widetilde{M})$ est un $\mathscr{O}_{X'}$-module cohérent. En vertu de 1.4.8, 2.6.18 et 2.12.2, pour tout entier $q \geq 0$, $\mathrm{H}^q = \mathrm{H}^q(X', \phi^*(\widetilde{M}))$ est un A-module cohérent, et on a un isomorphisme canonique

$$(\mathrm{H}^q)^{\Delta} \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^q\varphi_*(\varphi^*\mathscr{F}). \tag{3.5.1.2}$$

Le morphisme d'adjonction $\mathscr{F} \to \varphi_*(\varphi^*\mathscr{F})$ correspond alors au morphisme $M \to \mathrm{H}^0$ défini aussi par adjonction (relativement à ϕ). Mais ϕ induit un isomorphisme au-dessus de l'ouvert $X_{\mathrm{g}} = X - Y$ de X. Par suite, pour tout $q \geq 1$, H^q est rig-nul, et donc $\mathrm{R}^q\varphi_*(\varphi^*\mathscr{F})$ est rig-nul (2.10.13). On en déduit aussi que l'on a

$$\Gamma(X_{\mathrm{g}}, \widetilde{M}) \simeq \Gamma(X_{\mathrm{g}}, \phi_*(\phi^*\widetilde{M})) = \Gamma(X_{\mathrm{g}}, (\mathrm{H}^0)^{\sim}),$$

ce qui entraîne (3.5.1.1) en vertu de (3.5.1.2) et (2.10.5.1).

Remarque 3.5.2. Avec les notations de (3.5.1), l'éclatement ϕ est de présentation fini si A est noethérien, ou s'il est rig-pur, ou si $\mathfrak{a}$ est un idéal de définition de A (1.8.30.2 et 1.13.3).

Proposition 3.5.3. *Soient* $\mathfrak{X}$ *un schéma formel idyllique,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$*-module cohérent,* $\mathscr{A}$ *un idéal ouvert cohérent de* $\mathfrak{X}$*,* $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ *l'éclatement de* $\mathscr{A}$ *dans* $\mathfrak{X}$*. Supposons que* $\mathfrak{X}$ *soit localement noethérien, ou que* $\mathfrak{X}$ *soit rig-pur, ou que* $\mathscr{A}$ *soit un idéal de définition de* $\mathfrak{X}$*. Alors :*

(i) $\mathrm{R}^q\varphi_*(\varphi^*\mathscr{F})$ *est un* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$*-module cohérent pour tout* q*.*
(ii) $\mathrm{R}^q\varphi_*(\varphi^*\mathscr{F})$ *est rig-nul pour tout* $q \geq 1$*.*
(iii) *L'homomorphisme d'adjonction* $\mathscr{F} \to \varphi_*(\varphi^*\mathscr{F})$ *induit un isomorphisme*

$$\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi_*(\varphi^*\mathscr{F})). \tag{3.5.3.1}$$

Cela résulte de 3.5.1 et 3.5.2.

Proposition 3.5.4. *Soient* $\mathfrak{X}$ *un schéma formel idyllique ayant localement un idéal de définition monogène,* $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ *un éclatement admissible de présentation finie,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$*-module cohérent. Alors pour tout entier* $q \geq 1$*,* $\mathrm{R}^q\varphi_*(\varphi^*\mathscr{F})$ *est rig-nul et* $\mathrm{R}^q\varphi_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F})) = 0$*.*

Il suffit de montrer que pour tout entier $q \geq 1$, $\mathrm{R}^q\varphi_*(\varphi^*\mathscr{F})$ est rig-nul (2.10.34.1). Supposons que φ soit l'éclatement dans $\mathfrak{X}$ d'un idéal ouvert cohérent $\mathscr{A}$. Soient $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$, $\psi\colon \mathfrak{X}'' \to \mathfrak{X}'$ l'éclatement de $\varphi^*(\mathscr{J})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$ dans $\mathfrak{X}'$; donc $\rho = \varphi \circ \psi$ est l'éclatement de $\mathscr{A}\mathscr{J}$ dans $\mathfrak{X}$ (3.1.13). Considérons la suite spectrale

$$E_2^{p,q} = \mathrm{R}^p\varphi_*(\mathrm{R}^q\psi_*(\rho^*\mathscr{F})) \Rightarrow \mathrm{R}^{p+q}\rho_*(\rho^*\mathscr{F}). \tag{3.5.4.1}$$

Pour tout $q \geq 1$, on a $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathrm{R}^q\psi_*(\rho^*\mathscr{F})) = 0$ d'après 3.5.3(ii), et donc $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(E_2^{p,q}) = 0$ (2.11.12). Donc en vertu de 2.10.18, le morphisme canonique

$$\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathrm{R}^p\varphi_*(\psi_*(\rho^*\mathscr{F}))) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathrm{R}^p\rho_*(\rho^*\mathscr{F}))$$

est bijectif. D'autre part, le morphisme $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F}) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\psi_*(\rho^*\mathscr{F}))$ déduit de l'homomorphisme d'adjonction $\mathrm{id} \to \psi_*\psi^*$ est bijectif en vertu de 3.5.3(iii). On en déduit un isomorphisme (2.10.34.1)

$$\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathrm{R}^p\varphi_*(\varphi^*\mathscr{F})) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathrm{R}^p\varphi_*(\psi_*(\rho^*\mathscr{F}))).$$

On obtient un isomorphisme $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathrm{R}^p\varphi_*(\varphi^*\mathscr{F})) \simeq \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathrm{R}^p\rho_*(\rho^*\mathscr{F}))$. On conclut par 3.5.3(ii) que $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathrm{R}^p\varphi_*(\varphi^*\mathscr{F})) = 0$ pour tout $p \geq 1$.

Théorème 3.5.5 (Acyclicité de Tate). *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ un éclatement admissible de présentation finie, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Alors l'homomorphisme* (2.10.27.2)

$$\beta_\varphi(\mathscr{F})\colon \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) \to \varphi_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F}))$$

est bijectif.

Supposons que φ soit l'éclatement dans $\mathfrak{X}$ d'un idéal ouvert cohérent $\mathscr{A}$. Soient $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$, $\psi\colon \mathfrak{X}'' \to \mathfrak{X}'$ l'éclatement de $\varphi^*(\mathscr{J})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$ dans $\mathfrak{X}'$; donc $\rho = \varphi \circ \psi$ est l'éclatement de $\mathscr{A}\mathscr{J}$ dans $\mathfrak{X}$ (3.1.13). Les homomorphismes

$$\begin{aligned} \beta_\rho(\mathscr{F})\colon \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) &\to \rho_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\rho^*\mathscr{F})) \\ \beta_\psi(\varphi^*\mathscr{F})\colon \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F}) &\to \psi_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\psi^*(\varphi^*\mathscr{F}))) \end{aligned}$$

sont bijectifs en vertu de 3.5.3(iii), 2.10.31.2 et 2.10.31.5. D'autre part, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) \arrow[r, "\beta_\rho(\mathscr{F})"] \arrow[d, "\beta_\varphi(\mathscr{F})"'] & \rho_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\rho^*\mathscr{F})) \arrow[d, equal] \\ \varphi_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F})) \arrow[r, "\varphi_*(\beta_\psi(\varphi^*\mathscr{F}))"] & \varphi_*(\psi_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\psi^*(\varphi^*\mathscr{F})))) \end{tikzcd}$$

est commutatif (2.10.28.2). On en déduit que $\beta_\varphi(\mathscr{F})$ est un isomorphisme.

Corollaire 3.5.6. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique rig-pur, $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ un éclatement admissible. Alors l'homomorphisme canonique $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \to \varphi_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'})$ est injectif.*

Notons d'abord que φ est de présentation finie (3.1.4). Considérons le diagramme commutatif (2.10.27.3)

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "c_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}"'] & \varphi_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}) \arrow[d, "\varphi_*(c_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}})"] \\ \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \arrow[r, "\beta_\varphi(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})"] & \varphi_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'})) \end{tikzcd}$$

Comme $c_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}$ est injectif (2.10.15) et que $\beta_\varphi(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ est un isomorphisme (3.5.5), u est injectif.

Remarque 3.5.7. Soient A un anneau idyllique, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, J un idéal de définition de type fini de A, $\mathfrak{a}$ un idéal ouvert de type fini de A, $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ un système fini de générateurs de $\mathfrak{a}$, $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ l'éclatement de $\mathfrak{a}^\Delta$ dans $\mathfrak{X}$. Supposons que φ soit de présentation finie (par exemple, si A est rig-pur (3.1.4)). Pour tout $0 \leq i \leq n$, notons $\mathfrak{X}'_i$ l'ouvert maximal de $\mathfrak{X}'$ où a_i engendre l'idéal inversible $\mathfrak{a}^\Delta\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$, et posons

$$\begin{aligned} A'_i &= A\left\langle \frac{a_0}{a_i}, \ldots, \frac{a_n}{a_i}\right\rangle, \\ A_i &= \frac{A'_i}{(A'_i)_{a_i\text{-tor}}}. \end{aligned}$$

Les ouverts $(\mathfrak{X}'_i)_{0\leq i\leq n}$ couvrent $\mathfrak{X}'$, et on a $\mathfrak{X}'_i = \mathrm{Spf}(A_i)$ pour tout $0 \leq i \leq n$ (3.1.7). Pour tous $0 \leq i,j \leq n$, $\mathfrak{X}'_{ij} = \mathfrak{X}'_i \cap \mathfrak{X}'_j$ est un schéma formel affine globalement idyllique ; notons A_{ij} son anneau. Posons $U = \mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$, $U_i = \mathrm{Spec}(A_i) - \mathrm{V}(JA_i)$ et $U_{ij} = \mathrm{Spec}(A_{ij}) - \mathrm{V}(JA_{ij})$. Alors pour tout A-module cohérent M, la suite

$$0 \to \Gamma(U, \widetilde{M}) \to \prod_{0\leq i\leq n} \Gamma(U_i, (M\otimes_A A_i)^\sim) \rightrightarrows \prod_{0\leq i,j\leq n} \Gamma(U_{ij}, (M\otimes_A A_{ij})^\sim) \tag{3.5.7.1}$$

est exacte. Cela résulte de 3.5.5 et (2.10.5.1). On retrouve ainsi l'énoncé originel du théorème d'acyclicité de Tate. Le théorème 3.5.5 prendra toute son ampleur dans le chapitre suivant où on interprétera la suite exacte (3.5.7.1) comme l'acyclicité d'un complexe de Čech tronqué d'un recouvrement admissible d'un espace rigide cohérent (cf. 4.7.9).

Proposition 3.5.8 ([26] VIII 5.1). *Soient $f\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ un morphisme adique de schémas formels adiques, $\mathfrak{X}'' = \mathfrak{X}' \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}'$, $p_1, p_2\colon \mathfrak{X}'' \rightrightarrows \mathfrak{X}'$ les projections canoniques, $g\colon \mathfrak{X}'' \to \mathfrak{X}$ le morphisme structural.*

(i) *Supposons que f soit surjectif, et que l'homomorphisme*

$$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \to f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'})$$

soit injectif. Alors f est un épimorphisme dans la catégorie des schémas formels, et même dans la catégorie des espaces annelés.

(ii) *Supposons que f soit surjectif et fasse de $\mathfrak{X}$ un espace topologique quotient de $\mathfrak{X}'$, et que le diagramme canonique*

$$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \to f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}) \rightrightarrows g_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}''})$$

soit exact. Alors f est un épimorphisme effectif dans la catégorie des schémas formels, i.e., pour tout schéma formel $\mathfrak{Y}$, le diagramme d'applications d'ensembles

$$\mathrm{Hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}) \rightrightarrows \mathrm{Hom}(\mathfrak{X}'', \mathfrak{Y})$$

obtenu en composant avec f, p_1 et p_2 est exact.

Soient $\mathscr{J}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{J}' = f^*(\mathscr{J})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$. On notera que les hypothèses topologiques faites sur f ne dépendent que du morphisme de schémas usuels

$$f_0 \colon (\mathfrak{X}', \mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}/\mathscr{J}') \to (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$$

déduit de f. Il est alors clair que la démonstration de ([26] VIII 5.1), qui traite le cas où f est un morphisme de schémas, s'applique intégralement à notre situation.

Corollaire 3.5.9. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique rig-pur, $\varphi \colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ un éclatement admissible. Alors φ est un épimorphisme dans la catégorie des schémas formels.*

Cela résulte de 3.1.4(iii), 3.5.6 et 3.5.8(i).

Proposition 3.5.10. *Soient A un anneau idyllique, $\mathfrak{a}$ un idéal ouvert de type fini de A, $X = \mathrm{Spec}(A)$, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\phi \colon X' \to X$ l'éclatement de $\widetilde{\mathfrak{a}}$ dans X, $\varphi \colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ l'éclatement de $\mathfrak{a}^{\Delta}$ dans $\mathfrak{X}$. Supposons ϕ de présentation finie. Alors, pour tout morphisme injectif de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents $u \colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$, le morphisme*

$$\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^* u) \colon \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^* \mathscr{F}) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^* \mathscr{G})$$

est injectif.

Il suffit de montrer que pour tout ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(B)$ de X', le morphisme

$$\Gamma(\mathfrak{X}' \cap U, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^* \mathscr{F})) \to \Gamma(\mathfrak{X}' \cap U, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^* \mathscr{G})) \qquad (3.5.10.1)$$

est injectif. Soient J un idéal de définition de type fini de A, $Y = \mathrm{Spec}(A/J)$, $Y' = \phi^{-1}(Y)$, de sorte que $\mathfrak{X}'$ est le complété de X' le long de Y', φ étant le prolongement de ϕ aux complétés. On a $\mathscr{F} = M^{\Delta}$, $\mathscr{G} = N^{\Delta}$, où M, N sont des A-modules cohérents ; d'où $\varphi^* \mathscr{F} = \phi^*(\widetilde{M})_{/Y'}$ et $\varphi^* \mathscr{G} = \phi^*(\widetilde{N})_{/Y'}$ (2.5.11). Soient

$\widehat{B}$ le séparé complété de B pour la topologie J-adique, U_{g} l'ouvert complémentaire de $U \cap Y'$ dans U. En vertu de (2.10.7.1) et (2.10.7.3), on a

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathfrak{X}' \cap U, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\phi^*(\widetilde{M})_{/Y'})) &\simeq \Gamma(U_{\mathrm{g}}, \phi^*(\widetilde{M})) \otimes_B \widehat{B}, \\ \Gamma(\mathfrak{X}' \cap U, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\phi^*(\widetilde{N})_{/Y'})) &\simeq \Gamma(U_{\mathrm{g}}, \phi^*(\widetilde{N})) \otimes_B \widehat{B}. \end{aligned}$$

Le morphisme $u\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est induit par un morphisme injectif $v\colon M \to N$. Donc le morphisme (3.5.10.1) correspond au morphisme $\Gamma(U_{\mathrm{g}}, \phi^*(\widetilde{v})) \otimes_B \widehat{B}$. Notre assertion s'ensuit puisque ϕ induit un isomorphisme au-dessus de l'ouvert $X_{\mathrm{g}} = X - Y$ de X, et $\widehat{B}$ est B-plat (1.12.17).

Proposition 3.5.11. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ un éclatement admissible de présentation finie, $u\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme injectif de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents. Alors le morphisme*

$$\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^* u)\colon \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^* \mathscr{F}) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^* \mathscr{G})$$

est injectif.

Supposons que φ soit l'éclatement dans $\mathfrak{X}$ d'un idéal ouvert cohérent $\mathscr{A}$. Soient $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$, $\psi\colon \mathfrak{X}'' \to \mathfrak{X}'$ l'éclatement de $\varphi^*(\mathscr{J})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$ dans $\mathfrak{X}'$; donc $\rho = \varphi \circ \psi$ est l'éclatement de $\mathscr{A}\mathscr{J}$ dans $\mathfrak{X}$ (3.1.13). On peut identifier $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^* u)$ et $\psi_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\rho^* u))$ (3.5.5). On peut donc se borner au cas où φ est l'éclatement d'un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$. La proposition résulte alors de 1.13.3 et 3.5.10.

Corollaire 3.5.12. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{A}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$, $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ l'éclatement de $\mathscr{A}$ dans $\mathfrak{X}$, $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ une suite exacte de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents. Alors la suite*

$$0 \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^* \mathscr{F}') \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^* \mathscr{F}) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^* \mathscr{F}'') \to 0$$

est exacte.

Cela résulte de 2.10.18 et 3.5.11.

Proposition 3.5.13. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ un éclatement admissible de présentation finie, $u\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents. Si $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(u)$ est un isomorphisme, alors $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^* u)$ est un isomorphisme.*

Supposons que φ soit l'éclatement dans $\mathfrak{X}$ d'un idéal ouvert cohérent $\mathscr{A}$. Soient $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$, $\psi\colon \mathfrak{X}'' \to \mathfrak{X}'$ l'éclatement de $\varphi^*(\mathscr{J})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$ dans $\mathfrak{X}'$; donc $\rho = \varphi \circ \psi$ est l'éclatement de $\mathscr{A}\mathscr{J}$ dans $\mathfrak{X}$ (3.1.13). On peut identifier $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^* u)$ et $\psi_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\rho^* u))$ (3.5.5). On peut donc se borner au cas où φ est l'éclatement d'un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$. Si $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(u)$ est un isomorphisme, alors le noyau et le conoyau de u sont rig-nuls d'après 2.10.22(i). Par suite, $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^* u)$ est un isomorphisme en vertu de 3.5.12.

Proposition 3.5.14. *Soient A un anneau idyllique, $\mathfrak{a}$ un idéal ouvert de type fini de A, $X = \mathrm{Spec}(A)$, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\phi\colon X' \to X$ l'éclatement de $\widetilde{\mathfrak{a}}$ dans X, $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ l'éclatement de $\mathfrak{a}^{\Delta}$ dans $\mathfrak{X}$. Supposons ϕ de présentation finie. Alors, pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$-module cohérent $\mathscr{F}'$, l'homomorphisme d'adjonction $\varphi^*(\varphi_*\mathscr{F}') \to \mathscr{F}'$ induit un isomorphisme*

$$\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*(\varphi_*\mathscr{F}')) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}'). \tag{3.5.14.1}$$

Soient J un idéal de définition de type fini de A, $Y = \mathrm{Spec}(A/J)$, $Y' = \phi^{-1}(Y)$, de sorte que $\mathfrak{X}'$ s'identifie au complété de X' le long de Y', φ étant le prolongement de ϕ aux complétés. En vertu de 2.13.8, $\mathscr{F}'$ est isomorphe au complété $\mathscr{F}_{/Y'}$ le long de Y' d'un $\mathscr{O}_{X'}$-module cohérent $\mathscr{F}$. Il suffit de montrer que pour tout ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(B)$ de X', le morphisme

$$\Gamma(\mathfrak{X}' \cap U, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*(\varphi_*\mathscr{F}'))) \to \Gamma(\mathfrak{X}' \cap U, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}')) \tag{3.5.14.2}$$

induit par l'homomorphisme d'adjonction est bijectif. Posons $M = \mathrm{H}^0(X', \mathscr{F})$, qui est un A-module cohérent (2.13.2). En vertu de 2.12.2, on a un isomorphisme canonique $M^{\Delta} \simeq \varphi_*(\mathscr{F}')$; d'où $\varphi^*(\varphi_*\mathscr{F}') \simeq \phi^*(\widetilde{M})_{/Y'}$ (2.5.11). De plus, le morphisme d'adjonction $\varphi^*(\varphi_*\mathscr{F}') \to \mathscr{F}'$ est le complété le long de Y' du morphisme $\phi^*(\widetilde{M}) \to \mathscr{F}$ défini aussi par adjonction (relativement à ϕ). Soient U_{g} (resp. X_{g}) l'ouvert complémentaire de $U \cap Y'$ (resp. Y) dans U (resp. X). Comme ϕ induit un isomorphisme au-dessus de X_{g}, le morphisme d'adjonction

$$\Gamma(U_{\mathrm{g}}, \phi^*(\widetilde{M})) \to \Gamma(U_{\mathrm{g}}, \mathscr{F})$$

est bijectif. On en déduit que (3.5.14.2) est un isomorphisme en vertu de (2.10.7.1) et (2.10.7.3).

Proposition 3.5.15. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ un éclatement admissible de présentation finie, $\mathscr{F}'$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$-module cohérent. Alors l'homomorphisme d'adjonction $u\colon \varphi^*(\varphi_*\mathscr{F}') \to \mathscr{F}'$ induit un isomorphisme*

$$\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(u)\colon \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*(\varphi_*\mathscr{F}')) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}'). \tag{3.5.15.1}$$

Supposons que φ soit l'éclatement dans $\mathfrak{X}$ d'un idéal ouvert cohérent $\mathscr{A}$. Soient $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$, $\psi\colon \mathfrak{X}'' \to \mathfrak{X}'$ l'éclatement de $\varphi^*(\mathscr{J})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$ dans $\mathfrak{X}'$; donc $\rho = \varphi \circ \psi$ est l'éclatement de $\mathscr{A}\mathscr{J}$ dans $\mathfrak{X}$ (3.1.13). Il suffit de montrer que $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\psi^*u)$ est un isomorphisme (3.5.5). Notons $v\colon \mathscr{F}' \to \psi_*(\psi^*\mathscr{F}')$ et $w\colon \rho^*(\rho_*(\psi^*\mathscr{F}')) \to \psi^*\mathscr{F}'$ les homomorphismes d'adjonction. On vérifie facilement que ψ^*u s'identifie au morphisme composé

$$\rho^*(\varphi_*\mathscr{F}') \xrightarrow{\rho^*(\varphi_*(v))} \rho^*(\varphi_*(\psi_*(\psi^*\mathscr{F}'))) = \rho^*(\rho_*(\psi^*\mathscr{F}')) \xrightarrow{w} \psi^*\mathscr{F}' .$$

On sait que $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(w)$ est un isomorphisme (3.5.14 et 3.5.2). D'autre part, $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(v)$ est un isomorphisme en vertu de 3.5.3(iii). Donc $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi_*v)$ est un isomorphisme

(2.10.31.2). On notera que les $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules $\varphi_*\mathscr{F}'$ et $\rho_*(\psi^*\mathscr{F}')$ sont cohérents (2.11.5). Par suite, $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\rho^*(\varphi_* v))$ est un isomorphisme (3.5.13). Donc $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\psi^* u)$ est un isomorphisme, ce qui achève la démonstration.

Proposition 3.5.16. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme propre de présentation finie de schémas formels idylliques,*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathfrak{Y}' \arrow[d, "\psi"] \\ \mathfrak{X} \arrow[r, "f"] & \mathfrak{Y} \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif tel que φ et ψ soient des éclatements admissibles de présentation finie, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Pour tout entier $q \geq 0$, notons $\nu^q\colon \psi^*(\mathrm{R}^q f_*\mathscr{F}) \to \mathrm{R}^q f'_*(\varphi^*\mathscr{F})$ le morphisme de changement de base (1.2.3.3). *Alors le morphisme*

$$\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\nu^0)\colon \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\psi^*(f_*\mathscr{F})) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(f'_*(\varphi^*\mathscr{F})) \tag{3.5.16.1}$$

est bijectif.

Si de plus, $\mathfrak{Y}$ admet localement un idéal de définition monogène, alors pour tout entier $q \geq 0$, le morphisme

$$\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\nu^q)\colon \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\psi^*(\mathrm{R}^q f_*\mathscr{F})) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathrm{R}^q f'_*(\varphi^*\mathscr{F})) \tag{3.5.16.2}$$

est bijectif.

Notons d'abord que le $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module $\mathrm{R}^q f_*\mathscr{F}$ est cohérent (2.11.5) et que f' est propre de présentation finie. Rappelons (1.2.3.3) que ν^q est l'adjoint du morphisme

$$u^q\colon \mathrm{R}^q f_*\mathscr{F} \to \psi_*(\mathrm{R}^q f'_*(\varphi^*\mathscr{F}))$$

composé de

$$\begin{aligned} \mathrm{R}^q f_*\mathscr{F} \to \mathrm{R}^q f_*(\varphi_*(\varphi^*\mathscr{F})) \to \mathrm{R}^q(f\varphi)_*(\varphi^*\mathscr{F}) \\ \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^q(\psi f')_*(\varphi^*\mathscr{F}) \to \psi_*(\mathrm{R}^q f'_*(\varphi^*\mathscr{F})), \end{aligned}$$

où le premier morphisme provient du morphisme d'adjonction $\mathrm{id} \to \varphi_*\varphi^*$ et le deuxième et le dernier de la suite spectrale de Cartan-Leray. Il revient au même de dire que ν^q est le composé de $\psi^*(u^q)$ et du morphisme d'adjonction

$$w^q\colon \psi^*(\psi_*(\mathrm{R}^q f'_*(\varphi^*\mathscr{F}))) \to \mathrm{R}^q f'_*(\varphi^*\mathscr{F}).$$

Comme $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(w^q)$ est un isomorphisme (3.5.15), pour montrer que $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\nu^q)$ est un isomorphisme, il suffit de montrer que $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\psi^*(u^q))$ est un isomorphisme, ou encore que $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(u^q)$ est un isomorphisme (3.5.13).

L'homomorphisme d'adjonction id $\to \varphi_*\varphi^*$ induit un isomorphisme (3.5.5 et 2.10.31.5)

$$\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi_*(\varphi^*\mathscr{F})). \tag{3.5.16.3}$$

On en déduit que $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(u^0)$ est un isomorphisme (2.10.31.2).

Supposons que $\mathfrak{Y}$ admette localement un idéal de définition monogène et montrons que $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(u^q)$ est un isomorphisme pour tout $q \geq 0$. D'après (2.10.34.1) et (3.5.16.3), on a un isomorphisme

$$\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathrm{R}^q f_*\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathrm{R}^q f_*(\varphi_*(\varphi^*\mathscr{F}))).$$

Considérons la suite spectrale

$$E_2^{p,q} = \mathrm{R}^p f_*(\mathrm{R}^q\varphi_*(\varphi^*\mathscr{F})) \Rightarrow \mathrm{R}^{p+q}(f\varphi)_*(\varphi^*\mathscr{F}).$$

Pour tout $q \geq 1$, on a $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathrm{R}^q\varphi_*(\varphi^*\mathscr{F})) = 0$ (3.5.4), et donc $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(E_2^{p,q}) = 0$ (2.11.12). On en déduit par 2.10.18 que le morphisme canonique

$$\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathrm{R}^p f_*(\varphi_*(\rho^*\mathscr{F}))) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathrm{R}^p(f\varphi)_*(\rho^*\mathscr{F}))$$

est bijectif pour tout $p \geq 0$. Pour achever la preuve, il reste à montrer que le morphisme

$$t^q\colon \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathrm{R}^q(\psi f')_*(\varphi^*\mathscr{F})) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\psi_*(\mathrm{R}^q f'_*(\varphi^*\mathscr{F})))$$

induit par la suite spectrale

$$F_2^{p,q} = \mathrm{R}^p\psi_*(\mathrm{R}^q f'_*(\varphi^*\mathscr{F})) \Rightarrow \mathrm{R}^{p+q}(\psi f')_*(\varphi^*\mathscr{F})$$

est bijectif pour tout $q \geq 0$. Procédons par récurrence sur q. L'assertion est évidente pour $q = 0$. Soit $q \geq 1$. Supposons t^j bijectif pour tout $j \leq q-1$ et montrons que t^q est bijectif. L'hypothèse de récurrence implique que $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\nu^j)$ est un isomorphisme pour tout $j \leq q-1$. Par suite, $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathrm{R}^i\psi_*\nu^j)$ est un isomorphisme pour tous $i \geq 0$ et $j \leq q-1$ (2.10.34.1). Donc on a $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(F_2^{i,j}) = 0$ pour tous $i \geq 1$ et $j \leq q-1$ (3.5.4). On en déduit que t^q est bijectif en vertu de 2.10.18.

Chapitre 4

Géométrie rigide

Dans ce chapitre, nous définissons la catégorie des *espaces rigides cohérents*, baptisée catégorie de Raynaud et notée $\mathbf{R}$, en localisant la catégorie $\mathbf{S}$ des schémas formels idylliques quasi-compacts équipés des morphismes localement de présentation finie, par rapport aux éclatements admissibles. On note $\mathbf{S} \to \mathbf{R}$, $\mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ le foncteur de localisation. Nous illustrons cette construction par des exemples classiques de disques et couronnes fermés relatifs (cf. 4.1.9 et 4.3.11). Certaines propriétés des morphismes de $\mathbf{S}$ passent au quotient. Ainsi, on dit qu'un morphisme de $\mathbf{R}$ est une immersion (resp. une immersion ouverte, resp. une immersion fermée, resp. fini, resp. propre) s'il admet un modèle formel vérifiant la propriété analogue dans $\mathbf{S}$. Nous généralisons aux espaces rigides cohérents la notion de *recouvrement admissible* de Tate (cf. 4.3.8). La topologie de $\mathbf{R}$ engendrée par les recouvrements admissibles est la *topologie admissible*. Elle donne naissance au *gros topos admissible*, noté $\widetilde{\mathbf{R}}$, que nous utiliserons dans le §7 pour définir les espaces rigides quasi-séparés (mais pas nécessairement quasi-compacts). Il est commode d'associer à tout espace rigide cohérent X la sous-catégorie $\mathbf{Ad}_{/X}$ de $\mathbf{R}_{/X}$ formée des immersions ouvertes $U \to X$. Nous la munirons de la topologie induite par la topologie admissible de $\mathbf{R}$, appelée encore topologie admissible de X. Le topos X_{ad} des faisceaux d'ensembles sur $\mathbf{Ad}_{/X}$ est le *topos admissible* de X. Nous le décrivons comme la limite projective d'un topos fibré dont les fibres sont bien connues (4.5.12). Nous en déduisons quelques corollaires, entre autres des descriptions simples de X_{ad} (4.5.22) et de la catégorie de ses points (4.5.15). Si $\mathfrak{X}$ est un objet de $\mathbf{S}$, nous associons fonctoriellement à tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module $\mathscr{F}$ un faisceau $\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$, sa *fibre rigide* (cf. 4.7.4). Le faisceau $(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})^{\mathrm{rig}}$ est un anneau ; on le note aussi $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$. La correspondance $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ est un foncteur de la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules dans celle des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$-modules. Nous étudions les principales propriétés de ce foncteur sur la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents. Cette construction fournit pour tout espace rigide cohérent X un anneau $\mathscr{O}_X$ de X_{ad} et pour tout morphisme $f\colon X \to Y$ de $\mathbf{R}$ un homomorphisme $\theta_f\colon \mathscr{O}_Y \to f_*(\mathscr{O}_X)$. Nous montrons que le topos $(X_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_X)$ est localement annelé (4.8.6). Nous donnons des théorèmes fondamentaux sur les faisceaux cohérents sur les espaces rigides cohérents (4.8.18)

A. Abbes, *Éléments de Géométrie Rigide*, Progress in Mathematics 286,
DOI 10.1007/978-3-0348-0012-9_4,

et sur leurs cohomologies (4.8.22 et 4.8.26). Nous introduisons enfin la dimension d'un module de type fini sur un espace rigide cohérent.

Nous utilisons, sans mention explicite, les notations et conventions du §1.1.

4.1 Espaces rigides cohérents ; la catégorie de Raynaud

4.1.1. Dans la suite de ce traité, on fixe un univers $\mathbb{U}$ possédant un élément de cardinal infini et un univers $\mathbb{V}$ tel que $\mathbb{U} \in \mathbb{V}$. On désigne par **Ens** la catégorie des ensembles qui se trouvent dans $\mathbb{U}$, et par **Cat** la catégorie des catégories qui se trouvent dans $\mathbb{V}$.

4.1.2. On désigne par $\mathbf{S}^+$ la catégorie dont les objets sont les schémas formels idylliques *quasi-compacts* qui se trouvent dans $\mathbb{U}$ et les morphismes sont les morphismes adiques, et par $\mathbf{S}$ la sous-catégorie ayant mêmes objets que $\mathbf{S}^+$ et pour morphismes les morphismes localement de présentation finie. On notera que tout morphisme de $\mathbf{S}^+$ est cohérent et tout morphisme de $\mathbf{S}$ est de présentation finie (2.6.7). On note $\mathbf{B}$ l'ensemble des éclatements admissibles de $\mathbf{S}$ (3.1.2). Pour tout objet $\mathfrak{X}$ de $\mathbf{S}$, on désigne par $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{S}_{/\mathfrak{X}}$ formée des couples $(\mathfrak{X}', \varphi)$ tels que φ appartienne à $\mathbf{B}$.

4.1.3. Soit $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de $\mathbf{S}^+$. D'après 2.3.19 et 2.6.13, on a un foncteur de changement de base

$$f^{\bullet}\colon \mathbf{S}_{/\mathfrak{Y}} \to \mathbf{S}_{/\mathfrak{X}} \tag{4.1.3.1}$$

qu'on désigne aussi par $\mathfrak{Z} \mapsto \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Z}$. En particulier, les produits fibrés dans $\mathbf{S}$ sont représentables.

Proposition 4.1.4. *L'ensemble* $\mathbf{B}$ *permet un calcul de fractions à droite dans la catégorie* $\mathbf{S}$.

Cela résulte de 3.1.14 et 3.1.17, et signifie que $\mathbf{B}$ vérifie les propriétés suivantes ([23] I 2.2) :

(Fr1) Les flèches identiques de $\mathbf{S}$ appartiennent à $\mathbf{B}$.

(Fr2) $\mathbf{B}$ est stable par composition.

(Fr3) Tout diagramme de $\mathbf{S}$

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{Y}' \arrow[d, "\psi"] \\ \mathfrak{X} \arrow[r] & \mathfrak{Y} \end{tikzcd}$$

où $\psi \in \mathbf{B}$ se complète en un diagramme commutatif de $\mathbf{S}$

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathfrak{Y}' \arrow[d, "\psi"] \\ \mathfrak{X} \arrow[r] & \mathfrak{Y} \end{tikzcd}$$

où $\varphi \in \mathbf{B}$.

(Fr4) Pour tout diagramme commutatif de $\mathbf{S}$

$$\mathfrak{X} \rightrightarrows \mathfrak{Y} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{Y}'$$

où $\psi \in \mathbf{B}$, il existe un diagramme commutatif de $\mathbf{S}$

$$\mathfrak{X}' \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{X} \rightrightarrows \mathfrak{Y}$$

où $\varphi \in \mathbf{B}$.

Corollaire 4.1.5. *Pour tout objet $\mathfrak{X}$ de $\mathbf{S}$, la catégorie $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ est cofiltrante* ([26] I 2.7)*.*

Définition 4.1.6. On appelle *catégorie de Raynaud*, et l'on note $\mathbf{R}$, la catégorie localisée de $\mathbf{S}$ par rapport à $\mathbf{B}$; on note $\mathrm{Q}\colon \mathbf{S} \to \mathbf{R}$ le foncteur de localisation. Les objets de $\mathbf{R}$ sont appelés *espaces rigides cohérents*. Si S est un espace rigide cohérent, on dit qu'un objet de $\mathbf{R}_{/S}$ est un espace rigide cohérent au-dessus de S, ou un S-espace rigide cohérent.

Le couple $(\mathbf{R}, \mathrm{Q})$ est donc caractérisé par la propriété que tout foncteur de $\mathbf{S}$ dans une catégorie $\mathscr{C}$ transformant les éléments de $\mathbf{B}$ en flèches inversibles se factorise de manière unique à travers Q. Le qualificatif “cohérent” sera justifié ultérieurement (4.3.8.1 et 7.1.11). On peut préciser la terminologie comme suit :

4.1.6.1. Pour tout objet $\mathfrak{X}$ de $\mathbf{S}$, $\mathrm{Q}(\mathfrak{X})$ se note aussi $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$; pour tout morphisme f de $\mathbf{S}$, $\mathrm{Q}(f)$ se note aussi f^{rig}.

4.1.6.2. On dit qu'un objet $\mathfrak{X}$ de $\mathbf{S}$ est un *modèle formel* d'un objet X de $\mathbf{R}$ si $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ est isomorphe à X. On dit qu'un morphisme $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ de $\mathbf{S}$ est un *modèle formel* d'un morphisme $g\colon X \to Y$ de $\mathbf{R}$ si f^{rig} est isomorphe à g, *i.e.*, s'il existe un diagramme commutatif de $\mathbf{R}$

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}} \arrow[r, "f^{\mathrm{rig}}"] \arrow[d] & \mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}} \arrow[d] \\ X \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

dont les flèches verticales sont des isomorphismes.

4.1.6.3. On dit qu'un objet de $\mathbf{R}$ est *vide* s'il est initial.

4.1.6.4. On appelle *point rigide* l'image par Q du spectre formel d'un ordre 1-valuatif (1.11.1). On appelle catégorie des points rigides, et l'on note **P**, la sous-catégorie pleine de **R** formée des points rigides.

4.1.7. Compte tenu de 4.1.4, la catégorie **R** peut se décrire de la façon suivante :

(a) Les objets de **R** sont les objets de **S**.

(b) Pour deux objets $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ de **S**,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = \varinjlim_{\mathfrak{X}' \in \mathbf{B}_{\mathfrak{X}}^{\circ}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}). \tag{4.1.7.1}$$

Chaque morphisme $f \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ de **R** est donc représenté par un triplet $(\mathfrak{X}', \varphi, f')$, où $(\mathfrak{X}', \varphi)$ est un objet de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ et $f' \colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{Y}$ est un morphisme de **S**.

(c) Soient $f \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $g \colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ deux morphismes de **R**. Considérons un diagramme commutatif de **S**

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}'' \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\rho"'] & \mathfrak{Y}' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\psi"] & \mathfrak{Z} \\ \mathfrak{X}' \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathfrak{Y} & \\ \mathfrak{X} & & \end{tikzcd} \tag{4.1.7.2}$$

où $(\mathfrak{X}', \varphi, f')$ représente f, $(\mathfrak{Y}', \psi, g')$ représente g et ρ appartient à **B**. L'existence de (4.1.7.2) est garantie par 3.1.17(i). Alors $(\mathfrak{X}'', \varphi\rho, g'h)$ représente le morphisme composé gf de **R**.

4.1.8. Il est clair que $\emptyset_{\mathbf{R}} = \mathrm{Q}(\emptyset_{\mathbf{S}})$ est un objet initial de **R**. Soit $\mathfrak{X}$ un objet de **S**. Il existe un morphisme de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ dans $\emptyset_{\mathbf{R}}$ si et seulement s'il existe un objet $(\mathfrak{X}', \varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ tel que $\mathfrak{X}'$ soit vide (4.1.7.1). Par suite, l'objet initial de **R** est strict ([1] II 4.5). De plus, si $\mathfrak{X}$ est rig-pur, il résulte de 3.1.4(iii) que $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ est vide si et seulement si $\mathfrak{X}$ est vide.

Définition 4.1.9. Soient $\mathscr{S}$ un schéma formel idyllique quasi-compact, $\mathscr{D}$ l'espace affine formel au-dessus de $\mathscr{S}$ de dimension $d \geq 1$ (2.3.11). L'espace rigide cohérent $\mathscr{D}^{\mathrm{rig}}$ est appelé le *polydisque unité fermé* de dimension d au-dessus de $\mathscr{S}^{\mathrm{rig}}$. Lorsque $d = 1$, on dit que $\mathscr{D}^{\mathrm{rig}}$ est le *disque unité fermé* au-dessus de $\mathscr{S}^{\mathrm{rig}}$.

On trouvera dans 4.3.11 d'autres exemples de disques et couronnes relatives.

Proposition 4.1.10. *Si $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ sont deux objets de* **S** *avec $\mathfrak{X}$ rig-pur, alors l'application $f \mapsto f^{\mathrm{rig}}$*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}, \mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}})$$

est injective.

En effet, cela résulte de 3.5.9.

4.1.11. Les catégories $\mathbf{S}$ et $\mathbf{S}^+$ sont évidemment des $\mathbb{U}$-catégories (1.1.3) appartenant à **Cat**. Soient $\mathfrak{X}$ un objet de $\mathbf{S}$, Σ l'ensemble des idéaux ouverts cohérents $\mathscr{A}$ de $\mathfrak{X}$ tels que l'éclatement $\mathfrak{X}'_{\mathscr{A}} \to \mathfrak{X}$ de $\mathscr{A}$ dans $\mathfrak{X}$ soit de présentation finie. En tant qu'ensemble d'idéaux de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\Sigma \in \mathbb{U}$. On désigne par $\underline{\Sigma}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ formée des $\mathfrak{X}'_{\mathscr{A}}$ pour $\mathscr{A} \in \Sigma$. Cette catégorie est clairement équivalente à $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$. Comme $\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \in \mathbb{U}$ pour tous $\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{S})$ ([1] I Appendice prop. 6), on voit que $\underline{\Sigma}$ appartient à $\mathbb{U}$; donc $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ est $\mathbb{U}$-petite. Pour tout $\mathfrak{Y} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{S})$, on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}, \mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}) \simeq \varinjlim_{\mathscr{A} \in \underline{\Sigma}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(\mathfrak{X}'_{\mathscr{A}}, \mathfrak{Y}). \tag{4.1.11.1}$$

Donc $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}, \mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}) \in \mathbb{U}$, et par suite $\mathbf{R}$ est une $\mathbb{U}$-catégorie ([1] I 1.1).

4.1.12. On désigne par $\widehat{\mathbf{R}}$ (resp. $\widehat{\mathbf{S}}$) la catégorie des préfaisceaux de $\mathbb{V}$-ensembles sur $\mathbf{R}$ (resp. sur $\mathbf{S}$)[1], par $\mathrm{Q}^* \colon \widehat{\mathbf{R}} \to \widehat{\mathbf{S}}$ le foncteur défini par $F \mapsto F \circ \mathrm{Q}$, et par $\mathrm{Q}_! \colon \widehat{\mathbf{S}} \to \widehat{\mathbf{R}}$ un adjoint à gauche de Q^* ([1] I 5.1), choisi de sorte que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbf{S} \arrow[r, "\mathrm{Q}"] \arrow[d, "\mathrm{h}_{\mathbf{S}}"'] & \mathbf{R} \arrow[d, "\mathrm{h}_{\mathbf{R}}"] \\ \widehat{\mathbf{S}} \arrow[r, "\mathrm{Q}_!"] & \widehat{\mathbf{R}} \end{tikzcd} \tag{4.1.12.1}$$

où $\mathrm{h}_{\mathbf{S}}$ et $\mathrm{h}_{\mathbf{R}}$ sont les foncteurs canoniques (1.1.3.1) est commutatif ([1] I 5.4).

Proposition 4.1.13.

(i) *Le foncteur* $\mathrm{Q}_!$ *est exact à gauche.*

(ii) *Les produits fibrés dans* $\mathbf{R}$ *sont représentables et le foncteur* Q *commute aux produits fibrés.*

La première proposition résulte de [23], et elle entraîne la seconde compte tenu de (4.1.12.1) et du fait que les produits fibrés dans $\mathbf{S}$ sont représentables (4.1.3).

Proposition 4.1.14. *Les sommes finies dans* $\mathbf{R}$ *sont représentables et disjointes* ([1] II 4.5)*, et le foncteur* Q *commute aux sommes finies.*

On sait que les sommes finies dans $\mathbf{S}$ sont représentables et disjointes, et qu'une somme finie d'éclatements admissibles est un éclatement admissible. On en déduit (4.1.7) que les sommes finies dans $\mathbf{R}$ sont représentables et que le foncteur Q commute aux sommes finies. De plus, compte tenu de 4.1.13(ii), on voit que les sommes finies dans $\mathbf{R}$ sont disjointes.

---

[1] On peut se limiter ici aux préfaisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles. L'introduction de l'univers $\mathbb{V}$ est nécessaire pour la définition du gros site admissible (4.3.8).

Proposition 4.1.15. *Soit $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de* $\mathbf{S}$*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f^{rig} est un isomorphisme de* $\mathbf{R}$*.*

(ii) *f s'insère dans une suite de trois morphismes de* $\mathbf{S}$

$$\mathfrak{X}' \xrightarrow{f'} \mathfrak{Y}' \xrightarrow{g} \mathfrak{X} \xrightarrow{f} \mathfrak{Y} \tag{4.1.15.1}$$

telle que le composé de deux morphismes successifs appartienne à $\mathbf{B}$*.*

(iii) *Il existe un morphisme $\varphi\colon \mathfrak{Z} \to \mathfrak{X}$ de* $\mathbf{B}$ *tel que $\mathfrak{Z}$ soit rig-pur et que $f \circ \varphi\colon \mathfrak{Z} \to \mathfrak{Y}$ appartienne à* $\mathbf{B}$*.*

On a clairement (iii)⇒(i). Montrons (i)⇒(ii). Soit $(\mathfrak{Y}', \psi, g)$ un triplet représentant $(f^{\mathrm{rig}})^{-1}$. Comme $(\mathfrak{Y}', \psi, f \circ g)$ représente l'identité de $\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}$, quitte à remplacer $(\mathfrak{Y}', \psi)$ par un objet de $\mathbf{B}_{\mathfrak{Y}}$ qu'il majore, on peut supposer $\psi = f \circ g$. En vertu de 3.1.17(i), il existe un diagramme commutatif de $\mathbf{S}$ (sans la flèche pointillée)

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X}' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathfrak{Y}' \arrow[d, "\psi"] \arrow[dl, dotted, "g"'] \\
\mathfrak{X} \arrow[r, "f"'] & \mathfrak{Y}
\end{tikzcd}$$

tel que φ appartienne à $\mathbf{B}$. Par définition, $(\mathfrak{X}', \varphi, g \circ f')$ représente le composé $(f^{\mathrm{rig}})^{-1} \circ f^{\mathrm{rig}}$, c'est à dire l'identité de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$. Donc quitte à remplacer $(\mathfrak{X}', \varphi)$ par un objet de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ qu'il majore, on peut supposer $\varphi = g \circ f'$, ce qui entraîne (ii).

Montrons (ii)⇒(iii). Supposons que $f \circ g$ (resp. $g \circ f'$) soit l'éclatement dans $\mathfrak{Y}$ (resp. $\mathfrak{X}$) d'un idéal ouvert cohérent $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{A}$). Soient $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$, $\theta\colon \mathfrak{X}'' \to \mathfrak{X}$ l'éclatement de $f^*(\mathscr{B})\mathscr{A}\mathscr{J}$ dans $\mathfrak{X}$. Alors θ est une flèche de $\mathbf{S}$, et il existe un morphisme $t\colon \mathfrak{X}'' \to \mathfrak{X}'$ de $\mathbf{S}$ tel que $g \circ f' \circ t = \theta$ (3.1.4 et 3.1.9). Remplaçant $\mathfrak{X}'$ par $\mathfrak{X}''$, on peut supposer que $g \circ f'$ est l'éclatement de $f^*(\mathscr{B})\mathscr{A}\mathscr{J}$ dans $\mathfrak{X}$. Soit $\rho\colon \mathfrak{Z} \to \mathfrak{Y}'$ l'éclatement de $g^*(f^*(\mathscr{B})\mathscr{A}\mathscr{J})\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'}$ dans $\mathfrak{Y}'$. Alors $\mathfrak{Z}$ est idyllique rig-pur et ρ est un morphisme de $\mathbf{S}$ (3.1.4). Il existe deux morphismes adiques $u\colon \mathfrak{Z} \to \mathfrak{X}'$ et $v\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{Z}$ tels que $g \circ f' \circ u = g \circ \rho$ et $\rho \circ v = f'$ (3.1.9). La relation $f \circ g \circ f' \circ u = f \circ g \circ \rho$ entraîne que $f' \circ u = \rho$. Par suite u et v sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre au-dessus de $\mathfrak{Y}'$; donc $g \circ \rho\colon \mathfrak{Z} \to \mathfrak{X}$ est un éclatement admissible. Par ailleurs, $f \circ g \circ \rho\colon \mathfrak{Z} \to \mathfrak{Y}$ est un éclatement admissible (3.1.14).

Corollaire 4.1.16. *Soient $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ deux objets de* $\mathbf{S}$*, $f\colon \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}} \to \mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}$ un morphisme de* $\mathbf{R}$*. Pour que f soit un isomorphisme, il faut et il suffit qu'il soit représentable par un triplet $(\mathfrak{Z}, \varphi, \psi)$ tel que $\mathfrak{Z}$ soit rig-pur et que $\varphi\colon \mathfrak{Z} \to \mathfrak{X}$ et $\psi\colon \mathfrak{Z} \to \mathfrak{Y}$ appartiennent à* $\mathbf{B}$*.*

Corollaire 4.1.17. *Soient $f\colon X \to Y$ un morphisme de* $\mathbf{R}$*, $g_i\colon \mathfrak{X}_i \to \mathfrak{Y}_i$ $(i = 1, 2)$ deux modèles formels de f. Alors, il existe un diagramme commutatif de* $\mathbf{S}$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X}_1 \arrow[d, "g_1"'] & \mathfrak{X}' \arrow[l, "\varphi_1"'] \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d] & \mathfrak{X}_2 \arrow[d, "g_2"] \\
\mathfrak{Y}_1 & \mathfrak{Y}' \arrow[l, "\psi_1"'] \arrow[r, "\psi_2"] & \mathfrak{Y}_2
\end{tikzcd}$$

tel que $\mathfrak{X}'$ soit rig-pur et que φ_i et ψ_i appartiennent à $\mathbf{B}$ $(i = 1, 2)$.

Cela résulte d'une double application de 4.1.16.

Corollaire 4.1.18. *Soient $\mathfrak{X}$ un objet de* $\mathbf{S}$*, $\mathfrak{Y}$ le transformé strict de $\mathfrak{X}$* (2.10.16)*, $j\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ l'injection canonique. Alors j^{rig} est un isomorphisme.*

Soient $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$, $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ l'éclatement de $\mathscr{J}$ dans $\mathfrak{X}$, $\psi\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$ l'éclatement de $\mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$ dans $\mathfrak{Y}$. On sait (3.1.4) que φ et ψ sont de présentation finie et que $\mathfrak{X}'$ et $\mathfrak{Y}'$ sont rig-purs. Donc en vertu de 2.10.17, φ se factorise uniquement dans $\mathbf{S}$ en

$$\mathfrak{X}' \xrightarrow{g} \mathfrak{Y} \xrightarrow{j} \mathfrak{X}.$$

D'autre part, il résulte de 3.1.9 que ψ se factorise uniquement dans $\mathbf{S}$ en

$$\mathfrak{Y}' \xrightarrow{j'} \mathfrak{X}' \xrightarrow{g} \mathfrak{Y}.$$

L'assertion résulte alors de 4.1.15.

Proposition 4.1.19. *Soient $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ deux objets de* $\mathbf{S}$*, $(\mathfrak{Y}_i)_{i\in I}$ un recouvrement fini de $\mathfrak{Y}$ par des ouverts. Alors le diagramme d'applications d'ensembles*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}, \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}) \to \prod_I \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{Y}_i^{\mathrm{rig}}, \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}) \rightrightarrows \prod_{I\times I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}((\mathfrak{Y}_i \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}_j)^{\mathrm{rig}}, \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}) \tag{4.1.19.1}$$

est exact.

On peut se borner au cas où $\mathfrak{Y}$ est rig-pur (4.1.18). D'abord la première application de (4.1.19.1) est injectif : quitte à remplacer $\mathfrak{Y}$ par un objet de $\mathbf{B}_{\mathfrak{Y}}$, il suffit de montrer que si $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{X})$ tels que f^{rig} et g^{rig} ont même image, alors $f^{\mathrm{rig}} = g^{\mathrm{rig}}$. En vertu de 4.1.10, la relation $f^{\mathrm{rig}}|\mathfrak{Y}_i^{\mathrm{rig}} = g^{\mathrm{rig}}|\mathfrak{Y}_i^{\mathrm{rig}}$ entraîne que $f|\mathfrak{Y}_i = g|\mathfrak{Y}_i$; donc $f = g$, ce qui démontre l'assertion. Ensuite le diagramme (4.1.19.1) est exact au centre : compte tenu de 3.2.4(i) et 3.1.17(ii), il suffit de montrer que si pour tout $i \in I$, $f_i\colon \mathfrak{Y}_i \to \mathfrak{X}$ est un morphisme de $\mathbf{S}$ tels que $(f_i^{\mathrm{rig}})_{i\in I}$ appartienne au noyau de la double flèche, alors $(f_i^{\mathrm{rig}})_{i\in I}$ est dans l'image de la première application. En vertu de 4.1.10, pour tout $(i, j) \in I^2$, f_i et f_j induisent le même morphisme de $\mathfrak{Y}_i \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}_j$ dans $\mathfrak{X}$. Donc on peut recoller les f_i en un morphisme $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ de $\mathbf{S}$, ce qui achève la preuve.

Proposition 4.1.20. *Soient A un ordre 1-valuatif* (1.11.1)*, $\mathscr{P} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathfrak{X}$ un objet de $\mathbf{S}$, $p\colon \mathscr{P}^{\mathrm{rig}} \to \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ un morphisme de $\mathbf{R}$. Alors il existe un unique point rigide $\mathscr{Q}$ de $\mathfrak{X}$* (3.3.1) *tel que, si l'on note $j\colon \mathscr{Q} \to \mathfrak{X}$ l'injection canonique, j^{rig} majore p, i.e., p se factorise en*

$$\mathscr{P}^{\mathrm{rig}} \xrightarrow{q} \mathscr{Q}^{\mathrm{rig}} \xrightarrow{j^{\mathrm{rig}}} \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}},$$

où q est un morphisme de $\mathbf{R}$.

Soit $(\mathscr{P}', \varphi, f)$ un triplet représentant p (4.1.7). On a alors $\mathscr{P}' = \mathrm{Spf}(B)$, où B est un ordre 1-valuatif, fini sur A (3.3.12). D'après 3.3.4(iii), il existe un unique point rigide $\mathscr{Q}$ de $\mathfrak{X}$ tel que l'injection canonique $j\colon \mathscr{Q} \to \mathfrak{X}$ majore f, *i.e.*, f se factorise en

$$\mathscr{P}' \xrightarrow{g} \mathscr{Q} \xrightarrow{j} \mathfrak{X},$$

où g est un morphisme de $\mathbf{S}$. Si l'on note $q\colon \mathscr{P}^{\mathrm{rig}} \to \mathscr{Q}^{\mathrm{rig}}$ le morphisme défini par $(\mathscr{P}', \varphi, g)$, on a $p = j^{\mathrm{rig}} \circ q$. De plus, il résulte de 3.3.4(iii), 3.3.12 et 4.1.5 que $\mathscr{Q}$ est unique.

4.1.21. Soit $\mathfrak{X}$ un objet de $\mathbf{S}$. On note $\mathbf{B}(\mathbf{S}_{/\mathfrak{X}})$ l'ensemble des flèches de $\mathbf{S}_{/\mathfrak{X}}$ qui correspondent à des éclatements admissibles. Il est clair que $\mathbf{B}(\mathbf{S}_{/\mathfrak{X}})$ permet un calcul de fractions à droite (4.1.4), et le foncteur

$$\mathrm{Q}_{/\mathfrak{X}}\colon \mathbf{S}_{/\mathfrak{X}} \to \mathbf{R}_{/\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}} \tag{4.1.21.1}$$

déduit de Q (4.1.6), identifie $\mathbf{R}_{/\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$ à la catégorie localisée de $\mathbf{S}_{/\mathfrak{X}}$ par rapport à $\mathbf{B}(\mathbf{S}_{/\mathfrak{X}})$.

4.1.22. Soit $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de $\mathbf{S}^{+}$. Considérons le foncteur composé

$$\mathrm{Q}_{/\mathfrak{X}} \circ f^{\bullet}\colon \mathbf{S}_{/\mathfrak{Y}} \to \mathbf{R}_{/\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}},$$

où $f^{\bullet}$ est le foncteur (4.1.3.1). Il résulte de 3.1.17(i) que ce foncteur transforme les flèches de $\mathbf{B}(\mathbf{S}_{/\mathfrak{Y}})$ en des isomorphismes. Il définit donc un foncteur

$$f^{\flat}\colon \mathbf{R}_{/\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}} \to \mathbf{R}_{/\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}. \tag{4.1.22.1}$$

On peut faire les remarques suivantes :

4.1.22.2. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{S}_{/\mathfrak{Y}} \arrow[r, "f^{\bullet}"] \arrow[d, "\mathrm{Q}_{/\mathfrak{Y}}"'] & \mathbf{S}_{/\mathfrak{X}} \arrow[d, "\mathrm{Q}_{/\mathfrak{X}}"] \\
\mathbf{R}_{/\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}} \arrow[r, "f^{\flat}"] & \mathbf{R}_{/\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}
\end{tikzcd}$$

est commutatif, et le foncteur $f^{\flat}$ est uniquement déterminé par cette propriété.

4.1.22.3. Si f est un morphisme de $\mathbf{S}$, $f^\flat$ est le changement de base relativement à f^{rig}.

4.1.22.4. Le foncteur $f^\flat$ est exact à gauche. Cela résulte de 4.1.13(ii), 4.1.22.2 et du fait que $f^\bullet$ transforme les produits fibrés en produits fibrés ([1] I 2.4.2).

4.1.22.5. Soit $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ un second morphisme de $\mathbf{S}^+$. Il existe un isomorphisme canonique

$$f^\flat g^\flat \xrightarrow{\sim} (gf)^\flat$$

vérifiant une relation de cocycle du type (1.1.2.1). Cela résulte de 4.1.22.2, compte tenu de l'énoncé analogue pour les foncteurs $f^\bullet$ et $g^\bullet$.

4.2 Morphismes d'espaces rigides cohérents

Définition 4.2.1. On dit qu'un morphisme d'espaces rigides cohérents est une *immersion* (resp. une *immersion fermée*, resp. une *immersion ouverte*) s'il admet un modèle formel qui est une immersion (resp. une immersion fermée, resp. une immersion ouverte) de $\mathbf{S}$ (4.1.6.2).

Lemme 4.2.2. *Soit $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de $\mathbf{S}$. Pour que f^{rig} soit une immersion (resp. une immersion ouverte, resp. une immersion fermée), il faut et il suffit que f s'insère dans un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathfrak{Y}' \arrow[d, "\psi"] \\ \mathfrak{X} \arrow[r, "f"] & \mathfrak{Y} \end{tikzcd}$$

tel que φ et ψ appartiennent à $\mathbf{B}$ et que f' soit une immersion (resp. immersion ouverte, resp. immersion fermée).

La condition est clairement suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. Par hypothèse, il existe une immersion (resp. une immersion ouverte, resp. une immersion fermée) $f_0\colon \mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{Y}_0$ de $\mathbf{S}$ et un diagramme commutatif de $\mathbf{R}$

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}_0^{\mathrm{rig}} \arrow[r, "f_0^{\mathrm{rig}}"] \arrow[d, "u"'] & \mathfrak{Y}_0^{\mathrm{rig}} \arrow[d, "v"] \\ \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}} \arrow[r, "f^{\mathrm{rig}}"] & \mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}} \end{tikzcd}$$

tels que u et v soient des isomorphismes. D'après 4.1.16, on peut représenter v par un triplet $(\mathfrak{Y}_1, w_1\colon \mathfrak{Y}_1 \to \mathfrak{Y}_0, w\colon \mathfrak{Y}_1 \to \mathfrak{Y})$, où $\mathfrak{Y}_1$ est rig-pur et $w, w_1 \in \mathbf{B}$. Posons $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_0 \times_{\mathfrak{Y}_0} \mathfrak{Y}_1$. La projection canonique $\mathfrak{X}_1 \to \mathfrak{X}_0$ induit un isomorphisme

$\mathfrak{X}_1^{\mathrm{rig}} \simeq \mathfrak{X}_0^{\mathrm{rig}}$ (4.1.13). Compte tenu de 2.9.9(i), on peut remplacer $\mathfrak{X}_0$ et $\mathfrak{Y}_0$ par respectivement $\mathfrak{X}_1$ et $\mathfrak{Y}_1$; on peut donc supposer $\mathfrak{Y}_0$ rig-pur et $v = w^{\mathrm{rig}}$, où $w\colon \mathfrak{Y}_0 \to \mathfrak{Y}$ est une flèche de $\mathbf{B}$. Toujours d'après 4.1.16, on peut représenter u par un triplet $(\mathfrak{X}', \varphi'\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}_0, \varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X})$ où $\varphi, \varphi' \in \mathbf{B}$. En vertu de 3.2.4(ii), il existe un diagramme commutatif de $\mathbf{S}$

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\varphi'"'] & \mathfrak{Y}' \arrow[d, "\psi'"] \\ \mathfrak{X}_0 \arrow[r, "f_0"] & \mathfrak{Y}_0 \end{tikzcd}$$

tel que $\psi' \in \mathbf{B}$ et que f' soit une immersion (resp. une immersion ouverte, resp. une immersion fermée). On notera que $\mathfrak{Y}'$ est rig-pur (3.1.4). Comme $(f\varphi)^{\mathrm{rig}} = (w\psi' f')^{\mathrm{rig}}$, quitte à appliquer de nouveau 3.2.4(ii), on peut supposer $f\varphi = w\psi' f'$; donc f', φ et $\psi = w \circ \psi'$ répondent à la question.

Lemme 4.2.3. *Soit $(X_i \to X)_{i\in I}$ une famille finie d'immersions (resp. immersions ouvertes, resp. immersions fermées) d'espaces rigides cohérents. Alors il existe un modèle formel $\mathfrak{X}$ de X et des sous-schémas (resp. sous-schémas ouverts, resp. sous-schémas fermés) $\mathfrak{X}_i$ de $\mathfrak{X}$ $(i \in I)$ tels que, pour tout $i \in I$, X_i soit X-isomorphe à $\mathfrak{X}_i^{\mathrm{rig}}$.*

Cela résulte immédiatement 2.9.9(i), 4.1.13 et des définitions.

Lemme 4.2.4. *Soient $f\colon X \to Y$ une immersion fermée d'espaces rigides cohérents, $X_0 \to X$ une immersion ouverte. Alors il existe une immersion ouverte $Y_0 \to Y$ telle que X_0 soit X-isomorphe à $Y_0 \times_Y X$.*

Compte tenu de 3.2.4 et 4.1.13, il existe une immersion fermée $h\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ de $\mathbf{S}$ et un sous-schéma ouvert $\mathfrak{X}_0$ de $\mathfrak{X}$ tels que h soit un modèle formel de f et que $\mathfrak{X}_0^{\mathrm{rig}}$ soit X-isomorphe à X_0. On peut alors trouver un sous-schéma ouvert $\mathfrak{Y}_0$ de $\mathfrak{Y}$ tel que $\mathfrak{X}_0 = u^{-1}(\mathfrak{Y}_0)$; d'où l'assertion (4.1.13).

Proposition 4.2.5. *La catégorie de Raynaud vérifie les propriétés suivantes :*

(i) *Le composé de deux immersions (resp. de deux immersions ouvertes, resp. de deux immersions fermées) est une immersion (resp. une immersion ouverte, resp. une immersion fermée).*

(ii) *Soient $f\colon X \to Y$, $g\colon Y' \to Y$ deux morphismes. Si f est une immersion (resp. une immersion ouverte, resp. une immersion fermée), il en est de même du morphisme $X \times_Y Y' \to Y'$.*

(iii) *Soient $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ deux morphismes. Si $g \circ f$ est une immersion, il en est de même de f.*

(i) Il suffit de montrer que si $u\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ est une immersion (resp. une immersion ouverte, resp. une immersion fermée) de $\mathbf{S}$ et $v\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ est un morphisme de

$\mathbf{S}$ tel que v^{rig} soit une immersion (resp. une immersion ouverte, resp. une immersion fermée), alors $(vu)^{\mathrm{rig}}$ est une immersion (resp. une immersion ouverte, resp. une immersion fermée), ce qui résulte facilement de 4.2.2 (appliqué à v), 2.9.9(i) et 4.1.13.

(ii) Cela résulte de 2.9.9(i) et 4.1.13.

(iii) Soient $u\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ et $v\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ des modèles formels de f et g respectivement. En vertu de 4.2.2 et 4.1.13, on peut supposer vu une immersion. Il résulte alors de 2.9.11 que u est une immersion.

Corollaire 4.2.6. *Si $f\colon X \to Y$ est un morphisme d'espaces rigides cohérents, le morphisme diagonal $\Delta_f\colon X \to X \times_Y X$ est une immersion.*

Proposition 4.2.7. *Toute immersion $f\colon Y \to X$ de $\mathbf{R}$ est un monomorphisme ; autrement dit, le morphisme diagonal $\Delta_f\colon Y \to Y \times_X Y$ est un isomorphisme.*

Soit $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ un modèle formel de f, qui est une immersion de $\mathbf{S}$. Alors le morphisme diagonal $\Delta_g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{Y}$ est un modèle formel du morphisme diagonal $\Delta_f\colon Y \to Y \times_X Y$ (4.1.13). D'autre part, il résulte facilement de 2.9.9(ii) que Δ_g est un isomorphisme, d'où la proposition.

Proposition 4.2.8. *Soient $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ deux morphismes d'espaces rigides cohérents tels que g soit un monomorphisme (par example une immersion). Si $g \circ f$ est une immersion ouverte, il en est de même de f.*

En effet, comme le morphisme $(\mathrm{id}_X, f)\colon X \to X \times_Z Y$ est un isomorphisme, on peut identifier f au changement de base de $g \circ f$ par le morphisme g. La proposition résulte alors de 4.2.5(ii).

Proposition 4.2.9. *Soient X un point rigide, $f\colon Y \to X$ une immersion d'espaces rigides cohérents. Alors, ou bien f est un isomorphisme, ou bien Y est vide.*

Cela résulte de 3.3.12, 4.1.18 et 4.2.2.

Définition 4.2.10. On dit qu'un morphisme d'espaces rigides cohérents $f\colon X \to Y$ est *séparé* si le morphisme diagonal $\Delta_f\colon X \to X \times_Y X$ est une immersion fermée ; on dit alors que X est un Y-espace rigide cohérent *séparé*, ou *séparé* sur Y.

Proposition 4.2.11. *Soit $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de $\mathbf{S}$.*

(i) *Si f est séparé* (2.3.1), *f^{rig} est séparé.*

(ii) *Supposons $\mathfrak{X}$ rig-pur. Pour que f^{rig} soit séparé, il faut et il suffit que f soit séparé.*

Notons d'abord que le morphisme diagonal $\Delta_f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{X}$ est un modèle formel du morphisme diagonal $\Delta_{f^{\mathrm{rig}}}\colon \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}} \to \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}} \times_{\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}} \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ (4.1.13). La proposition (i) résulte donc de 2.9.12(ii). Pour (ii), supposons f^{rig} séparé, et montrons que f est séparé. En vertu de 4.2.2, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}' \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\varphi"'] & (\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{X})' \arrow[d, "\psi"] \\ \mathfrak{X} \arrow[r, "\Delta_f"] & \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{X} \end{tikzcd}$$

tel que φ, ψ appartiennent à $\mathbf{B}$ et que ρ soit une immersion fermée. Comme φ est surjectif (3.1.4(iii)), l'image par Δ_f de l'espace sous-jacent à $\mathfrak{X}$ est une partie fermée de l'espace sous-jacent à $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{X}$, d'où l'assertion.

Proposition 4.2.12. *La catégorie de Raynaud vérifie les propriétés suivantes :*

(i) *Toute immersion est un morphisme séparé.*

(ii) *Le composé de deux morphismes séparés est séparé.*

(iii) *Soient $f: X \to Y$, $g: Y' \to Y$ deux morphismes. Si f est séparé, il en est de même du morphisme $X \times_Y Y' \to Y'$.*

(iv) *Soient $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ deux morphismes. Si $g \circ f$ est séparé, f est séparé.*

(v) *Soient $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ deux morphismes tels que $g \circ f$ soit une immersion fermée et que g soit séparé. Alors f est une immersion fermée.*

Les propositions (i)–(iv) résultent de 4.2.11 et des assertions correspondantes pour les morphismes de $\mathbf{S}$ (2.3.3). Montrons la proposition (v). Le morphisme $\Gamma_f = (\mathrm{id}_X, f): X \to X \times_Z Y$ est le changement de base du morphisme diagonal $\Delta_g: Y \to Y \times_Z Y$ par le morphisme $X \times_Z Y \to Y \times_Z Y$, et f se factorise en $p_2 \circ \Gamma_f$, où $p_2: X \times_Z Y \to Y$ est la projection canonique. Compte tenu des hypothèses et de 4.2.5(ii), Γ_f et p_2 sont des immersions fermées. Donc f est une immersion fermée en vertu de 4.2.5(i).

Définition 4.2.13. On dit qu'un morphisme d'espaces rigides cohérents $f: X \to Y$ est *fini* s'il admet un modèle formel qui est un morphisme fini de $\mathbf{S}$; on dit alors que X est un Y-espace rigide *fini*, ou *fini* sur Y.

Proposition 4.2.14. *La catégorie de Raynaud vérifie les propriétés suivantes :*

(i) *Toute immersion fermée est un morphisme fini.*

(ii) *Soient $f: X \to Y$, $g: Y' \to Y$ deux morphismes. Si f est fini, il en est de même du morphisme $X \times_Y Y' \to Y'$.*

Cela résulte des définitions et des assertions correspondantes pour les morphismes de $\mathbf{S}$ (2.3.26).

Remarque 4.2.15. On établira ultérieurement d'autres propriétés utiles des morphismes finis (5.9.19).

Définition 4.2.16. On dit qu'un morphisme d'espaces rigides cohérents $f: X \to Y$ est *propre* s'il admet un modèle formel qui est un morphisme propre de $\mathbf{S}$; on dit alors que X est un Y-espace rigide *propre*, ou *propre* sur Y.

Proposition 4.2.17. *Soit $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de* **S** *tel que $\mathfrak{X}$ soit rig-pur. Pour que f^{rig} soit propre, il faut et il suffit que f soit propre.*

Il n'y a évidemment à prouver que la nécessité de la condition ; supposons donc f^{rig} propre. En vertu de 4.1.17, il existe un diagramme commutatif de **S**

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X} \arrow[d, "f"'] & \mathfrak{X}' \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[r, "\varphi''"] \arrow[d, "f'"] & \mathfrak{X}'' \arrow[d, "f''"] \\ \mathfrak{Y} & \mathfrak{Y}' \arrow[l, "\psi"'] \arrow[r, "\psi''"] & \mathfrak{Y}'' \end{tikzcd}$$

tel que f'' soit propre et que φ, φ'', ψ et ψ'' appartiennent à **B** ; donc f' est propre car tout morphisme de **B** est propre. Comme f est séparé (4.2.11) et que φ est surjectif (3.1.4), f est propre en vertu de 2.3.21 et ([29] 5.4.3).

Proposition 4.2.18. *La catégorie de Raynaud vérifie les propriétés suivantes :*

(i) *Un morphisme fini est propre.*

(ii) *Pour qu'une immersion soit propre, il faut et il suffit qu'elle soit une immersion fermée.*

(iii) *Le composé de deux morphismes propres est un morphisme propre.*

(iv) *Soient $f\colon X \to Y$, $g\colon Y' \to Y$ deux morphismes. Si f est propre, il en est de même du morphisme $X \times_Y Y' \to Y'$.*

(v) *Soient $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ deux morphismes tels que $g \circ f$ soit propre et que g soit séparé. Alors f est propre.*

La proposition (i) est évidente. La proposition (ii) résulte de 4.1.18 et du fait que si $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ est une immersion de **S** telle que f^{rig} soit propre et que $\mathfrak{X}$ soit rig-pur, f est propre (4.2.17), et est donc une immersion fermée. Les propositions (iii) et (iv) résultent de 4.2.17 et des assertions correspondantes pour les morphismes de **S** (2.3.23). Pour démontrer la proposition (v), il suffit de calquer la preuve de 4.2.12(v) : avec les notations de *loc. cit.* et compte tenu de (iv), 4.2.5(ii) et des hypothèses, Γ_f est une immersion fermée et p_2 est un morphisme propre ; donc f est propre en vertu de (ii) et (iii).

Proposition 4.2.19. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de $\mathbf{S}^+$, $f^\flat\colon \mathbf{R}_{/\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}} \to \mathbf{R}_{/\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$ le foncteur associé à f (4.1.22.1), $u\colon F \to G$ un morphisme de $\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}$-espaces rigides cohérents. Considérons pour un morphisme d'espaces rigides cohérents la propriété d'être :*

(i) *une immersion ;*

(ii) *une immersion ouverte ;*

(iii) *une immersion fermée ;*

(iv) *fini ;*

(v) *séparé ;*

(vi) *propre ;*

Alors, si u vérifie l'une de ces propriétés, il en est de même de $f^\flat(u)$.

Cela résulte des définitions, de 4.2.11 et des propositions correspondantes pour les morphismes de schémas formels idylliques (2.3.3(ii), 2.3.23(ii), 2.3.26(ii) et 2.9.9(i)).

4.3 La topologie admissible

Définition 4.3.1. On appelle *point rigide* d'un objet X de $\widehat{\mathbf{R}}$ (4.1.12) un couple (P, p) formé d'un point rigide P (4.1.6.4) et d'un morphisme $p\colon P \to X$. On note $\mathbf{P}_{/X}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{R}_{/X}$ formée des points rigides de X.

On dit qu'un morphisme $f\colon X \to Y$ de $\widehat{\mathbf{R}}$ est *couvrant pour les points rigides* si pour tout point rigide (Q, q) de Y, il existe un point rigide (P, p) de X tel que Q majore P au-dessus de Y (*i.e.*, tel que $\mathrm{Hom}_Y(P, Q) \neq \emptyset$).

On dit qu'une famille $(X_i \to X)_{i\in I}$ de morphismes de $\widehat{\mathbf{R}}$ est *couvrante pour les points rigides* si le morphisme $\amalg_{i\in I} X_i \to X$ est couvrant pour les points rigides.

4.3.2. Le foncteur $\mathbf{S} \to \mathbf{Ens}$, défini par $\mathfrak{X} \mapsto \langle \mathfrak{X} \rangle$ (3.3.5), transforme les flèches de $\mathbf{B}$ en isomorphismes (3.3.8). Il induit donc un foncteur

$$\mathbf{R} \to \mathbf{Ens}, \tag{4.3.2.1}$$

qu'on désigne aussi par $X \mapsto \langle X \rangle$. Pour tout point rigide P, $\langle P \rangle$ est un singleton.

Proposition 4.3.3. *Soit X un espace rigide cohérent. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *X est vide* (4.1.6.3).
(ii) *La catégorie $\mathbf{P}_{/X}$ est vide, i.e.,* $\mathrm{Hom}(P, X) = \emptyset$ *pour tout* $P \in \mathrm{Ob}(\mathbf{P})$.
(iii) *L'ensemble $\langle X \rangle$ est vide.*

En effet, l'implication (i)⇒(ii) est une conséquence du fait que l'objet initial de $\mathbf{R}$ est strict (4.1.8), l'implication (ii)⇒(iii) est évidente, et l'implication (iii)⇒(i) résulte de 3.3.10.

Proposition 4.3.4. *Tout morphisme de $\mathbf{P}$ est couvrant pour les points rigides.*

Cela résulte de 1.11.7 et 3.3.12.

Proposition 4.3.5. *Soit $(f_i\colon X_i \to X)_{i\in I}$ une famille de morphismes de $\mathbf{R}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$(f_i)_{i\in I}$ est couvrante pour les points rigides.*
(ii) *Pour tout point rigide (P, p) de X, il existe $i \in I$ tel que $X_i \times_X P$ soit non vide.*
(iii) *L'application $\amalg_{i\in I}\langle X_i \rangle \to \langle X \rangle$ induite par les f_i est surjective.*

En effet, l'implication (i)⇒(ii) est une conséquence du fait que l'objet initial de $\mathbf{R}$ est strict (4.1.8), l'implication (ii)⇒(iii) résulte par fonctorialité de 4.3.3, et l'implication (iii)⇒(i) est une conséquence de 4.1.20 et 4.3.4.

Proposition 4.3.6. *Soit $(X_i \to X)_{i\in I}$ une famille finie d'immersions ouvertes d'espaces rigides cohérents. Alors il existe un modèle formel rig-pur $\mathfrak{X}$ de X et des sous-schémas ouverts $\mathfrak{X}_i$ de $\mathfrak{X}$ $(i \in I)$ tels que, pour tout $i \in I$, X_i soit X-isomorphe à $\mathfrak{X}_i^{\mathrm{rig}}$. De plus, pour que la famille $(X_i \to X)_{i\in I}$ soit couvrante pour les points rigides, il faut et il suffit que $(\mathfrak{X}_i)_{i\in I}$ soit un recouvrement de $\mathfrak{X}$.*

Cela résulte de 4.2.3, 4.3.5 et 3.3.11.

Corollaire 4.3.7. *Soit $f\colon Y \to X$ une immersion ouverte d'espaces rigides cohérents. Pour que f soit couvrant pour les points rigides, il faut et il suffit que f soit un isomorphisme.*

4.3.8. On dit qu'une famille $(X_i \to X)_{i\in I}$ d'immersions ouvertes d'espaces rigides cohérents est un *recouvrement admissible* si elle admet une sous-famille *finie* couvrante pour les points rigides. Les recouvrements admissibles définissent une prétopologie sur $\mathbf{R}$ ([1] II 1.3). On appelle *topologie admissible* sur $\mathbf{R}$ la topologie engendrée par la prétopologie pour laquelle les recouvrements sont les recouvrements admissibles. Le site ainsi obtenu est un $\mathbb{V}$-site ([1] II 3.0.2). On appelle *gros topos admissible* et on note $\widetilde{\mathbf{R}}$ la catégorie des faisceaux de $\mathbb{V}$-ensembles sur $\mathbf{R}$. On considérera toujours $\widetilde{\mathbf{R}}$ comme un site en le munissant de la topologie canonique ([1] II 2.5).

On peut faire les remarques suivantes :

4.3.8.1. Tout objet de $\mathbf{R}$ est cohérent dans $\widetilde{\mathbf{R}}$. En effet, tout objet de $\mathbf{R}$ est quasi-compact dans $\widetilde{\mathbf{R}}$ ([1] VI 1.2) ; en particulier, $\widetilde{\mathbf{R}}$ admet une sous-catégorie génératrice formée d'objets quasi-compacts, à savoir $\mathbf{R}$. Comme $\mathbf{R}$ admet des produits fibrés, tout morphisme de $\mathbf{R}$ est quasi-compact ([1] VI 1.10). Par suite, tout objet de $\mathbf{R}$ est quasi-séparé ([1] VI 1.18), et donc cohérent.

4.3.8.2. La topologie admissible sur $\mathbf{R}$ est moins fine que la topologie canonique (4.1.19 et 4.3.6). Par suite, le foncteur canonique $\mathrm{h}_{\mathbf{R}}\colon \mathbf{R} \to \widehat{\mathbf{R}}$ (1.1.3) fournit un foncteur *pleinement fidèle*

$$\varepsilon\colon \mathbf{R} \to \widetilde{\mathbf{R}}, \tag{4.3.8.3}$$

qu'on appelle *foncteur canonique* de $\mathbf{R}$ dans $\widetilde{\mathbf{R}}$ ([1] II 4.4.0).

4.3.8.4. Soit X un objet de $\mathbf{R}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) X est vide (4.1.6.3).

(ii) L'ensemble $\langle X\rangle$ est vide.

(iii) Le crible vide recouvre X.

(iv) $\varepsilon(X)$ est *vide* (*i.e.*, est un objet initial de $\widetilde{\mathbf{R}}$).

En effet, on a clairement (i)⇒(ii)⇒(iii). L'implication (iii)⇒(iv) résulte de ([1] II 4.6.1(i)). On déduit des implications déjà démontrées que ε transforme un objet vide de $\mathbf{R}$ en un objet vide de $\widetilde{\mathbf{R}}$. L'implication (iv)⇒(i) est alors une conséquence de la pleine fidélité de ε (4.3.8.2).

On notera que contrairement aux apparences, cette preuve de l'équivalence de (i) et (ii), comme celle de 4.3.3, utilise d'une manière cruciale la proposition 3.3.10 (à travers la pleine fidélité de ε).

4.3.8.5. Soit $(f_i\colon X_i \to X)_{i\in I}$ une famille d'immersions ouvertes de $\mathbf{R}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $(f_i)_{i\in I}$ est un recouvrement admissible.

(i′) $(f_i)_{i\in I}$ est couvrante pour la topologie admissible.

(ii) $(\varepsilon(f_i))_{i\in I}$ est une famille épimorphique de $\widetilde{\mathbf{R}}$.

(iii) $(\varepsilon(f_i))_{i\in I}$ est une famille épimorphique effective universelle de $\widetilde{\mathbf{R}}$ ([1] II 2.5).

En effet, l'équivalence de (i) et (i′) résulte de ([1] II 1.4), celle de (i′) et (ii) résulte de ([1] II 4.4), et celle de (ii) et (iii) est une propriété générale des topos ([1] II 4.3).

Remarque 4.3.9. Soient A un anneau idyllique, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathfrak{a}$ un idéal ouvert de type fini de A, $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ un système fini de générateurs de $\mathfrak{a}$, $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ l'éclatement de $\mathfrak{a}^\Delta$ dans $\mathfrak{X}$. Supposons que φ soit de présentation finie (par exemple, si A est rig-pur (3.1.4)). Pour tout $0 \leq i \leq n$, notons $\mathfrak{X}'_i$ l'ouvert maximal de $\mathfrak{X}'$ où a_i engendre l'idéal inversible $\mathfrak{a}^\Delta\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$. Alors chacun des schémas formels $\mathfrak{X}'_i$ est affine globalement idyllique et on a $\mathfrak{X}' = \cup_{0\leq i\leq n}\mathfrak{X}'_i$ en vertu de 3.1.7. Par suite, $(\mathfrak{X}'^{\mathrm{rig}}_i \to \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}})_{0\leq i\leq n}$ est un recouvrement admissible. On retrouve ainsi les *recouvrements standards* de Tate.

4.3.10. Soient $\mathscr{S}$ un schéma formel idyllique quasi-compact, ayant un idéal de définition inversible $\mathscr{I}$, $\mathscr{D}$ la droite affine formelle au-dessus de $\mathscr{S}$ de paramètre T (2.3.11). On désigne par $\mathscr{D}_{\mathscr{I}}$ le disque formel de rayon $\mathscr{I}$ au-dessus de $\mathscr{S}$ et par $\mathscr{C}_{\mathscr{I}}$ la couronne formelle standard d'épaisseur $\mathscr{I}$ au-dessus de $\mathscr{S}$ (3.4.2). On sait (3.4.1) que $\mathscr{D}_{\mathscr{I}}$ et $\mathscr{C}_{\mathscr{I}}$ sont de présentation finie sur $\mathscr{D}$. Les morphismes $(\mathscr{D}^{\mathrm{rig}}_{\mathscr{I}} \to \mathscr{D}^{\mathrm{rig}}, \mathscr{C}^{\mathrm{rig}}_{\mathscr{I}} \to \mathscr{D}^{\mathrm{rig}})$ forment un recouvrement admissible.

Définition 4.3.11. Sous les hypothèses de (4.3.10), on appelle $\mathscr{D}^{\mathrm{rig}}_{\mathscr{I}}$ le *disque fermé de rayon* $\mathscr{I}$ au-dessus de $\mathscr{S}^{\mathrm{rig}}$, et $\mathscr{C}^{\mathrm{rig}}_{\mathscr{I}}$ la *couronne fermée standard d'épaisseur* $\mathscr{I}$ au-dessus de $\mathscr{S}^{\mathrm{rig}}$.

Remarque 4.3.12. Conservons les hypothèses de 4.3.10 et soit n un entier ≥ 1. On désigne par $\mathscr{D}_{\mathscr{I},n}$ le disque formel de rayon $\mathscr{I}^{1/n}$ au-dessus de $\mathscr{S}$ et par $\mathscr{C}_{\mathscr{I},n}$ la couronne formelle standard d'épaisseur $\mathscr{I}^{1/n}$ au-dessus de $\mathscr{S}$ (3.4.5). On sait que $\mathscr{D}_{\mathscr{I},n}$ et $\mathscr{C}_{\mathscr{I},n}$ sont de présentation finie sur $\mathscr{D}$. Les morphismes $(\mathscr{D}^{\mathrm{rig}}_{\mathscr{I},n} \to \mathscr{D}^{\mathrm{rig}}, \mathscr{C}^{\mathrm{rig}}_{\mathscr{I},n} \to \mathscr{D}^{\mathrm{rig}})$ forment un recouvrement admissible. On appelle $\mathscr{D}^{\mathrm{rig}}_{\mathscr{I},n}$ le *disque fermé de rayon* $\mathscr{I}^{1/n}$ au-dessus de $\mathscr{S}^{\mathrm{rig}}$, et $\mathscr{C}^{\mathrm{rig}}_{\mathscr{I},n}$ la *couronne fermée standard d'épaisseur* $\mathscr{I}^{1/n}$ au-dessus de $\mathscr{S}^{\mathrm{rig}}$.

Pour tout entier $m \geq 1$, les morphismes canoniques $\mathscr{D}_{\mathscr{I},n} \to \mathscr{D}_{\mathscr{I}^m,mn}$ et $\mathscr{C}_{\mathscr{I},n} \to \mathscr{C}_{\mathscr{I}^m,mn}$ (3.4.8.2) induisent des isomorphismes

$$\mathscr{D}^{\mathrm{rig}}_{\mathscr{I},n} \xrightarrow{\sim} \mathscr{D}^{\mathrm{rig}}_{\mathscr{I}^m,mn}, \tag{4.3.12.1}$$

$$\mathscr{C}^{\mathrm{rig}}_{\mathscr{I},n} \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}^{\mathrm{rig}}_{\mathscr{I}^m,mn}. \tag{4.3.12.2}$$

En effet, chacun de ces morphismes est une immersion ouverte (4.2.8) couvrante pour les points rigides (3.4.9). Ils sont donc des isomorphismes en vertu de 4.3.7.

Soient $\mathscr{I}'$ un idéal de définition inversible de $\mathscr{S}$ tel que $\mathscr{I}' \subset \mathscr{I}$, n' un entier $\geq n$. D'après 4.2.8, (3.4.8.3), (3.4.8.4) (3.4.8.5) et (3.4.8.6), on a des immersions ouvertes canoniques

$$\mathscr{D}^{\mathrm{rig}}_{\mathscr{I}',n} \to \mathscr{D}^{\mathrm{rig}}_{\mathscr{I},n} \to \mathscr{D}^{\mathrm{rig}}_{\mathscr{I},n'}, \tag{4.3.12.3}$$

$$\mathscr{C}^{\mathrm{rig}}_{\mathscr{I},n'} \to \mathscr{C}^{\mathrm{rig}}_{\mathscr{I},n} \to \mathscr{C}^{\mathrm{rig}}_{\mathscr{I}',n}. \tag{4.3.12.4}$$

4.3.13. Soit X un espace rigide cohérent. On munit $\mathbf{R}_{/X}$ de la topologie induite par la topologie admissible de $\mathbf{R}$ au moyen du foncteur “source” $j_X\colon \mathbf{R}_{/X} \to \mathbf{R}$ ([1] III 3.1), qui est aussi la topologie engendrée par la prétopologie pour laquelle les recouvrements sont les familles de morphismes qui sont des recouvrements admissibles dans $\mathbf{R}$ (1.1.4 et [1] III 3.3). Le topos des faisceaux de $\mathbb{V}$-ensembles sur $\mathbf{R}_{/X}$ est canoniquement équivalent à $\widetilde{\mathbf{R}}_{/X}$ (1.1.5 et 4.3.8.2).

On peut faire les remarques suivantes :

4.3.13.1. La topologie admissible sur $\mathbf{R}_{/X}$ est moins fine que la topologie canonique. Cela revient à dire que pour tous $Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{R}_{/X})$ et tout recouvrement admissible $(f_i\colon Z_i \to Z)_{i\in I}$, le diagramme canonique d'applications d'ensembles

$$\mathrm{Hom}_X(Z,Y) \to \prod_I \mathrm{Hom}_X(Z_i,Y) \rightrightarrows \prod_{I\times I} \mathrm{Hom}_X(Z_i \times_Z Z_j, Y)$$

est exacte. En effet, l'injectivité de la première application découle immédiatement de 4.3.8.2. Si $(u_i)_{\in I}$ est un élément du noyau de la double flèche, il existe, d'après 4.3.8.2, un morphisme $u\colon Z \to Y$ de $\mathbf{R}$ tel que $u_i = uf_i$ pour tout $i \in I$. En fait, u est un morphisme de $\mathbf{R}_{/X}$: si $h\colon Y \to X$ et $g\colon Z \to X$ sont les morphismes structuraux, on a $gf_i = hu_i = huf_i$ pour tout $i \in I$, et par suite $g = hu$ (4.3.8.2).

4.3.13.2. Le topos $\widetilde{\mathbf{R}}_{/X}$ est cohérent. En effet, $\mathbf{R}_{/X}$ est formée d'objets cohérents (4.3.8.1), et est stable par limites projectives finies ([1] I 2.3.1 et VI 2.4.5).

4.3.14. Soit $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de $\mathbf{S}^+$. Le foncteur $f^\flat\colon \mathbf{R}_{/\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}} \to \mathbf{R}_{/\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$ (4.1.22.1) transforme immersion ouverte en immersion ouverte et recouvrement admissible en recouvrement admissible (4.3.6). De plus il commute au limites projectives finies (4.1.22.4). C'est par suite un morphisme de sites ([1] IV 4.9). Il définit donc un morphisme de topos

$$\widetilde{f}\colon \widetilde{\mathbf{R}}_{/\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}} \to \widetilde{\mathbf{R}}_{/\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}}, \tag{4.3.14.1}$$

qui est cohérent d'après ([1] VI 3.3).

4.3.14.2. Si f est un morphisme de $\mathbf{S}$, $\widetilde{f}$ est le morphisme de localisation associé à f^{rig} (4.1.22.3 et [1] IV 5.5).

4.3.14.3. Soit $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ un second morphisme de $\mathbf{S}^{+}$. Il résulte de 4.1.22.5 qu'on a un isomorphisme canonique $\widetilde{g}_*\widetilde{f}_* \xrightarrow{\sim} (\widetilde{gf})_*$, qui induit par adjonction un isomorphisme $\widetilde{f}^*\widetilde{g}^* \xrightarrow{\sim} (\widetilde{gf})^*$. Ces isomorphismes vérifient des relations de cocycle du type (1.1.2.1).

4.3.15. On désigne par FAISCIN($\mathbf{R}$) la catégorie scindée des faisceaux d'ensembles sur le site admissible de $\mathbf{R}$ ([25] II 3.4.1), c'est à dire, la catégorie fibrée sur $\mathbf{R}$ obtenue en associant à tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{R})$ le topos $\widetilde{\mathbf{R}}_{/X}$, et à tout morphisme $f\colon X \to Y$ le foncteur $f^*\colon \widetilde{\mathbf{R}}_{/Y} \to \widetilde{\mathbf{R}}_{/X}$ image inverse par le morphisme de localisation associé à f ([1] IV 5.5). On peut interpréter f^* au choix, soit comme le foncteur obtenu par composition avec le foncteur $\mathbf{R}_{/f}\colon \mathbf{R}_{/X} \to \mathbf{R}_{/Y}$ ([1] IV 5.4), soit comme le foncteur de changement de base relativement à f dans $\widetilde{\mathbf{R}}$ ([1] IV 5.2). Comme le foncteur canonique $\varepsilon\colon \mathbf{R} \to \widetilde{\mathbf{R}}$ (4.3.8.3) est exact à gauche ([1] II 4.4.0), f^* prolonge le foncteur de changement de base relativement à f dans $\mathbf{R}$. On rappelle que FAISCIN($\mathbf{R}$) est un champs ([25] II 3.4.4).

Proposition 4.3.16. *Soient X un espace rigide cohérent, $(X_i \to X)_{i\in I}$ un recouvrement admissible, F un objet de $\widetilde{\mathbf{R}}_{/X}$. Supposons que, pour tout $i \in I$, $F \times_X X_i$ soit représentable par un objet (Y_i, f_i) de $\mathbf{R}_{/X_i}$ tel que f_i soit une immersion ouverte. Alors F est représentable par un objet (Y, f) de $\mathbf{R}_{/X}$ tel que f soit une immersion ouverte.*

On peut clairement supposer I fini. Il existe un modèle formel $\mathfrak{X}$ de X, un recouvrement ouvert $(\mathfrak{X}_i)_{i\in I}$ de $\mathfrak{X}$ et pour chaque $i \in I$, un ouvert $\mathfrak{Y}_i$ de $\mathfrak{X}_i$ tels que les conditions suivantes soient remplies :

(a) $\mathfrak{X}_i^{\mathrm{rig}}$ est X-isomorphe à X_i pour tout $i \in I$.

(b) $\mathfrak{Y}_i^{\mathrm{rig}}$ est X_i-isomorphe à Y_i pour tout $i \in I$.

L'existence de telles données résulte de 4.3.6 et 3.2.4. Pour tout $(i,j) \in I^2$, la projection canonique $X_i \times_X F \times_X X_j \to F \times_X X_j$ est un morphisme $Y_i \times_X X_j \to Y_j$ de $\mathbf{R}_{/X}$; on le représente par un triplet $(\mathfrak{Z}_{ij}, \varphi_{ij}\colon \mathfrak{Z}_{ij} \to \mathfrak{Y}_i \cap \mathfrak{X}_j, \rho_{ij}\colon \mathfrak{Z}_{ij} \to \mathfrak{Y}_j)$, où $\varphi_{ij} \in \mathbf{B}$ et ρ_{ij} est un $\mathfrak{X}$-morphisme. Quitte à appliquer 3.2.4 (aux ouverts $\mathfrak{Y}_i \cap \mathfrak{X}_j$ de $\mathfrak{X}$ et aux morphismes φ_{ij}), on peut supposer de plus la condition suivante remplie :

(c) $\mathfrak{Y}_i \cap \mathfrak{X}_j \subset \mathfrak{Y}_j$ pour tout $(i,j) \in I^2$.

Notons $\mathfrak{Y}$ le schéma formel induit par $\mathfrak{X}$ sur l'ouvert $\cup_{i\in I}\mathfrak{Y}_i$. La condition (c) montre que l'on a $\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{X}_i = \mathfrak{Y}_i$ et $\mathfrak{Y} \cap \mathfrak{X}_i \cap \mathfrak{X}_j = \mathfrak{Y}_i \cap \mathfrak{Y}_j$ pour tout $(i,j) \in I^2$. Par suite, pour tout $i \in I$, on a un X_i-isomorphisme $u_i\colon \mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}} \times_X X_i \xrightarrow{\sim} F \times_X X_i$ tels que $u_i \times_X X_j = u_j \times_X X_i$ pour tout $(i,j) \in I^2$. Compte tenu de 4.3.13.1 et 4.3.15, on en déduit que F est X-isomorphe à $\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}$; d'où la proposition.

Proposition 4.3.17. *Soient $f\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces rigides cohérents, $(X_i \to X)_{i\in I}$ un recouvrement admissible. Considérons, pour un morphisme d'espaces rigides cohérents, la propriété d'être*

(i) *une immersion ouverte ;*
(ii) *séparé ;*
(iii) *propre.*

Alors, si $\mathscr{P}$ désigne l'une des propriétés précédentes, pour que f vérifie la propriété $\mathscr{P}$, il faut et il suffit qu'il en soit de même de chacune des projections canoniques $f_i\colon X_i \times_X Y \to X_i$ $(i \in I)$.

On peut clairement supposer I fini. La nécessité de la condition résulte de (4.2.5, 4.2.12 et 4.2.18). Sa suffisance résulte dans le cas (i) de 4.3.13.1 et 4.3.16, et dans les cas (ii) et (iii) de 4.3.6, 4.2.11, 4.2.17 et des assertions analogues pour les schémas formels.

Remarque 4.3.18. La proposition 4.3.17 sera étendue à d'autres propriétés de morphismes d'espaces rigides cohérents (4.8.42).

4.4 Site et topos admissibles d'un espace rigide cohérent

4.4.1. Soit X un espace rigide cohérent. On désigne par $\mathbf{Ad}_{/X}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{R}_{/X}$ formée des immersions ouvertes. On appelle *topologie admissible* de X la topologie sur $\mathbf{Ad}_{/X}$ induite par la topologie admissible de $\mathbf{R}$ au moyen du foncteur "source" $\mathbf{Ad}_{/X} \to \mathbf{R}$ ([1] III 3.1), qui est aussi la topologie engendrée par la prétopologie pour laquelle les recouvrements sont les familles de morphismes de $\mathbf{Ad}_{/X}$ qui sont des recouvrements admissibles dans $\mathbf{R}$ (1.1.4 et [1] III 3.3). En vertu de 4.2.8, tout morphisme de $\mathbf{Ad}_{/X}$ est une immersion ouverte. Donc une famille de morphismes de même but de $\mathbf{Ad}_{/X}$ est couvrante si et seulement si elle admet une sous-famille finie qui soit couvrante pour les points rigides ([1] II 1.4). Il résulte de 4.1.11 et 4.2.2 que la catégorie $\mathbf{Ad}_{/X}$ est $\mathbb{U}$-petite (*i.e.*, qu'elle est équivalente à une catégorie appartenant à $\mathbb{U}$). On appelle *topos admissible* de X et on note X_{ad} le topos des faisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur $\mathbf{Ad}_{/X}$.

On peut faire les remarques suivantes :

4.4.1.1. Il résulte de 4.3.13.1 que la topologie admissible sur $\mathbf{Ad}_{/X}$ est moins fine que la topologie canonique. Par suite, le foncteur canonique $\varepsilon_X\colon \mathbf{Ad}_{/X} \to X_{\mathrm{ad}}$ est pleinement fidèle.

4.4.1.2. Soit $(f_i\colon X_i \to X)_{i\in I}$ une famille d'immersions ouvertes. Les conditions suivantes sont équivalentes ([1] II 4.3 et 4.4) :

(i) $(f_i)_{i\in I}$ est un recouvrement admissible.
(ii) $(\varepsilon_X(f_i))_{i\in I}$ est une famille épimorphique de X_{ad}.
(iii) $(\varepsilon_X(f_i))_{i\in I}$ est une famille épimorphique effective universelle de X_{ad} ([1] II 2.5).

4.4.2. Tout morphisme $f\colon X \to Y$ de $\mathbf{R}$ induit par changement de base un morphisme de sites $f^\bullet\colon \mathbf{Ad}_{/Y} \to \mathbf{Ad}_{/X}$, et par suite un morphisme de topos, que l'on note encore $f\colon X_{\mathrm{ad}} \to Y_{\mathrm{ad}}$. Pour tout couple de morphismes composables $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to Z$ de $\mathbf{R}$, on a un isomorphisme canonique

$$c'_{g,f}\colon g_*f_* \xrightarrow{\sim} (gf)_* \tag{4.4.2.1}$$

vérifiant une relation de cocycle du type (1.1.2.1). Il définit par adjonction un isomorphisme

$$c_{f,g}\colon f^*g^* \xrightarrow{\sim} (gf)^*, \tag{4.4.2.2}$$

qui vérifie une relation de cocycle analogue. On obtient ainsi un pseudo-foncteur (1.1.2) de $\mathbf{R}^\circ$ dans $\mathbf{Cat}$ associant à tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{R})$ le topos X_{ad}, et à tout morphisme $f\colon X \to Y$ de $\mathbf{R}$ le foncteur image inverse $f^*\colon Y_{\mathrm{ad}} \to X_{\mathrm{ad}}$ par le morphisme de topos associé à f. De façon équivalente, on obtient un $\mathbb{U}$-topos fibré ([1] VI 7.1.1) que l'on note

$$\mathrm{Fais}(\mathbf{R}, \mathrm{ad}) \to \mathbf{R}. \tag{4.4.2.3}$$

On obtient aussi un pseudo-foncteur de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{Cat}$ associant à tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{R})$ le topos X_{ad}, et à tout morphisme $f\colon X \to Y$ de $\mathbf{R}$ le foncteur image *directe* $f_*\colon Y_{\mathrm{ad}} \to X_{\mathrm{ad}}$ par le morphisme de topos associé à f. De façon équivalente, on obtient une catégorie fibrée que l'on note

$$\mathrm{Fais}'(\mathbf{R}, \mathrm{ad}) \to \mathbf{R}^\circ. \tag{4.4.2.4}$$

4.4.3. Soient $f\colon U \to X$ une immersion ouverte de $\mathbf{R}$, $\tau_f\colon \mathbf{Ad}_{/U} \to \mathbf{Ad}_{/X}$ le foncteur défini par composition à gauche avec f. Il résulte de 4.2.8 que τ_f induit une équivalence de catégories $\mathbf{Ad}_{/U} \xrightarrow{\sim} (\mathbf{Ad}_{/X})_{/(U,f)}$. La topologie admissible sur U est induite par celle sur X au moyen du foncteur τ_f (1.1.4 et [1] III 3.3). Donc en vertu de 1.1.5, on a une suite de trois foncteurs adjoints :

$$\tau_{f!}\colon U_{\mathrm{ad}} \to X_{\mathrm{ad}}, \quad \tau_f^*\colon X_{\mathrm{ad}} \to U_{\mathrm{ad}}, \quad \tau_{f*}\colon U_{\mathrm{ad}} \to X_{\mathrm{ad}}. \tag{4.4.3.1}$$

Le foncteur τ_f^* est adjoint à gauche du foncteur $f_*\colon U_{\mathrm{ad}} \to X_{\mathrm{ad}}$ image directe par le morphisme de topos associé à f (4.4.2). Donc le morphisme de topos $f\colon U_{\mathrm{ad}} \to X_{\mathrm{ad}}$ s'identifie canoniquement au morphisme de localisation associé à f (1.1.5).

Proposition 4.4.4. *Si P est un point rigide, P_{ad} est un topos ponctuel, i.e., le foncteur $F \mapsto \Gamma(P_{\mathrm{ad}}, F)$ de P_{ad} dans* **Ens** *est une équivalence de topos. Si $f\colon Q \to P$ est un morphisme de points rigides, $f\colon Q_{\mathrm{ad}} \to P_{\mathrm{ad}}$ est une équivalence de topos.*

En effet, $\mathbf{Ad}_{/P}$ est équivalent au site d'un espace topologique ponctuel en vertu de 4.2.9, d'où la première assertion. La seconde assertion s'en déduit compte tenu de ([1] IV 4.3).

4.4.5. Soit X un espace rigide cohérent. Il résulte de 4.4.4 qu'on a un foncteur

$$\mathbf{P}_{/X} \to \mathbf{Pt}(X_{\mathrm{ad}}) \tag{4.4.5.1}$$

de la catégorie des points rigides de X (4.3.1) dans celle des points de X_{ad} (1.1.8). On dit qu'un point de X_{ad} est *rigide* s'il est dans l'image essentielle du foncteur (4.4.5.1).

Proposition 4.4.6. *Pour tout espace rigide cohérent X, le topos X_{ad} est cohérent ; en particulier, il a suffisamment de points.*

La première proposition résulte de ([1] VI 2.4.5) et du fait que $\mathbf{Ad}_{/X}$ est formée d'objets cohérents (4.3.8.1) et qu'elle est stable par limites projectives finies. La seconde proposition est une conséquence de la première et de ([1] VI § 9).

4.4.7. Soit $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de $\mathbf{S}^+$. On montre, comme dans 4.3.14, que le foncteur $f^\flat\colon \mathbf{R}_{/\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}} \to \mathbf{R}_{/\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$ (4.1.22.1) induit un morphisme de sites $\mathbf{Ad}_{/\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}} \to \mathbf{Ad}_{/\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$, qui définit un morphisme cohérent de topos

$$\underline{f}\colon \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}} \to \mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}. \tag{4.4.7.1}$$

Si f est un morphisme de $\mathbf{S}$, $\underline{f}$ est le morphisme de topos induit par f^{rig}.

Soit $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ un second morphisme de $\mathbf{S}^+$. On a un isomorphisme canonique

$$c'_{\underline{g},\underline{f}}\colon \underline{g}_*\underline{f}_* \xrightarrow{\sim} (\underline{gf})_*, \tag{4.4.7.2}$$

qui induit par adjonction un isomorphisme

$$c_{\underline{f},\underline{g}}\colon \underline{f}^*\underline{g}^* \xrightarrow{\sim} (\underline{gf})^*. \tag{4.4.7.3}$$

Ces isomorphismes vérifient des relations de cocycle du type (1.1.2.1). On obtient ainsi un pseudo-foncteur (1.1.2) de $(\mathbf{S}^+)^\circ$ dans $\mathbf{Cat}$ associant à tout $\mathfrak{X} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{S}^+)$ le topos $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$, et à tout morphisme $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ de $\mathbf{S}^+$ le foncteur image inverse $\underline{f}^*\colon \mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}} \to \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ par le morphisme de topos $\underline{f}$. De façon équivalente, on obtient un $\mathbb{U}$-topos fibré que l'on note

$$\mathrm{Fais}(\mathbf{S}^+, \mathrm{ad}) \to \mathbf{S}^+. \tag{4.4.7.4}$$

On obtient aussi un pseudo-foncteur de $\mathbf{S}^+$ dans $\mathbf{Cat}$ associant à tout $\mathfrak{X} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{S}^+)$ le topos $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$, et à tout morphisme $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ de $\mathbf{S}^+$ le foncteur image *directe* $\underline{f}_*\colon \mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}} \to \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ par le morphisme de topos $\underline{f}$. De façon équivalente, on obtient une catégorie fibrée que l'on note

$$\mathrm{Fais}'(\mathbf{S}^+, \mathrm{ad}) \to (\mathbf{S}^+)^\circ. \tag{4.4.7.5}$$

4.4.7.6. On note $\mathrm{Fais}(\mathbf{S}, \mathrm{ad})$ et $\mathrm{Fais}'(\mathbf{S}, \mathrm{ad})$ les catégories fibrées déduites respectivement de $\mathrm{Fais}(\mathbf{S}^+, \mathrm{ad})$ et $\mathrm{Fais}'(\mathbf{S}^+, \mathrm{ad})$ par changement de base par le foncteur canonique $\mathbf{S} \to \mathbf{S}^+$. On peut identifier canoniquement $\mathrm{Fais}(\mathbf{S}, \mathrm{ad})$ au changement de base du topos fibré $\mathrm{Fais}(\mathbf{R}, \mathrm{ad})$ (4.4.2.3) par le foncteur de localisation $\mathrm{Q}\colon \mathbf{S} \to \mathbf{R}$ (4.1.6). De même, on peut identifier canoniquement $\mathrm{Fais}'(\mathbf{S}, \mathrm{ad})$ au changement de base de la catégorie fibrée $\mathrm{Fais}'(\mathbf{R}, \mathrm{ad})$ (4.4.2.4) par le foncteur Q°.

4.5 Le topos admissible comme limite projective d'un topos fibré

4.5.1. Dans cette section, $\mathfrak{X}$ désigne un objet de $\mathbf{S}$. On note $\mathbf{Zar}_{/\mathfrak{X}}$ le site de Zariski de $\mathfrak{X}$; c'est un $\mathbb{U}$-site de catégorie sous-jacente une sous-catégorie pleine de $\mathbf{S}_{/\mathfrak{X}}$ (2.9.4). On désigne par $\mathfrak{X}_{\mathrm{zar}}$ le topos des faisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur $\mathbf{Zar}_{/\mathfrak{X}}$; c'est un topos cohérent puisque l'espace sous-jacent à $\mathfrak{X}$ est noethérien (2.6.6). Tout morphisme $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ de $\mathbf{S}^+$ définit un morphisme cohérent de topos que l'on note encore $f\colon \mathfrak{X}_{\mathrm{zar}} \to \mathfrak{Y}_{\mathrm{zar}}$ ([1] VI 3.3).

Pour tout couple de morphismes composables (f,g) de $\mathbf{S}^+$, on a un isomorphisme canonique

$$z'_{g,f}\colon g_*f_* \xrightarrow{\sim} (gf)_*, \tag{4.5.1.1}$$

qui induit par adjonction un isomorphisme

$$z_{f,g}\colon f^*g^* \xrightarrow{\sim} (gf)^*. \tag{4.5.1.2}$$

Ces isomorphismes vérifient des relations de cocycle du type (1.1.2.1). On obtient ainsi un pseudo-foncteur (1.1.2) de $(\mathbf{S}^+)^\circ$ dans $\mathbf{Cat}$ associant à tout $\mathfrak{X} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{S}^+)$ le topos $\mathfrak{X}_{\mathrm{zar}}$, et à tout morphisme $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ de $\mathbf{S}^+$ le foncteur image inverse $f^*\colon \mathfrak{Y}_{\mathrm{zar}} \to \mathfrak{X}_{\mathrm{zar}}$ par le morphisme de topos associé à f. De façon équivalente, on obtient un $\mathbb{U}$-topos fibré clivé et normalisé que l'on note

$$\mathrm{Fais}(\mathbf{S}^+, \mathrm{zar}) \to \mathbf{S}^+. \tag{4.5.1.3}$$

On obtient aussi un pseudo-foncteur de $\mathbf{S}^+$ dans $\mathbf{Cat}$ associant à tout $\mathfrak{X} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{S}^+)$ le topos $\mathfrak{X}_{\mathrm{zar}}$, et à tout morphisme $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ de $\mathbf{S}^+$ le foncteur image *directe* $f_*\colon \mathfrak{Y}_{\mathrm{zar}} \to \mathfrak{X}_{\mathrm{zar}}$ par le morphisme de topos associé à f. De façon équivalente, on obtient une catégorie fibrée que l'on note

$$\mathrm{Fais}'(\mathbf{S}^+, \mathrm{zar}) \to (\mathbf{S}^+)^\circ. \tag{4.5.1.4}$$

4.5.2. Le foncteur $\mathrm{Q}_{/\mathfrak{X}}\colon \mathbf{S}_{/\mathfrak{X}} \to \mathbf{R}_{/\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$ (4.1.21.1) induit un foncteur de $\mathbf{Zar}_{/\mathfrak{X}}$ dans $\mathbf{Ad}_{/\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$ que l'on note encore

$$\mathrm{Q}_{/\mathfrak{X}}\colon \mathbf{Zar}_{/\mathfrak{X}} \to \mathbf{Ad}_{/\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}.$$

Celui-ci transforme familles couvrantes en familles couvrantes (4.3.5) et commute aux limites projectives finies (4.1.13 et [1] I 2.4.2). Il définit donc un morphisme de sites, et par suite un morphisme de topos

$$\rho_{\mathfrak{X}}\colon \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}} \to \mathfrak{X}_{\mathrm{zar}}, \tag{4.5.2.1}$$

caractérisé par $\rho_{\mathfrak{X}*}(F) = F \circ \mathrm{Q}_{/\mathfrak{X}}$ et $\rho^*_{\mathfrak{X}}$ prolonge $\mathrm{Q}_{/\mathfrak{X}}$.

Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de $\mathbf{S}^+$, $\underline{f}\colon \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}} \to \mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ le morphisme de topos associé (4.4.7.1). Il résulte de 4.1.22.2 que le diagramme de morphismes de topos

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}} \arrow[r, "\rho_{\mathfrak{X}}"] \arrow[d, "\underline{f}"'] & \mathfrak{X}_{\mathrm{zar}} \arrow[d, "f"] \\ \mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}} \arrow[r, "\rho_{\mathfrak{Y}}"] & \mathfrak{Y}_{\mathrm{zar}} \end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme canonique près ; autrement dit, on a des isomorphismes canoniques adjoints

$$\rho_{\mathfrak{Y}*}\underline{f}_* \ \xrightarrow{\sim}\ f_*\rho_{\mathfrak{X}*}, \tag{4.5.2.2}$$

$$\rho^*_{\mathfrak{X}}f^* \ \xrightarrow{\sim}\ \underline{f}^*\rho^*_{\mathfrak{Y}}, \tag{4.5.2.3}$$

qui vérifient des relations de cocycle du type (1.1.2.2). On obtient ainsi (1.1.2) un morphisme cartésien de topos fibrés sur $\mathbf{S}^+$

$$\rho\colon \mathrm{Fais}(\mathbf{S}^+, \mathrm{ad}) \to \mathrm{Fais}(\mathbf{S}^+, \mathrm{zar}). \tag{4.5.2.4}$$

4.5.3. On note $\mathfrak{S}_{\mathfrak{X}}$ la catégorie suivante. Les objets de $\mathfrak{S}_{\mathfrak{X}}$ sont les triplets $(\mathfrak{X}', U, \varphi)$ où $(\mathfrak{X}', \varphi)$ est un objet de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ et U est un ouvert de $\mathfrak{X}'$. Soient $(\mathfrak{X}'', V, \psi)$, $(\mathfrak{X}', U, \varphi)$ deux objets de $\mathfrak{S}_{\mathfrak{X}}$. Un morphisme de $(\mathfrak{X}'', V, \psi)$ vers $(\mathfrak{X}', U, \varphi)$ est la donnée d'un $\mathfrak{X}$-morphisme $f\colon \mathfrak{X}'' \to \mathfrak{X}'$ tel que $f(V) \subset U$. Le foncteur

$$\mathfrak{S}_{\mathfrak{X}} \ \to\ \mathbf{B}_{\mathfrak{X}}, \quad (\mathfrak{X}', U, \varphi) \mapsto (\mathfrak{X}', \varphi) \tag{4.5.3.1}$$

est fibrant. En effet, pour qu'un morphisme $f\colon (\mathfrak{X}'', V, \psi) \to (\mathfrak{X}', U, \varphi)$ de $\mathfrak{S}_{\mathfrak{X}}$ soit cartésien, il faut et il suffit que $f^{-1}(U) = V$. En fait, $\mathfrak{S}_{\mathfrak{X}}$ est un $\mathbb{U}$-site fibré sur $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ ([1] VI 7.2.1), dont la fibre au-dessus d'un objet $(\mathfrak{X}', \varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ est canoniquement équivalente au site $\mathbf{Zar}_{/\mathfrak{X}'}$.

On note $S_{\mathfrak{X}}$ l'ensemble des morphismes cartésiens de $\mathfrak{S}_{\mathfrak{X}}$. Pour tout $\mathscr{C} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Cat})$ (4.1.2), on a un isomorphisme canonique ([1] VI 6.2)

$$\mathrm{Hom}_{S^{-1}_{\mathfrak{X}}}(\mathfrak{S}_{\mathfrak{X}}, \mathscr{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{cart}/\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}}(\mathfrak{S}_{\mathfrak{X}}, \mathscr{C} \times \mathbf{B}_{\mathfrak{X}}),$$

où la source désigne l'ensemble des foncteurs de $\mathfrak{S}_{\mathfrak{X}}$ dans $\mathscr{C}$ qui transforment les morphismes de $S_{\mathfrak{X}}$ en isomorphismes.

4.5.4. On désigne par

$$\mathfrak{S}_{\mathfrak{X}} \ \to\ \mathbf{Ad}_{/\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}} \times \mathbf{B}_{\mathfrak{X}} \tag{4.5.4.1}$$

le foncteur qui envoie $(\mathfrak{X}', U, \varphi)$ sur le couple $((\mathscr{U}^{\mathrm{rig}}, (\varphi \circ i)^{\mathrm{rig}}), (\mathfrak{X}', \varphi))$, où $\mathscr{U}$ désigne le schéma formel induit par $\mathfrak{X}$ sur U et i l'injection canonique de $\mathscr{U}$ dans

$\mathfrak{X}'$. On notera que i est quasi-compact (2.9.4). Le foncteur induit par (4.5.4.1) sur les fibres en $(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$ s'identifie au foncteur composé

$$\mathbf{Zar}_{/\mathfrak{X}'} \xrightarrow{\mathrm{Q}_{/\mathfrak{X}'}} \mathbf{Ad}_{/\mathfrak{X}'^{\mathrm{rig}}} \xrightarrow{\tau_{\varphi^{\mathrm{rig}}}} \mathbf{Ad}_{/\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}\ , \tag{4.5.4.2}$$

où $\tau_{\varphi^{\mathrm{rig}}}$ est le foncteur défini par composition à gauche avec l'isomorphisme φ^{rig}. Il résulte alors de 4.5.2 que (4.5.4.1) est un morphisme de sites fibrés. On note

$$\mathfrak{S}_{\mathfrak{X}} \quad \to \quad \mathbf{Ad}_{/\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}} \tag{4.5.4.3}$$

le foncteur composé de (4.5.4.1) et de la projection canonique.

Proposition 4.5.5.

(i) *Le foncteur* (4.5.4.1) *est cartésien, i.e., le foncteur* (4.5.4.3) *transforme les flèches de $S_{\mathfrak{X}}$ en isomorphismes.*

(ii) *Le foncteur* (4.5.4.3) *est essentiellement surjectif.*

(iii) *Soient $A = (\mathfrak{Y}, V, \varphi)$, $B = (\mathfrak{Z}, W, \psi)$ deux objets de $\mathfrak{S}_{\mathfrak{X}}$, $\mathscr{V}$ le schéma formel induit par $\mathfrak{Y}$ sur V, $\mathscr{W}$ le schéma formel induit par $\mathfrak{Z}$ sur W, $S_{\mathfrak{X}}(A)$ la catégorie cofiltrante des flèches de $S_{\mathfrak{X}}$ de but A. Alors l'application*

$$\varinjlim_{C \in S_{\mathfrak{X}}(A)^{\circ}} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_{\mathfrak{X}}}(C, B) \quad \to \quad \mathrm{Hom}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}(\mathscr{V}^{\mathrm{rig}}, \mathscr{W}^{\mathrm{rig}}), \tag{4.5.5.1}$$

déduite de (4.5.4.3) *grâce à* (i), *est bijective.*

La proposition (i) résulte de 4.1.13 et la proposition (ii) de 4.2.2. Montrons la proposition (iii). Notons d'abord que la source (resp. le but) de l'application (4.5.5.1) est soit vide soit un singleton car la catégorie $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ est cofiltrante (resp. en vertu de 4.2.7). Il suffit donc de montrer que l'application (4.5.5.1) est surjective. Notons $i\colon \mathscr{V} \to \mathfrak{Y}$ and $j\colon \mathscr{W} \to \mathfrak{Z}$ les injections canoniques. Il résulte aussitôt de 4.1.5 que la catégorie $S_{\mathfrak{X}}(A)$ est cofiltrante (voir aussi [1] VI 6.5). D'après 3.1.17(i), il existe un diagramme commutatif de $\mathbf{S}$

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{Y}' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & \mathfrak{Z} \arrow[d, "\psi"] \\ \mathfrak{Y} \arrow[r, "\varphi"'] & \mathfrak{X} \end{tikzcd}$$

tel que $\mathfrak{Y}'$ soit rig-pur et $\alpha \in \mathbf{B}$. Remplaçant $\mathfrak{Y}$ par $\mathfrak{Y}'$, on peut supposer que $\mathfrak{Y}$ est rig-pur et qu'il existe un morphisme $\alpha : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ de $\mathbf{B}$ tel que $\varphi = \psi \circ \alpha$. Soit $g\colon \mathscr{V}^{\mathrm{rig}} \to \mathscr{W}^{\mathrm{rig}}$ un $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$-morphisme. On peut représenter g par un triplet $(\mathscr{V}', u\colon \mathscr{V}' \to \mathscr{V}, v\colon \mathscr{V}' \to \mathscr{W})$ tel que $u \in \mathbf{B}$ et $jv = \alpha i u$ (4.1.7). En vertu de

3.2.4(ii), il existe un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathscr{V}' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathfrak{Y}' \arrow[d, "w"] \\ \mathscr{V} \arrow[r, "i"'] & \mathfrak{Y} \end{tikzcd} \tag{4.5.5.2}$$

tel que w appartienne à $\mathbf{B}$. Posons $V' = w^{-1}(V)$, $A' = (\mathfrak{Y}', V', \varphi w)$ et $f = \alpha w$. Comme $f(V') \subset W$, f définit un morphisme $A' \to B$ de $\mathfrak{S}_{\mathfrak{X}}$, qui s'envoie sur le morphisme g par (4.5.5.1) ; d'où la surjectivité de ce dernier.

Corollaire 4.5.6. *Le couple formé de* $\mathbf{Ad}_{/\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$ *et du foncteur* (4.5.4.3) *représente le foncteur* $\mathrm{Hom}_{S_{\mathfrak{X}}^{-1}}(\mathfrak{S}_{\mathfrak{X}}, -)$ *sur la catégorie* $\mathbf{Cat}$ *; autrement dit,* $\mathbf{Ad}_{/\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$ *est la catégorie limite inductive de* $\mathfrak{S}_{\mathfrak{X}}$ *au-dessus de* $\mathbf{B}^{\circ}_{\mathfrak{X}}$ ([1] VI 6.3).

Cela résulte de 4.5.5 et de ([1] VI 6.4 et 6.5).

4.5.7. Pour tout objet $(\mathfrak{X}', \varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$, notons $\alpha_{\varphi!} \colon \mathbf{Zar}_{/\mathfrak{X}'} \to \mathfrak{S}_{\mathfrak{X}}$ le foncteur d'inclusion. On rappelle ([1] VI 7.4.1) que la *topologie totale* sur $\mathfrak{S}_{\mathfrak{X}}$ est la topologie la moins fine sur $\mathfrak{S}_{\mathfrak{X}}$ qui rend continus les foncteurs $\alpha_{\varphi!}$ pour tout $(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$. On appelle *topos total* et on note $\mathfrak{T}_{\mathfrak{X}}$ le topos des faisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur le site total $\mathfrak{S}_{\mathfrak{X}}$.

Proposition 4.5.8.

(i) *Le foncteur* (4.5.4.3) *est un morphisme de sites de* $\mathbf{Ad}_{/\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$ *muni de la topologie admissible dans* $\mathfrak{S}_{\mathfrak{X}}$ *muni de la topologie totale.*

(ii) *La topologie admissible sur* $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ *est la topologie la moins fine sur* $\mathbf{Ad}_{/\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$ *qui rend continu le foncteur* (4.5.4.3).

(i) Cela résulte de ([1] VI 8.2.2). En effet, la catégorie $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ est $\mathbb{U}$-petite (4.1.11), et pour tout $(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$, le foncteur composé (4.5.4.2) est un morphisme de sites (4.5.2).

(ii) La topologie admissible sur $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ est la topologie la moins fine sur $\mathbf{Ad}_{/\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$ qui rend continus les foncteurs composés (4.5.4.2) pour tout $(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$, en vertu de 4.3.6 et ([1] III 1.6). La proposition résulte donc de ([1] VI 7.4.4).

4.5.9. On désigne par

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}} \to \mathbf{B}_{\mathfrak{X}} \tag{4.5.9.1}$$

le $\mathbb{U}$-topos fibré associé au $\mathbb{U}$-site fibré $\mathfrak{S}_{\mathfrak{X}}$ (4.5.3.1) ([1] VI 7.2.6). Il est canoniquement équivalent au topos fibré obtenu par le changement de base de $\mathrm{Fais}(\mathbf{S}^+, \mathrm{zar})$ (4.5.1.3) au moyen du foncteur "source" $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}} \to \mathbf{S}^+$. On désigne par

$$\mathfrak{F}'_{\mathfrak{X}} \to \mathbf{B}^{\circ}_{\mathfrak{X}} \tag{4.5.9.2}$$

la catégorie fibrée clivée normalisée obtenue par le changement de base de $\mathrm{Fais}'(\mathbf{S}^+, \mathrm{zar})$ (4.5.1.4) au moyen du foncteur "source" $\mathbf{B}^{\circ}_{\mathfrak{X}} \to (\mathbf{S}^+)^{\circ}$.

4.5.10. Le morphisme cartésien de sites fibrés (4.5.4.1) induit un morphisme cartésien de topos fibrés

$$\mu\colon \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}} \times \mathbf{B}_{\mathfrak{X}} \quad\to\quad \mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}. \tag{4.5.10.1}$$

Pour tout objet $(\mathfrak{X}',\varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$, on désigne par

$$\mu_\varphi\colon \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}} \to \mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}} \tag{4.5.10.2}$$

le morphisme de topos induit par μ sur les fibres en $(\mathfrak{X}',\varphi)$. Compte tenu de (4.5.4.2), μ_φ est le composé

$$\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}} \xrightarrow{(\tau_{\varphi^{\mathrm{rig}}!},\tau^*_{\varphi^{\mathrm{rig}}})} \mathfrak{X}'^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}} \xrightarrow{\rho_{\mathfrak{X}'}} \mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}}\ ,$$

où $\rho_{\mathfrak{X}'}$ est défini dans (4.5.2.1) et le couple de foncteurs adjoints $(\tau_{\varphi^{\mathrm{rig}}!},\tau^*_{\varphi^{\mathrm{rig}}})$ est défini dans (4.4.3.1). On notera que, φ^{rig} étant un isomorphisme, $(\tau_{\varphi^{\mathrm{rig}}!},\tau^*_{\varphi^{\mathrm{rig}}})$ est une équivalence de topos, que l'on peut canoniquement identifier au morphisme de topos induit par l'isomorphisme $(\varphi^{\mathrm{rig}})^{-1}$.

D'après 1.1.2, pour tout morphisme $f\colon(\mathfrak{X}'',\psi)\to(\mathfrak{X}',\varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$, μ détermine des isomorphismes adjoints

$$\mu_{\varphi *} \quad\stackrel{\sim}{\to}\quad f_*\mu_{\psi *}, \tag{4.5.10.3}$$

$$\mu^*_\psi f^* \quad\stackrel{\sim}{\to}\quad \mu^*_\varphi, \tag{4.5.10.4}$$

vérifiant des relations de cocycle du type (1.1.2.2).

Remarque 4.5.11. Le topos fibré obtenu par le changement de base de $\mathrm{Fais}(\mathbf{S}^+,\mathrm{ad})$ (4.4.7.4) au moyen du foncteur “source” $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}\to\mathbf{S}^+$ est canoniquement isomorphe au produit $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}\times\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$. Le morphisme μ (4.5.10.1) s'identifie alors au changement de base du morphisme ρ (4.5.2.4). En particulier, les isomorphismes (4.5.10.3) et (4.5.10.4) se déduisent respectivement des isomorphismes (4.5.2.2) et (4.5.2.3).

Théorème 4.5.12. *Le couple formé du topos $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ et du morphisme μ* (4.5.10.1) *est une limite projective du topos fibré $\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}$* (4.5.9.1).

Cela résulte de 4.5.6, 4.5.8(ii) et ([1] VI 8.2.3). On notera que la catégorie $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ est cofiltrante (4.1.5) et $\mathbb{U}$-petite (4.1.11).

Le théorème 4.5.12 revient à dire ([1] VI 8.1.1) que pour tout $\mathbb{U}$-topos $\mathscr{E}$, le foncteur

$$\mathbf{Homtop}(\mathscr{E},\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}) \quad\to\quad \mathbf{Homtop}_{\mathrm{cart}/\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{E}\times\mathbf{B}_{\mathfrak{X}},\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}) \tag{4.5.12.1}$$

obtenu en composant le foncteur de changement de base au-dessus de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ et le foncteur de composition avec le morphisme $\mu\colon \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}\times\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}\to\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}$ (4.5.10.1), est une équivalence de catégories. D'après ([1] VI 7.1.7), on a des foncteurs pleinement fidèles

$$\mathbf{Homtop}_{\mathrm{cart}/\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{E} \times \mathbf{B}_{\mathfrak{X}}, \mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}) \to \mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}/\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}}(\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}, \mathscr{E} \times \mathbf{B}_{\mathfrak{X}})^{\circ} \tag{4.5.12.2}$$

$$\mathbf{Homtop}_{\mathrm{cart}/\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{E} \times \mathbf{B}_{\mathfrak{X}}, \mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}) \to \mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}/\mathbf{B}^{\circ}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{E} \times \mathbf{B}^{\circ}_{\mathfrak{X}}, \mathfrak{F}'_{\mathfrak{X}}) \tag{4.5.12.3}$$

définis respectivement par les foncteurs image inverse et image directe (au sens des topos fibrés), dont les images essentielles sont, d'une part, l'ensemble des foncteurs cartésiens $\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}} \to \mathscr{E} \times \mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ qui, fibre par fibre, sont exacts et commutent aux limites inductives et, d'autre part, l'ensemble des foncteurs cartésiens $\mathscr{E} \times \mathbf{B}^{\circ}_{\mathfrak{X}} \to \mathfrak{F}'_{\mathfrak{X}}$ qui, fibre par fibre, possèdent un foncteur adjoint à gauche exact.

Définition 4.5.13. On appelle *voûte étoilée* (ou espace de Zariski-Riemann) de $\mathfrak{X}$ et on note $\mathscr{V}_{\star}(\mathfrak{X})$ la limite projective d'espaces topologiques

$$\lim_{\substack{\longleftarrow \\ (\mathfrak{X}',\varphi)\in\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}}} |\mathfrak{X}'|, \tag{4.5.13.1}$$

où $|\mathfrak{X}'|$ désigne l'espace topologique sous-jacent au schéma formel $\mathfrak{X}'$.

Remarque 4.5.14. Soient x, y deux éléments de $\mathscr{V}_{\star}(\mathfrak{X})$, et pour tout $(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$, soient x_{φ}, y_{φ} leurs images canoniques dans $|\mathfrak{X}'|$. Pour que y soit une spécialisation de x, il faut et il suffit que pour tout $(\mathfrak{X}, \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$, y_{φ} soit une spécialisation de x_{φ}. En effet, on a ([13] chap. I §4.4 cor. de la prop. 9)

$$\overline{\{x\}} = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ (\mathfrak{X}',\varphi)\in\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}}} \overline{\{x_{\varphi}\}}.$$

Donc si y_{φ} est une spécialisation de x_{φ} pour tout $(\mathfrak{X}, \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$, y est une spécialisation de x. L'implication inverse est évidente.

Proposition 4.5.15. *Il y a une équivalence canonique entre la catégorie des points de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ et la catégorie associée à l'ensemble $\mathscr{V}_{\star}(\mathfrak{X})$ ordonné par la relation de spécialisation, i.e., la catégorie dont l'ensemble des objets est $\mathscr{V}_{\star}(\mathfrak{X})$; et si $x, y \in \mathscr{V}_{\star}(\mathfrak{X})$, alors l'ensemble* $\mathrm{Hom}(y, x)$ *est vide ou réduit à un point, ce dernier cas se présentant si et seulement si y est une spécialisation de x.*

L'équivalence en question fait correspondre à un point p de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ le système projectif des $p_{\varphi} = \mu_{\varphi} p$ pour $(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$; compte tenu de 4.5.14 et ([1] VI 7.1.6), on obtient ainsi un foncteur à valeurs dans la catégorie associée à l'ensemble $\mathscr{V}_{\star}(\mathfrak{X})$ ordonné par la relation de spécialisation. Celui-ci est une équivalence de catégories car en vertu de 4.5.12, un point p de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ est connu lorsqu'on connaît le système de ses images $p_{\varphi} = \mu_{\varphi} p$ pour $(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$, et inversement, la donnée pour tout objet $(\mathfrak{X}', \varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ d'un point p_{φ} de $\mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}}$, et pour tout morphisme $f\colon (\mathfrak{X}'', \psi) \to (\mathfrak{X}', \varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ d'un isomorphisme $\sigma_f\colon p^*_{\psi} f^* \xrightarrow{\sim} p^*_{\varphi}$ des foncteurs fibres associés, ces isomorphismes étant soumis à des relations de compatibilité, détermine essentiellement un seul point de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ qui donne naissance aux points p_{φ}.

4.5.16. Le composé du foncteur $\mathbf{P}_{/\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}} \to \mathbf{Pt}(\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}})$ (4.4.5.1) et du foncteur défini dans 4.5.15 induit une application de l'ensemble des points rigides de $\mathfrak{X}$ (3.3.1) dans sa voûte étoilée

$$\langle\mathfrak{X}\rangle \to \mathscr{V}_{\star}(\mathfrak{X}). \tag{4.5.16.1}$$

En vertu de 4.1.20, l'image de cet application est formée des points rigides de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ (4.4.5).

Proposition 4.5.17. *Soit $\mathscr{P}$ un point rigide de $\mathfrak{X}$, et pour tout $(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$, soient $\mathscr{P}_{\varphi}$ l'unique point rigide de $\mathfrak{X}'$ qui relève $\mathscr{P}$* (3.3.7)*, x_{φ} sa spécialisation* (3.3.1)*. Alors $(x_{\varphi})_{(\mathfrak{X}',\varphi)}$ est l'image de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{V}_{\star}(\mathfrak{X})$ par l'application* (4.5.16.1)*.*

En effet, soient $(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$, $j_{\varphi}\colon \mathscr{P}_{\varphi} \to \mathfrak{X}'$ l'injection canonique. On peut identifier le point p de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ associé à $\mathscr{P}$ avec le morphisme de topos $\varphi^{\mathrm{rig}} j^{\mathrm{rig}}_{\varphi}\colon (\mathscr{P}_{\varphi})^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}} \to \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ (4.4.4). Par suite, compte tenu de la définition de μ_{φ} (4.5.10.2), le point $p_{\varphi} = \mu_{\varphi} p$ de $\mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}}$ s'identifie au morphisme de topos $\rho_{\mathfrak{X}'} j^{\mathrm{rig}}_{\varphi}\colon (\mathscr{P}_{\varphi})^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}} \to \mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}}$. On a $\rho_{\mathfrak{X}'} j^{\mathrm{rig}}_{\varphi} \simeq j_{\varphi} \rho_{\mathscr{P}_{\varphi}}$ d'après (4.5.2.3). D'autre part, le morphisme $\rho_{\mathscr{P}_{\varphi}}\colon (\mathscr{P}_{\varphi})^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}} \to (\mathscr{P}_{\varphi})_{\mathrm{zar}}$ est une équivalence de topos, puisque la source et le but sont des topos ponctuels ([1] IV 4.3). On en déduit que p_{φ} est isomorphe à x_{φ}.

4.5.18. Soit $(\mathfrak{X}', \varphi)$ un objet de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$. Lorsqu'on munit $\mathfrak{S}_{\mathfrak{X}}$ de la topologie totale (4.5.7), le foncteur $\alpha_{\varphi!}\colon \mathbf{Zar}_{/\mathfrak{X}'} \to \mathfrak{S}_{\mathfrak{X}}$ est cocontinu ([1] VI 7.4.2). Comme il est aussi continu, il définit une suite de trois foncteurs adjoints

$$\alpha_{\varphi!}\colon \mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}} \to \mathfrak{T}_{\mathfrak{X}}, \quad \alpha^*_{\varphi}\colon \mathfrak{T}_{\mathfrak{X}} \to \mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}}, \quad \alpha_{\varphi*}\colon \mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}} \to \mathfrak{T}_{\mathfrak{X}},$$

dans le sens que pour deux foncteurs consécutifs de la suite, celui de droite est adjoint à droite de l'autre. Le premier foncteur prolonge le foncteur d'inclusion et les deux autres définissent un morphisme de topos $\alpha_{\varphi}\colon \mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}} \to \mathfrak{T}_{\mathfrak{X}}$.

Soit $f\colon (\mathfrak{X}'', \psi) \to (\mathfrak{X}', \varphi)$ une flèche de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}''_{\mathrm{zar}} \arrow[r, "\alpha_{\psi}"] \arrow[d, "f"'] & \mathfrak{T}_{\mathfrak{X}} \\ \mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}} \arrow[ur, "\alpha_{\varphi}"'] & \end{tikzcd} \tag{4.5.18.1}$$

n'est pas commutatif, ni même à isomorphisme près. Mais il existe un morphisme canonique de topos $\alpha_{\psi} \to \alpha_{\varphi} \circ f$ ([1] VI 7.4.5.2), défini par un morphisme

$$\beta_f\colon f^* \circ \alpha^*_{\varphi} \to \alpha^*_{\psi},$$

ou de façon équivalente par un morphisme

$$\gamma_f\colon \alpha^*_{\varphi} \quad\to\quad f_* \circ \alpha^*_{\psi}. \tag{4.5.18.2}$$

Soient (f, g) un couple de morphismes composables de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$, $z'_{g,f}$ l'isomorphisme (4.5.1.1). D'après ([1] VI 7.4.5.8), on a la relation de compatibilité

$$z'_{g,f} \circ g_*(\gamma_f) \circ \gamma_g = \gamma_{gf}. \tag{4.5.18.3}$$

On définit un foncteur

$$\mathfrak{T}_{\mathfrak{X}} \quad \to \quad \mathbf{Hom}_{\mathbf{B}^\circ_{\mathfrak{X}}}(\mathbf{B}^\circ_{\mathfrak{X}}, \mathfrak{F}'_{\mathfrak{X}}) \tag{4.5.18.4}$$

en associant à un objet F de $\mathfrak{T}_{\mathfrak{X}}$ la famille $F_\varphi = \alpha^*_\varphi F$ pour $(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$. Ce foncteur est en fait une équivalence de catégories ([1] VI 7.4.7) ; autrement dit, on a la proposition suivante :

Proposition 4.5.19. *Un objet F de $\mathfrak{T}_{\mathfrak{X}}$ est connu lorsqu'on connaît le système de ses restrictions $F_\varphi = \alpha^*_\varphi F$ pour $(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$. Inversement, la donnée pour tout objet $(\mathfrak{X}', \varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ d'un faisceau F_φ de $\mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}}$ et pour tout morphisme $f \colon (\mathfrak{X}'', \psi) \to (\mathfrak{X}', \varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ d'un morphisme $\gamma_f(F) \colon F_\varphi \to f_* F_\psi$, ces morphismes étant soumis aux relations de compatibilité* (4.5.18.3)*, détermine essentiellement un seul objet F de $\mathfrak{T}_{\mathfrak{X}}$ qui donne naissance par restriction aux faisceaux F_φ.*

On identifiera F au foncteur $\{(\mathfrak{X}', \varphi) \mapsto F_\varphi\}$ qui lui est associé par l'équivalence (4.5.18.4). Les morphismes $\gamma_f(F)$ sont appelés les morphismes de transition de F.

Corollaire 4.5.20. *Pour qu'un morphisme $u \colon F \to G$ de $\mathfrak{T}_{\mathfrak{X}}$ soit un monomorphisme* (*resp. un épimorphisme*)*, il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de $\alpha^*_\varphi(u) \colon \alpha^*_\varphi(F) \to \alpha^*_\varphi(G)$ pour tout $(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$.*

Cela résulte de ([1] I 6.2(ii)) car les foncteurs α^*_φ, pour $(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$, commutent aux limites inductives et projectives finies, et forment une famille fidèle (4.5.19) ([1] I 6.1).

4.5.21. Le foncteur image directe par le morphisme de topos μ (4.5.10.1)

$$\mu_* \colon \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}} \times \mathbf{B}^\circ_{\mathfrak{X}} \quad \to \quad \mathfrak{F}'_{\mathfrak{X}}$$

est un foncteur cartésien. Il définit donc un foncteur canonique ([1] VI 6.9)

$$\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}} \quad \to \quad \mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}/\mathbf{B}^\circ_{\mathfrak{X}}}(\mathbf{B}^\circ_{\mathfrak{X}}, \mathfrak{F}'_{\mathfrak{X}}), \tag{4.5.21.1}$$

qui est une équivalence de catégories en vertu de ([1] VI 8.2.9). D'autre part, le foncteur (4.5.4.3) est un morphisme de sites de $\mathbf{Ad}_{/\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$ muni de la topologie admissible dans $\mathfrak{S}_{\mathfrak{X}}$ muni de la topologie totale (4.5.8) ; notons

$$\varpi \colon \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}} \to \mathfrak{T}_{\mathfrak{X}} \tag{4.5.21.2}$$

le morphisme de topos associé. D'après ([1] VI 8.2.9), le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}} \arrow[r, "(4.5.21.1)", "\sim"'] \arrow[d, "\varpi_*"'] & \mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}/\mathbf{B}^\circ_{\mathfrak{X}}}(\mathbf{B}^\circ_{\mathfrak{X}}, \mathfrak{F}'_{\mathfrak{X}}) \arrow[d] \\ \mathfrak{T}_{\mathfrak{X}} \arrow[r, "\sim", "(4.5.18.4)"'] & \mathbf{Hom}_{\mathbf{B}^\circ_{\mathfrak{X}}}(\mathbf{B}^\circ_{\mathfrak{X}}, \mathfrak{F}'_{\mathfrak{X}}) \end{tikzcd} \tag{4.5.21.3}$$

est commutatif ; autrement dit, on a $\mu_{\varphi *} = \alpha^*_\varphi \circ \varpi_*$ pour tout $(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$.

Corollaire 4.5.22. *Un objet F de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ est connu lorsqu'on connaît le système de ses images directes $F_\varphi = \mu_{\varphi *}(F)$ pour $(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$. Inversement, la donnée pour tout objet $(\mathfrak{X}', \varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ d'un faisceau F_φ de $\mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}}$ et pour tout morphisme $f\colon (\mathfrak{X}'', \psi) \to (\mathfrak{X}', \varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ d'un* isomorphisme $\gamma_f(F)\colon F_\varphi \xrightarrow{\sim} f_* F_\psi$, *ces isomorphismes étant soumis aux relations de compatibilité* (4.5.18.3), *détermine essentiellement un seul faisceau F de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ qui donne naissance par images directes aux faisceaux F_φ.*

Remarque 4.5.23. Sous les hypothèses de (4.5.22), l'isomorphisme de transition $\gamma_f(F)$ provient de l'isomorphisme (4.5.10.3).

Corollaire 4.5.24. *Le morphisme d'adjonction $\varpi^* \varpi_* \to \mathrm{id}$ est un isomorphisme de foncteurs de la catégorie $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$.*

En effet, le foncteur ϖ_* est pleinement fidèle (4.5.21.3).

Corollaire 4.5.25. *Soit $u\colon F \to G$ un morphisme de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *u est un monomorphisme.*

(ii) *$\varpi_*(u)\colon \varpi_*(F) \to \varpi_*(G)$ est un monomorphisme.*

(iii) *$\mu_{\varphi *}(u)\colon \mu_{\varphi *}(F) \to \mu_{\varphi *}(G)$ est un monomorphisme pour tout objet $(\mathfrak{X}', \varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$.*

Comme ϖ_* est exact à gauche, (i) entraîne (ii). Comme ϖ^* est exact à gauche, (ii) entraîne (i) en vertu de 4.5.24. Enfin, les conditions (ii) et (iii) sont équivalentes, en vertu de 4.5.20.

4.5.26. Soit $F = \{(\mathfrak{X}', \varphi) \mapsto F_\varphi\}$ un objet de $\mathfrak{T}_{\mathfrak{X}}$. D'après ([1] VI 8.5.2), il existe un isomorphisme fonctoriel

$$\varpi^*(F) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathbf{B}^{\circ}_{\mathfrak{X}}} \mu^*_\varphi(F_\varphi). \tag{4.5.26.1}$$

Rappelons la définition des morphismes de transition de la limite inductive. Pour toute flèche $f\colon (\mathfrak{X}'', \psi) \to (\mathfrak{X}', \varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$, on a un morphisme $\beta_f\colon F_\varphi \to f_*(F_\psi)$, ou de manière équivalente par adjonction, un morphisme $\beta'_f\colon f^*(F_\varphi) \to F_\psi$. Le morphisme de transition associé à f est le composé ([1] VI 8.5.2.6)

$$\mu^*_\varphi(F_\varphi) \xrightarrow[\sim]{(4.5.10.4)} \mu^*_\psi(f^*(F_\varphi)) \xrightarrow{\mu^*_\psi(\beta'_f)} \mu^*_\psi(F_\psi)\ . \tag{4.5.26.2}$$

Il ressort de la preuve de ([1] VI 8.5.2) que pour tout $(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$, le morphisme $\mu^*_\varphi(F_\varphi) \to \varpi^*(F)$ déduit de (4.5.26.1) est l'adjoint du morphisme $F_\varphi \to \mu_{\varphi *}(\varpi^*(F))$ défini par le composé

$$F_\varphi = \alpha^*_\varphi(F) \longrightarrow \alpha^*_\varphi(\varpi_*(\varpi^*(F))) \xrightarrow[\sim]{(4.5.21.3)} \mu_{\varphi *}(\varpi^*(F))\ , \tag{4.5.26.3}$$

où le premier morphisme provient du morphisme d'adjonction.

Corollaire 4.5.27. *Soit F un objet de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$. Pour tout $(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$, posons $F_\varphi = \mu_{\varphi *}(F)$. Alors on a un isomorphisme canonique*

$$F \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{(\mathfrak{X}',\varphi)\in \mathbf{B}^{\circ}_{\mathfrak{X}}} \mu^*_\varphi(F_\varphi). \tag{4.5.27.1}$$

Cela résulte de (4.5.26.1) et 4.5.24.

Remarque 4.5.28. Pour tout objet $(\mathfrak{X}', \varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$, le morphisme $\mu^*_\varphi(F_\varphi) \to F$ déduit de (4.5.27.1) n'est autre que le morphisme d'adjonction $\mu^*_\varphi \mu_{\varphi *} \to \mathrm{id}$.

Corollaire 4.5.29. *Soient F un objet de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$, p un point de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$. Pour tout $(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$, posons $F_\varphi = \mu_{\varphi *}(F)$ et $p_\varphi = \mu_\varphi p$. Alors il existe un isomorphisme fonctoriel*

$$p^*(F) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{(\mathfrak{X}',\varphi)\in \mathbf{B}^{\circ}_{\mathfrak{X}}} p^*_\varphi(F_\varphi). \tag{4.5.29.1}$$

On laissera au lecteur le soin d'expliciter les morphismes de transition de la limite inductive. Comme p^* commute aux limites inductives, l'isomorphisme (4.5.29.1) résulte aussitôt de (4.5.27.1).

Corollaire 4.5.30.

(i) *Soit $u\colon F \to G$ un morphisme de $\widetilde{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{X}}$. Si la sous-catégorie pleine de $\mathbf{B}^{\circ}_{\mathfrak{X}}$ formée des objets $(\mathfrak{X}', \varphi)$ tels que $\alpha^*_\varphi(u)$ soit un épimorphisme est cofinale, alors $\varpi^*(u)\colon \varpi^*(F) \to \varpi^*(G)$ est un épimorphisme.*

(ii) *Soit*

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[d] \\ G' \arrow[r] & G \end{tikzcd} \tag{4.5.30.1}$$

un diagramme commutatif de $\widetilde{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{X}}$. Si la sous-catégorie pleine de $\mathbf{B}^{\circ}_{\mathfrak{X}}$ formée des objets $(\mathfrak{X}', \varphi)$ tels que le diagramme α^*_φ (4.5.30.1) *soit cartésien est cofinale, alors le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \varpi^*(F') \arrow[r] \arrow[d] & \varpi^*(F) \arrow[d] \\ \varpi^*(G') \arrow[r] & \varpi^*(G) \end{tikzcd} \tag{4.5.30.2}$$

est cartésien.

(i) Cela résulte de (4.5.26.1) car μ^*_φ transforme épimorphisme en épimorphisme, et la limite inductive d'une suite d'épimorphismes est un épimorphisme.

(ii) Cela résulte de (4.5.26.1) car μ^*_φ ainsi que les limites inductives filtrantes commutent aux produits fibrés (cf. [1] I 2.8).

4.5.31. Soit A un anneau de $\mathfrak{T}_{\mathfrak{X}}$. D'après 4.5.19, il revient au même de se donner pour tout objet $(\mathfrak{X}',\varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ un anneau A_φ de $\mathfrak{X}'_{\rm zar}$, et pour tout morphisme $f\colon (\mathfrak{X}'',\psi)\to(\mathfrak{X}',\varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ un morphisme $\gamma_f(A)\colon A_\varphi\to f_*(A_\psi)$, ces morphismes étant soumis aux relations de compatibilité (4.5.18.3). Le morphisme de topos $f\colon \mathfrak{X}''_{\rm zar}\to\mathfrak{X}'_{\rm zar}$ est donc un morphisme de topos annelés (respectivement par A_ψ et A_φ).

La donnée d'une structure de A-module sur un faisceau $M=\{(\mathfrak{X}',\varphi)\mapsto M_\varphi\}$ de $\mathfrak{T}_{\mathfrak{X}}$ est équivalente à la donnée pour tout objet $(\mathfrak{X}',\varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ d'une structure de A_φ-module sur M_φ telle que pour tout morphisme $f\colon (\mathfrak{X}'',\psi)\to(\mathfrak{X}',\varphi)$, $\gamma_f(M)$ soit un di-homomorphisme de modules (relatif à l'homomorphisme $\gamma_f(A)$).

Il est clair que $(\mathfrak{X}^{\rm rig}_{\rm ad},\varpi^*(A))$ est une limite projective du topos annelé fibré $(\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}},A)$ ([1] VI 8.6.2), et que pour tout objet $(\mathfrak{X}',\varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$, on a un morphisme de topos annelés, que l'on note aussi

$$\mu_\varphi\colon (\mathfrak{X}^{\rm rig}_{\rm ad},\varpi^*(A))\to(\mathfrak{X}'_{\rm zar},A_\varphi). \tag{4.5.31.1}$$

Suivant la convention (1.1.11), nous utiliserons pour les modules la notation μ_φ^{-1} pour désigner l'image réciproque au sens des faisceaux abéliens en réservant la notation μ_φ^* pour l'image réciproque au sens des modules.

Proposition 4.5.32. *Soient A un anneau de $\mathfrak{T}_{\mathfrak{X}}$, q un entier ≥ 0.*

(i) *Le foncteur $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}^{\rm rig}_{\rm ad},-)$ commute aux limites inductives filtrantes.*

(ii) *On a un isomorphisme canonique fonctoriel en le A_φ-module M_φ*

$$\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}^{\rm rig}_{\rm ad},\mu_\varphi^*(M_\varphi))\xrightarrow{\sim}\varinjlim_{f\colon(\mathfrak{X}'',\psi)\to(\mathfrak{X}',\varphi)}\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}''_{\rm zar},f^*(M_\varphi)). \tag{4.5.32.1}$$

Cela résulte de ([1] VI 8.7.7). En effet, les conditions de ([1] VI 8.7.1 et 8.7.7) sont satisfaites par $\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}\to\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ puisque pour tout objet $(\mathfrak{X}',\varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$, le topos $\mathfrak{X}'_{\rm zar}$ est cohérent, et pour tout morphisme $f\colon(\mathfrak{X}'',\psi)\to(\mathfrak{X}',\varphi)$, le morphisme de topos $f\colon\mathfrak{X}''_{\rm zar}\to\mathfrak{X}'_{\rm zar}$ est cohérent (2.6.7) (cf. [1] VI 5.1 et 5.2).

Corollaire 4.5.33. *Pour tout entier $q\geq 0$, on a un isomorphisme canonique fonctoriel en le faisceau abélien M*

$$\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}^{\rm rig}_{\rm ad},M)\xrightarrow{\sim}\varinjlim_{(\mathfrak{X}',\varphi)\in\mathbf{B}^\circ_{\mathfrak{X}}}\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}'_{\rm zar},\mu_{\varphi*}(M)). \tag{4.5.33.1}$$

En effet, il résulte de 4.5.27 et 4.5.32 qu'on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}^{\rm rig}_{\rm ad},M)\xrightarrow{\sim}\varinjlim_{(\mathfrak{X}',\varphi)\in\mathbf{B}^\circ_{\mathfrak{X}}}\ \varinjlim_{f\colon(\mathfrak{X}'',\psi)\to(\mathfrak{X}',\varphi)}\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}''_{\rm zar},f^*\mu_{\varphi*}(M)). \tag{4.5.33.2}$$

Ce dernier objet peut être interprété comme une limite inductive sur la catégorie $\mathrm{Fl}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$ des morphismes de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$. Soit alors $\Phi\colon\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}\to\mathrm{Fl}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$ le foncteur qui associe à tout objet $(\mathfrak{X},\varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ le morphisme identique de $(\mathfrak{X},\varphi)$. Le foncteur Φ° est cofinal ([1] VI 8.1.3), d'où l'isomorphisme (4.5.33.1).

4.5.34. Soient $\mathscr{C}$ une catégorie $\mathbb{U}$-petite et cofiltrante, $\theta\colon \mathscr{C} \to \mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ un foncteur tel que θ° soit cofinal. On désigne par

$$\mathfrak{F}_{\mathscr{C}} \to \mathscr{C} \tag{4.5.34.1}$$

le topos fibré déduit de $\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}}$ (4.5.9.1) par le changement de base θ ([1] VI 7.1.9), et par

$$\mu_{\mathscr{C}}\colon \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}} \times \mathscr{C} \to \mathfrak{F}_{\mathscr{C}} \tag{4.5.34.2}$$

le morphisme cartésien de topos fibrés déduit de μ (4.5.10.1) par le même changement de base. Il résulte de 4.5.12 et ([1] VI 8.2.1) que le couple $(\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}, \mu_{\mathscr{C}})$ est une limite projective du topos fibré $\mathfrak{F}_{\mathscr{C}}$. En particulier, on a une description de la catégorie $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ analogue à (4.5.22) relativement à la catégorie $\mathscr{C}$.

4.6 Applications : I. Fonctorialité des topos admissibles

4.6.1. Soit $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ un morphisme de $\mathbf{S}^+$. On désigne par $\mathbf{B}_f$ la catégorie suivante. Les objets de $\mathbf{B}_f$ sont les diagrammes commutatifs de $\mathbf{S}^+$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{Y}' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathfrak{X}' \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathfrak{Y} \arrow[r, "f"] & \mathfrak{X}
\end{tikzcd}$$

tels que φ et ψ appartiennent à $\mathbf{B}$. Un tel objet sera noté par $(\mathfrak{Y}', \psi, \mathfrak{X}', \varphi, f')$; on observera que si f est une flèche de $\mathbf{S}$, il en est de même de f' (2.6.8). Considérons deux objets $(\mathfrak{Y}_1, \psi_1, \mathfrak{X}_1, \varphi_1, f_1)$ et $(\mathfrak{Y}_2, \psi_2, \mathfrak{X}_2, \varphi_2, f_2)$ de $\mathbf{B}_f$. Un morphisme de $(\mathfrak{Y}_2, \psi_2, \mathfrak{X}_2, \varphi_2, f_2)$ vers $(\mathfrak{Y}_1, \psi_1, \mathfrak{X}_1, \varphi_1, f_1)$ est un couple (h, g) formé de deux morphismes $h\colon \mathfrak{Y}_2 \to \mathfrak{Y}_1$ et $g\colon \mathfrak{X}_2 \to \mathfrak{X}_1$ de $\mathbf{S}$ qui rendent commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{Y}_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h"] \arrow[dd, bend right=60, "\psi_2"'] & \mathfrak{X}_2 \arrow[d, "g"'] \arrow[dd, bend left=60, "\varphi_2"] \\
\mathfrak{Y}_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\psi_1"] & \mathfrak{X}_1 \arrow[d, "\varphi_1"'] \\
\mathfrak{Y} \arrow[r, "f"] & \mathfrak{X}
\end{tikzcd}$$

On considère sur $\mathbf{B}_f$ les deux foncteurs suivants :

$$\mathtt{s}\colon \mathbf{B}_f \to \mathbf{B}_{\mathfrak{Y}}, \quad (\mathfrak{Y}', \psi, \mathfrak{X}', \varphi, f') \mapsto (\mathfrak{Y}', \psi), \tag{4.6.1.1}$$

$$\mathtt{t}\colon \mathbf{B}_f \to \mathbf{B}_{\mathfrak{X}}, \quad (\mathfrak{Y}', \psi, \mathfrak{X}', \varphi, f') \mapsto (\mathfrak{X}', \varphi). \tag{4.6.1.2}$$

Proposition 4.6.2. *Conservons les hypothèses de* (4.6.1).

(i) *La catégorie* $\mathbf{B}_f$ *est cofiltrante.*

(ii) *Les foncteurs* $\mathtt{s}^\circ$ *et* $\mathtt{t}^\circ$ *sont essentiellement surjectifs et cofinaux.*

(iii) *Pour tous objets* A_1, A_2 *de* $\mathbf{B}_f$ *et toute flèche* $i\colon \mathtt{t}(A_2) \to \mathtt{t}(A_1)$, *il existe un objet* A' *de* $\mathbf{B}_f$ *et deux flèches* $j_1\colon A' \to A_1$ *et* $j_2\colon A' \to A_2$ *tels qu'on ait* $\mathtt{t}(j_1) = i\,\mathtt{t}(j_2)$ *et que* $\mathtt{t}(j_2)$ *soit un isomorphisme.*

La démonstration est analogue à celle de 3.1.17 (cf. [1] I 8.1.3) ; nous laissons les détails au lecteur.

4.6.3. Soit $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ un morphisme de $\mathbf{S}^+$. On désigne par

$$\mathfrak{F}_{\mathtt{s}} \to \mathbf{B}_f \tag{4.6.3.1}$$

$$\mathfrak{F}_{\mathtt{t}} \to \mathbf{B}_f \tag{4.6.3.2}$$

les topos fibrés déduits respectivement de $\mathfrak{F}_{\mathfrak{Y}} \to \mathbf{B}_{\mathfrak{Y}}$ et $\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}} \to \mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ (4.5.9.1) par les changements de base $\mathtt{s}\colon \mathbf{B}_f \to \mathbf{B}_{\mathfrak{Y}}$ et $\mathtt{t}\colon \mathbf{B}_f \to \mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$, et par

$$\mu_{\mathtt{s}}\colon \mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}} \times \mathbf{B}_f \to \mathfrak{F}_{\mathtt{s}} \tag{4.6.3.3}$$

$$\mu_{\mathtt{t}}\colon \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}} \times \mathbf{B}_f \to \mathfrak{F}_{\mathtt{t}} \tag{4.6.3.4}$$

les morphismes cartésiens de topos fibrés déduits des morphismes μ (4.5.10.1) relatifs respectivement à $\mathfrak{Y}$ et $\mathfrak{X}$ par les mêmes changements de base. Alors le couple $(\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}, \mu_{\mathtt{s}})$ est une limite projective du topos fibré $\mathfrak{F}_{\mathtt{s}}$, et le couple $(\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}, \mu_{\mathtt{t}})$ est une limite projective du topos fibré $\mathfrak{F}_{\mathtt{t}}$ (4.5.34 et 4.6.2).

On a un morphisme cartésien de topos fibrés

$$\mathfrak{F}_f\colon \mathfrak{F}_{\mathtt{s}} \to \mathfrak{F}_{\mathtt{t}} \tag{4.6.3.5}$$

tel que le morphisme induit sur les fibres en un objet $(\mathfrak{Y}', \psi, \mathfrak{X}', \varphi, f')$ de $\mathbf{B}_f$ soit le morphisme $f'\colon \mathfrak{Y}'_{\mathrm{zar}} \to \mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}}$ (1.1.2). Il résulte de (4.4.7.2) et (4.5.2.2) que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}} \times \mathbf{B}_f \arrow[r, "\mu_{\mathtt{s}}"] \arrow[d, "\underline{f} \times \mathrm{id}_{\mathbf{B}_f}"'] & \mathfrak{F}_{\mathtt{s}} \arrow[d, "\mathfrak{F}_f"] \\ \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}} \times \mathbf{B}_f \arrow[r, "\mu_{\mathtt{t}}"] & \mathfrak{F}_{\mathtt{t}} \end{tikzcd} \tag{4.6.3.6}$$

où $\underline{f}$ est le morphisme de topos associé à f (4.4.7.1) est commutatif à isomorphisme canonique près. Par suite, $\underline{f}$ s'identifie canoniquement au morphisme de topos induit par $\mathfrak{F}_f$ par passage à la limite projective ([1] 8.1.4).

Soit $(\mathfrak{Y}', \psi, \mathfrak{X}', \varphi, f')$ un objet de $\mathbf{B}_f$. On note

$$\mu_{\psi}\colon \mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}} \to \mathfrak{Y}'_{\mathrm{zar}} \tag{4.6.3.7}$$

$$\mu_{\varphi}\colon \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}} \to \mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}} \tag{4.6.3.8}$$

les morphismes de topos induits par respectivement $\mu_{\mathtt{s}}$ et $\mu_{\mathtt{t}}$ sur les fibres en $(\mathfrak{Y}', \psi, \mathfrak{X}', \varphi, f')$. Cette notation est compatible avec celle introduite dans (4.5.10.2). Rappelons que l'on a $\mu_\psi = \rho_{\mathfrak{Y}'} \circ (\psi^{\mathrm{rig}})^{-1}$ et $\mu_\varphi = \rho_{\mathfrak{X}'} \circ (\varphi^{\mathrm{rig}})^{-1}$ (4.5.2.1). Le diagramme (4.6.3.6) induit sur les fibres en $(\mathfrak{Y}', \psi, \mathfrak{X}', \varphi, f')$ un diagramme commutatif à isomorphisme canonique près

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}} \arrow[r, "\mu_\psi"] \arrow[d, "\underline{f}"'] & \mathfrak{Y}'_{\mathrm{zar}} \arrow[d, "f'"] \\ \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}} \arrow[r, "\mu_\varphi"] & \mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}} \end{tikzcd} \tag{4.6.3.9}$$

Autrement dit, on a des isomorphismes canoniques adjoints

$$\mu_{\varphi *}\underline{f}_* \overset{\sim}{\to} f'_*\mu_{\psi *}, \tag{4.6.3.10}$$

$$\mu_\psi^* f'^* \overset{\sim}{\to} \underline{f}^*\mu_\varphi^*. \tag{4.6.3.11}$$

On peut donc définir le morphisme de changement de base (1.2.2.2)

$$f'^*\mu_{\varphi *} \to \mu_{\psi *}\underline{f}^*. \tag{4.6.3.12}$$

4.6.4. Soit $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ un morphisme de $\mathbf{S}^+$. Le système des morphismes $f'\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{X}'$ pour $(\mathfrak{Y}', \psi, \mathfrak{X}', \varphi, f') \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_f)$ induit par passage à la limite projective une application continue

$$\varprojlim_{(\mathfrak{Y}', \psi, \mathfrak{X}', \varphi, f') \in \mathbf{B}_f} |\mathfrak{Y}'| \to \varprojlim_{(\mathfrak{Y}', \psi, \mathfrak{X}', \varphi, f') \in \mathbf{B}_f} |\mathfrak{X}'| \tag{4.6.4.1}$$

où $|\mathfrak{X}'|$ et $|\mathfrak{Y}'|$ désignent les espaces topologiques sous-jacents à $\mathfrak{X}'$ et $\mathfrak{Y}'$. D'après 4.6.2(ii), les foncteurs $\mathtt{s}$ et $\mathtt{t}$ induisent des homéomorphismes

$$\varprojlim_{(\mathfrak{Y}', \psi, \mathfrak{X}', \varphi, f') \in \mathbf{B}_f} |\mathfrak{Y}'| \to \mathscr{V}_\star(\mathfrak{Y}), \tag{4.6.4.2}$$

$$\varprojlim_{(\mathfrak{Y}', \psi, \mathfrak{X}', \varphi, f') \in \mathbf{B}_f} |\mathfrak{X}'| \to \mathscr{V}_\star(\mathfrak{X}), \tag{4.6.4.3}$$

où $\mathscr{V}_\star(-)$ désigne la voûte étoilée (4.5.13). On obtient alors une application continue que l'on note aussi

$$\mathscr{V}_\star(f)\colon \mathscr{V}_\star(\mathfrak{Y}) \to \mathscr{V}_\star(\mathfrak{X}). \tag{4.6.4.4}$$

Il résulte des isomorphismes (4.6.3.11) qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ob}(\mathbf{Pt}(\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}})) \arrow[r, "\mathbf{Pt}(\underline{f})"] \arrow[d] & \mathrm{Ob}(\mathbf{Pt}(\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}})) \arrow[d] \\ \mathscr{V}_\star(\mathfrak{Y}) \arrow[r, "\mathscr{V}_\star(f)"] & \mathscr{V}_\star(\mathfrak{X}) \end{tikzcd} \tag{4.6.4.5}$$

où les flèches verticales proviennent de l'équivalence de catégories définie dans 4.5.15.

Proposition 4.6.5. *Soient* $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ *un morphisme de* $\mathbf{S}^+$, G *un faisceau de* $\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$. *Il existe un isomorphisme fonctoriel*

$$\underline{f}_*(G) \simeq \varinjlim_{(\mathfrak{Y}',\psi,\mathfrak{X}',\varphi,f')\in\mathbf{B}^\circ_f} \mu^*_\varphi(f'_*(\mu_{\psi*}(G))). \tag{4.6.5.1}$$

En effet, on a un isomorphisme canonique et fonctoriel (4.5.27.1)

$$\underline{f}_*(G) \simeq \varinjlim_{(\mathfrak{X}',\varphi)\in\mathbf{B}^\circ_{\mathfrak{X}}} \mu^*_\varphi(\mu_{\varphi*}(\underline{f}_*(G))). \tag{4.6.5.2}$$

Comme le foncteur $\mathtt{t}^\circ$ est cofinal 4.6.2(ii), on obtient un isomorphisme

$$\underline{f}_*(G) \simeq \varinjlim_{(\mathfrak{Y}',\psi,\mathfrak{X}',\varphi,f')\in\mathbf{B}^\circ_f} \mu^*_\varphi(\mu_{\varphi*}(\underline{f}_*(G))). \tag{4.6.5.3}$$

L'isomorphisme (4.6.5.1) s'en déduit compte tenu des isomorphismes $\mu_{\varphi*}\underline{f}_* \simeq f'_*\mu_{\psi*}$ (4.6.3.10).

Proposition 4.6.6. *Soient* $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ *un morphisme de* $\mathbf{S}^+$, $\{(\mathfrak{Y}',\psi) \mapsto G_\psi\}$ *un faisceau du topos total* $\mathfrak{T}_{\mathfrak{Y}}$ (4.5.19). *Il existe un isomorphisme fonctoriel*

$$\underline{f}_*(\varpi^*(\{(\mathfrak{Y}',\psi) \mapsto G_\psi\})) \simeq \varinjlim_{(\mathfrak{Y}',\psi,\mathfrak{X}',\varphi,f')\in\mathbf{B}^\circ_f} \mu^*_\varphi(f'_*(G_\psi)), \tag{4.6.6.1}$$

où $\varpi\colon \mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}} \to \mathfrak{T}_{\mathfrak{Y}}$ *est le morphisme de topos* (4.5.21.2).

En effet, en vertu de (4.6.5.1) et ([1] VI 8.5.3.1), on a un isomorphisme fonctoriel

$$\underline{f}_*(\varpi^*(\{(\mathfrak{Y}',\psi) \mapsto G_\psi\})) \simeq \varinjlim_{(\mathfrak{Y}',\psi,\mathfrak{X}',\varphi,f')\in\mathbf{B}^\circ_f} \mu^*_\varphi(f'_*(\varinjlim_{h\colon (\mathfrak{Y}'',\rho)\to(\mathfrak{Y}',\psi)} h_*(G_\rho))). \tag{4.6.6.2}$$

En utilisant la commutation des f'_* aux limites inductives filtrantes (4.5.1 et [1] VI 5.1), on obtient

$$\underline{f}_*(\varpi^*(\{(\mathfrak{Y}',\psi) \mapsto G_\psi\})) \simeq \varinjlim_{(\mathfrak{Y}',\psi,\mathfrak{X}',\varphi,f')\in\mathbf{B}^\circ_f} \varinjlim_{h\colon (\mathfrak{Y}'',\rho)\to(\mathfrak{Y}',\psi)} \mu^*_\varphi(f'_*(h_*(G_\rho))). \tag{4.6.6.3}$$

Soient $\mathrm{Fl}(\mathbf{B}_f)$ la catégorie des morphismes de $\mathbf{B}_f$, $\mathscr{C}$ la sous-catégorie pleine formée des morphismes $(h,g)\colon (\mathfrak{Y}_2,\psi_2,\mathfrak{X}_2,\varphi_2,f_2) \to (\mathfrak{Y}_1,\psi_1,\mathfrak{X}_1,\varphi_1,f_1)$ tels que $g\colon \mathfrak{X}_2 \to \mathfrak{X}_1$ soit un isomorphisme. Le terme de droite dans (4.6.6.3) peut être interprété comme une limite inductive sur la catégorie $\mathscr{C}^\circ$. Soit alors $\Phi\colon \mathbf{B}_f \to \mathscr{C}$ le foncteur qui associe à tout objet A de $\mathbf{B}_f$ le morphisme identique de A. Le foncteur Φ° est cofinal ([1] VI 8.1.3), d'où la formule (4.6.6.1).

Remarque 4.6.7. Soient $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ un morphisme de $\mathbf{S}^+$, $(\mathfrak{Y}', \psi, \mathfrak{X}', \varphi, f')$ un objet de $\mathbf{B}_f$.

(i) Il résulte de 4.5.28 que le morphisme $\mu_\varphi^* f'_* \mu_{\psi*} \to \underline{f}_*$ déduit de (4.6.5.1) est l'adjoint de l'isomorphisme canonique $f'_*\mu_{\psi*} \xrightarrow{\sim} \mu_{\varphi*}\underline{f}_*$ (4.6.3.10).

(ii) Il résulte de (i) et 4.5.26 que le morphisme $\mu_\varphi^* f'_* \alpha_\psi^* \to \underline{f}_*\varpi^*$ déduit de (4.6.6.1), où $\alpha_\psi\colon \mathfrak{Y}'_{\mathrm{zar}} \to \mathfrak{T}_{\mathfrak{Y}}$ est le morphisme canonique (4.5.18), est l'adjoint du morphisme composé

$$f'_*\alpha_\psi^* \to f'_*\alpha_\psi^*\varpi_*\varpi^* = f'_*\mu_{\psi*}\varpi^* \to \mu_{\varphi*}\underline{f}_*\varpi^*$$

où le premier morphisme provient du morphisme d'adjonction, l'égalité $\mu_{\psi*} = \alpha_\psi^*\varpi_*$ de (4.5.21.3), et le dernier morphisme de (4.6.3.10).

4.6.8. Soient $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ un morphisme de $\mathbf{S}^+$, F un faisceau de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$, G un faisceau de $\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$,

$$\begin{aligned} u\colon F &\to \underline{f}_*(G) \\ u'\colon \underline{f}^*(F) &\to G \end{aligned}$$

deux morphismes adjoints. Soit $(\mathfrak{Y}', \psi, \mathfrak{X}', \varphi, f')$ un objet de $\mathbf{B}_f$. Posons $F_\varphi = \mu_{\varphi*}(F)$ et $G_\psi = \mu_{\psi*}(G)$. On appelle *composante* de u relative à $(\mathfrak{Y}', \psi, \mathfrak{X}', \varphi, f')$ et on note

$$u_{f'}\colon F_\varphi \to f'_*(G_\psi), \tag{4.6.8.1}$$

le morphisme composé

$$F_\varphi = \mu_{\varphi*}(F) \xrightarrow{\mu_{\varphi*}(u)} \mu_{\varphi*}\underline{f}_*(G) \xrightarrow[\sim]{(4.6.3.10)} f'_*\mu_{\psi*}(G) = f'_*(G_\psi)\ .$$

On appelle *composante* de u' relative à $(\mathfrak{Y}', \psi, \mathfrak{X}', \varphi, f')$ et on note

$$u'_{f'}\colon f'^*(F_\varphi) \to G_\psi \tag{4.6.8.2}$$

le morphisme composé

$$f'^*(F_\varphi) = f'^*\mu_{\varphi*}(F) \xrightarrow{(4.6.3.12)} \mu_{\psi*}\underline{f}^*(F) \xrightarrow{\mu_{\psi*}(u')} \mu_{\psi*}(G) = G_\psi\ .$$

Il résulte aussitôt des définitions (1.2.2.2) que les morphismes $u_{f'}$ et $u'_{f'}$ sont adjoints.

D'après ([1] XVII 2.1.3), on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \underline{f}^*\mu_\varphi^*\mu_{\varphi*} \arrow[r, "\mathrm{adj}"] & \underline{f}^* \\ \mu_\psi^* f'^*\mu_{\varphi*} \arrow[u, "(4.6.3.11)"] \arrow[r, "(4.6.3.12)"] & \mu_\psi^*\mu_{\psi*}\underline{f}^* \arrow[u, "\mathrm{adj}"'] \end{tikzcd}$$

où les flèches adj sont les morphismes d'adjonction. On en déduit que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\underline{f}^*(\mu_\varphi^*(F_\varphi)) \arrow[r, "\mathrm{adj}"] & \underline{f}^*(F) \arrow[r, "u'"] & G \\
\mu_\psi^*(f'^*(F_\varphi)) \arrow[u, "(4.6.3.11)"] \arrow[rr, "\mu_\psi^*(u'_{f'})"] & & \mu_\psi^*(G_\psi) \arrow[u, "\mathrm{adj}"']
\end{tikzcd} \tag{4.6.8.3}$$

est commutatif.

Soit (h,g) un morphisme de $\mathbf{B}_f$ de $(\mathfrak{Y}_2,\psi_2,\mathfrak{X}_2,\varphi_2,f_2)$ vers $(\mathfrak{Y}_1,\psi_1,\mathfrak{X}_1,\varphi_1,f_1)$; posons $k = g\circ f_2 = f_1\circ h$. On a alors des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
g_*\mu_{\varphi_2*}\underline{f}_* \arrow[r, "(4.6.3.10)"] & g_*f_{2*}\mu_{\psi_2*} \arrow[d, "(4.5.1.1)"] \\
\mu_{\varphi_1*}\underline{f}_* \arrow[u, "(4.5.10.3)"] \arrow[r, "(4.6.3.10)"] \arrow[d, "(4.6.3.10)"'] & k_*\mu_{\psi_2*} \\
f_{1*}\mu_{\psi_1*} \arrow[r, "(4.5.10.3)"] & f_{1*}h_*\mu_{\psi_2*} \arrow[u, "(4.5.1.1)"']
\end{tikzcd}$$

En effet, compte tenu de 4.5.11, chacun des deux carrés traduit une relation de cocycle vérifiée par l'isomorphisme (4.5.2.2). On en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
g_*(F_{\varphi_2}) \arrow[r, "g_*(u_{f_2})"] & g_*(f_{2*}(G_{\psi_2})) \arrow[r, "(4.5.1.1)", "\sim"'] & f_{1*}(h_*(G_{\psi_2})) \\
F_{\varphi_1} \arrow[u, "\gamma_g(F)"] \arrow[rr, "u_{f_1}"] & & f_{1*}(G_{\psi_1}) \arrow[u, "f_{1*}(\gamma_h(G))"']
\end{tikzcd} \tag{4.6.8.4}$$

où $\gamma_g(F)$ et $\gamma_h(G)$ sont les morphismes de transition de F et G (4.5.22).

Proposition 4.6.9. *Les hypothèses sont celles de* (4.6.8)*. Un morphisme* $u\colon F\to \underline{f}_*(G)$ *est connu lorsqu'on connaît le système de ses composantes* $u_{f'}$ *pour* $(\mathfrak{Y}',\psi,\mathfrak{X}',\varphi,f')\in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_f)$ (4.6.8.1)*. Inversement, la donnée pour tout objet* $(\mathfrak{Y}',\psi,\mathfrak{X}',\varphi,f')$ *de* $\mathbf{B}_f$ *d'un morphisme* $u_{f'}\colon F_\varphi\to f'_*(G_\psi)$*, ces morphismes étant soumis aux relations* (4.6.8.4)*, détermine essentiellement un seul morphisme* $u\colon F\to\underline{f}_*(G)$ *qui a pour composantes les morphismes* $u_{f'}$*.*

On rappelle d'abord (4.5.22) qu'un morphisme $u\colon F\to\underline{f}_*(G)$ est connu lorsqu'on connaît les morphismes $\mu_{\varphi*}(u)\colon F_\varphi\to\mu_{\varphi*}(\underline{f}_*(G))$ pour $(\mathfrak{X}',\varphi)\in\mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$, et inversement, la donnée pour tout $(\mathfrak{X}',\varphi)\in\mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$ d'un morphisme $u_\varphi\colon F_\varphi\to \mu_{\varphi*}(\underline{f}_*(G))$, ces morphismes étant compatibles aux morphismes de transition de F et $\underline{f}_*(G)$, détermine un seul morphisme $u\colon F\to\underline{f}_*(G)$ tel que $u_\varphi=\mu_{\varphi*}(u)$.

Par suite, la première assertion est une conséquence immédiate de l'essentielle surjectivité du foncteur $\mathtt{t}$ (4.6.1.2). La seconde assertion est une conséquence des propriétés suivantes :

(i) Pour tout $(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_f)$, il existe un et un seul morphisme $u_\varphi \colon F_\varphi \to \mu_{\varphi *}(\underline{f}_*(G))$ tel que pour tout $(\mathfrak{Y}', \psi, \mathfrak{X}', \varphi, f') \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_f)$, $u_{f'}$ soit le composé

$$F_\varphi = \mu_{\varphi *}(F) \xrightarrow{u_\varphi} \mu_{\varphi *}(\underline{f}_*(G)) \xrightarrow{(4.6.3.10)} f'_*(\mu_{\psi *}(G)) = f'_*(G_\psi)\ .$$

(ii) La collection des morphismes u_φ, pour $(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_f)$, est compatible aux morphismes de transition de F et de $\underline{f}_*(G)$.

Ces propriétés résultent facilement de 4.6.2, (4.6.8.4) et du fait que les morphismes de transition de F et G sont des isomorphismes (4.5.22).

Proposition 4.6.10. *Les hypothèses étant celles de* (4.6.8), *soit de plus* $\theta \colon \mathscr{C} \to \mathbf{B}_f$ *un foncteur.*

(i) *Supposons que le foncteur* $(\mathtt{t} \circ \theta)^\circ$ *soit cofinal* (4.6.1.2). *Pour que* u *soit un isomorphisme, il faut et il suffit que, pour tout* $i \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, *en posant* $\theta(i) = (\mathfrak{Y}', \psi, \mathfrak{X}', \varphi, f')$, $u_{f'}$ (4.6.8.1) *soit un isomorphisme.*

(ii) *Supposons que les foncteurs* $(\mathtt{s} \circ \theta)^\circ$ *et* $(\mathtt{t} \circ \theta)^\circ$ *soient cofinaux* (4.6.1.1). *Si pour tout* $i \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, *en posant* $\theta(i) = (\mathfrak{Y}', \psi, \mathfrak{X}', \varphi, f')$, $u'_{f'}$ (4.6.8.2) *est un isomorphisme, alors* u' *est un isomorphisme.*

(i) La condition est clairement nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Soient $(\mathfrak{X}_1, \varphi_1)$ un objet de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$, i un objet de $\mathscr{C}$ tel que $(\mathfrak{X}_1, \varphi_1)$ majore $\mathtt{t} \circ \theta(i)$ (*i.e.*, $\mathrm{Hom}(\mathtt{t} \circ \theta(i), (\mathfrak{X}_1, \varphi_1)) \neq \emptyset$) ([1] I 8.1.3). Posons $\theta(i) = (\mathfrak{Y}', \psi, \mathfrak{X}', \varphi, f')$. Comme $u_{f'}$ est un isomorphisme, $\mu_{\varphi *}(u)$ est un isomorphisme. Il résulte de (4.5.10.3) que $\mu_{\varphi_1 *}(u)$ est un isomorphisme. Par suite, u est un isomorphisme en vertu de 4.5.22.

(ii) En vertu de 4.5.27, on a un isomorphisme canonique fonctoriel

$$\underline{f}^*(F) \simeq \varinjlim_{(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathbf{B}^\circ_{\mathfrak{X}}} \underline{f}^* \mu^*_\varphi(F_\varphi).$$

Pour tout $i \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, posons $\theta(i) = (\mathfrak{Y}'_i, \psi_i, \mathfrak{X}'_i, \varphi_i, f'_i)$. Utilisant (4.6.3.11) et le fait que $(\mathtt{t} \circ \theta)^\circ$ est cofinal, on obtient un isomorphisme canonique fonctoriel

$$\underline{f}^*(F) \simeq \varinjlim_{i \in \mathscr{C}^\circ} \mu^*_{\psi_i} f'^*_i(F_{\varphi_i}).$$

D'autre part, il résulte de (4.6.8.3) que u' s'identifie au composé des morphismes

$$\varinjlim_{i \in \mathscr{C}^\circ} \mu^*_{\psi_i} f'^*_i(F_{\varphi_i}) \to \varinjlim_{i \in \mathscr{C}^\circ} \mu^*_{\psi_i}(G_{\psi_i}) \to \varinjlim_{(\mathfrak{Y}', \psi) \in \mathbf{B}^\circ_{\mathfrak{Y}}} \mu^*_\psi(G_\psi) \simeq G$$

où le premier est la limite inductive des morphismes $\mu^*_{\psi_i}(u'_{f'_i})$ et le second provient de $(\mathtt{s} \circ \theta)^\circ$. Chacun de ces morphismes est bijectif par hypothèse, d'où la proposition.

Proposition 4.6.11. *Soit* $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ *un morphisme de* $\mathbf{S}^+$, $\mathbf{B}'_f$ *la sous-catégorie pleine de* $\mathbf{B}_f$ *formée des objets* $(\mathfrak{Y}', \psi, \mathfrak{X}', \varphi, f')$ *tels que* φ *soit l'éclatement d'un idéal ouvert cohérent* $\mathscr{A}$ *de* $\mathfrak{X}$, *que* ψ *soit l'éclatement de* $f^*(\mathscr{A})\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$ *dans* $\mathfrak{Y}$ *et que* f' *soit le relèvement canonique de* f (3.2.3). *Notons* $\theta\colon \mathbf{B}'_f \to \mathbf{B}_f$ *l'injection canonique. Alors :*

(i) *La catégorie* $\mathbf{B}'_f$ *est cofiltrante et le foncteur* $(\mathtt{t} \circ \theta)^\circ$ *est cofinal.*

(ii) *Si* f *est une immersion* (*resp. une immersion ouverte, resp. une immersion fermée*), *il en est de même de* f' *pour tout* $(\mathfrak{Y}', \psi, \mathfrak{X}', \varphi, f') \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}'_f)$, *et le foncteur* $(\mathtt{s} \circ \theta)^\circ$ *est cofinal.*

(i) La démonstration est analogue à celle de 3.1.17 (cf. [1] I 8.1.3) ; nous laissons les détails au lecteur.

(ii) La première assertion est mentionnée à titre de rappel (3.2.3.7). La démonstration de la seconde assertion est analogue à celle de 3.2.4(i) (cf. [1] I 8.1.3) ; nous laissons encore les détails au lecteur.

4.6.12. Soient $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ un morphisme de $\mathbf{S}^+$, F un faisceau de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$, G un faisceau de $\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$, $(\mathfrak{Y}', \psi, \mathfrak{X}', \varphi, f')$ un objet de $\mathbf{B}_f$. Alors :

(i) La composante du morphisme d'adjonction $u\colon F \to \underline{f}_*\underline{f}^*(F)$ relative à $(\mathfrak{Y}', \psi, \mathfrak{X}', \varphi, f')$ est le morphisme

$$u_{f'}\colon \mu_{\varphi*}(F) \to f'_*\mu_{\psi*}\underline{f}^*(F) \qquad (4.6.12.1)$$

composé de

$$\mu_{\varphi*}(F) \xrightarrow{\mathrm{adj}} f'_*f'^*\mu_{\varphi*}(F) \xrightarrow{(4.6.3.12)} f'_*\mu_{\psi*}\underline{f}^*(F)\ ,$$

où adj est le morphisme d'adjonction. En effet, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mu_{\varphi*}\underline{f}_*\underline{f}^* \arrow[r, "(4.6.3.10)", "\sim"'] & f'_*\mu_{\psi*}\underline{f}_* \\ \mu_{\varphi*} \arrow[u, "\mathrm{adj}"] \arrow[r, "\mathrm{adj}"] & f'_*f'^*\mu_{\varphi*} \arrow[u, "(4.6.3.12)"'] \end{tikzcd}$$

où les flèches adj sont les morphismes d'adjonction est commutatif d'après la définition (1.2.2.2).

(ii) La composante du morphisme d'adjonction $v\colon \underline{f}^*\underline{f}_*(G) \to G$ relative à $(\mathfrak{Y}', \psi, \mathfrak{X}', \varphi, f')$ est le morphisme

$$v'_{f'}\colon f'^*\mu_{\varphi*}\underline{f}_*(G) \to \mu_{\psi*}(G) \qquad (4.6.12.2)$$

composé de

$$f'^*\mu_{\varphi*}\underline{f}_*(G) \xrightarrow[\sim]{(4.6.3.10)} f'^*f'_*\mu_{\psi*}(G) \xrightarrow{\mathrm{adj}} \mu_{\psi*}(G)\ ,$$

où adj est le morphisme d'adjonction. En effet, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mu_{\psi *}\underline{f}^*\underline{f}_* \arrow[r, "\mathrm{adj}"] & \mu_{\psi *} \\
f'^*\mu_{\varphi *}\underline{f}_* \arrow[u, "(4.6.3.12)"] \arrow[r, "(4.6.3.10)"] & f'^*f'_*\mu_{\psi *} \arrow[u, "\mathrm{adj}"']
\end{tikzcd}$$

où les flèches adj sont les morphismes d'adjonction est commutatif. Cela résulte de la définition (1.2.2.2) et de la commutativité évidente du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mu_{\varphi *}\underline{f}_*\underline{f}^*\underline{f}_* \arrow[r, "(4.6.3.10)"] & f'_*\mu_{\psi *}\underline{f}^*\underline{f}_* \arrow[d, "\mathrm{adj}"] \\
\mu_{\varphi *}\underline{f}_* \arrow[u, "\mathrm{adj}"] \arrow[r, "(4.6.3.10)"] & f'_*\mu_{\psi *}
\end{tikzcd}$$

Proposition 4.6.13. *Si $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ est une immersion de* $\mathbf{S}$*, alors le foncteur $\underline{f}_*\colon \mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}} \to \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ est pleinement fidèle.*

Soient $\mathbf{B}'_f$ la sous-catégorie strictement pleine de $\mathbf{B}_f$ définie dans 4.6.11, G un faisceau de $\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$. La composante du morphisme d'adjonction $v\colon \underline{f}^*\underline{f}_*(G) \to G$ relative à tout objet $(\mathfrak{Y}', \psi, \mathfrak{X}', \varphi, f')$ de $\mathbf{B}'_f$ est un isomorphisme ; cela résulte de 4.6.12(ii) et du fait que f' est une immersion (4.6.11). Par suite, v est un isomorphisme en vertu 4.6.10(ii) et 4.6.11 ; d'où la proposition.

Proposition 4.6.14. *Si $f\colon Y \to X$ est une immersion d'espaces rigides cohérents* (4.2.1)*, $f\colon Y_{\mathrm{ad}} \to X_{\mathrm{ad}}$ est un plongement, i.e., le foncteur $f_*\colon Y_{\mathrm{ad}} \to X_{\mathrm{ad}}$ est pleinement fidèle* ([1] IV 9.1)*. Si f est une immersion ouverte, $f\colon Y_{\mathrm{ad}} \to X_{\mathrm{ad}}$ est un plongement ouvert.*

La première proposition a été déjà démontrée (4.6.13). Montrons la seconde proposition. On sait que le foncteur canonique $\varepsilon_X\colon \mathbf{Ad}_{/X} \to X_{\mathrm{ad}}$ est exact à gauche ([1] II 4.4.0) et que f est un monomorphisme de $\mathbf{R}$ (4.2.7). Par suite, $\varepsilon_X(Y,f)$ est un sous-objet de l'objet final de X_{ad} ; autrement dit, $\varepsilon_X(Y,f)$ est un ouvert du topos X_{ad} ([1] IV 8.3). D'après 4.4.3, le plongement de topos qui lui est associé est le morphisme $f\colon Y_{\mathrm{ad}} \to X_{\mathrm{ad}}$ ([1] IV 9.2.1).

Corollaire 4.6.15. *Soient $f\colon Y \to X$ une immersion d'espaces rigides cohérents, G un faisceau de Y_{ad}, q un point de Y_{ad}, $p = fq$. Alors le morphisme d'adjonction $f^*f_* \to \mathrm{id}_{Y_{\mathrm{ad}}}$ induit un isomorphisme*

$$p^*(f_*(G)) \xrightarrow{\sim} q^*(G). \tag{4.6.15.1}$$

En effet, comme le foncteur $f_*\colon Y_{\mathrm{ad}} \to X_{\mathrm{ad}}$ est pleinement fidèle (4.6.14), le morphisme d'adjonction $f^*f_* \to \mathrm{id}_{Y_{\mathrm{ad}}}$ est un isomorphisme.

Corollaire 4.6.16. *Si $f\colon Y \to X$ est une immersion d'espaces rigides cohérents, le foncteur $\mathbf{Pt}(Y_{\mathrm{ad}}) \to \mathbf{Pt}(X_{\mathrm{ad}})$ induit par f sur les catégories des points est pleinement fidèle.*

Cela résulte de 4.6.14 et ([1] IV 9.1.5).

Remarque 4.6.17. Soit $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ une immersion de $\mathbf{S}$, $\mathscr{V}_\star(f)\colon \mathscr{V}_\star(\mathfrak{Y}) \to \mathscr{V}_\star(\mathfrak{X})$ l'application associée (4.6.4.4). Compte tenu de 4.5.15 et (4.6.4.5), l'énoncé 4.6.16 revient à dire que si x et y sont deux points de $\mathscr{V}_\star(\mathfrak{Y})$, pour que y soit une spécialisation de x, il faut et il suffit que $\mathscr{V}_\star(f)(y)$ soit une spécialisation de $\mathscr{V}_\star(f)(x)$; ce qui implique que $\mathscr{V}_\star(f)$ est injectif. Cette propriété peut aussi se démontrer directement. En effet, soit $\mathbf{B}'_f$ la sous-catégorie strictement pleine de $\mathbf{B}_f$ définie dans 4.6.11. D'après *loc.cit.*, $\mathscr{V}_\star(f)$ s'identifie à l'application

$$\varprojlim_{(\mathfrak{Y}',\psi,\mathfrak{X}',\varphi,f')\in\mathbf{B}'_f} |\mathfrak{Y}'| \to \varprojlim_{(\mathfrak{Y}',\psi,\mathfrak{X}',\varphi,f')\in\mathbf{B}'_f} |\mathfrak{X}'| \tag{4.6.17.1}$$

obtenue par passage à la limite projective des f'. La propriété en question est satisfaite par chacun des morphismes f' (car ce sont des immersions), et elle est préservée par passage à la limite projective sur $\mathbf{B}'_f$ (cf. 4.5.14). Elle est donc satisfaite par $\mathscr{V}_\star(f)$.

Proposition 4.6.18. *Soient $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ une immersion fermée de $\mathbf{S}$, p un point de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe un point q de $\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ tel que $p \simeq fq$.*

(ii) *$p^*\underline{f}_*$ est un foncteur fibre de $\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$.*

(iii) *Il existe un faisceau G de $\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ tel que $p^*(\underline{f}_*(G))$ ne soit pas réduit à un élément.*

On sait (4.6.15) que (i) implique (ii). Il est clair que (ii) implique (iii). Il reste à montrer que (iii) implique (i). Supposons qu'il n'existe aucun point q de $\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ tel que $p \simeq fq$, et montrons que pour tout faisceau G de $\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$, $p^*(\underline{f}_*(G))$ est réduit à un élément. Compte tenu de 4.5.15 et (4.6.4.5), l'hypothèse revient à dire que l'image canonique de p dans $\mathscr{V}_\star(\mathfrak{X})$ n'est pas dans l'image de l'application $\mathscr{V}_\star(f)$ (4.6.4.4). Considérons alors la description (4.6.17.1) de cette application. Pour tout objet $(\mathfrak{Y}',\psi,\mathfrak{X}',\varphi,f')$ de $\mathbf{B}'_f$ (4.6.11), posons $G_\psi = \mu_{\psi*}(G)$ et $p_\varphi = \mu_\varphi p$; on identifie p_φ à un point de $\mathfrak{X}'$. On rappelle que f' est une immersion fermée, et est donc injective sur les espaces topologiques sous-jacents. Comme $\mathbf{B}'_f$ est cofiltrante, l'hypothèse implique que la sous-catégorie pleine de $\mathbf{B}'_f$ formée des objets $(\mathfrak{Y}',\psi,\mathfrak{X}',\varphi,f')$ tels que p_φ ne soit pas dans l'image de f', est finale (*i.e.*, le foncteur d'inclusion des catégories opposées est cofinal) ; pour chacun de ces objets, $p^*_\varphi(f'_*(G_\psi))$ est réduit à un élément. D'autre part, il résulte de 4.5.29, 4.6.11 et (4.6.3.10) qu'on a

$$p^*(\underline{f}_*(G)) \simeq \varinjlim_{(\mathfrak{Y}',\psi,\mathfrak{X}',\varphi,f')\in\mathbf{B}'^{\circ}_f} p^*_\varphi(f'_*(G_\psi)).$$

On en déduit que $p^*(\underline{f}_*(G))$ est réduit à un élément.

Proposition 4.6.19. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique quasi-compact, $\mathfrak{Y}$ un sous-schéma fermé de $\mathfrak{X}$, U l'ouvert $\mathfrak{X} - \mathfrak{Y}$ de $\mathfrak{X}$; notons $\mathscr{U}$ le schéma formel induit par $\mathfrak{X}$ sur U, $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ et $j\colon \mathscr{U} \to \mathfrak{X}$ les injections canoniques. Alors pour tout faisceau G de $\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$, $\underline{j}^*(\underline{f}_*(G))$ est un objet final de $\mathscr{U}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$.*

Cela résulte de de la description du foncteur $\underline{j}^*$ comme un foncteur restriction (4.4.3) et du fait que $\mathscr{U}^{\mathrm{rig}} \times_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}} \mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}$ est vide (4.1.13).

Remarque 4.6.20. Sous les hypothèses de 4.6.19, le sous-topos $\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ n'est pas en général le fermé complémentaire de l'ouvert $\mathscr{U}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ ([1] IV 9.3.5) (cf. 7.4.31).

Proposition 4.6.21. *Soit $f\colon Y \to X$ une immersion ouverte d'espaces rigides cohérents. Pour que f soit un isomorphisme, il faut et il suffit que le foncteur $f_*\colon Y_{\mathrm{ad}} \to X_{\mathrm{ad}}$ soit une équivalence.*

En effet, soit $j\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ une immersion ouverte de $\mathbf{S}$ telle que $\mathfrak{X}$ soit rig-pur. Supposons que $\underline{j}_*\colon \mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}} \to \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ soit une équivalence. Alors l'application $\underline{j}\colon \mathscr{V}_\star(\mathfrak{Y}) \to \mathscr{V}_\star(\mathfrak{X})$ est bijective (4.6.4.5). D'autre part, l'image de l'application canonique $\mathscr{V}_\star(\mathfrak{X}) \to |\mathfrak{X}|$ contient tous les points localement fermés de $\mathfrak{X}$ en vertu de 4.5.17 et 3.3.10. Par suite, $j(\mathfrak{Y})$ contient tous les points localement fermés de $\mathfrak{X}$; donc j est un isomorphisme.

4.7 Applications : II. Fibre rigide d'un module

Les notations du §4.5 sont en vigueur dans cette section sauf mention expresse du contraire.

4.7.1. Le topos fibré $\mathrm{Fais}(\mathbf{S}^+, \mathrm{zar})$ (4.5.1.3) est annelé par la donnée pour tout objet $\mathfrak{X}$ de $\mathbf{S}^+$ de l'anneau $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$, et pour tout morphisme $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ de $\mathbf{S}^+$ du morphisme canonique $\theta_f\colon \mathscr{O}_\mathfrak{Y} \to f_*(\mathscr{O}_\mathfrak{X})$ ([1] VI 8.6.1). Nous conservons les notations du (4.5.1), sauf pour les modules, nous utilisons la convention (1.1.11). En particulier, l'isomorphisme (4.5.1.2) restreint à la catégorie des modules devient

$$z_{f,g}\colon f^{-1}g^{-1} \xrightarrow{\sim} (gf)^{-1}. \tag{4.7.1.1}$$

Nous désignons par

$$\widetilde{z}_{f,g}\colon f^*g^* \xrightarrow{\sim} (gf)^* \tag{4.7.1.2}$$

l'isomorphisme canonique pour les foncteurs image réciproque au sens des modules.

4.7.2. Dans la suite de cette section, $\mathfrak{X}$ désigne un objet de $\mathbf{S}$. On note $\mathbf{Mod}(\mathscr{O}_\mathfrak{X})$ la catégorie des $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$-modules et

$$\mathrm{Fais}'(\mathbf{S}^+_{/\mathfrak{X}}, \mathrm{zar}) \to (\mathbf{S}^+_{/\mathfrak{X}})^\circ \tag{4.7.2.1}$$

la catégorie fibrée obtenue par le changement de base de $\mathrm{Fais}'(\mathbf{S}^+, \mathrm{zar})$ (4.5.1.4) au moyen du foncteur “source” $(\mathbf{S}^+_{/\mathfrak{X}})^\circ \to (\mathbf{S}^+)^\circ$.

Proposition 4.7.3. *Il existe un et un seul foncteur* (1.1.1)

$$\Theta\colon \mathbf{Mod}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \to \mathbf{Hom}_{(\mathbf{S}^+_{/\mathfrak{X}})^\circ}((\mathbf{S}^+_{/\mathfrak{X}})^\circ, \mathrm{Fais}'(\mathbf{S}^+_{/\mathfrak{X}}, \mathrm{zar})) \tag{4.7.3.1}$$

tel que pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module $\mathscr{F}$, le $(\mathbf{S}^+_{/\mathfrak{X}})^\circ$-foncteur

$$\Theta(\mathscr{F})\colon (\mathbf{S}^+_{/\mathfrak{X}})^\circ \to \mathrm{Fais}'(\mathbf{S}^+_{/\mathfrak{X}}, \mathrm{zar})$$

associe à tout objet $(\mathfrak{Y}, f)$ de $\mathbf{S}^+_{/\mathfrak{X}}$ le $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(f^*\mathscr{F})$ (2.10.1)*, et à tout morphisme $g : (\mathfrak{Z}, h) \to (\mathfrak{Y}, f)$ de $\mathbf{S}^+_{/\mathfrak{X}}$ le morphisme $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-linéaire*

$$\gamma_g(\mathscr{F})\colon \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(f^*\mathscr{F}) \to g_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(h^*\mathscr{F})) \tag{4.7.3.2}$$

composé de

$$\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(f^*\mathscr{F}) \xrightarrow{\beta_g(f^*\mathscr{F})} g_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(g^*(f^*\mathscr{F}))) \xrightarrow{\tilde{z}_{g,f}} g_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(h^*\mathscr{F}))\ ,$$

où $\beta_g(f^*\mathscr{F})$ est le morphisme (2.10.27.2) *et $\tilde{z}_{g,f}$ est l'isomorphisme* (4.7.1.2)*.*

D'après 1.1.2, pour montrer l'existence de $\Theta(\mathscr{F})$, il suffit de vérifier la relation de cocycle (1.1.2.2), ce qui résulte de (2.10.28.2). La correspondance ainsi définie est clairement fonctorielle en $\mathscr{F}$.

4.7.4. Pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module $\mathscr{F}$, la restriction du foncteur $\Theta(\mathscr{F})$ (4.7.3.1) à $\mathbf{B}^\circ_{\mathfrak{X}}$ définit un faisceau $\{(\mathfrak{X}', \varphi) \mapsto \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F})\}$ du topos total $\mathfrak{T}_{\mathfrak{X}}$ (4.5.19). On appelle *fibre rigide* de $\mathscr{F}$ et on note $\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ le faisceau de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ défini par la formule

$$\mathscr{F}^{\mathrm{rig}} = \varpi^*(\{(\mathfrak{X}', \varphi) \mapsto \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F})\}), \tag{4.7.4.1}$$

où $\varpi\colon \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}} \to \mathfrak{T}_{\mathfrak{X}}$ est le morphisme canonique (4.5.21.2). On a un isomorphisme fonctoriel (4.5.26.1)

$$\mathscr{F}^{\mathrm{rig}} \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathbf{B}^\circ_{\mathfrak{X}}} \mu^*_{\varphi}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F})). \tag{4.7.4.2}$$

4.7.5. Il résulte de 2.10.6, 2.10.27.6 et 4.5.31 que si $\mathscr{A}$ est une $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbre, $\mathscr{A}^{\mathrm{rig}}$ est un anneau de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$. En particulier, $(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})^{\mathrm{rig}}$ est un anneau, que l'on note aussi $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$. De plus, la correspondance $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ est un foncteur de la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules dans la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$-modules.

On a un morphisme canonique de topos annelés (4.5.31.1)

$$\varrho_{\mathfrak{X}}\colon (\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}) \to (\mathfrak{X}_{\mathrm{zar}}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})) \tag{4.7.5.1}$$

dont le morphisme de topos sous-jacent est $\rho_{\mathfrak{X}}$ (4.5.2.1). Il induit un morphisme canonique de topos annelés que l'on note abusivement

$$\rho_{\mathfrak{X}}\colon (\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}) \to (\mathfrak{X}_{\mathrm{zar}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}). \tag{4.7.5.2}$$

Suivant la convention (1.1.11), nous utilisons pour les modules la notation $\rho_{\mathfrak{X}}^{-1}$ pour désigner l'image réciproque au sens des faisceaux abéliens en réservant la notation $\rho_{\mathfrak{X}}^{*}$ (resp. $\varrho_{\mathfrak{X}}^{*}$) pour l'image réciproque au sens des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules (resp. $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-modules).

Il résulte de (4.7.4.2) que pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module $\mathscr{F}$, on a des homomorphismes fonctoriels

$$\varrho_{\mathfrak{X}}^{*}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})) = \rho_{\mathfrak{X}}^{-1}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})) \otimes_{\rho_{\mathfrak{X}}^{-1}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}))} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}} \to \mathscr{F}^{\mathrm{rig}}, \tag{4.7.5.3}$$

$$\rho_{\mathfrak{X}}^{*}(\mathscr{F}) = \rho_{\mathfrak{X}}^{-1}(\mathscr{F}) \otimes_{\rho_{\mathfrak{X}}^{-1}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}} \to \mathscr{F}^{\mathrm{rig}}. \tag{4.7.5.4}$$

Proposition 4.7.6. *Soient $f : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ un morphisme de $\mathbf{S}$ tel que f^{rig} soit un isomorphisme, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Alors l'homomorphisme* (2.10.27.2)

$$\beta_f(\mathscr{F})\colon \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) \to f_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(f^*\mathscr{F}))$$

est bijectif.

En effet, en vertu de 4.1.15 et (2.10.28.2), on peut se borner au cas où $f \in \mathbf{B}$, ce qui nous ramène au théorème 3.5.5.

Corollaire 4.7.7. *Soient $f : (\mathfrak{X}'', \psi) \to (\mathfrak{X}', \varphi)$ une flèche de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Alors l'homomorphisme* (4.7.3.2)

$$\gamma_f(\mathscr{F})\colon \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F}) \to f_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\psi^*\mathscr{F}))$$

est bijectif.

Corollaire 4.7.8. *Soient $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, $(\mathfrak{X}', \varphi)$ un objet de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$, U un ouvert de $\mathfrak{X}'$, $\mathscr{U}$ le schéma formel induit par $\mathfrak{X}'$ sur U. Alors il existe des isomorphismes canoniques fonctoriels*

$$\mu_{\varphi *}(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}) \simeq \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F}), \tag{4.7.8.1}$$

$$\Gamma(\mathscr{U}^{\mathrm{rig}}, \mathscr{F}^{\mathrm{rig}}) \simeq \Gamma(U, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F})). \tag{4.7.8.2}$$

En effet, l'isomorphisme (4.7.8.1) résulte de 4.5.22 et 4.7.7, et il implique l'isomorphisme (4.7.8.2) car on a $\Gamma(\mathscr{U}^{\mathrm{rig}}, \mathscr{F}^{\mathrm{rig}}) = \Gamma(U, \mu_{\varphi *}(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}))$ (4.5.10.2).

Remarque 4.7.9. Soient A un anneau idyllique, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, J un idéal de définition de type fini de A, M un A-module cohérent, $\mathscr{F} = M^{\Delta}$.

(i) Il résulte de (4.7.8.2) et (2.10.5.1) qu'on a un isomorphisme canonique

$$\Gamma(\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}, \mathscr{F}^{\mathrm{rig}}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J), \widetilde{M}). \tag{4.7.9.1}$$

(ii) Soient $\mathfrak{a}$ un idéal ouvert de type fini de A, $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ un système fini de générateurs de $\mathfrak{a}$, $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ l'éclatement de $\mathfrak{a}^{\Delta}$ dans $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'_i$ l'ouvert maximal de $\mathfrak{X}'$ où a_i engendre l'idéal inversible $\mathfrak{a}^{\Delta}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$ $(0 \leq i \leq n)$, $\mathfrak{X}'_{ij} = \mathfrak{X}'_i \cap \mathfrak{X}'_j$ $(0 \leq i, j \leq n)$. Supposons que φ soit de présentation finie (par exemple, si A est rig-pur (3.1.4)). Comme $(\mathfrak{X}'^{\mathrm{rig}}_i \to \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}})_{0\leq i\leq n}$ est un recouvrement admissible (4.3.9), la suite

$$0 \to \Gamma(\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}, \mathscr{F}^{\mathrm{rig}}) \to \prod_{0\leq i\leq n} \Gamma(\mathfrak{X}'^{\mathrm{rig}}_i, \mathscr{F}^{\mathrm{rig}}) \rightrightarrows \prod_{0\leq i,j\leq n} \Gamma(\mathfrak{X}'^{\mathrm{rig}}_{ij}, \mathscr{F}^{\mathrm{rig}}) \quad (4.7.9.2)$$

est exacte. Compte tenu de (4.7.8.2), on retrouve ainsi la suite exacte (3.5.7.1), c'est à dire, l'énoncé originel du théorème d'acyclicité de Tate.

Proposition 4.7.10.

(i) *Si $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module de type fini et rig-nul* (2.10.1.4), *$\mathscr{F}^{\mathrm{rig}} = 0$.*

(ii) *Pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathscr{F}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) $\mathscr{F}^{\mathrm{rig}} = 0$.
- (a′) $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) = 0$, *i.e., $\mathscr{F}$ est rig-nul* (2.10.10).
- (b) *Pour tout point rigide $\mathscr{P}$ de $\mathfrak{X}$* (3.3.1), *si l'on note $i\colon \mathscr{P} \to \mathfrak{X}$ l'injection canonique, on a $(i^*\mathscr{F})^{\mathrm{rig}} = 0$.*
- (b′) *Pour tout point rigide $\mathscr{P}$ de $\mathfrak{X}$, si l'on note $i\colon \mathscr{P} \to \mathfrak{X}$ l'injection canonique, $i^*\mathscr{F}$ est rig-nul.*

(i) En effet, il résulte de 2.10.10 que $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F}) = 0$ pour tout $(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$.

(ii) D'une part, les conditions (a) et (a′) sont équivalentes en vertu de (i) et 4.7.8. De même, les conditions (b) et (b′) sont équivalentes. D'autre part, les conditions (a′) et (b′) sont équivalentes d'après 3.3.13.

Proposition 4.7.11. *Le foncteur $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ est exact sur la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents.*

On désigne par $\mathbf{B}'_{\mathfrak{X}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ formée des éclatements dans $\mathfrak{X}$ d'un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$; elle est cofinale dans $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$. Soit $0 \to \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2 \to \mathscr{F}_3 \to 0$ une suite exacte de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents. Pour tout objet $(\mathfrak{X}', \varphi)$ de $\mathbf{B}'_{\mathfrak{X}}$, la suite

$$0 \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F}_1) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F}_2) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F}_3) \to 0$$

est exacte en vertu de 3.5.12. On en déduit par 4.5.30 que la suite $0 \to \mathscr{F}_1^{\mathrm{rig}} \to \mathscr{F}_2^{\mathrm{rig}} \to \mathscr{F}_3^{\mathrm{rig}} \to 0$ est exacte.

Corollaire 4.7.12. *Soient $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, $\overline{\mathscr{F}}$ son transformé strict* (2.10.1.4). *Alors les deux morphismes* *canoniques*

$$(\mathscr{J}\mathscr{F})^{\mathrm{rig}} \to \mathscr{F}^{\mathrm{rig}} \to (\overline{\mathscr{F}})^{\mathrm{rig}}$$

sont bijectifs.

Corollaire 4.7.13. *Soit* $u\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ *un morphisme de* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$*-modules cohérents. Si* $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(u)$ *est un isomorphisme, alors* u^{rig} *est un isomorphisme.*

Cela résulte de 2.10.22(i) et 4.7.11.

4.7.14. Soient $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ un morphisme de $\mathbf{S}^+$, $\underline{f}\colon \mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}} \to \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ le morphisme de topos associé (4.4.7.1), $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module,

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{Y}' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathfrak{X}' \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathfrak{Y} \arrow[r, "f"] & \mathfrak{X} \end{tikzcd}$$

un objet de $\mathbf{B}_f$ (4.6.1). On note

$$u_{f'}(\mathscr{F})\colon \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F}) \to f'_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\psi^*(f^*\mathscr{F}))) \tag{4.7.14.1}$$

le morphisme composé

$$\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F}) \xrightarrow{\beta_{f'}(\varphi^*\mathscr{F})} f'_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(f'^*(\varphi^*\mathscr{F}))) \xrightarrow[\sim]{(4.7.1.2)} f'_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\psi^*(f^*\mathscr{F}))) \ ,$$

où $\beta_{f'}(\varphi^*\mathscr{F})$ est le morphisme (2.10.27.2).

Supposons que $\mathscr{F}$ soit un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent ; donc $f^*(\mathscr{F})$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module cohérent (2.8.11). Compte tenu de 4.7.8, $u_{f'}(\mathscr{F})$ est un morphisme de $\mu_{\varphi*}(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}})$ dans $f'_*(\mu_{\psi*}((f^*\mathscr{F})^{\mathrm{rig}}))$. Il résulte de 4.7.3 que ces morphismes vérifient des relations de compatibilité du type (4.6.8.4). Donc en vertu de 4.6.9, ils définissent un morphisme canonique fonctoriel en $\mathscr{F}$

$$\delta'_f(\mathscr{F})\colon \mathscr{F}^{\mathrm{rig}} \quad\to\quad \underline{f}_*((f^*\mathscr{F})^{\mathrm{rig}}). \tag{4.7.14.2}$$

On désigne par

$$\delta_f(\mathscr{F})\colon \underline{f}^*(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}) \quad\to\quad (f^*\mathscr{F})^{\mathrm{rig}} \tag{4.7.14.3}$$

le morphisme adjoint de $\delta'_f(\mathscr{F})$.

Si $\mathscr{A}$ est une $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbre cohérente, $\delta_f(\mathscr{A})$ et $\delta'_f(\mathscr{A})$ sont des homomorphismes d'anneaux (2.10.27.6) ; en particulier, $\delta_f(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ et $\delta'_f(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ sont des homomorphismes d'anneaux. D'autre part, $\delta_f(\mathscr{F})$ est un di-homomorphisme de modules relatif à l'homomorphisme $\delta_f(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$, et $\delta'_f(\mathscr{F})$ est un di-homomorphisme de modules relatif à l'homomorphisme $\delta'_f(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$.

4.7.15. Soient $g\colon \mathfrak{Z} \to \mathfrak{Y}$, $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ deux morphismes de $\mathbf{S}^+$, $h = fg$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. On laisse au lecteur le soin de vérifier que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}^{\mathrm{rig}} \arrow[rr, "\delta'_h(\mathscr{F})"] \arrow[d, "\delta'_f(\mathscr{F})"'] & & \underline{h}_*((h^*\mathscr{F})^{\mathrm{rig}}) \\ \underline{f}_*((f^*\mathscr{F})^{\mathrm{rig}}) \arrow[d, "\underline{f}_*(\delta'_g(f^*\mathscr{F}))"'] & & \\ \underline{f}_*(\underline{g}_*((g^*(f^*\mathscr{F}))^{\mathrm{rig}})) \arrow[rr, "(4.7.1.2)"] & & \underline{f}_*(\underline{g}_*((h^*\mathscr{F})^{\mathrm{rig}})) \arrow[uu, "(4.4.7.2)"'] \end{tikzcd} \tag{4.7.15.1}$$

est commutatif. Par adjonction, il en est de même du diagramme

$$\begin{tikzcd} \underline{h}^*(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}) \arrow[rr, "\delta_h(\mathscr{F})"] & & (h^*\mathscr{F})^{\mathrm{rig}} \\ \underline{g}^*(\underline{f}^*(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}})) \arrow[u, "(4.4.7.3)"] \arrow[r, "\underline{g}^*(\delta_f(\mathscr{F}))"] & \underline{g}^*((f^*\mathscr{F})^{\mathrm{rig}}) \arrow[r, "\delta_g(f^*\mathscr{F})"] & (g^*(f^*\mathscr{F}))^{\mathrm{rig}} \arrow[u, "(4.7.1.2)"'] \end{tikzcd} \tag{4.7.15.2}$$

Si on note $\mathrm{Fais}'(\mathbf{S}^+_{/\mathfrak{X}}, \mathrm{ad})$ la catégorie fibrée obtenue par le changement de base de $\mathrm{Fais}'(\mathbf{S}^+, \mathrm{ad})$ (4.4.7.5) au moyen du foncteur “source” $(\mathbf{S}^+_{/\mathfrak{X}})^\circ \to (\mathbf{S}^+)^\circ$, on obtient ainsi un foncteur de la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents dans

$$\mathbf{Hom}_{(\mathbf{S}^+_{/\mathfrak{X}})^\circ}((\mathbf{S}^+_{/\mathfrak{X}})^\circ, \mathrm{Fais}'(\mathbf{S}^+_{/\mathfrak{X}}, \mathrm{ad}))$$

défini par (1.1.1)

$$\mathscr{F} \mapsto \{(\mathfrak{Y}, f) \mapsto (f^*\mathscr{F})^{\mathrm{rig}}\}.$$

Proposition 4.7.16. *Soient $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ un morphisme de $\mathbf{B}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Alors les morphismes $\delta_f(\mathscr{F})$ et $\delta'_f(\mathscr{F})$ sont des isomorphismes.*

Comme f^{rig} est un isomorphisme, il suffit de montrer que $\delta'_f(\mathscr{F})$ est un isomorphisme. Si $(\mathfrak{Y}', \psi)$ est un objet de $\mathbf{B}_{\mathfrak{Y}}$, $(\mathfrak{Y}', f\psi)$ est un objet de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ (3.1.14). Donc pour tout objet $(\mathfrak{Y}', \psi, \mathfrak{X}', \varphi, f')$ de $\mathbf{B}_f$ (4.6.1), f' s'identifie à un morphisme de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$. Par suite, le morphisme $u_{f'}(\mathscr{F})$ (4.7.14.1) est un isomorphisme en vertu de 4.7.6, et la proposition résulte de 4.6.10(i).

Proposition 4.7.17. *Soient $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ une immersion ouverte de $\mathbf{S}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Alors le morphisme $\delta_f(\mathscr{F})$ est un isomorphisme.*

Considérons la catégorie $\mathbf{B}_f$ (4.6.1) et la sous-catégorie strictement pleine $\mathbf{B}'_f$ définie dans 4.6.11. En vertu de 4.6.10(ii) et 4.6.11, il suffit de montrer que, pour tout $(\mathfrak{Y}', \psi, \mathfrak{X}', \varphi, f') \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}'_f)$, le morphisme

$$u'_{f'}(\mathscr{F})\colon f'^{-1}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F})) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\psi^*(f^*\mathscr{F}))$$

adjoint de $u_{f'}(\mathscr{F})$ (4.7.14.1) est un isomorphisme. Cela résulte du fait que le morphisme (2.10.27.1)

$$\alpha_{f'}(\varphi^*\mathscr{F})\colon f'^{-1}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F})) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(f'^*(\varphi^*\mathscr{F}))$$

est un isomorphisme, car f' est une immersion ouverte.

Corollaire 4.7.18. *Soient $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ un morphisme de $\mathbf{S}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Si f^{rig} est une immersion ouverte, le morphisme $\delta_f(\mathscr{F})$ est un isomorphisme.*

Cela résulte de (4.7.15.2), 4.7.16 et 4.7.17.

Proposition 4.7.19. *Soient $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ une immersion fermée de $\mathbf{S}$, $\mathscr{G}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module cohérent, $\mathscr{F} = f_*(\mathscr{G})$ (qui est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent). Alors, si on identifie $\mathscr{G}$ et $f^*(\mathscr{F})$ par l'isomorphisme d'adjonction $f^*f_*(\mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{G}$, les morphismes*

$$\delta_f(\mathscr{F})\colon \underline{f}^*(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}) \to \mathscr{G}^{\mathrm{rig}} \tag{4.7.19.1}$$

$$\delta'_f(\mathscr{F})\colon \mathscr{F}^{\mathrm{rig}} \to \underline{f}_*(\mathscr{G}^{\mathrm{rig}}) \tag{4.7.19.2}$$

sont des isomorphismes.

Considérons la catégorie $\mathbf{B}_f$ (4.6.1) et la sous-catégorie strictement pleine $\mathbf{B}'_f$ définie dans 4.6.11. En vertu de 4.6.10 et 4.6.11, il suffit de montrer que, pour tout $(\mathfrak{Y}', \psi, \mathfrak{X}', \varphi, f') \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}'_f)$, le morphisme (4.7.14.1)

$$u_{f'}(\mathscr{F})\colon \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F}) \to f'_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\psi^*\mathscr{G}))$$

et le morphisme adjoint

$$u'_{f'}(\mathscr{F})\colon f'^{-1}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F})) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\psi^*\mathscr{G})$$

sont bijectifs. Cela revient à montrer que les morphismes adjoints (2.10.27)

$$\alpha_{f'}(\varphi^*\mathscr{F})\colon f'^{-1}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F})) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\psi^*\mathscr{G})$$
$$\beta_{f'}(\varphi^*\mathscr{F})\colon \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F}) \to f'_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\psi^*\mathscr{G}))$$

sont bijectifs. Posons $\mathscr{F}' = f'_*(\psi^*\mathscr{G})$ et soit $\nu\colon \varphi^*(\mathscr{F}) \to \mathscr{F}'$ le morphisme de changement de base. On a alors

$$\begin{aligned} \alpha_{f'}(\varphi^*\mathscr{F}) &= \alpha_{f'}(\mathscr{F}') \circ f'^{-1}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\nu)), \\ \beta_{f'}(\varphi^*\mathscr{F}) &= \beta_{f'}(\mathscr{F}') \circ \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\nu). \end{aligned}$$

On rappelle que f' est une immersion fermée (3.2.3.7). Il résulte de la définition (2.10.27.1) que $\alpha_{f'}(\mathscr{F}')$ est un isomorphisme, et de 2.10.31.5 que $\beta_{f'}(\mathscr{F}')$ est un isomorphisme. D'autre part, $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\nu)$ est un isomorphisme en vertu de 3.5.16, d'où notre assertion.

4.7.20. Soit $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de $\mathbf{S}^+$. L'homomorphisme d'anneaux $\delta'_f(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ (4.7.14.2) permet de considérer $\underline{f}$ comme un morphisme de topos annelés

$$\underline{f}\colon (\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}) \to (\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}}). \tag{4.7.20.1}$$

Suivant la convention (1.1.11), nous utilisons pour les modules la notation $\underline{f}^{-1}$ pour designer l'image inverse au sens des faisceaux abéliens en réservant la notation $\underline{f}^*$ pour l'image inverse au sens des modules. Nous désignons par $\mathrm{R}^q\underline{f}_*$ ($q \in \mathbb{N}$) les foncteurs dérivés du foncteur $\underline{f}_*\colon \mathbf{Mod}(\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}) \to \mathbf{Mod}(\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}})$ pour les modules.

Remarque 4.7.21. Si $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ est une immersion ouverte de $\mathbf{S}$, le morphisme de topos annelés $\underline{f}\colon (\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}) \to (\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}})$ (4.7.20.1) s'identifie canoniquement au morphisme de localisation relativement à f^{rig} ([1] IV 11.2.1). Cela résulte de 4.4.3 et 4.7.17.

4.7.22. Le topos fibré $\mathrm{Fais}(\mathbf{S}^+, \mathrm{ad})$ (4.4.7.4) est annelé ([26] VI 8.6.1) par la donnée pour tout objet $\mathfrak{X}$ de $\mathbf{S}^+$ de l'anneau $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$ et pour tout morphisme $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ de $\mathbf{S}^+$ du morphisme $\delta'_f(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})\colon \mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}} \to \underline{f}_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}})$. En effet, ces derniers vérifient les relations de compatibilité requises (4.7.15.1). En particulier, le topos fibré $\mathrm{Fais}(\mathbf{S}, \mathrm{ad})$ (4.4.7.6) est canoniquement annelé.

Proposition 4.7.23. *Soit $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de $\mathbf{S}^+$. Pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module cohérent $\mathscr{G}$, le morphisme*

$$\underline{f}^*(\mathscr{G}^{\mathrm{rig}}) = \underline{f}^{-1}(\mathscr{G}^{\mathrm{rig}}) \otimes_{\underline{f}^{-1}(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}})} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}} \to (f^*\mathscr{G})^{\mathrm{rig}} \tag{4.7.23.1}$$

déduit de $\delta_f(\mathscr{G})$ est un isomorphisme.

La question étant locale sur $\mathfrak{X}$ et sur $\mathfrak{Y}$ (4.7.21 et 4.7.17), on peut supposer que l'on a une suite exacte de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-modules $\mathscr{O}^m_{\mathfrak{Y}} \to \mathscr{O}^n_{\mathfrak{Y}} \to \mathscr{G} \to 0$. Il résulte de 4.7.11 qu'on a une suite exacte $\mathscr{O}^m_{\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}} \to \mathscr{O}^n_{\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}} \to \mathscr{G}^{\mathrm{rig}} \to 0$ et un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
\underline{f}^*(\mathscr{O}^m_{\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}}) \arrow[r] \arrow[d, "u_2"'] & \underline{f}^*(\mathscr{O}^n_{\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}}) \arrow[r] \arrow[d, "u_1"'] & \underline{f}^*(\mathscr{G}^{\mathrm{rig}}) \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & 0 \\
(\mathscr{O}^m_{\mathfrak{X}})^{\mathrm{rig}} \arrow[r] & (\mathscr{O}^n_{\mathfrak{X}})^{\mathrm{rig}} \arrow[r] & (f^*\mathscr{G})^{\mathrm{rig}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Il est évident que u_1 et u_2 sont des isomorphismes ; donc il en est de même de u.

4.7.24. Soit $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de $\mathbf{S}^+$. Il résulte de (4.5.2.2) et des définitions que le diagramme de morphismes de topos annelés

$$\begin{tikzcd}
(\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}) \arrow[r, "\underline{f}"] \arrow[d, "\varrho_{\mathfrak{X}}"'] & (\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}}) \arrow[d, "\varrho_{\mathfrak{Y}}"] \\
(\mathfrak{X}_{\mathrm{zar}}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})) \arrow[r, "f_{\mathrm{g}}"] & (\mathfrak{Y}_{\mathrm{zar}}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}))
\end{tikzcd} \tag{4.7.24.1}$$

où f_{g} est le morphisme (2.10.29.1) et $\varrho_{\mathfrak{X}}$ et $\varrho_{\mathfrak{Y}}$ sont les morphismes (4.7.5.1), est commutatif à isomorphisme canonique près. Il en est alors de même du diagramme de morphismes de topos annelés

$$\begin{tikzcd}
(\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}) \arrow[r, "\underline{f}"] \arrow[d, "\rho_{\mathfrak{X}}"'] & (\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}}) \arrow[d, "\rho_{\mathfrak{Y}}"] \\
(\mathfrak{X}_{\mathrm{zar}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \arrow[r, "f"] & (\mathfrak{Y}_{\mathrm{zar}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})
\end{tikzcd} \tag{4.7.24.2}$$

Proposition 4.7.25. *Pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathscr{F}$, le morphisme canonique* (4.7.5.4)

$$\rho^*_{\mathfrak{X}}(\mathscr{F}) \to \mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$$

est un isomorphisme.

La question étant locale (4.7.24.2 et 4.7.17), on peut supposer que l'on a une suite exacte de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules $\mathscr{O}^m_{\mathfrak{X}} \to \mathscr{O}^n_{\mathfrak{X}} \to \mathscr{F} \to 0$. Il résulte de 4.7.11 qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\rho^*_{\mathfrak{X}}(\mathscr{O}^m_{\mathfrak{X}}) \arrow[r] \arrow[d, "u_2"'] & \rho^*_{\mathfrak{X}}(\mathscr{O}^n_{\mathfrak{X}}) \arrow[r] \arrow[d, "u_1"'] & \rho^*_{\mathfrak{X}}(\mathscr{F}) \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & 0 \\
\mathscr{O}^m_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}} \arrow[r] & \mathscr{O}^n_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}} \arrow[r] & \mathscr{F}^{\mathrm{rig}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes. Comme u_1 et u_2 sont clairement des isomorphismes, u est un isomorphisme.

Corollaire 4.7.26. *Soient $u \colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents, $v \colon \mathscr{F}^{\mathrm{rig}} \to \mathscr{G}^{\mathrm{rig}}$ un morphisme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$-linéaire. Supposons le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) \arrow[r, "\rho_{\mathfrak{X}*}(v)"] & \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G}) \\
\mathscr{F} \arrow[r, "u"] \arrow[u, "c_{\mathscr{F}}"] & \mathscr{G} \arrow[u, "c_{\mathscr{G}}"']
\end{tikzcd}$$

déduit de (4.7.8.1) *commutatif, où $c_{\mathscr{F}}$ et $c_{\mathscr{G}}$ sont les morphismes canoniques* (*par exemple si $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(u) = \rho_{\mathfrak{X}*}(v)$*) *; alors $v = u^{\mathrm{rig}}$.*

En effet, par adjonction, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}^{\mathrm{rig}} \arrow[r, "v"] & \mathscr{G}^{\mathrm{rig}} \\
\rho^*_{\mathfrak{X}}(\mathscr{F}) \arrow[r, "\rho^*_{\mathfrak{X}}(u)"] \arrow[u] & \rho^*_{\mathfrak{X}}(\mathscr{G}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les morphismes (4.7.5.4), est commutatif. Il en résulte par 4.7.25 que $v = u^{\mathrm{rig}}$.

Corollaire 4.7.27. *Le morphisme de topos annelés* $\rho_{\mathfrak{X}}\colon (\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}) \to (\mathfrak{X}_{\mathrm{zar}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ *est plat.*

En effet, $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ étant cohérent (2.8.1) et $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ ayant suffisamment de points (4.4.6), on se ramène à vérifier la condition 1.3.17(ii) pour tout ouvert de $\mathfrak{X}$. Il suffit alors de montrer que le foncteur $\mathscr{F} \mapsto \rho^*_{\mathfrak{X}}(\mathscr{F})$ est exact sur la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents ((4.7.24.2) et 4.7.17), ce qui résulte de 4.7.25 et 4.7.11.

Corollaire 4.7.28. *Supposons que* $\mathfrak{X}$ *admette localement un idéal de définition monogène.*

(i) *Pour tout* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$*-module cohérent* $\mathscr{F}$*, le morphisme canonique* (4.7.5.3)

$$\varrho^*_{\mathfrak{X}}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})) \to \mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$$

est un isomorphisme.

(ii) *Le morphisme de topos annelés* $\varrho_{\mathfrak{X}}\colon (\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}) \to (\mathfrak{X}_{\mathrm{zar}}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}))$ *est plat.*

(i) Cela résulte de 2.10.19(i) et 4.7.25.

(ii) En effet, $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ étant cohérent (2.10.24) et $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ ayant suffisamment de points (4.4.6), on se ramène à vérifier la condition 1.3.17(ii) pour tout ouvert de $\mathfrak{X}$. Il suffit alors de vérifier que le foncteur $\mathscr{F} \mapsto \varrho^*_{\mathfrak{X}}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}))$ est exact sur la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents (2.10.24(iii), (4.7.24.1) et 4.7.17), ce qui résulte de (i) et 4.7.11.

Corollaire 4.7.29. *Soient* $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ *deux* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$*-modules cohérents. Alors il existe des isomorphismes fonctoriels*

$$(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{G})^{\mathrm{rig}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}^{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}} \mathscr{G}^{\mathrm{rig}}, \tag{4.7.29.1}$$

$$(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}))^{\mathrm{rig}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}}(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}, \mathscr{G}^{\mathrm{rig}}). \tag{4.7.29.2}$$

De plus, si $\mathfrak{X}$ *admet localement un idéal de définition monogène, l'application* $u \mapsto \rho_{\mathfrak{X}*}(u)$ *est un isomorphisme fonctoriel*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}}(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}, \mathscr{G}^{\mathrm{rig}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}), \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G})). \tag{4.7.29.3}$$

L'isomorphisme (4.7.29.1) résulte de 4.7.25 et ([1] IV 13.4.4). L'isomorphisme (4.7.29.2) découle de 4.7.25 et 4.7.27, en calquant la preuve de ([28] 0.5.7.6). L'isomorphisme (4.7.29.3) s'interprète comme un isomorphisme d'adjonction compte tenu de (4.7.8.2) et 4.7.28(i).

4.7.30. Soit $A_{\mathfrak{X}}$ l'anneau $\varpi_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}})$ du topos total $\mathfrak{T}_{\mathfrak{X}}$ (4.5.19), où $\varpi\colon \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}} \to \mathfrak{T}_{\mathfrak{X}}$ est le morphisme (4.5.21.2). On a $A_{\mathfrak{X}} = \{(\mathfrak{X}', \varphi) \mapsto \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'})\}$ (4.5.22 et 4.7.8). On désigne encore par

$$\varpi\colon (\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}) \to (\mathfrak{T}_{\mathfrak{X}}, A_{\mathfrak{X}}) \tag{4.7.30.1}$$

le morphisme de topos annelés déduit de ϖ. On a $\varpi^{-1}(A_{\mathfrak{X}}) = \mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$ (4.5.24) et par suite, l'image réciproque pour les modules est isomorphe à l'image réciproque pour les faisceaux abéliens.

Pour tout $(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$, on désigne encore par

$$\mu_\varphi \colon (\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}) \to (\mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'})) \tag{4.7.30.2}$$

le morphisme de topos annelés déduit de (4.5.10.2) et (4.7.4.2). Suivant la convention (1.1.11), nous utilisons pour les modules la notation μ_φ^{-1} pour designer l'image inverse au sens des faisceaux abéliens en réservant la notation μ_φ^* pour l'image inverse au sens des modules.

Les énoncés 4.7.31 et 4.7.32 qui suivent sont calqués sur ([1] VI 8.7.2 et 8.7.3).

Lemme 4.7.31. *Les hypothèses étant celles de* (4.7.30), *soient de plus* $f \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ *un morphisme de* $\mathbf{S}^+$, $\{(\mathfrak{X}', \varphi) \mapsto F_\varphi\}$ *un* $A_{\mathfrak{X}}$*-module injectif. Alors* $\varpi^*(\{(\mathfrak{X}', \varphi) \mapsto F_\varphi\})$ *est un* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$*-module acyclique pour* $\underline{f}_*$ *et pour tout* $(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$, F_φ *est flasque.*

Soit $(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$. Le topos fibré

$$(\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}})_{/\mathfrak{X}'} \to (\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})_{/(\mathfrak{X}', \varphi)}$$

est déduit de $\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}} \to \mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ par le changement de base $(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})_{/(\mathfrak{X}', \varphi)} \to \mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$. Le topos total de $(\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}})_{/\mathfrak{X}'}$ s'identifie au topos localisé $(\mathfrak{T}_{\mathfrak{X}})_{/\mathfrak{X}'}$ (1.1.6). Le faisceau $\{(\mathfrak{X}'', \psi) \mapsto F_\psi\}$ étant injectif est flasque ([1] V 4.6). Sa restriction au topos $(\mathfrak{T}_{\mathfrak{X}})_{/\mathfrak{X}'}$ est flasque ([1] V 4.11). Le foncteur de restriction de $(\mathfrak{T}_{\mathfrak{X}})_{/\mathfrak{X}'}$ à $\mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}}$ (4.5.18) est un foncteur image directe par un morphisme de topos ([1] VI 7.4.12). Par suite, il transforme les modules flasques en modules flasques ([1] V 4.9). Donc F_φ est flasque.

Montrons la première assertion du lemme. Posons $G' = \varpi^*(\{(\mathfrak{X}', \varphi) \mapsto F_\varphi\})$. D'après ([1] VI 8.5.3.1), pour tout $(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$, on a

$$\mu_{\varphi *}(G') \simeq \varinjlim_{g \colon (\mathfrak{X}'', \psi) \to (\mathfrak{X}', \varphi)} g_*(F_\psi).$$

On notera que les conditions de *loc. cit.* sont satisfaites (4.5.1 et [1] VI 8.5.11). Pour tout morphisme $h \colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{Z}$ de $\mathbf{S}^+$, on note $\mathrm{R}^q h_*$ ($q \in \mathbb{N}$) les foncteurs dérivés du foncteur $h_* \colon \mathbf{Mod}(\mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}) \to \mathbf{Mod}(\mathfrak{Z}_{\mathrm{zar}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Z}})$. Ces foncteurs commutent aux limites inductives filtrantes (4.5.1 et [1] VI 5.1). On voit donc que le faisceau G' vérifie la propriété suivante :

(P) Pour tout $(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$ et tout morphisme $h \colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{Z}$ de $\mathbf{S}^+$, $\mu_{\varphi *}(G')$ est h_*-acyclique.

Il suffit de montrer que tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$-module G' qui vérifie la propriété (P) est $\underline{f}_*$-acyclique. Comme les injectifs vérifient la propriété (P), il suffit de vérifier les deux propriétés suivantes ([1] V 0.4) : pour toute suite exacte $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$ où G' et G vérifient la propriété (P), (a) G'' vérifie la propriété (P) et

(b) $\underline{f}_*(G) \to \underline{f}_*(G'')$ est un épimorphisme. Posons $K = \operatorname{coker}(\varpi_*(G') \to \varpi_*(G))$, de sorte que K est la section $\{(\mathfrak{X}', \varphi) \mapsto K_\varphi = \operatorname{coker}(\mu_{\varphi *}(G') \to \mu_{\varphi *}(G))\}$. Pour tout morphisme $g\colon (\mathfrak{X}'', \psi) \to (\mathfrak{X}', \varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & g_*(\mu_{\psi *}(G')) \arrow[r] & g_*(\mu_{\psi *}(G)) \arrow[r] & g_*(K_\psi) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mu_{\varphi *}(G') \arrow[r] \arrow[u] & \mu_{\varphi *}(G) \arrow[r] \arrow[u] & K_\varphi \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

Comme $\mu_{\psi *}(G')$ est g_*-acyclique, la suite horizontale du haut est exacte. Comme $\{(\mathfrak{X}', \varphi) \mapsto \mu_{\varphi *}(G')\}$ et $\{(\mathfrak{X}', \varphi) \mapsto \mu_{\varphi *}(G)\}$ sont des sections cartésiennes, les deux premiers morphismes verticaux sont des isomorphismes. Par suite, le morphisme canonique $K_\varphi \to g_*(K_\psi)$ est un isomorphisme et $\{(\mathfrak{X}', \varphi) \mapsto K_\varphi\}$ est une section cartésienne. Donc K est de la forme $\varpi_*(K')$ et les morphismes canoniques $\varpi_*(G) \to K$ et $K \to \varpi_*(G'')$ sont de la forme $\varpi_*(u)$ et $\varpi_*(v)$, car ϖ_* est pleinement fidèle (4.5.21.3). Comme ϖ^* est exact et que $\varpi^*\varpi_*$ est isomorphe à l'identité (4.5.24), v est un isomorphisme et par suite $\varpi_*(v)$ est un isomorphisme. La suite $0 \to \varpi_*(G') \to \varpi_*(G) \to \varpi_*(G'') \to 0$ est donc exacte et par suite, pour tout $(\mathfrak{X}', \varphi) \in \operatorname{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$, la suite $0 \to \mu_{\varphi *}(G') \to \mu_{\varphi *}(G) \to \mu_{\varphi *}(G'') \to 0$ est exacte. On en déduit aussitôt que G'' vérifie la propriété (P). Soit $(\mathfrak{X}', \varphi, \mathfrak{Y}', \psi, f')$ un objet de $\mathbf{B}_f$ (4.6.1) :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X}' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathfrak{Y}' \arrow[d, "\psi"] \\
\mathfrak{X} \arrow[r, "f"] & \mathfrak{Y}
\end{tikzcd}$$

Comme $\mu_{\varphi *}(G')$ est f'_*-acyclique, la suite $0 \to f'_*(\mu_{\varphi *}(G')) \to f'_*(\mu_{\varphi *}(G)) \to f'_*(\mu_{\varphi *}(G'')) \to 0$ est exacte. De plus, on a un isomorphisme (4.6.5.1)

$$\underline{f}_* \simeq \varinjlim_{(\mathfrak{X}', \varphi, \mathfrak{Y}', \psi, f') \in \mathbf{B}_f^\circ} \mu_\psi^{-1} f'_* \mu_{\varphi *}.$$

Le foncteur μ_ψ^{-1} est exact et les limites inductives filtrantes sont exactes. Donc la suite $0 \to \underline{f}_*(G') \to \underline{f}_*(G) \to \underline{f}_*(G'') \to 0$ est exacte.

Théorème 4.7.32. *Les hypothèses étant celles de* (4.7.30), *soient de plus $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de $\mathbf{S}^+$, $\{(\mathfrak{X}', \varphi) \mapsto F_\varphi\}$ un $A_{\mathfrak{X}}$-module. Pour tout entier $q \geq 0$, on a un isomorphisme fonctoriel*

$$\mathrm{R}^q \underline{f}_*(\varpi^*(\{(\mathfrak{X}', \varphi) \mapsto F_\varphi\})) \simeq \varinjlim_{(\mathfrak{X}', \varphi, \mathfrak{Y}', \psi, f') \in \mathbf{B}_f^\circ} \mu_\psi^*(\mathrm{R}^q f'_*(F_\varphi)), \tag{4.7.32.1}$$

où $\mathbf{B}_f$ est la catégorie définie dans (4.6.1)*.*

On a $\varpi^{-1}(A_{\mathfrak{X}}) = \mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$, et par suite l'image réciproque pour les modules est isomorphe à l'image réciproque pour les faisceaux abéliens ; et de même pour $\mathfrak{Y}$. On en déduit par (4.5.26.1) que pour tout $A_{\mathfrak{Y}}$-module $\{(\mathfrak{Y}', \psi) \mapsto G_\psi\}$, le morphisme canonique

$$\varinjlim_{(\mathfrak{Y}',\psi)\in \mathbf{B}^{\circ}_{\mathfrak{Y}}} \mu_\psi^{-1}(G_\psi) \simeq \varinjlim_{(\mathfrak{Y}',\psi)\in \mathbf{B}^{\circ}_{\mathfrak{Y}}} \mu_\psi^{*}(G_\psi) \tag{4.7.32.2}$$

est un isomorphisme. Donc en vertu de 4.6.2(ii), le morphisme canonique

$$\varinjlim_{(\mathfrak{X}',\varphi,\mathfrak{Y}',\psi,f')\in \mathbf{B}^{\circ}_{f}} \mu_\psi^{-1}(G_\psi) \simeq \varinjlim_{(\mathfrak{X}',\varphi,\mathfrak{Y}',\psi,f')\in \mathbf{B}^{\circ}_{f}} \mu_\psi^{*}(G_\psi) \tag{4.7.32.3}$$

est aussi un isomorphisme. D'autre part, on a un isomorphisme canonique (4.6.6.1)

$$\underline{f}_*(\varpi^*(\{(\mathfrak{X}',\varphi) \mapsto F_\varphi\})) \simeq \varinjlim_{(\mathfrak{X}',\varphi,\mathfrak{Y}',\psi,f')\in \mathbf{B}^{\circ}_{f}} \mu_\psi^{-1}(f'_*(F_\varphi)). \tag{4.7.32.4}$$

Comme pour tout injectif $\{(\mathfrak{X}',\varphi) \mapsto F_\varphi\}$, les F_φ sont flasques et $\varpi^*(\{(\mathfrak{X}',\varphi) \mapsto F_\varphi\})$ est $\underline{f}_*$-acyclique (4.7.31), on a un isomorphisme

$$\mathrm{R}^q\underline{f}_*(\varpi^*(\{(\mathfrak{X}',\varphi) \mapsto F_\varphi\})) \simeq \varinjlim_{(\mathfrak{X}',\varphi,\mathfrak{Y}',\psi,f')\in \mathbf{B}^{\circ}_{f}} \mu_\psi^{-1}(\mathrm{R}^q f'_*(F_\varphi)). \tag{4.7.32.5}$$

La formule (4.7.32.1) résulte alors de (4.7.32.3) et (4.7.32.5).

Corollaire 4.7.33. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de $\mathbf{S}^+$, F un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$-module. Pour tout entier $q \geq 0$, on a un isomorphisme fonctoriel*

$$\mathrm{R}^q\underline{f}_*(F) \simeq \varinjlim_{(\mathfrak{X}',\varphi,\mathfrak{Y}',\psi,f')\in \mathbf{B}^{\circ}_{f}} \mu_\psi^{*}(\mathrm{R}^q f'_*(\mu_{\varphi *}(F))). \tag{4.7.33.1}$$

Remarque 4.7.34. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de $\mathbf{S}^+$, $(\mathfrak{X}',\varphi,\mathfrak{Y}',\psi,f')$ un objet de $\mathbf{B}_f$.

(i) On peut remplacer dans (4.7.32.1) et (4.7.33.1) le foncteur μ_ψ^* par le foncteur μ_ψ^{-1}.

(ii) Il résulte de 4.6.7 que le morphisme $\mu_\psi^* \mathrm{R}^q f'_* \mu_{\varphi *} \to \mathrm{R}^q \underline{f}_*$ déduit de (4.7.33.1) est l'adjoint du morphisme composé

$$\mathrm{R}^q f'_* \mu_{\varphi *} \to \mathrm{R}^q (f' \mu_\varphi)_* \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^q(\mu_\psi \underline{f})_* \to \mu_{\psi *}\mathrm{R}^q\underline{f}_*,$$

où le premier et le dernier morphismes proviennent de la suite spectrale de Cartan-Leray et l'isomorphisme central de (4.6.3.10).

4.7.35. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de $\mathbf{S}^+$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module. Le diagramme (4.7.24.2) induit, pour tout $q \geq 0$, un morphisme de changement de base (1.2.3.3)

$$\kappa^q\colon \rho_{\mathfrak{Y}}^*(\mathrm{R}^q f_*\mathscr{F}) \to \mathrm{R}^q \underline{f}_*(\rho_{\mathfrak{X}}^*\mathscr{F}). \tag{4.7.35.1}$$

Si f est propre de présentation finie et si $\mathscr{F}$ est cohérent, les $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-modules $\mathrm{R}^q f_*\mathscr{F}$ sont cohérents (2.11.5). Donc compte tenu de 4.7.25, le morphisme (4.7.35.1) s'écrit aussi sous la forme

$$\kappa^q\colon (\mathrm{R}^q f_*\mathscr{F})^{\mathrm{rig}} \to \mathrm{R}^q \underline{f}_*(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}). \tag{4.7.35.2}$$

Proposition 4.7.36. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme propre de $\mathbf{S}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Alors le morphisme* (4.7.35.2)

$$\kappa^0\colon (f_*\mathscr{F})^{\mathrm{rig}} \to \underline{f}_*(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}})$$

est un isomorphisme.

Si de plus, $\mathfrak{Y}$ admet localement un idéal de définition monogène, alors pour tout $q \geq 0$, le morphisme (4.7.35.2)

$$\kappa^q\colon (\mathrm{R}^q f_*\mathscr{F})^{\mathrm{rig}} \to \mathrm{R}^q \underline{f}_*(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}})$$

est un isomorphisme.

On a des isomorphismes fonctoriels ((4.7.4.2) et (4.7.33.1))

$$(\mathrm{R}^q f_*\mathscr{F})^{\mathrm{rig}} \simeq \varinjlim_{(\mathfrak{Y}',\psi)\in \mathbf{B}_{\mathfrak{Y}}^{\circ}} \mu_\psi^*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\psi^*(\mathrm{R}^q f_*\mathscr{F}))), \tag{4.7.36.1}$$

$$\mathrm{R}^q \underline{f}_*(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}) \simeq \varinjlim_{(\mathfrak{X}',\varphi,\mathfrak{Y}',\psi,f')\in \mathbf{B}_f^{\circ}} \mu_\psi^*(\mathrm{R}^q f'_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F}))). \tag{4.7.36.2}$$

On notera que dans ces formules, on peut remplacer le foncteur μ_ψ^* par le foncteur μ_ψ^{-1}. Il résulte de 4.7.34(ii) et de la définition de κ^q qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} (\mathrm{R}^q f_*\mathscr{F})^{\mathrm{rig}} \arrow[r, "\kappa^q"] & \mathrm{R}^q \underline{f}_*(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}) \\ \rho_{\mathfrak{Y}}^*(\mathrm{R}^q f_*\mathscr{F}) \arrow[u, "a^q"] \arrow[r, "b^q"] & \varrho_{\mathfrak{Y}}^*(\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}))) \arrow[u, "c^q"'] \end{tikzcd} \tag{4.7.36.3}$$

où a^q est le morphisme (4.7.5.4), b^q est le morphisme canonique et c^q provient de (4.7.36.2).

D'après 2.10.31.2 et (3.5.16.1), pour tout objet $(\mathfrak{X}',\varphi,\mathfrak{Y}',\psi,f')$ de $\mathbf{B}_f$, on a des isomorphismes fonctoriels

$$\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\psi^*(f_*\mathscr{F})) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(f'_*(\varphi^*\mathscr{F})) \xrightarrow{\sim} f'_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F})).$$

Appliquant le foncteur μ_ψ^* et prenant la limite inductive sur la catégorie $\mathbf{B}_f^\circ$ (on laissera au lecteur le soin de vérifier les compatibilités), on obtient un isomorphisme fonctoriel $u\colon (f_*\mathscr{F})^{\mathrm{rig}} \xrightarrow{\sim} \underline{f}(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}})$ (4.6.2(ii)). Par définition, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & (f_*\mathscr{F})^{\mathrm{rig}} \arrow[r, "u"] & \underline{f}_*(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}) \\
\rho^*_{\mathfrak{Y}}(f_*\mathscr{F}) \arrow[ur, "a^0"] \arrow[r, "b'"] & \varrho^*_{\mathfrak{Y}}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(f_*\mathscr{F})) \arrow[u, "d^0"'] \arrow[r, "b''"] & \varrho^*_{\mathfrak{Y}}(f_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}))) \arrow[u, "c^0"']
\end{tikzcd} \tag{4.7.36.4}$$

où b' est le morphisme canonique, b'' provient de (2.10.31.1) et d^0 provient de (4.7.36.1), est commutatif. Comme a^0 est un isomorphisme (4.7.25) et que $b^0 = b'' \circ b'$, on déduit de (4.7.36.3) et (4.7.36.4) que $\kappa^0 = u$; par suite κ^0 est un isomorphisme.

Si $\mathfrak{Y}$ admet localement un idéal de définition monogène, pour montrer que κ^q est un isomorphisme pour tout $q \geq 0$, il suffit de calquer la preuve dans le cas où $q = 0$ en remplaçant 2.10.31.2 par (2.10.34.1) et (3.5.16.1) par (3.5.16.2).

Remarque 4.7.37. J'ignore si dans 4.7.36, la condition que $\mathfrak{Y}$ admet localement un idéal de définition monogène est nécessaire dans le cas où $q \geq 1$.

4.8 Modules cohérents sur les espaces rigides cohérents

4.8.1. Nous munirons le topos fibré $\mathrm{Fais}(\mathbf{R}, \mathrm{ad})$ (4.4.2.3) d'une structure annelée canonique ([1] VI 8.6.1), c'est à dire d'une section en anneaux de la catégorie fibrée $\mathrm{Fais}'(\mathbf{R}, \mathrm{ad})$ (4.4.2.4). Cela revient à associer à tout objet X de $\mathbf{R}$ un anneau $\mathscr{O}_X$ de X_{ad}, et à tout morphisme $f\colon X \to Y$ de $\mathbf{R}$ un homomorphisme d'anneaux $\theta_f\colon \mathscr{O}_Y \to f_*(\mathscr{O}_X)$ vérifiant des relations de compatibilité. Rappelons (4.4.7.6) que le changement de base de la catégorie fibrée $\mathrm{Fais}'(\mathbf{R}, \mathrm{ad})$ par le foncteur de localisation $\mathrm{Q}^\circ\colon \mathbf{S}^\circ \to \mathbf{R}^\circ$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Fais}'(\mathbf{S}, \mathrm{ad})$. Nous démontrerons alors qu'il existe une section en anneaux de $\mathrm{Fais}'(\mathbf{R}, \mathrm{ad})$, unique à isomorphisme unique près, telle que la section de $\mathrm{Fais}'(\mathbf{S}, \mathrm{ad})$ déduite par changement de base soit celle définie dans (4.7.22). Plus précisément, nous avons la proposition suivante :

Proposition 4.8.2. *Les notations étant celles de* (4.8.1)*, il existe une section en anneaux de* $\mathrm{Fais}'(\mathbf{R}, \mathrm{ad})$*, unique à isomorphisme unique près, telle que les conditions suivantes soient remplies :*

(i) *Pour tout* $\mathfrak{X} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{S})$*,* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$ *est l'anneau défini dans* (4.7.4.1).

(ii) *Pour tout morphisme* $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ *de* $\mathbf{S}$*,* $\theta_{f^{\mathrm{rig}}}$ *est l'homomorphisme* $\delta'_f(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ (4.7.14.2).

Cela résulte facilement de la description (4.1.7) de la catégorie $\mathbf{R}$, de (4.7.15.1) et du fait que pour tout morphisme $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ de $\mathbf{B}$, $\delta'_f(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ est un isomorphisme (4.7.16).

4.8.3. Si $f\colon X \to Y$ est un morphisme d'espaces rigides cohérents, nous notons encore

$$f\colon (X_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_X) \to (Y_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_Y) \tag{4.8.3.1}$$

le morphisme de topos annelés déduit de l'homomorphisme $\theta_f\colon \mathscr{O}_Y \to f_*(\mathscr{O}_X)$. Suivant la convention (1.1.11), nous utilisons pour les modules la notation f^{-1} pour désigner l'image réciproque au sens des faisceaux abéliens en réservant la notation f^* pour l'image réciproque au sens des modules. Nous désignons par $\mathrm{R}^q f_*$ ($q \in \mathbb{N}$) les foncteurs dérivés du foncteur $f_*\colon \mathbf{Mod}(X_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_X) \to \mathbf{Mod}(Y_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_Y)$ pour les modules.

Proposition 4.8.4. *Si $f\colon X \to Y$ est une immersion ouverte d'espaces rigides cohérents, le morphisme* (4.8.3.1) *s'identifie au morphisme de localisation relativement à f* ([1] IV 11.2.1). *En particulier, si f est un isomorphisme,* (4.8.3.1) *est une équivalence de topos annelés.*

Cela résulte de 4.4.3 et 4.7.18.

4.8.5. Soient $\mathfrak{X}$ un objet de $\mathbf{S}$, $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module, $X = \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$, p un point de X_{ad}. Pour tout $(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$, posons $p_\varphi = \mu_\varphi p$ (4.5.10.2) que l'on identifie à un point de $\mathfrak{X}'$, de sorte que le système projectif (p_φ) est l'image de p dans $\mathscr{V}_\star(\mathfrak{X})$ (4.5.15). Soient $A = \mathscr{O}_{\mathfrak{X}, p_{\mathrm{id}}}$, $J = \mathscr{J}_{p_{\mathrm{id}}}$, $F = \mathscr{F}_{p_{\mathrm{id}}}$, $A_\varphi = \mathscr{O}_{\mathfrak{X}', p_\varphi}$. D'après (4.7.4.2), on a un isomorphisme canonique

$$\mathscr{F}_p^{\mathrm{rig}} \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathbf{B}_{\mathfrak{X}}^\circ} (\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^* \mathscr{F}))_{p_\varphi}. \tag{4.8.5.1}$$

D'autre part, on a un isomorphisme canonique (2.10.2.1)

$$(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^* \mathscr{F}))_{p_\varphi} \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{A_\varphi}(J^n A_\varphi, F \otimes_A A_\varphi). \tag{4.8.5.2}$$

Supposons J principal engendré par $t \in A$. Le sous-module de J-torsion de A_φ est de type fini d'après 2.10.2(ii) et 2.10.14. Donc en vertu de 1.8.34(a), on a un isomorphisme canonique

$$\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{A_\varphi}(J^n A_\varphi, F \otimes_A A_\varphi) \xrightarrow{\sim} F \otimes_A A_\varphi[t^{-1}]. \tag{4.8.5.3}$$

Posons $\mathscr{O}_p = \varinjlim A_\varphi$. On en déduit un isomorphisme canonique ([28] 0.6.1.5)

$$\mathscr{F}_p^{\mathrm{rig}} \xrightarrow{\sim} F \otimes_A \mathscr{O}_p[t^{-1}]. \tag{4.8.5.4}$$

En particulier, on a

$$\mathscr{O}_{X,p} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_p[t^{-1}]. \tag{4.8.5.5}$$

Proposition 4.8.6. *Pour tout espace rigide cohérent X, le topos $(X_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_X)$ est localement annelé.*

On peut clairement se borner au cas où $X = \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ et $\mathfrak{X}$ est un objet rig-pur de $\mathbf{S}$, ayant un idéal de définition inversible $\mathscr{J}$ (4.8.4). Pour tout $(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$, $\mathfrak{X}'$ est rig-pur (3.1.4) ; donc $\mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$ est inversible. Soit p un point de X_{ad}. Reprenons les notations de 4.8.5. Par hypothèse J est principal, engendré par $t \in A$. Comme les anneaux A_φ sont locaux ainsi que les homomorphismes de transition, leur limite inductive $\mathscr{O}_p$ est un anneau local ([28] 0.6.1.4). L'idéal $J\mathscr{O}_p$ est contenu dans l'idéal maximal de $\mathscr{O}_p$. Supposons qu'il existe $s \in \mathscr{O}_p$ tel que $st = 0$. Il existe un objet $(\mathfrak{X}', \varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ tel que $s \in A_\varphi$ et que $st = 0$ dans A_φ ; donc $s = 0$ car JA_φ est inversible. Par suite, $J\mathscr{O}_p$ est inversible. On munit $\mathscr{O}_p$ de la topologie $J\mathscr{O}_p$-préadique. Soit I un idéal ouvert de type fini de $\mathscr{O}_p$. Il est clair que I provient d'un idéal ouvert cohérent $\mathscr{A}$ sur un ouvert U' de $\mathfrak{X}'$, pour un objet $(\mathfrak{X}', \varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$. Compte tenu de 2.8.16, on peut supposer $\mathscr{A}$ défini sur tout $\mathfrak{X}'$. Soit $f\colon \mathfrak{X}'' \to \mathfrak{X}'$ l'éclatement de $\mathscr{A}$ dans $\mathfrak{X}'$. En vertu de 3.1.4, f est un morphisme de $\mathbf{S}$ et $f^*(\mathscr{A})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}''}$ est inversible. Par suite I est monogène ; et comme $J\mathscr{O}_p$ est inversible et que I est ouvert, I est inversible. Donc l'anneau topologique $\mathscr{O}_p$ est prévaluatif (1.9.1), et la proposition est une conséquence de 1.9.4(i) et (4.8.5.5).

4.8.7. Soient A un anneau idyllique, J un idéal de définition de type fini de A, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathscr{P}$ un point rigide fermé de $\mathfrak{X}$. Rappelons que $\mathscr{P}$ détermine un point fermé $\mathfrak{p}$ de $\mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$ (3.3.2). Pour tout $(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$, il existe un unique point rigide fermé $\mathscr{Q}_\varphi$ de $\mathfrak{X}'$ relevant $\mathscr{P}$ (3.3.7). Pour tout morphisme $f\colon (\mathfrak{X}'', \psi) \to (\mathfrak{X}', \varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$, on a $f(\mathscr{Q}_\psi) = \mathscr{Q}_\varphi$ (3.3.5). Soient $\mathfrak{S}_{\mathfrak{X}}$ la catégorie définie dans 4.5.3, $\mathfrak{A}$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{S}_{\mathfrak{X}}$ formée des triplets $(\mathfrak{X}', U, \varphi)$ tels que $(\mathfrak{X}', \varphi)$ soit un objet de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ et que U soit un ouvert formel affine de $\mathfrak{X}'$ contenant $\mathscr{Q}_\varphi$. Alors $\mathfrak{A}$ est une catégorie cofiltrante, fibrée au-dessus de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$. Pour tout $i = (\mathfrak{X}', U, \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{A})$, posons $B_i = \Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}'})$. Comme B_i est idyllique (2.6.12), $\mathscr{Q}_\varphi$ détermine un point fermé $\mathfrak{q}_i$ de $\mathrm{Spec}(B_i) - \mathrm{V}(JB_i)$, qui est évidemment au-dessus de $\mathfrak{p}$. De plus, $A/\mathfrak{p}$ et $B_i/\mathfrak{q}_i$ ont même corps de fractions (3.3.7). Pour tout morphisme $f\colon i \to j$ de $\mathfrak{A}$, notons $u_{ij}\colon B_j \to B_i$ l'homomorphisme canonique. On a clairement $u_{ij}^{-1}(\mathfrak{q}_i) = \mathfrak{q}_j$. Par suite, $i \mapsto (B_i)_{\mathfrak{q}_i}$ est un foncteur de $\mathfrak{A}^\circ$ dans la catégorie des $A_{\mathfrak{p}}$-algèbres locales dont les homomorphismes sont locaux. On pose alors

$$B = \varinjlim_{i \in \mathfrak{A}^\circ} (B_i)_{\mathfrak{q}_i}. \tag{4.8.7.1}$$

Proposition 4.8.8.

(i) *L'anneau B est local et noethérien, et son corps résiduel est canoniquement isomorphe au corps des fractions de $A/\mathfrak{p}$.*

(ii) *L'homomorphisme structural $v\colon A_{\mathfrak{p}} \to B$ est local et fidèlement plat.*

(iii) *Si on note $(A_{\mathfrak{p}})^\wedge$ et $\widehat{B}$ les séparés complétés des anneaux locaux $A_{\mathfrak{p}}$ et B pour les topologies définies par leurs idéaux maximaux respectifs, l'homomor-*

phisme $\hat{v}\colon (A_{\mathfrak{p}})^\wedge \to \widehat{B}$ déduit de v par prolongement aux complétés est un isomorphisme.

On désigne par $\mathfrak{A}'$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{A}$ formée des triplets $(\mathfrak{X}', U, \varphi)$ tels que φ soit l'éclatement dans $\mathfrak{X}$ d'un idéal de définition cohérent. Il est clair que $\mathfrak{A}'^\circ$ est filtrante et cofinale dans $\mathfrak{A}^\circ$. En vertu de 3.3.6, pour tout $i \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{A}')$, l'homomorphisme structural $A_{\mathfrak{p}} \to (B_i)_{\mathfrak{q}_i}$ induit un isomorphe entre les séparés complétés de ces anneaux locaux. On en déduit un homomorphisme local canonique

$$u_i\colon (B_i)_{\mathfrak{q}_i} \to (A_{\mathfrak{p}})^\wedge.$$

Ces homomorphismes sont clairement compatibles aux morphismes de transition du système inductif des $(B_i)_{\mathfrak{q}_i}$. Comme $(B_i)_{\mathfrak{q}_i}$ est noethérien (1.10.2), u_i est plat ([12] chap. III §3.4 théo. 3), et donc fidèlement plat ([28] 0.6.6.1). Notons

$$u\colon B = \varinjlim_{i \in \mathfrak{A}'^\circ} (B_i)_{\mathfrak{q}_i} \to (A_{\mathfrak{p}})^\wedge$$

la limite inductive des u_i, et $\hat{u}\colon \widehat{B} \to (A_{\mathfrak{p}})^\wedge$ l'homomorphisme déduit de u par prolongement aux complétés.

En vertu de ([28] 0.6.1.4), B est un anneau local, d'idéal maximal $\mathfrak{m} = \varinjlim \mathfrak{q}_i(B_i)_{\mathfrak{q}_i}$ et de corps résiduel canoniquement isomorphe au corps de fractions de $A/\mathfrak{p}$; en particulier, v est local. D'autre part, u est local et plat ([12] chap. I §2.7 prop. 9), donc fidèlement plat ([28] 0.6.6.1). Comme $(A_{\mathfrak{p}})^\wedge$ est noethérien (car $A_{\mathfrak{p}}$ est noethérien (1.10.2)), B est noethérien ([12] chap. I §3.5 cor. de la prop. 8), d'où la proposition (i).

Comme $u \circ v$ est le morphisme canonique $A_{\mathfrak{p}} \to (A_{\mathfrak{p}})^\wedge$, on a $\hat{u} \circ \hat{v} = \mathrm{id}_{(A_{\mathfrak{p}})^\wedge}$. Pour tout $i \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{A}')$, $\hat{v} \circ u_i$ est le morphisme canonique $(B_i)_{\mathfrak{q}_i} \to \widehat{B}$; donc $\hat{v} \circ \hat{u} = \mathrm{id}_{\widehat{B}}$. Par conséquent, $\hat{u}$ et $\hat{v}$ sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre, d'où la proposition (iii). On en déduit que v est plat ([12] chap. III §5.4 prop. 4), et donc fidèlement plat puisqu'il est local, d'où la proposition (ii).

Proposition 4.8.9. *Les hypothèses sont celles de* (4.8.7). *Notons p le point de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ associé à $\mathscr{P}$* (4.4.5) *et considérons $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}},p}$ comme une A-algèbre par l'homomorphisme déduit de* (4.7.5.2). *Alors :*

(i) *On a un isomorphisme canonique de A-algèbres $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}},p} \simeq B$.*

(ii) *L'anneau $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}},p}$ est local et noethérien.*

(iii) *L'homomorphisme structural $A \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}},p}$ induit un homomorphisme local et fidèlement plat $A_{\mathfrak{p}} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}},p}$ dont le prolongement aux complétés est un isomorphisme.*

Compte tenu de 4.8.8, il suffit de montrer la proposition (i). Quitte à remplacer $\mathfrak{X}$ par U et $\mathscr{P}$ par $\mathscr{Q}_\varphi$ pour un objet $(\mathfrak{X}', U, \varphi)$ de $\mathfrak{A}$ (4.8.4), on peut supposer A rig-pur et J principal engendré par un élément $t \in A$. Pour tout $(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$, on note $\mathfrak{A}_{(\mathfrak{X}',\varphi)}$ la catégorie-fibre de $\mathfrak{A}$ en $(\mathfrak{X}',\varphi)$. En vertu de 4.5.17 et (4.8.5.5), on a un isomorphisme canonique de A-algèbres

$$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}},p} \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{(\mathfrak{X}',\varphi)\in\mathbf{B}^{\circ}_{\mathfrak{X}}} \varinjlim_{i\in\mathfrak{A}^{\circ}_{(\mathfrak{X}',\varphi)}} B_i[t^{-1}].$$

Ce dernier objet, que l'on note C, peut être interprété comme une limite inductive sur la catégorie $\mathfrak{A}^{\circ}$. On a donc un isomorphisme canonique de A-algèbres

$$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}},p} \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{i\in\mathfrak{A}^{\circ}} B_i[t^{-1}] = C.$$

Soient $i = (\mathfrak{X}',U,\varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{A})$, $s \in B_i - \mathfrak{q}_i$. Montrons que l'image de s est inversible dans C. On note que $B_i/\mathfrak{q}_i$ est un ordre 1-valuatif (1.11.8). Soit R la clôture intégrale de $B_i/\mathfrak{q}_i$ dans son corps des fractions. Comme R est un anneau 1-valuatif (1.11.4), il existe deux entiers $m \geq 1$, $n \geq 0$ et une unité α de R tels qu'on ait $s^m = t^n\alpha$ dans R.

Si $n = 0$, s n'appartient pas à l'idéal maximal de $B_i/\mathfrak{q}_i$ ([12] chap. V §2.1 prop. 1). Par suite, l'ouvert formel affine $V = \mathrm{Spf}((B_i)_{\{s\}})$ de $\mathrm{Spf}(B_i)$ contient $\mathscr{Q}_\varphi$; donc $j = (\mathfrak{X}',V,\varphi)$ est un objet de $\mathfrak{A}$ au-dessus de i. Comme $u_{ji}(s)$ est clairement inversible dans $B_j = (B_i)_{\{s\}}$, s est inversible dans C.

Supposons $n \geq 1$ et considérons l'idéal ouvert $I = (s^m,t^n)$ de B_i. Il existe alors un idéal ouvert cohérent $\mathscr{I}$ de $\mathfrak{X}'$ tel que $\mathscr{I}|U = I^{\Delta}$ (2.8.16). L'éclatement de $\mathscr{I}$ dans $\mathfrak{X}'$ est un objet $(\mathfrak{X}'',\psi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ au-dessus de $(\mathfrak{X}',\varphi)$ (3.1.14). En vertu de 3.1.7(ii), il existe deux ouverts formels affines $V = \mathrm{Spf}(S)$ et $V' = \mathrm{Spf}(S')$ de $\mathfrak{X}''$ qui forment un recouvrement de l'image réciproque de U, et deux sections $h \in S$ et $h' \in S'$ tels qu'on ait $s^m = ht^n$ dans S et $t^n = h's^m$ dans S'. Il résulte de 3.2.6 et de la relation $s^m = t^n\alpha$ dans R, que $\mathscr{Q}_\psi$ est contenu dans $V \cap V'$. On en déduit, comme dans le cas précédent, que l'ouvert formel affine $W = \mathrm{Spf}(S_{\{h\}})$ de V contient $\mathscr{Q}_\psi$; donc $k = (\mathfrak{X}'',W,\psi)$ est un objet de $\mathfrak{A}$ au-dessus de j. Comme $u_{kj}(h)$ est clairement inversible dans $B_k = S_{\{h\}}$, s est inversible dans C.

On a démontré que la flèche canonique $B_i \to C$ se factorise à travers $(B_i)_{\mathfrak{q}_i}$. Par suite, l'homomorphisme canonique

$$\rho\colon C = \varinjlim_{i\in\mathfrak{A}^{\circ}} B_i[t^{-1}] \to \varinjlim_{i\in\mathfrak{A}^{\circ}} (B_i)_{\mathfrak{q}_i} = B$$

admet une section ; il est donc surjectif. D'autre part, B et C sont des anneaux locaux (4.8.8(i) et 4.8.6) ; donc ρ est un homomorphisme local. Comme ρ est plat ([12] chap. I §2.7 prop. 9), il est fidèlement plat ([28] 0.6.6.1), et donc injectif. Par suite, ρ est un isomorphisme, d'où la proposition (i).

Corollaire 4.8.10. *Soient X un espace rigide cohérent, p un point rigide de X_{ad} (4.4.5). Alors $\mathscr{O}_{X,p}$ est un anneau local noethérien.*

En effet, si $X = \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ où $\mathfrak{X}$ est un objet de $\mathbf{S}$, alors p est associé à un point rigide $\mathscr{P}$ de $\mathfrak{X}$ (4.1.20), et l'assertion résulte de 4.8.9.

Corollaire 4.8.11. *Soient A un ordre 1-valuatif, K le corps des fractions de A, $\mathscr{P} = \mathrm{Spf}(A)$; alors $\Gamma(\mathscr{P}^{\mathrm{rig}}, \mathscr{O}_{\mathscr{P}^{\mathrm{rig}}}) = K$.*

Cela résulte de (4.7.8.2) et (2.10.5.1). On peut aussi le déduire de 4.8.9 et du fait que $\mathscr{P}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ est un topos ponctuel (4.4.4). En effet, pour tout $(\mathscr{P}', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathscr{P}})$, il existe un ordre 1-valuatif A_φ, de corps des fractions K tel que $\mathscr{P}' = \mathrm{Spf}(A_\varphi)$ (3.3.12). Par suite, la A-algèbre B défini dans (4.8.7.1) s'identifie à K.

Corollaire 4.8.12. *Soient X un espace rigide cohérent, (P, i) un point rigide de X (4.3.1), p le point associé de X_{ad}. Alors l'idéal maximal de $\mathscr{O}_{X,p}$ est le noyau de l'homomorphisme canonique $\mathscr{O}_{X,p} \to \mathscr{O}_P$.*

En effet, comme $\mathscr{O}_P$ est un corps (4.8.11), il suffit de montrer que l'homomorphisme $\mathscr{O}_{X,p} \to \mathscr{O}_P$ se factorise à travers le corps résiduel de $\mathscr{O}_{X,p}$, ce qui résulte de 4.1.20, 4.8.8 et 4.8.9.

Corollaire 4.8.13. *Soient $f\colon X \to Y$ un morphisme d'espaces rigides cohérents, p un point rigide de X_{ad}. Alors $q = f(p)$ est un point rigide de Y_{ad} et l'homomorphisme canonique $\mathscr{O}_{Y,q} \to \mathscr{O}_{X,p}$ est local.*

Remarque 4.8.14. Pour un espace rigide cohérent X, j'ignore si $\mathscr{O}_{X,p}$ est noethérien pour tout point p de X_{ad}.

4.8.15. Soient A un anneau idyllique, M un A-module cohérent, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathscr{F} = M^\Delta$, $\mathscr{P}$ un point rigide fermé de $\mathfrak{X}$; notons p le point de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ et $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de A associés à $\mathscr{P}$. Il résulte de (2.7.6.2) et (4.8.5.4) qu'on a un isomorphisme canonique fonctoriel

$$M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}},p} \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}^{\mathrm{rig}}_p. \tag{4.8.15.1}$$

Définition 4.8.16. Soit X un espace rigide cohérent. On dit qu'un $\mathscr{O}_X$-module est *de type fini* (resp. *de présentation finie*, resp. *cohérent*) s'il est de $(\mathbf{Ad}_{/X})$-type fini (resp. de $(\mathbf{Ad}_{/X})$-présentation finie, resp. $(\mathbf{Ad}_{/X})$-cohérent) (1.3). On dit qu'une $\mathscr{O}_X$-algèbre est cohérente si le $\mathscr{O}_X$-module sous-jacent est cohérent.

Lemme 4.8.17. *Soient X un espace rigide cohérent, F un $\mathscr{O}_X$-module de type fini, (P, i) un point rigide de X, p le point associé de X_{ad}. Pour que $F_p = 0$, il faut et il suffit que $i^*(F) = 0$.*

Cela résulte de 4.8.12 et du lemme de Nakayama.

Proposition 4.8.18. *Soit $\mathfrak{X}$ un objet de $\mathbf{S}$.*

(i) *Pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$-module cohérent.*

(ii) *Tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$-module cohérent F est de la forme $\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ pour un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathscr{F}$.*

(iii) *Toute $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$-algèbre cohérente B est de la forme $\mathscr{B}^{\mathrm{rig}}$ pour une $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbre cohérente $\mathscr{B}$.*

(iv) *Toute suite exacte courte de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$-modules cohérents est l'image d'une suite exacte courte de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents par le foncteur “fibre rigide”.*

(i) Il résulte de 4.7.11 et 4.7.17 que $\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$-module de type fini. Il suffit clairement de montrer que pour tout homomorphisme $u\colon \mathscr{O}^n_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}} \to \mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$, $\ker(u)$ est de type fini (4.7.18). Compte tenu de (4.7.8.2), u est défini par des sections $x_i \in \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}))$ $(1 \leq i \leq n)$. D'après 2.6.10, chaque x_i est défini par un homomorphisme $v_i : \mathscr{J} \to \mathscr{F}$, où $\mathscr{J}$ est un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$. Si on pose $v = \sum_{i=1}^n v_i\colon \oplus_{i=1}^n \mathscr{J} \to \mathscr{F}$, on a $u = v^{\mathrm{rig}}$ d'après 2.10.1.6, 4.7.12 et 4.7.26. On en déduit, en vertu de 4.7.11, que $\ker(u) = \ker(v)^{\mathrm{rig}}$ et qu'il est de type fini.

(ii) Il existe un morphisme $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ de $\mathbf{B}$ et un recouvrement ouvert fini $(U_i)_{i\in I}$ de $\mathfrak{X}'$ tels que, pour tout $i \in I$, si l'on pose $\mathfrak{X}_i = (U_i, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}|U_i)$, on ait une suite exacte

$$(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_i^{\mathrm{rig}}})^{n_i} \xrightarrow{u_i} (\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_i^{\mathrm{rig}}})^{m_i} \longrightarrow F|\mathfrak{X}_i^{\mathrm{rig}} \longrightarrow 0\ .$$

On peut supposer que φ est l'éclatement dans $\mathfrak{X}$ d'un idéal de définition cohérent ; en particulier, $\mathfrak{X}'$ admet localement un idéal de définition monogène.

D'après la preuve de (i), il existe un idéal de définition cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}'$ et, pour tout $i \in I$, un homomorphisme $v_i\colon \oplus_{k=1}^{n_i} (\mathscr{J}|U_i) \to \mathscr{O}^{m_i}_{\mathfrak{X}_i}$ tel que $u_i = v_i^{\mathrm{rig}}$. Le conoyau $\mathscr{F}_i$ de v_i est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_i}$-module cohérent, et en vertu de 4.7.11, on a un isomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_i^{\mathrm{rig}}}$-modules

$$F|\mathfrak{X}_i^{\mathrm{rig}} \quad\simeq\quad \mathscr{F}_i^{\mathrm{rig}}. \tag{4.8.18.1}$$

Nous allons construire par recollement un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$-module cohérent $\mathscr{F}'$ tel que $\underline{\varphi}^{-1}(F) \simeq \mathscr{F}'^{\mathrm{rig}}$. Procédant par récurrence sur le cardinal de I, on se réduit au cas où $I = \{1, 2\}$. Remplaçant $\mathscr{F}_i$ par son transformé strict, on peut les supposer rig-purs (2.10.12, 2.10.14 et 4.7.12). On pose $U = U_1 \cap U_2$, $\mathfrak{Y} = (U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}|U)$, $\mathscr{F}_{1,2} = \mathscr{F}_1|U$ et $\mathscr{F}_{2,1} = \mathscr{F}_2|U$. On déduit de (4.8.18.1) un isomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}}$-modules $\mathscr{F}_{1,2}^{\mathrm{rig}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}_{2,1}^{\mathrm{rig}}$, et donc compte tenu de (4.7.8.1), un isomorphisme de $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$-modules

$$v\colon \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}_{1,2}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}_{2,1}). \tag{4.8.18.2}$$

D'après 2.10.9(i), il existe un entier $n \geq 1$ tel que $v(\mathscr{J}^n\mathscr{F}_{1,2}) \subset \mathscr{F}_{2,1} \subset \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}_{2,1})$. Remplaçant $\mathscr{F}_1$ par $\mathscr{J}^n\mathscr{F}_1$ (4.7.12), on peut supposer $v(\mathscr{F}_{1,2}) \subset \mathscr{F}_{2,1}$. Par suite, v induit un homomorphisme injectif $u\colon \mathscr{F}_{1,2} \to \mathscr{F}_{2,1}$. D'après 2.10.9(i), il existe un entier $m \geq 0$ tel que $v^{-1}(\mathscr{J}^m\mathscr{F}_{2,1}) \subset \mathscr{F}_{1,2}$; donc on a $\mathscr{J}^m\mathscr{F}_{2,1} \subset u(\mathscr{F}_{1,2})$. En vertu de 2.8.15, il existe un sous-$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_2}$-module cohérent $\mathscr{F}_2'$ de $\mathscr{F}_2$ tel que $\mathscr{F}_2'|U = u(\mathscr{F}_{1,2})$ et $\mathscr{J}^m\mathscr{F}_2 \subset \mathscr{F}_2'$. Par recollement, il existe un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$-module cohérent $\mathscr{F}'$ tel que $\mathscr{F}'|U_1 = \mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}'|U_2 = \mathscr{F}_2'$ ([28] 0.3.3.1). L'homomorphisme canonique $\mathscr{F}_2'^{\mathrm{rig}} \to \mathscr{F}_2^{\mathrm{rig}}$ étant bijectif, on déduit de (4.8.18.1) des isomorphismes $\mathscr{F}'^{\mathrm{rig}}|\mathfrak{X}_1^{\mathrm{rig}} \simeq F|\mathfrak{X}_1^{\mathrm{rig}}$ et $\mathscr{F}'^{\mathrm{rig}}|\mathfrak{X}_2^{\mathrm{rig}} \simeq F|\mathfrak{X}_2^{\mathrm{rig}}$. Ces derniers se recollent en un isomorphisme $\mathscr{F}'^{\mathrm{rig}} \simeq \underline{\varphi}^{-1}(F)$. En effet u^{rig} est l'isomorphisme induit par (4.8.18.1) en vertu de 4.7.26.

Posons $\mathscr{F} = \varphi_*(\mathscr{F}')$, qui est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent (2.11.5), et soit $w\colon \varphi^*(\mathscr{F}) \to \mathscr{F}'$ le morphisme d'adjonction. D'après 3.5.15, $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(w)$ est un isomorphisme. On en déduit que $\ker(w)$ et $\operatorname{coker}(w)$ sont des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$-modules rig-nuls

(2.10.18 et 2.10.10). Par suite, $w^{\rm rig}$ est un isomorphisme (4.7.10 et 4.7.11). Compte tenu de 4.7.16, $w^{\rm rig}$ et l'isomorphisme $\mathscr{F}'^{\rm rig} \simeq \underline{\varphi}^{-1}(F)$ induisent un isomorphisme $F \simeq \mathscr{F}^{\rm rig}$.

(iii) On peut se réduire, comme dans la preuve de (ii), au cas où $\mathfrak{X}$ admet localement un idéal de définition monogène. Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement fini de $\mathfrak{X}$ par des ouverts formels affines tels que pour tout $i \in I$, $A_i = \Gamma(U_i, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ soit un anneau idyllique ayant un idéal de définition principal J_i engendré par t_i ; posons $\mathfrak{X}_i = (U_i, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|U_i)$. On sait que B est de la forme $\mathscr{F}^{\rm rig}$ pour un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent rig-pur $\mathscr{F}$. Compte tenu de (4.7.8.1), $\mathscr{H}^0_{\rm rig}(\mathscr{F})$ est une $\mathscr{H}^0_{\rm rig}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-algèbre et non seulement un $\mathscr{H}^0_{\rm rig}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-module. On a $\mathscr{F}|U_i = M_i^{\Delta}$ où M_i est un A_i-module cohérent rig-pur, et $\Gamma(\mathfrak{X}_i^{\rm rig}, B) = (M_i)_{t_i}$ en vertu de (4.7.8.2) et (2.10.5.1). Quitte à remplacer $\mathscr{F}$ par $\mathscr{J}\mathscr{F}$ où $\mathscr{J}$ est un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$ (4.7.12), on peut supposer que pour tout $i \in I$, M_i est engendré par un nombre fini de sections de $\Gamma(\mathfrak{X}_i^{\rm rig}, B)$ entières sur A_i. Soient $\mathscr{B}$ la sous-$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbre de $\mathscr{H}^0_{\rm rig}(\mathscr{F})$ engendrée par $\mathscr{F}$, $\iota\colon \mathscr{F} \to \mathscr{B}$ l'homomorphisme canonique. On a établi dans la preuve de 2.10.25 que $\mathscr{B}$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Compte tenu de (4.7.8.1) et 4.7.25, l'injection canonique $\mathscr{B} \to \mathscr{H}^0_{\rm rig}(\mathscr{F})$ définit par adjonction un homomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\rm rig}}$-algèbres

$$\mathscr{B}^{\rm rig} = \rho^*_{\mathfrak{X}}(\mathscr{B}) \to B. \tag{4.8.18.3}$$

Montrons que (4.8.18.3) est un isomorphisme (ce qui prouvera la proposition). Comme $\iota^{\rm rig}$ est un inverse à droite de (4.8.18.3), il suffit de montrer que $\iota^{\rm rig}$ est un isomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\rm rig}}$-modules. D'une part, $\mathscr{F}$ étant rig-pur, ι est injectif ; par suite, $\iota^{\rm rig}$ est un monomorphisme en vertu de 4.7.11. D'autre part, d'après 2.10.9(i), il existe un idéal de définition cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$ tel que l'on ait $\mathscr{J}\mathscr{B} \subset \mathscr{F} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{H}^0_{\rm rig}(\mathscr{F})$; donc $\iota^{\rm rig}$ est un épimorphisme en vertu de 4.7.12.

(iv) Compte tenu de 4.7.11, il suffit de montrer que si $v : F \to G$ est un monomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\rm rig}}$-modules cohérents, il existe un monomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents $u : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ tel que $u^{\rm rig} = v$. D'après (ii), il existe deux $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ tels que $\mathscr{F}^{\rm rig} = F$ et $\mathscr{G}^{\rm rig} = G$; on peut supposer $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ rig-purs (2.10.12, 2.10.14 et 4.7.12). D'après (4.7.8.1), $\rho_{\mathfrak{X}*}(v)$ s'identifie à un monomorphisme $w\colon \mathscr{H}^0_{\rm rig}(\mathscr{F}) \to \mathscr{H}^0_{\rm rig}(\mathscr{G})$. En vertu de 2.10.9(i), il existe un idéal de définition cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$ tel que $w(\mathscr{J}\mathscr{F}) \subset \mathscr{G}$. Remplaçant $\mathscr{F}$ par $\mathscr{J}\mathscr{F}$ (4.7.12), on peut supposer $w(\mathscr{F}) \subset \mathscr{G}$. Donc w induit un homomorphisme injectif $u : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$. D'autre part, on a $v = u^{\rm rig}$ en vertu de 4.7.26, d'où l'assertion.

Corollaire 4.8.19. *Si X est un espace rigide cohérent, alors $\mathscr{O}_X$ est un anneau cohérent.*

Cela résulte de 2.8.1 et 4.8.18(i).

Corollaire 4.8.20. *Soient $f\colon X \to Y$ un morphisme d'espaces rigides cohérents, G un $\mathscr{O}_Y$-module cohérent. Alors $f^*(G)$ est un $\mathscr{O}_X$-module cohérent.*

En effet, $f^*(G)$ est un $\mathscr{O}_X$-module de présentation finie, donc cohérent en vertu de 4.8.19.

Corollaire 4.8.21. *Soient X un espace rigide cohérent, F un $\mathscr{O}_X$-module cohérent. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $F = 0$ *;*

(ii) $i^*(F) = 0$ *pour tout point rigide* (P, i) *de* X *;*

(iii) $F_p = 0$ *pour tout point rigide* p *de* X_{ad}.

En effet, l'équivalence de (i) et (ii) résulte de 4.7.10(ii), 4.7.23 et 4.8.18(ii), et l'équivalence de (ii) et (iii) de 4.8.17.

Théorème 4.8.22. *Soient $f \colon X \to Y$ un morphisme propre d'espaces rigides cohérents, F un $\mathscr{O}_X$-module cohérent. Alors pour tout entier $q \geq 0$, $\mathrm{R}^q f_*(F)$ est un $\mathscr{O}_Y$-module cohérent.*

Cela résulte de 4.8.18, 4.7.36 et 2.11.5.

4.8.23. Soient A un anneau idyllique, J un idéal de définition de type fini de A, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(A)$, X_{g} l'ouvert $X - \mathrm{V}(J)$ de X. D'après 4.8.18, on a un foncteur de la catégorie des A-modules cohérents dans la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$-modules cohérents

$$\mathbf{Mod}_{\mathrm{coh}}(A) \to \mathbf{Mod}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}), \tag{4.8.23.1}$$

défini par $M \mapsto (M^{\Delta})^{\mathrm{rig}}$, qui est exact et essentiellement surjectif (2.7.2, 4.7.11 et 4.8.18).

Proposition 4.8.24. *Le foncteur* (4.8.23.1) *induit une équivalence de catégories entre la catégorie des $\mathscr{O}_{X_{\mathrm{g}}}$-modules cohérents et la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$-modules cohérents*

$$\mathbf{Mod}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{X_{\mathrm{g}}}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Mod}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}). \tag{4.8.24.1}$$

Soit $\mathtt{L} \colon \mathbf{Mod}_{\mathrm{coh}}(A) \to \mathbf{Mod}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{X_{\mathrm{g}}})$ le foncteur défini par $\mathtt{L}(M) = \widetilde{M}|X_{\mathrm{g}}$. Si M est un A-module de type fini, pour que $\mathtt{L}(M) = 0$, il faut et il suffit que M soit rig-nul ([28] 6.8.4). Soit alors $\mathscr{C}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Mod}_{\mathrm{coh}}(A)$ formée des A-modules cohérents rig-nuls ; c'est une sous-catégorie épaisse de $\mathbf{Mod}_{\mathrm{coh}}(A)$. On peut former la catégorie quotient de $\mathbf{Mod}_{\mathrm{coh}}(A)$ par $\mathscr{C}$, notée $\mathbf{Mod}_{\mathrm{coh}}(A)/\mathscr{C}$. Comme $\mathtt{L}$ est exact, il induit un foncteur ([22] III cor. 2 de la prop. 1)

$$\mathbf{Mod}_{\mathrm{coh}}(A)/\mathscr{C} \to \mathbf{Mod}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{X_{\mathrm{g}}}). \tag{4.8.24.2}$$

Montrons que ce foncteur est une équivalence de catégories. Il est essentiellement surjectif car $\mathtt{L}$ l'est en vertu de ([28] 6.9.11). Sa pleine fidélité revient à dire que pour tous A-modules cohérents M et N, le morphisme canonique

$$\varinjlim_{M', N'} \mathrm{Hom}_A(M', N/N') \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{X_{\mathrm{g}}}}(\mathtt{L}(M), \mathtt{L}(N)) \tag{4.8.24.3}$$

où M' est un sous-A-module de type fini de M tel que M/M' soit rig-nul et N' est un sous-A-module de type fini et rig-nul de N, est un isomorphisme. D'une part, N_{tor} (1.8.30.1) est le plus grand sous-A-module rig-nul de N, et il est de type fini (1.10.2). D'autre part, pour tout sous-A-module M' de M tel que M/M' soit rig-nul, il existe un entier $n \geq 0$ tel que $J^n M \subset M'$. Il suffit donc de montrer que le morphisme canonique

$$\varinjlim_{n\geq 0} \mathrm{Hom}_A(J^n M, N/N_{\mathrm{tor}}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{X_{\mathrm{g}}}}(\mathtt{L}(M), \mathtt{L}(N)) \tag{4.8.24.4}$$

est un isomorphisme, ce qui résulte de 1.8.33.

On sait que le foncteur (4.8.23.1) est exact et essentiellement surjectif. Si M est un A-module cohérent, pour que $(M^{\Delta})^{\mathrm{rig}} = 0$, il faut et il suffit que M soit rig-nul (4.7.10 et 2.10.13). Il résulte alors de ce qui précède que (4.8.23.1) induit un foncteur essentiellement surjectif

$$\mathbf{Mod}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{X_{\mathrm{g}}}) \to \mathbf{Mod}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}). \tag{4.8.24.5}$$

D'autre part, si M et N sont des A-modules cohérents, on a un isomorphisme canonique ((4.7.29.2) et (2.7.2.5))

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}}((M^{\Delta})^{\mathrm{rig}}, (N^{\Delta})^{\mathrm{rig}}) \simeq (\mathrm{Hom}_A(M,N)^{\Delta})^{\mathrm{rig}}. \tag{4.8.24.6}$$

On en déduit que le foncteur (4.8.24.5) est pleinement fidèle en vertu de (4.7.8.2) et (2.10.5.1).

Définition 4.8.25. On appelle *affinoïde* un espace rigide cohérent qui admet un modèle formel affine globalement idyllique et ayant localement un idéal de définition monogène.

Proposition 4.8.26. *Soient X un affinoïde, F un $\mathscr{O}_X$-module cohérent. Alors :*

(i) *F est engendré par ses sections globales.*
(ii) $\mathrm{H}^q(X_{\mathrm{ad}}, F) = 0$ *pour tout $q \geq 1$.*

Soit $\mathfrak{X}$ un modèle formel affine globalement idyllique de X, ayant localement un idéal de définition monogène. On sait que F est de la forme $\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ pour un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathscr{F}$ (4.8.18). La proposition (i) résulte aussitôt de 2.7.2 et 4.7.11. Pour établir (ii), il suffit, en vertu de 4.5.33 et 4.7.8, de montrer que pour tout objet $(\mathfrak{X}', \varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$, on ait $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F})) = 0$ pour tout $q \geq 1$. Considérons la suite spectrale

$$\mathrm{H}^p(\mathfrak{X}_{\mathrm{zar}}, \mathrm{R}^q\varphi_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F}))) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}(\mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F})).$$

On a $\mathrm{R}^q\varphi_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F})) = 0$ pour tout $q \geq 1$ (3.5.4). D'autre part, on a (3.5.5)

$$\varphi_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F})) \simeq \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$$

et $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})) = 0$ pour tout $q \geq 1$ (2.11.2), d'où l'assertion.

Remarque 4.8.27. J'ignore si la condition sur l'idéal de définition dans (4.8.25) est nécessaire pour la proposition 4.8.26(ii).

4.8.28. Soit $f\colon X \to S$ un morphisme d'espaces rigides cohérents. Lorsqu'on fixe S, on note $\mathscr{A}(X)$ l'image directe $f_*(\mathscr{O}_X)$, qui est une $\mathscr{O}_S$-algèbre. De même, pour tout $\mathscr{O}_X$-module F, on écrit $\mathscr{A}(F)$ l'image directe $f_*(F)$, qui est un $\mathscr{A}(X)$-module. On peut définir $\mathscr{A}(X)$ comme un foncteur contravariant en X, de la catégorie des S-espaces rigides cohérents dans la catégorie des $\mathscr{O}_S$-algèbres ([28] 0.4.2.7). Si X est fini sur S, $\mathscr{A}(X)$ est une $\mathscr{O}_S$-algèbre cohérente, en vertu de 4.8.22.

Théorème 4.8.29. *Soit S un espace rigide cohérent. Le foncteur* (4.8.28)

$$\mathscr{A}\colon X \mapsto \mathscr{A}(X) \tag{4.8.29.1}$$

est une équivalence de la catégorie des S-espaces rigides finis sur S et de la catégorie opposée à celle des $\mathscr{O}_S$-algèbres cohérentes.

Montrons d'abord que le foncteur (4.8.29.1) est pleinement fidèle ; cela résultera de la proposition suivante :

Proposition 4.8.30. *Soient S un espace rigide cohérent, X un S-espace rigide fini. Pour tout S-espace rigide cohérent Y, l'application $h \mapsto \mathscr{A}(h)$ est un isomorphisme fonctoriel*

$$\operatorname{Hom}_S(Y,X) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_S\text{-Alg}}(\mathscr{A}(X),\mathscr{A}(Y)). \tag{4.8.30.1}$$

Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ et $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathscr{S}$ deux morphismes de $\mathbf{S}$ tels que f soit fini. On a d'une part une bijection canonique (2.8.20)

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{S}}(\mathfrak{Y},\mathfrak{X}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathscr{S}}\text{-Alg}}(f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}),g_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})), \tag{4.8.30.2}$$

et d'autre part une application canonique ((2.10.29.1) et (2.10.28.2))

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{S}}(\mathfrak{Y},\mathfrak{X}) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathscr{S}})\text{-Alg}}(f_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})),g_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}))). \tag{4.8.30.3}$$

Si $\mathfrak{Y}$ est rig-pur, l'application (4.8.30.3) est injective car le morphisme canonique $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}} \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ est alors injectif (2.10.15). Par ailleurs, on a une application canonique (4.7.20.1)

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{S}}(\mathfrak{Y},\mathfrak{X}) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathscr{S}^{\mathrm{rig}}}\text{-Alg}}(\underline{f}_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}),\underline{g}_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}})). \tag{4.8.30.4}$$

On a des isomorphismes canoniques ((4.5.2.2) et (4.7.8.1))

$$\rho_{\mathscr{S}*}(\underline{f}_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}})) \xrightarrow{\sim} f_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})), \tag{4.8.30.5}$$

$$\rho_{\mathscr{S}*}(\underline{g}_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}})) \xrightarrow{\sim} g_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})). \tag{4.8.30.6}$$

On peut donc considérer l'application $u \mapsto \rho_{\mathscr{S}*}(u)$,

$$\begin{aligned}&\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathscr{S}^{\mathrm{rig}}}\text{-Alg}}(\underline{f}_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}),\underline{g}_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}}))\\ &\quad\to \operatorname{Hom}_{\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathscr{S}})\text{-Alg}}(f_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})),g_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}))).\end{aligned} \tag{4.8.30.7}$$

On vérifie aisément que le composé de (4.8.30.4) et (4.8.30.7) est égal à (4.8.30.3). Par suite, si $\mathfrak{Y}$ est rig-pur, l'application (4.8.30.4) est injective.

Si $\mathscr{S}$ admet localement un idéal de définition monogène, l'inverse de l'isomorphisme (4.8.30.5) induit par adjonction un isomorphisme

$$\varrho^*_{\mathscr{S}}(f_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}))) \xrightarrow{\sim} \underline{f}_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}),$$

en vertu de 4.7.28(i), 4.7.36 et 2.10.31.2. Donc l'application (4.8.30.7) est bijective et s'interprète comme un isomorphisme d'adjonction.

Prenons pour f (resp. g) un modèle formel du morphisme structural $X \to S$ (resp. $Y \to S$) et supposons que $\mathscr{S}$ admette localement un idéal de définition monogène, que f soit fini et que $\mathfrak{Y}$ soit rig-pur. L'injectivité de (4.8.30.4) implique aussitôt celle de (4.8.30.1). Il reste à montrer que l'application (4.8.30.1) est surjective. Considérons un homomorphisme de $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathscr{S}})$-algèbres $u\colon f_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})) \to g_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}))$. Le morphisme composé $u\circ f_*(c_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}})$ (2.10.1.2) définit par adjonction un homomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-algèbres

$$v\colon g^*(f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}).$$

Notons $\mathscr{B}$ l'image de v. Comme $g^*(f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}))$ est une $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-algèbre cohérente (2.8.19), $\mathscr{B}$ est une $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-algèbre cohérente en vertu de 2.10.9(ii). Donc en vertu de 3.1.12, il existe un éclatement admissible $\psi\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$ qui se factorise à travers $\mathrm{Spf}(\mathscr{B})$. D'après 2.8.19(ii) et 2.8.20, v définit un $\mathfrak{Y}$-morphisme $\rho\colon \mathrm{Spf}(\mathscr{B}) \to \mathfrak{Y}\times_{\mathscr{S}}\mathfrak{X}$. Soit $h\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{X}$ le morphisme composé dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{Y}' \arrow[r] \arrow[drr, "\psi"'] & \mathrm{Spf}(\mathscr{B}) \arrow[r, "\rho"] & \mathfrak{Y}\times_{\mathscr{S}}\mathfrak{X} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{X} \arrow[d, "f"] \\
 & & \mathfrak{Y} \arrow[r, "g"] & \mathscr{S}
\end{tikzcd}$$

Compte tenu de 3.5.5, h induit un homomorphisme de $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathscr{S}})$-algèbres

$$u'\colon f_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})) \to g_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})).$$

Il résulte par adjonction du diagramme commutatif (3.1.12.1) que l'on a

$$u'\circ f_*(c_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}) = u\circ f_*(c_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}).$$

D'autre part, $f_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}))$ s'identifie à $f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})\otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{S}}}\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathscr{S}})$ en vertu de 2.10.19(i) et (2.10.31.2). On en déduit que $u'=u$, ce qui prouve la surjectivité de l'application (4.8.30.1) et achève la démonstration de 4.8.30.

Pour prouver que (4.8.29.1) est une équivalence de catégories, il reste à prouver que pour toute $\mathscr{O}_S$-algèbre cohérente B, il existe un S-espace rigide cohérent X, fini sur S, tel que $\mathscr{A}(X)$ soit $\mathscr{O}_S$-isomorphe à B ; en vertu de 4.8.30, X sera défini à un S-isomorphisme unique près. Considérons un modèle formel $\mathscr{S}$ de S. D'après 4.8.18(iii), B est de la forme de $\mathscr{B}^{\mathrm{rig}}$ pour une $\mathscr{O}_{\mathscr{S}}$-algèbre cohérente $\mathscr{B}$. Posons $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(\mathscr{B})$, qui est un $\mathscr{S}$-schéma formel fini et de présentation finie ([28] 6.2.10), et $X = \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$. En vertu de 4.7.36, $\mathscr{A}(X)$ est $\mathscr{O}_S$-isomorphe à B. Le théorème 4.8.29 est ainsi complètement démontré. Compte tenu de 4.8.30, nous avons prouvé le corollaire suivant :

Corollaire 4.8.31. *Pour toute $\mathscr{O}_S$-algèbre cohérente B, le foncteur contravariant*

$$Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S\text{-}\mathrm{Alg}}(B, \mathscr{A}(Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_Y\text{-}\mathrm{Alg}}(B \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_Y, \mathscr{O}_Y)$$

de la catégorie des S-espaces rigides cohérents dans la catégorie des ensembles, est représentable par un S-espace rigide cohérent, fini sur S.

Définition 4.8.32. On appelle *spectre* d'une $\mathscr{O}_S$-algèbre cohérente B et on l'note $\mathrm{Sp}(B)$ l'image de B par un foncteur quasi-inverse de (4.8.29.1), autrement dit un S-espace rigide cohérent qui représente le foncteur $Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S\text{-}\mathrm{Alg}}(B, \mathscr{A}(Y))$ de (4.8.31).

Le S-espace rigide cohérent $\mathrm{Sp}(B)$ est donc fini sur S ; on a $\mathscr{A}(\mathrm{Sp}(B)) = B$ et pour tout morphisme fini $f\colon X \to S$, X est S-isomorphe à $\mathrm{Sp}(\mathscr{A}(X))$.

Si $\mathscr{S}$ est un modèle formel de S et si $\mathscr{B}$ est une $\mathscr{O}_{\mathscr{S}}$-algèbre cohérente, on a un S-isomorphisme canonique $(\mathrm{Spf}(\mathscr{B}))^{\mathrm{rig}} \simeq \mathrm{Sp}(\mathscr{B}^{\mathrm{rig}})$.

Corollaire 4.8.33. *Soient B une $\mathscr{O}_S$-algèbre cohérente, $g\colon S' \to S$ un morphisme d'espaces rigides cohérents. Alors* $\mathrm{Sp}(g^*(B))$ *est canoniquement isomorphe à* $\mathrm{Sp}(B) \times_S S'$.

Cela résulte de 4.8.31.

Définition 4.8.34. Soient X un espace rigide cohérent, I un idéal cohérent de $\mathscr{O}_X$. On dit que $Y = \mathrm{Sp}(\mathscr{O}_X/I)$ est le *sous-espace fermé* de X défini par I et le morphisme structural $f\colon Y \to X$ est le *morphisme d'injection canonique.*

Soit $\mathfrak{X}$ un modèle formel de X. D'après 4.8.18, il existe un idéal cohérent $\mathscr{I}$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ tel que $\mathscr{I}^{\mathrm{rig}} = I$. Si on note $\mathfrak{Y}$ le sous-schéma fermé de $\mathfrak{X}$ défini par $\mathscr{I}$, $\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}$ est canoniquement X-isomorphe à Y ; en particulier, f est une immersion fermée.

Corollaire 4.8.35. *Soient $f\colon X' \to X$ un morphisme d'espaces rigides cohérents, Y un sous-espace fermé de X défini par un idéal cohérent I de $\mathscr{O}_X$, Y' le sous-espace fermé de X' défini par l'idéal $f^*(I)\mathscr{O}_{X'}$. Alors Y' est canoniquement X'-isomorphe à $Y \times_X X'$.*

C'est un cas particulier de 4.8.33.

Proposition 4.8.36. *Soient X un espace rigide cohérent, Y un sous-espace fermé défini par un idéal cohérent I de $\mathscr{O}_X$, $f\colon Y \to X$ l'injection canonique, p un point de X_{ad}. Pour que $I_p \neq \mathscr{O}_{X,p}$, il faut et il suffit qu'il existe un point q de Y_{ad} tel que $p \simeq fq$.*

S'il existe un point q de Y_{ad} tel que $p \simeq fq$, alors on a $\mathscr{O}_{Y,q} \simeq (f_*(\mathscr{O}_Y))_p$ (4.6.15.1) ; et comme $f_*(\mathscr{O}_Y) = \mathscr{O}_X/I$ et que $\mathscr{O}_{Y,q}$ est un anneau local (4.8.6), on en déduit que $I_p \neq \mathscr{O}_{X,p}$. Inversement, si $I_p \neq \mathscr{O}_{X,p}$, alors $(f_*(\mathscr{O}_Y))_p$ n'est pas réduit à un élément ; on conclut par 4.6.18 qu'il existe un point q de Y_{ad} tel que $p \simeq fq$.

Proposition 4.8.37. *Soient X un espace rigide cohérent, Y un sous-espace fermé défini par un idéal cohérent nilpotent I de $\mathscr{O}_X$, $f\colon Y \to X$ l'injection canonique. Alors $f\colon Y_{\mathrm{ad}} \to X_{\mathrm{ad}}$ est une équivalence de topos.*

Le foncteur $f_*\colon Y_{\mathrm{ad}} \to X_{\mathrm{ad}}$ est pleinement fidèle en vertu de 4.6.14. Il suffit donc de montrer qu'il est essentiellement surjectif. Il résulte de 4.8.36 que pour tout point p de X_{ad}, il existe un point q de Y_{ad} tel que $p \simeq fq$. Le morphisme composé

$$q^*f^* \to q^*f^*f_*f^* \to q^*f^*$$

déduits des morphismes d'adjonction $\mathrm{id} \to f_*f^*$ et $f^*f_* \to \mathrm{id}$, est un isomorphisme. Comme f_* est pleinement fidèle, $f^*f_* \to \mathrm{id}$ est un isomorphisme. Par suite $p^* \to p^*f_*f^*$ est un isomorphisme. Donc $\mathrm{id} \to f_*f^*$ est un isomorphisme car X_{ad} admet suffisamment de points (4.4.6). On en déduit que f_* est essentiellement surjectif.

Corollaire 4.8.38. *Sous les hypothèses de* (4.8.37), *le foncteur $f^\bullet\colon \mathbf{Ad}_{/X} \to \mathbf{Ad}_{/Y}$ de changement de base déduit de f, est une équivalence de sites admissibles.*

Cela revient à dire que le foncteur $f^\bullet$ est une équivalence de catégories, et pour qu'une famille d'immersions ouvertes $(X_i \to X)_{i\in I}$ soit un recouvrement admissible, il faut et il suffit que la famille $(X_i \times_X Y \to Y)_{i\in I}$ soit un recouvrement admissible. La seconde assertion résulte de 4.4.1.2 et 4.8.37. On sait que le foncteur $f^\bullet$ est essentiellement surjectif (4.2.4). De plus, il est pleinement fidèle en vertu de 4.4.1.1 et 4.8.37 ; d'où la proposition.

Proposition 4.8.39. *Si $f\colon Y \to X$ est une immersion d'espaces rigides cohérents, l'homomorphisme canonique*

$$\theta_f^\sharp\colon f^{-1}(\mathscr{O}_X) \to \mathscr{O}_Y \tag{4.8.39.1}$$

est un épimorphisme. De plus, si f est une immersion fermée, l'homomorphisme adjoint

$$\theta_f\colon \mathscr{O}_X \to f_*(\mathscr{O}_Y) \tag{4.8.39.2}$$

est un épimorphisme de noyau cohérent.

Compte tenu de 4.8.4, on peut se borner au cas où f est une immersion fermée. Soient $j\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ une immersion fermée de $\mathbf{S}$ qui est un modèle formel de f, $\mathscr{F} = j_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ qui s'identifie à un faisceau d'anneaux quotient $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{I}$, où $\mathscr{I}$ est un idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$. En vertu de 4.7.11, la suite canonique $0 \to \mathscr{I}^{\mathrm{rig}} \to \mathscr{O}_X \to \mathscr{F}^{\mathrm{rig}} \to 0$ est exacte. D'autre part, comme $\theta_f = \delta'_j(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ (4.7.14.2), les triangles

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}_X \arrow[r] \arrow[dr, "\theta_f"'] & \mathscr{F}^{\mathrm{rig}} \arrow[d, "\delta'_j(\mathscr{F})"] \\ & f_*(\mathscr{O}_Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f^{-1}(\mathscr{O}_X) \arrow[r] \arrow[dr, "\theta_f^\sharp"'] & f^{-1}(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}) \arrow[d, "\delta_j(\mathscr{F})"] \\ & \mathscr{O}_Y \end{tikzcd}$$

sont commutatifs. D'après 4.7.19, $\delta_j(\mathscr{F})$ et $\delta'_j(\mathscr{F})$ sont des isomorphismes. On en déduit que les homomorphismes θ_f et $\theta_f^\sharp$ sont des épimorphismes, de noyaux respectifs $\mathscr{I}^{\mathrm{rig}}$ et $f^{-1}(\mathscr{I}^{\mathrm{rig}})$.

Définition 4.8.40. Si $f\colon Y \to X$ est une immersion fermée d'espaces rigides cohérents, on dit que le noyau de l'homomorphisme canonique $\mathscr{O}_X \to f_*(\mathscr{O}_Y)$ est l'idéal de $\mathscr{O}_X$ associé à f.

Corollaire 4.8.41. *Soient $f\colon Y \to X$ une immersion fermée d'espaces rigides cohérents, I l'idéal de $\mathscr{O}_X$ associé à f. Alors Y est canoniquement X-isomorphe au sous-espace fermé de X défini par I.*

En effet, Y est canoniquement X-isomorphe à $\mathrm{Sp}(\mathscr{A}(Y))$ (4.8.32) et $\mathscr{A}(Y) = f_*(\mathscr{O}_Y)$ s'identifie à l'anneau quotient $\mathscr{O}_X/I$ (4.8.39).

Proposition 4.8.42. *Soient $f\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces rigides cohérents, $(X_i \to X)_{i\in I}$ un recouvrement admissible. Considérons, pour un morphisme d'espaces rigides cohérents, la propriété d'être*

(i) *une immersion ;*
(ii) *une immersion ouverte ;*
(iii) *une immersion fermée ;*
(iv) *fini ;*
(v) *séparé ;*
(vi) *propre.*

Alors, si $\mathscr{P}$ désigne l'une des propriétés précédentes, pour que f vérifie la propriété $\mathscr{P}$, il faut et il suffit qu'il en soit de même de chacune des projections canoniques $f_i\colon X_i \times_X Y \to X_i$ $(i \in I)$.

Les propriétés (ii), (v) et (vi) sont mentionnées à titre de rappels (4.3.17). Pour chacune des autres propriétés, il n'y a que la suffisance de la condition à prouver (4.2.5 et 4.2.14). Supposons donc que pour tout $i \in I$, f_i vérifie $\mathscr{P}$ et montrons que f vérifie $\mathscr{P}$. On peut clairement supposer I fini.

Considérons d'abord la propriété (iii). Notons J_i l'idéal cohérent de $\mathscr{O}_{X_i}$ associé à f_i $(i \in I)$. Il est clair que les $(J_i)_{i\in I}$ se prolongent en une donnée de descente relativement à $(X_i \to X)_{i\in I}$ de la catégorie scindée des faisceaux sur $\mathbf{Ad}_{/X}$ ([25] II 3.4.1). Par suite, il existe un idéal cohérent J de $\mathscr{O}_X$ tel que $J_i =$

$J|X_i$ pour tout $i \in I$ ([25] II 3.4.4). Il résulte alors de 4.3.15 et 4.8.41 que Y est X-isomorphe au sous-espace fermé de X défini par J.

Considérons ensuite la propriété (i). Pour chaque $i \in I$, f_i se factorise dans **R** en

$$Y \times_X X_i \xrightarrow{f'_i} U_i \xrightarrow{g_i} X_i$$

où f'_i est une immersion fermée et g_i est une immersion ouverte. Il existe un modèle formel $\mathfrak{X}$ de X, un recouvrement ouvert $(\mathfrak{X}_i)_{i\in I}$ de $\mathfrak{X}$ et pour chaque $i \in I$, un ouvert $\mathscr{U}_i$ de $\mathfrak{X}_i$ tels que les conditions suivantes soient remplies :

(a) $\mathfrak{X}_i^{\mathrm{rig}}$ est X-isomorphe à X_i pour tout $i \in I$.

(b) $\mathscr{U}_i^{\mathrm{rig}}$ est X_i-isomorphe à U_i pour tout $i \in I$.

L'existence de telles données résulte de 4.3.6, 4.2.2 et 3.2.4. Considérons un modèle formel $h\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ de f tel que $\mathfrak{Y}$ soit rig-pur et posons $\mathfrak{Y}_i = h^{-1}(\mathfrak{X}_i)$ $(i \in I)$. Pour tout $i \in I$, on peut trouver un diagramme commutatif de **S**

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{Y}'_i \arrow[r, "h'_i"] \arrow[d, "\varphi_i"'] & \mathscr{U}_i \arrow[d] \\ \mathfrak{Y}_i \arrow[r, "h|\mathfrak{Y}_i"] & \mathfrak{X}_i \end{tikzcd}$$

tel que $\varphi_i \in \mathbf{B}$ et que le triplet $(\mathfrak{Y}'_i, \varphi_i, h'_i)$ représente f'_i. Comme φ_i est surjectif (3.1.4), on en déduit que $h(\mathfrak{Y}_i) \subset \mathscr{U}_i$ et par suite que $h^{-1}(\mathscr{U}_i) = \mathfrak{Y}_i$. Notons $\mathscr{U}$ le schéma formel induit par $\mathfrak{X}$ sur l'ouvert $\cup_{i\in I}\mathscr{U}_i$, de sorte que h se factorise à travers un morphisme $h'\colon \mathfrak{Y} \to \mathscr{U}$. Remplaçons X par $U = \mathscr{U}^{\mathrm{rig}}$, f par $f' = h'^{\mathrm{rig}}$ et le recouvrement admissible $(X_i \to X)_{i\in I}$ par $(U_i \to U)_{i\in I}$, on se réduit au cas où les f_i sont des immersions fermées. Il résulte alors de la propriété (iii) que f est une immersion fermée.

Considérons enfin la propriété (iv). Soit A_i la $\mathscr{O}_{X_i}$-algèbre cohérente associée à f_i par l'équivalence de catégories (4.8.29.1). Compte tenu de 4.8.29, les $(A_i)_{i\in I}$ se prolongent en une donnée de descente relativement à $(X_i \to X)_{i\in I}$ de la catégorie scindée des faisceaux sur $\mathbf{Ad}_{/X}$. Par suite, il existe une $\mathscr{O}_X$-algèbre cohérente A telle que $A_i \simeq A|X_i$ pour tout $i \in I$ ([25] II 3.4.4). Il résulte alors de 4.3.15 et 4.8.29 que Y est X-isomorphe à $\mathrm{Sp}(A)$.

Proposition 4.8.43. *Soient $\mathfrak{X}$ un objet de* **S**, *$\mathfrak{Y}$ un sous-schéma fermé de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{P}$ un point rigide de $\mathfrak{X}$, p le point de $\mathfrak{X}_{\mathrm{ad}}^{\mathrm{rig}}$ associé* (4.4.5), *$f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ et $g\colon \mathscr{P} \to \mathfrak{X}$ les injections canoniques. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f majore g, i.e., g se factorise en*

$$\mathscr{P} \xrightarrow{h} \mathfrak{Y} \xrightarrow{f} \mathfrak{X}$$

où h est une immersion (2.9.11) *; en particulier, $\mathscr{P}$ détermine un point rigide $\mathscr{Q}$ de $\mathfrak{Y}$.*

(ii) *Il existe un point q de $\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ tel que $p \simeq \underline{f}q$.*

De plus, sous ces conditions, q est associé à $\mathscr{Q}$.

Il est clair que (i) entraîne (ii) en prenant pour q le point de $\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ associé à $\mathscr{Q}$. Supposons la condition (ii) satisfaite. On a alors $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}},q} \simeq (\underline{f}_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}}))_p$ (4.6.15.1) ; en particulier, $(\underline{f}_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}}))_p$ n'est pas réduit à 0 (4.8.6). Posons $\mathscr{F} = f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ qui est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. On a des isomorphismes canoniques $\underline{f}_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}}) \simeq \mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ (4.7.19.2) et $\underline{g}^*(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}) \simeq (g^*(\mathscr{F}))^{\mathrm{rig}}$ (4.7.23.1). Si la condition (i) n'est pas satisfaite, alors $g^*(\mathscr{F})$ est rig-nul ([28] 6.8.4) et $(g^*(\mathscr{F}))^{\mathrm{rig}} = 0$ (4.7.10). On obtient que $(\underline{f}_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}}))_p = 0$ (4.8.17), et donc une contradiction, ce qui prouve que (ii) entraîne (i).

Corollaire 4.8.44. *Soient $f\colon Y \to X$ une immersion fermée d'espaces rigides cohérents, q un point de Y_{ad} tel que le point fq de X_{ad} soit rigide ; alors q est rigide.*

Cela résulte de 4.1.20 et 4.8.43.

Corollaire 4.8.45. *Pour tout objet $\mathfrak{X}$ de $\mathbf{S}$, l'application canonique $\langle\mathfrak{X}\rangle \to \mathscr{V}_\star(\mathfrak{X})$* (4.5.16.1) *est injective.*

En effet, soient $\mathscr{P}, \mathscr{Q}$ deux points rigides de $\mathfrak{X}$ ayant même image dans la voûte étoilée. Comme $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ ont même support (4.5.17), on peut les supposer fermés dans $\mathfrak{X}$. En vertu de 4.5.15, $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ déterminent le même point de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$. Il résulte alors de 4.8.43 (appliqué à $\mathfrak{Y} = \mathscr{Q}$) que $\mathscr{P} = \mathscr{Q}$.

Corollaire 4.8.46. *Soient X un espace rigide cohérent, p un point rigide de X_{ad}. Considérons le foncteur canonique* (4.4.5.1)

$$\mathbf{P}_{/X} \to \mathbf{Pt}(X_{\mathrm{ad}})$$

et notons $\mathscr{C}_p$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{P}_{/X}$ formée des points rigides de X dont le point de X_{ad} associé est isomorphe à p. Alors :

(i) *$\mathscr{C}_p$ est un crible de $\mathbf{P}_{/X}$ engendré par un objet (P, i) tel que i soit une immersion et que $\Gamma(P, \mathscr{O}_P)$ soit canoniquement isomorphe au corps résiduel $\kappa(p)$ de l'anneau local $\mathscr{O}_{X,p}$.*

(ii) *Tout objet (Q, j) de $\mathscr{C}_p$ tel que j soit une immersion est uniquement isomorphe à (P, i) ; en particulier, (P, i) est un objet final de $\mathscr{C}_p$.*

(i) Tout morphisme de $\mathbf{P}_{/X}$ induit un isomorphisme de $\mathbf{Pt}(X_{\mathrm{ad}})$ (4.4.4). Par suite $\mathscr{C}_p$ est un crible de $\mathbf{P}_{/X}$. Soit $\mathfrak{X}$ un modèle formel de X. Il résulte de 4.1.20 que $\mathscr{C}_p$ est engendré par ses objets de la forme $(\mathscr{P}^{\mathrm{rig}}, i^{\mathrm{rig}})$, où $\mathscr{P}$ est un point rigide de $\mathfrak{X}$ et $i\colon \mathscr{P} \to \mathfrak{X}$ est l'injection canonique. Mais en vertu de 4.5.15 et 4.8.45, il existe un unique objet (P, i) de $\mathscr{C}_p$ de cette forme. D'après 4.8.9, on a un isomorphisme canonique $\Gamma(P, \mathscr{O}_P) \simeq \kappa(p)$.

(ii) En effet, on a un morphisme $h\colon (Q, j) \to (P, i)$, qui est une immersion (4.2.5), donc un isomorphisme (4.2.9), et il est unique en vertu de 4.2.7.

4.8.47. Soient X un espace rigide cohérent, p un point rigide de X_{ad}, $\mathscr{C}_p$ le crible de $\mathrm{P}_{/X}$ défini dans 4.8.46. On note “l’objet final” de $\mathscr{C}_p$ par $(\mathrm{Sp}(\kappa(p)), i_p)$, et on dit que $i_p\colon \mathrm{Sp}(\kappa(p)) \to X$ est le *morphisme canonique localisé en p.*

4.8.48. Soient $f\colon X \to Y$ un morphisme d’espaces rigides cohérents, p un point rigide de X_{ad}, $q = fp$ (qui est un point rigide de Y_{ad}). Il résulte aussitôt de la définition (4.8.47) qu’il existe un unique morphisme $g\colon \mathrm{Sp}(\kappa(p)) \to \mathrm{Sp}(\kappa(q))$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sp}(\kappa(p)) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_p"'] & \mathrm{Sp}(\kappa(q)) \arrow[d, "i_q"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

où i_p et i_q sont les morphismes canoniques localisés en p et q respectivement. Si de plus, f est une immersion, g est un isomorphisme (4.8.46(ii)).

La fibre de f au-dessus de $\mathrm{Sp}(\kappa(q))$, c’est à dire l’espace rigide cohérent $X \times_Y \mathrm{Sp}(\kappa(q))$, sera notée $X \otimes_Y \kappa(q)$ et appelée *fibre* de f (ou de X) au-dessus de q. Le morphisme canonique $i'\colon \mathrm{Sp}(\kappa(p)) \to X \otimes_Y \kappa(q)$ détermine un point rigide de $(X \otimes_Y \kappa(q))_{\mathrm{ad}}$ que l’on note provisoirement p'. Comme i' est une immersion (4.2.5), on peut l’identifier au morphisme canonique localisé en p' en vertu de 4.8.46(ii) ; en particulier, le corps résiduel $\kappa(p')$ de l’anneau local de $X \otimes_Y \kappa(q)$ en p' s’identifie à $\kappa(p)$. Par conséquent, on peut noter p au lieu de p' sans que cela n’entraîne de confusion.

Si F est un $\mathscr{O}_X$-module, l’image réciproque de F sur $X \otimes_Y \kappa(q)$ sera notée $F \otimes_{\mathscr{O}_Y} \kappa(q)$ ou $F \otimes_Y \kappa(q)$. La fibre de $F \otimes_{\mathscr{O}_Y} \kappa(q)$ en p est canoniquement isomorphe à $F_p \otimes_{\mathscr{O}_{Y,q}} \kappa(q)$. Il suffit évidemment de le montrer pour $F = \mathscr{O}_X$. On peut supposer l’immersion i_q fermée, auquel cas notre assertion résulte facilement de (4.6.15.1) et 4.8.35.

4.9 Dimension d’un espace rigide cohérent

Définition 4.9.1. Soient X un espace rigide cohérent, F un $\mathscr{O}_X$-module de type fini, q un point de X_{ad}. On appelle *dimension* de F le nombre

$$\dim(F) = \sup_p \dim(F_p), \tag{4.9.1.1}$$

où p parcourt l’ensemble des points *rigides* de X_{ad} (4.4.5). On appelle dimension de F au point q le nombre

$$\dim_q(F) = \inf_{(Y,\xi)} \dim(F|Y), \tag{4.9.1.2}$$

où (Y, ξ) parcourt l’ensemble des voisinages de q dans le site $\mathbf{Ad}_{/X}$ (4.4.1 et 1.1.8). On appelle dimension de X et l’on note $\dim(X)$ le nombre $\dim(\mathscr{O}_X)$, et dimension de X au point q et l’on note $\dim_q(X)$ le nombre $\dim_q(\mathscr{O}_X)$.

On peut faire les remarques suivantes :

4.9.1.3. Pour tout point rigide p de X_{ad}, $\mathscr{O}_{X,p}$ est un anneau local noethérien (4.8.10).

4.9.1.4. Si $X = \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$, où $\mathfrak{X}$ est un schéma formel idyllique quasi-compact, les points rigides de X_{ad} sont induits par les points rigides de $\mathfrak{X}$ (4.1.20).

4.9.1.5. Si $F_q = 0$, $\dim_q(F) = -\infty$ en vertu de 1.3.11(iv).

4.9.1.6. Supposons F cohérent. Pour que $F = 0$, il faut et il suffit que l'on ait $\dim(F) = -\infty$. En effet, si $\dim(F) = -\infty$, $F_p = 0$ pour tout point rigide p de X_{ad} ; donc $F = 0$ en vertu de 4.8.21.

4.9.1.7. Supposons F cohérent. Si I désigne l'annulateur de F dans $\mathscr{O}_X$, *i.e.*, le noyau de l'homomorphisme canonique $\mathscr{O}_X \to \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(F, F)$, alors on a

$$\dim(F) = \dim(\mathscr{O}_X/I), \tag{4.9.1.8}$$

$$\dim_q(F) = \dim_q(\mathscr{O}_X/I). \tag{4.9.1.9}$$

En effet, pour tout point p de X_{ad}, I_p est l'annulateur de F_p dans $\mathscr{O}_{X,p}$ (1.3.12).

4.9.2. Soient $f\colon Y \to X$ une immersion fermée d'espaces rigides cohérents, G un $\mathscr{O}_Y$-module cohérent. Alors $f_*(G)$ est un $\mathscr{O}_X$-module cohérent (4.8.22), et il résulte de (4.6.15.1), 4.6.18 et 4.8.44 qu'on a

$$\dim(f_*(G)) = \dim(G). \tag{4.9.2.1}$$

Compte tenu de 4.2.4, on en déduit que pour tout point q de Y_{ad}, on a

$$\dim_{fq}(f_*(G)) = \dim_q(G). \tag{4.9.2.2}$$

En particulier, on a

$$\dim(Y) = \dim(f_*(\mathscr{O}_Y)) \leq \dim(X). \tag{4.9.2.3}$$

Proposition 4.9.3. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique quasi-compact, p un point de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, $\mathfrak{Y}$ le sous-schéma fermé de $\mathfrak{X}$ défini par l'annulateur de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ l'injection canonique. Alors :*

(i) $\dim(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}) = \dim(\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}})$.

(ii) *S'il existe un point q de $\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ tel que $p \simeq \underline{f}q$, on a* $\dim_p(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}) = \dim_q(\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}})$.

(iii) *S'il n'existe aucun point q de $\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ tel que $p \simeq \underline{f}q$, on a* $\dim_p(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}) = -\infty$.

Posons $\mathscr{G} = f^*(\mathscr{F})$. Comme le morphisme d'adjonction $\mathscr{F} \to f_*(\mathscr{G})$ est bijectif, $\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ est isomorphe à $\underline{f}_*(\mathscr{G}^{\mathrm{rig}})$ en vertu de (4.7.19.2). D'autre part, l'annulateur de $\mathscr{G}$ dans $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$ étant nul, l'annulateur de $\mathscr{G}^{\mathrm{rig}}$ dans $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}}$ est aussi nul (4.7.11 et 4.7.29.2). Les propositions (i) et (ii) résultent alors de 4.9.1.7 et 4.9.2. La proposition (iii) est une conséquence de 4.6.18 et 4.9.1.5.

Proposition 4.9.4. *Soient A un anneau idyllique, M un A-module cohérent, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathscr{F} = M^{\Delta}$, $\mathscr{P}$ un point rigide fermé de $\mathfrak{X}$; notons p le point de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ et $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de A associés à $\mathscr{P}$. On a*

$$\dim(M_{\mathfrak{p}}) = \dim(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}_p). \tag{4.9.4.1}$$

En vertu de 4.8.9, on a un homomorphisme local canonique d'anneaux locaux noethériens $A_{\mathfrak{p}} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}},p}$, dont le prolongement aux complétés est un isomorphisme. D'autre part, on a un isomorphisme canonique $M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}},p} \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}^{\mathrm{rig}}_p$ (4.8.15.1), d'où l'on déduit que les séparés complétés de $M_{\mathfrak{p}}$ et $\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}_p$ pour les topologies définies par les idéaux maximaux de $A_{\mathfrak{p}}$ et $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}},p}$ sont isomorphes. La proposition s'ensuit en vertu de ([31] 0.16.2.4).

Corollaire 4.9.5. *Soient A un anneau idyllique, J un idéal de définition de A, M un A-module cohérent ; posons $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathscr{F} = M^{\Delta}$, $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $X_{\mathrm{g}} = X - \mathrm{V}(J)$. On a*

$$\dim(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}) \geq \dim(\widetilde{M}|X_{\mathrm{g}}) \tag{4.9.5.1}$$

et les deux membres sont égaux si A/J est un anneau de Jacobson.

Comme X_{g} est quasi-compact, toute partie fermée irréductible de X_{g} contient un point fermé. On en déduit que

$$\dim(\widetilde{M}|X_{\mathrm{g}}) = \sup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{F}} \dim(M_{\mathfrak{p}}), \tag{4.9.5.2}$$

où F est l'ensemble des points fermés de X_{g} ([31] 5.1.13). Le corollaire résulte alors de 3.3.2, (4.9.4.1) et du fait que, si A/J est un anneau de Jacobson, tout point rigide de $\mathfrak{X}$ est fermé.

Remarque 4.9.6. Si R est un ordre 1-valuatif, I un idéal de définition de type fini de R et A une R-algèbre topologiquement de type fini, alors A/IA est un anneau de Jacobson ([12] chap. V §3.4 théo. 3).

Corollaire 4.9.7. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique quasi-compact, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, $\mathfrak{B}$ une base de la topologie de $\mathfrak{X}$ formée d'ouverts formels affines globalement idylliques. On a*

$$\dim(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}) = \sup_{U=\mathrm{Spf}(A)\in\mathfrak{B}} \dim(\widetilde{M}|V_{\mathrm{g}}), \tag{4.9.7.1}$$

où pour $U = \mathrm{Spf}(A) \in \mathfrak{B}$, on a posé $M = \Gamma(U, \mathscr{F})$ et $V_{\mathrm{g}} = \mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$, J étant un idéal de définition de A.

Cela résulte de 3.3.2, 4.9.4 et 4.9.5.

Proposition 4.9.8. *Soient $f \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme fini de* **S**, *$\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent.*

(i) *On a* $\dim(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}) = \dim((f_*\mathscr{F})^{\mathrm{rig}})$.

(ii) *On a* $\dim(\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}) \leq \dim(\mathfrak{Y})^{\mathrm{rig}})$.

(iii) *Si f^{rig} est couvrant pour les points rigides* (4.3.1), *on a* $\dim(\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}) = \dim(\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}})$.

Notons $\mathfrak{B}$ l'ensemble des ouverts de $\mathfrak{X}$ de la forme $f^{-1}(U)$, où U est un ouvert formel affine globalement idyllique de $\mathfrak{Y}$; on observera que $f^{-1}(U)$ est formel affine globalement idyllique et que tout point rigide $\mathscr{P}$ de $f^{-1}(U)$ tel que $f(\mathscr{P})$ soit fermé dans U, est fermé dans $f^{-1}(U)$ (1.11.5 et [29] 5.4.3). Il résulte alors de 3.3.2, 4.9.4 et 4.9.5 qu'on a

$$\dim(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}) = \sup_{V=\mathrm{Spf}(B)\in\mathfrak{B}} \dim(\widetilde{M}|W_{\mathfrak{g}}), \tag{4.9.8.1}$$

où pour $V = \mathrm{Spf}(B) \in \mathfrak{B}$, on a posé $M = \Gamma(V, \mathscr{F})$ et $W_{\mathfrak{g}} = \mathrm{Spec}(B) - \mathrm{V}(K)$, K étant un idéal de définition de B.

La proposition (i) résulte de (4.9.7.1), (4.9.8.1) et ([31] 0.16.1.9) ; et elle implique aussitôt (ii). Montrons la proposition (iii). Soient $U = \mathrm{Spf}(A)$ un ouvert formel affine globalement idyllique de $\mathfrak{Y}$, J un idéal de définition de type fini de A. On a alors $f^{-1}(U) = \mathrm{Spf}(B)$, où B est une A-algèbre finie et topologiquement de présentation finie. Considérons le morphisme fini de schémas noethériens (1.10.2)

$$h\colon \mathrm{Spec}(B) - \mathrm{V}(JB) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J).$$

Il résulte des hypothèses que son image contient tous les points fermés de $\mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$ (4.3.5), qui est un schéma de Jacobson (1.11.9) ; donc h est surjectif. On en déduit par ([31] 5.4.2) que

$$\dim(\mathrm{Spec}(B) - \mathrm{V}(JB)) = \dim(\mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)).$$

La proposition (iii) s'ensuit compte tenu de (4.9.7.1) et (4.9.8.1).

Corollaire 4.9.9. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme fini de $\mathbf{S}$, $\mathscr{G}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module cohérent ; alors* $\dim((f^*\mathscr{G})^{\mathrm{rig}}) \leq \dim(\mathscr{G}^{\mathrm{rig}})$.

Cela résulte aussitôt de 4.9.3(i) et 4.9.8(ii).

Corollaire 4.9.10. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme étale de $\mathbf{S}$, $\mathscr{G}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module cohérent ; alors* $\dim((f^*\mathscr{G})^{\mathrm{rig}}) \leq \dim(\mathscr{G}^{\mathrm{rig}})$ *; en particulier, on a* $\dim(\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}) \leq \dim(\mathfrak{Y})^{\mathrm{rig}})$.

On peut se borner au cas où $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ sont formels affines globalement idylliques. En vertu de 1.16.28 et 4.9.9, l'assertion se réduit alors au cas où f est une immersion ouverte, ce qui est évident.

Proposition 4.9.11. *Soient R un ordre 1-valuatif, K le corps des fractions de R, A une R-algèbre topologiquement de type fini. Alors chaque composante irréductible de* $\mathrm{Spec}(A \otimes_R K)$ *est biéquidimensionnelle* ([31] 0.14.3.3).

Compte tenu de ([31] 0.14.3.5), on peut se borner au cas où $A = R\langle \xi_1, \ldots, \xi_n \rangle$ est une algèbre de séries formelles restreintes sur R. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A définissant un point fermé de $\mathrm{Spec}(A \otimes_R K)$. Il résulte de 1.12.20 (appliqué à la R-algèbre $B = R[\xi_1, \ldots, \xi_n]$) que $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau local régulier de dimension n ([31] 0.17.1.5), et donc caténaire ([31] 0.16.5.12). Par suite, $A \otimes_R K$ est caténaire ([31] 5.1.5), et donc biéquidimensionnel.

Corollaire 4.9.12. *Soient R un ordre 1-valuatif, K le corps des fractions de R, A une R-algèbre topologiquement de type fini, $X = \mathrm{Spec}(A \otimes_R K)$, $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A définissant un point fermé x de X ; alors $\dim_x(X) = \dim(A_{\mathfrak{p}})$.*

On sait qu'il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que $\dim_x(X) = \dim(U)$, et l'on peut supposer que les composantes irréductibles de U sont les $U \cap X_i$, où les X_i sont les composantes irréductibles de X contenant x ; on a donc $\dim_x(X) = \sup_i \dim(U \cap X_i)$. D'autre part, les idéaux premiers minimaux de $A_{\mathfrak{p}}$ correspondent aux points génériques des X_i ; on a donc $\dim(A_{\mathfrak{p}}) = \sup_i \dim(\mathscr{O}_{X_i,x})$ ([31] 0.16.1.1.1). On est donc ramené à montrer que $\dim(U \cap X_i) = \dim(\mathscr{O}_{X_i,x})$ pour tout i. Comme X_i est biéquidimensionnel (4.9.11) et que x est fermé dans X, on a $\dim(X_i) = \mathrm{codim}(x, X_i)$ ([31] 0.14.3.5.1), et l'on sait que $\mathrm{codim}(x, X_i) = \dim(\mathscr{O}_{X_i,x})$ ([31] 5.1.2). Par suite, on a

$$\dim(\mathscr{O}_{X_i,x}) \leq \dim(U \cap X_i) \leq \dim(X_i) = \dim(\mathscr{O}_{X_i,x}).$$

Lemme 4.9.13. *Soient A un anneau idyllique rig-pur, ayant un idéal de définition principal J engendré par t, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = \mathrm{Spec}(A/J)$, $X_{\mathfrak{g}} = \mathrm{Spec}(A_t)$. Soient $\mathscr{P}$ un point rigide fermé de $\mathfrak{X}$, x le point fermé de $X_{\mathfrak{g}}$ correspondant à $\mathscr{P}$ (3.3.2), U un voisinage ouvert de x dans $X_{\mathfrak{g}}$. Alors, il existe un idéal ouvert de type fini $\mathfrak{a}$ de A tel que, si l'on note $\phi\colon X' \to X$ l'éclatement de $\widetilde{\mathfrak{a}}$ dans X, $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ l'éclatement de $\mathfrak{a}^{\Delta}$ dans $\mathfrak{X}$, $\mathscr{Q}$ l'unique point rigide de $\mathfrak{X}'$ relevant $\mathscr{P}$ (3.3.7), il existe un ouvert affine V de X' vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) *$V \cap \phi^{-1}(X_{\mathfrak{g}}) \subset \phi^{-1}(U)$;*

(ii) *$\mathscr{Q}$ est contenu dans le complété $\widehat{V}$ de V le long de $V \cap \phi^{-1}(Y)$.*

On notera d'abord que $\mathfrak{X}'$ est idyllique (3.1.4) et qu'il est isomorphe au complété de X' le long de $\phi^{-1}(Y)$. On peut évidemment se borner au cas où $U = \mathrm{D}(f) \cap X_{\mathfrak{g}}$, où $f \in A$. Si $\mathfrak{p}$ est l'idéal premier de A défini par x, $A/\mathfrak{p}$ est un ordre 1-valuatif (1.11.8). Soit R la clôture intégrale de $A/\mathfrak{p}$ dans son corps des fractions. Comme $f \notin \mathfrak{p}$ et que R est un anneau 1-valuatif (1.11.4), il existe deux entiers $m \geq 1$, $n \geq 0$ et une unité α de R tels qu'on ait $f^m = t^n \alpha$ dans R.

Si $n = 0$, f n'appartient pas à l'idéal maximal de $A/\mathfrak{p}$ ([12] chap. V §2.1 prop. 1). Par suite, l'ouvert $\mathrm{Spf}(A_{\{f\}})$ de $\mathfrak{X}$ contient $\mathscr{P}$; donc l'ouvert $V = \mathrm{D}(f)$ de X convient.

Supposons $n \geq 1$. Prenons pour $\mathfrak{a}$ l'idéal (t^n, f^m) et soient X', $\mathfrak{X}'$, $\mathscr{Q}$ comme dans l'énoncé du lemme. Soient V (resp. V') l'ouvert maximal de X' où f^m (resp. t^n) engendre $\widetilde{\mathfrak{a}}\mathscr{O}_{X'}$, $\widehat{V}$ (resp. $\widehat{V}'$) son complété le long de $V \cap \phi^{-1}(Y)$ (resp. $V' \cap \phi^{-1}(Y)$). On notera que V et V' sont deux ouverts affines qui recouvrent X' (3.1.6). Il est clair que $V \cap \phi^{-1}(X_{\mathfrak{g}}) \subset \phi^{-1}(\mathrm{D}(f))$. Il résulte de 3.2.6 et de la relation $f^m = t^n \alpha$ dans R que $\mathscr{Q}$ est contenu dans $\widehat{V} \cap \widehat{V}'$. Donc l'ouvert V de X' convient.

Proposition 4.9.14. *Soient S un point rigide, X un S-espace rigide cohérent non vide, F un $\mathscr{O}_X$-module cohérent, p un point rigide de X_{ad}. Alors F est de dimension finie et on a*

$$\dim_p(F) = \dim(F_p). \tag{4.9.14.1}$$

La première proposition résulte de 4.9.5, 4.9.6 et 4.9.11. Compte tenu de 4.9.4, pour établir la seconde proposition, il suffit de montrer le corollaire suivant.

Corollaire 4.9.15. *Soient R un ordre 1-valuatif, K le corps des fractions de R, A une R-algèbre topologiquement de présentation finie, M un A-module cohérent, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathscr{F} = M^{\Delta}$, $\mathscr{P}$ un point rigide fermé de $\mathfrak{X}$; notons p le point de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ et $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de A associés à $\mathscr{P}$. On a $\dim_p(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}) = \dim(M_{\mathfrak{p}})$.*

On peut se réduire au cas où $M = A$ (4.9.3 et 4.8.43). On peut ensuite supposer A rig-pur ayant un idéal de définition principal J (3.3.6). On a $\dim_p(\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}) \geq \dim(A_{\mathfrak{p}})$ d'après 4.9.4. D'autre part, on a $\dim_{\mathfrak{p}}(\mathrm{Spec}(A \otimes_R K)) = \dim(A_{\mathfrak{p}})$ en vertu de 4.9.12. Il existe donc un voisinage ouvert U de $\mathfrak{p}$ dans $\mathrm{Spec}(A \otimes_R K)$ tel que $\dim(U) = \dim(A_{\mathfrak{p}})$. Appliquons 4.9.13 à U ; on obtient un idéal ouvert de type fini $\mathfrak{a}$ de A tel que, si l'on note $\phi\colon X' \to X$ l'éclatement de $\widetilde{\mathfrak{a}}$ dans X, il existe un ouvert affine $V = \mathrm{Spec}(B)$ de X' vérifiant les propriétés (i),(ii) de 4.9.13. On observera que B est une A-algèbre de présentation finie (1.13.3). Soient $\widehat{B}$ le séparé complété de B pour la topologie J-préadique, $\widehat{V} = \mathrm{Spf}(\widehat{B})$. D'après 4.9.5 et 1.12.20(iv), on a

$$\begin{aligned} \dim_p(\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}) \leq \dim(\widehat{V}^{\mathrm{rig}}) &= \dim(\widehat{B} \otimes_R K) \\ &\leq \dim(B \otimes_R K) \leq \dim(U) = \dim(A_{\mathfrak{p}}), \end{aligned}$$

d'où l'égalité $\dim_p(\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}) = \dim(A_{\mathfrak{p}})$.

Proposition 4.9.16. *Soient R un ordre 1-valuatif, R' une R-algèbre topologiquement de présentation finie qui est un ordre 1-valuatif, A une R-algèbre topologiquement de présentation finie, M un A-module cohérent ; posons $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathfrak{X}' = \mathrm{Spf}(A \widehat{\otimes}_R R')$, $\mathscr{F} = M^{\Delta}$ et $\mathscr{F}' = \mathscr{F} \otimes_{\mathfrak{X}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$. On a $\dim(\mathscr{F}'^{\mathrm{rig}}) = \dim(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}})$.*

Comme R' est un R-module cohérent (1.11.5), $A \widehat{\otimes}_R R'$ est isomorphe à $A \otimes_R R'$ (1.10.2) et $\mathscr{F}'$ est isomorphe à $(M \otimes_R R')^{\Delta}$ (2.7.4). Si K et K' sont les corps des fractions de R et R', on déduit de 4.9.5 que l'on a

$$\begin{aligned} \dim(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}) &= \dim_{A \otimes_R K}(M \otimes_R K), \\ \dim(\mathscr{F}'^{\mathrm{rig}}) &= \dim_{A \otimes_R K'}(M \otimes_R K'). \end{aligned}$$

La proposition résulte alors de ([31] 6.1.2).

Corollaire 4.9.17. *Soient $f\colon P \to S$ un morphisme de points rigides, X un S-espace rigide cohérent, F un $\mathscr{O}_X$-module cohérent ; alors $\dim(F \otimes_S \mathscr{O}_P) = \dim(F)$.*

Cela résulte de 3.3.12, 4.7.23 et 4.9.16.

Chapitre 5

Platitude

Nous présentons des versions formelles idylliques de certains résultats de platitude de Raynaud-Gruson, initialement établis dans le cadre algébrique [42]. La plupart de ces énoncés sont parus dans [9] dans le cas général[1] et dans [39] pour les schémas formels de présentation finie au-dessus d'un anneau de valuation de hauteur 1.

Nous étudions en premier lieu les modules cohérents plats sur les schémas formels idylliques. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme de $\mathbf{S}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, $x \in \mathfrak{X}$, $s = f(x)$. Nous introduisons la notion de $\mathscr{S}$-dévissage de $\mathscr{F}$ en x, qui permet de raisonner par récurrence sur la dimension relative $\dim_x(\mathscr{F}/\mathscr{S})$. Quitte à remplacer $(\mathfrak{X}, x)$ et $(\mathscr{S}, s)$ par des voisinages étales élémentaires, on peut toujours construire de tels dévissages. Nous donnons un critère important pour que $\mathscr{F}$ soit $\mathscr{S}$-plat en x en termes de dévissages relatifs (5.3.6). Nous en déduisons de nombreux corollaires, entre autres le fait que l'ensemble des points x de $\mathfrak{X}$ tels que $\mathscr{F}$ soit $\mathscr{S}$-plat en x est ouvert (5.3.10).

Il y a deux façons d'introduire les modules plats sur les espaces rigides cohérents. La façon la plus directe mais la moins explicite est la définition générale de la platitude pour les topos annelés (1.1.12). Nous présentons aussi une autre notion plus *ad. hoc.*, celle des modules cohérents rig-plats sur les schémas formels idylliques. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme localement de type fini entre schémas formels idylliques, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, $\mathscr{P}$ un point rigide de $\mathfrak{X}$. Supposons d'abord que $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B)$ et $\mathscr{S} = \mathrm{Spf}(A)$ soient formels affines globalement idylliques, que $\mathscr{P}$ soit fermé dans $\mathfrak{X}$ et que $f(\mathscr{P})$ soit fermé dans $\mathscr{S}$. Soit K un idéal de définition de B. On a $\mathscr{F} = M^{\Delta}$, où M est un B-module cohérent, et $\mathscr{P}$ correspond à un point fermé $\mathfrak{p}$ de $\mathrm{Spec}(B) - \mathrm{V}(K)$. On dit que $\mathscr{F}$ est *rig-f-plat* en $\mathscr{P}$ si $M_{\mathfrak{p}}$ est A-plat. Cette notion se localise bien (c'est pour cela que l'on suppose $f(\mathscr{P})$ fermé dans $\mathscr{S}$). Par suite, on peut la globaliser. On dit que $\mathscr{F}$ est *rig-f-plat* s'il est rig-f-plat en tout point rigide de $\mathfrak{X}$. Nous montrons que si f est un morphisme de $\mathbf{S}$, pour que $\mathscr{F}$ soit rig-f-plat, il faut et il suffit que $\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ soit f^{rig}-plat dans le sens des topos annelés (5.5.8).

[1] On prendra garde cependant que le traitement de [9] est légèrement incomplet.

A. Abbes, *Éléments de Géométrie Rigide*, Progress in Mathematics 286,
DOI 10.1007/978-3-0348-0012-9_5, © Springer Basel AG 2010

Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme de $\mathbf{S}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent rig-$f$-plat. Nous montrons qu'il existe un éclatement admissible de présentation finie $\varphi\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ tel que le transformé strict de $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}'}$ soit $\mathscr{S}'$-plat (5.8.1). Comme corollaire, on en déduit que la platitude pour les modules cohérents sur les espaces rigides cohérents est stable par changement de base (5.8.9).

Nous étudions aussi les modules cohérents fidèlement plats sur les espaces rigides cohérents. Nous établissons des énoncés de descente fidèlement plate pour les modules cohérents sur les espaces rigides cohérents (5.11.11) et pour les morphismes d'espaces rigides cohérents (5.12.4), dus essentiellement à Gabber, Bosch et Görtz [6].

Notations. Soient $\mathscr{S}$ un schéma formel, $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ deux $\mathscr{S}$-schémas formels, $\mathfrak{Z} = \mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{Y}$, p, q les projections de $\mathfrak{Z}$ dans $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ respectivement, $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{G}$) un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module (resp. $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module). On appelle produit tensoriel de $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sur $\mathscr{O}_{\mathscr{S}}$ (ou sur $\mathscr{S}$) et on note $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{S}}} \mathscr{G}$ (ou $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{G}$) le produit tensoriel $p^*(\mathscr{F}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{S}}} q^*(\mathscr{G})$.

Soient S un espace rigide cohérent, X, Y deux S-espaces rigides cohérents, $Z = X \times_S Y$, p, q les projections de Z dans X et Y respectivement, F (resp. G) un $\mathscr{O}_X$-module (resp. $\mathscr{O}_Y$-module). On appelle produit tensoriel de F et G sur $\mathscr{O}_S$ (ou sur S) et on note $F \otimes_{\mathscr{O}_S} G$ (ou $F \otimes_S G$) le produit tensoriel $p^*(F) \otimes_{\mathscr{O}_S} q^*(G)$.

Il sera sous-entendu que les schémas formels envisagés dans la section 5.6 et les suivantes sont éléments de l'univers fixé $\mathbb{U}$ (4.1.1).

5.1 Modules cohérents plats sur les schémas formels idylliques

Proposition 5.1.1. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels idylliques, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module, x un point de $\mathfrak{X}$, $y = f(x)$. Pour que $\mathscr{F}$ soit f-plat en x, il faut et il suffit que pour tout voisinage ouvert U de y dans $\mathfrak{Y}$, le foncteur $\mathscr{G} \mapsto (\mathscr{G} \otimes_{\mathfrak{Y}} \mathscr{F})_x$ soit exact en $\mathscr{G}$ dans la catégorie des $(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}|U)$-modules cohérents.*

Cela résulte de 1.3.17 et 2.8.1.

Proposition 5.1.2. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique de schémas formels idylliques, x un point de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, $\mathscr{K}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{Y}$, $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$, $\mathfrak{Y}_n = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}^{n+1})$, $f_n\colon \mathfrak{X}_n \to \mathfrak{Y}_n$ le morphisme déduit de f. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\mathscr{F}$ est f-plat au point x (resp. f-plat).*

(ii) *$\mathscr{F}_n = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$ est f_n-plat au point x (resp. f_n-plat) pour tout $n \geq 0$.*

Il suffit de montrer l'équivalence des énoncés relatifs au point x. La question étant locale sur $\mathfrak{X}$ et sur $\mathfrak{Y}$, on peut se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B)$ et $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A)$ sont affines globalement idylliques, $\mathscr{K} = K^{\Delta}$, où K est un idéal de définition de type fini de A, et $\mathscr{F} = M^{\Delta}$, où M est un B-module cohérent. Alors f est associé à un homomorphisme adique $\varphi\colon A \to B$. Soient $\mathfrak{q}$ l'idéal premier ouvert de B associé à x, $\mathfrak{p}$ l'idéal premier ouvert de A associé à $y = f(x)$, $\mathscr{F}_x$ la fibre de $\mathscr{F}$ en x, $\mathscr{O}_y$ l'anneau local de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$ en y. Si l'on pose $T = B - \mathfrak{q}$ et $S = A - \mathfrak{p}$, on a $\mathscr{F}_x = M_{\{T\}}$ et $\mathscr{O}_y = A_{\{S\}}$ (1.8.12). La proposition résulte alors de 1.12.8 et 2.5.2(iii).

Proposition 5.1.3. *Considérons un diagramme commutatif de schémas formels idylliques*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & \mathfrak{X} \arrow[d, "f"] \\ \mathfrak{Y}' \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "h"'] & \mathfrak{Y} \\ \mathfrak{Z} & \end{tikzcd}$$

où $\mathfrak{X}' = \mathfrak{Y}' \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{X}$, f' et g' sont les projections canoniques, et les flèches verticales sont adiques. Soit x' un point de $\mathfrak{X}'$, et posons $x = g'(x')$, $y' = f'(y)$, $y = f(x) = g(y')$ et $z = h(y')$. Soient $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent f-plat au point x (resp. f-plat), $\mathscr{G}'$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'}$-module cohérent h-plat au point y' (resp. h-plat). Alors $\mathscr{G}' \otimes_{\mathfrak{Y}} \mathscr{F}$ est $(h \circ f')$-plat en x' (resp. $(h \circ f')$-plat).

Notons d'abord que $\mathscr{G}' \otimes_{\mathfrak{Y}} \mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$-module cohérent (2.8.11). La question étant locale sur $\mathfrak{Y}$ et sur $\mathfrak{Y}'$, on peut se borner au cas où il existe des idéaux de définition cohérents $\mathscr{K}$ de $\mathfrak{Y}$ (resp. $\mathscr{L}$ de $\mathfrak{Z}$) tels que $g^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'} \subset h^*(\mathscr{L})\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'}$ (2.2.4). La proposition résulte alors de 2.2.15, 5.1.2 et de l'assertion correspondante pour les schémas usuels ([31] 2.1.5).

Proposition 5.1.4. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique de schémas formels idylliques, $\mathscr{K}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{Y}$, $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$,*

$$0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$$

une suite exacte de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents telle que $\mathscr{F}''$ soit f-plat.

(i) *Pour tout entier $n \geq 0$, la suite*

$$0 \to \mathscr{F}'/\mathscr{J}^{n+1}\mathscr{F}' \to \mathscr{F}/\mathscr{J}^{n+1}\mathscr{F} \to \mathscr{F}''/\mathscr{J}^{n+1}\mathscr{F}'' \to 0$$

est exacte.

(ii) *Pour tout morphisme $g\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$ de schémas formels idylliques tel que $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}'$ soit idyllique et tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'}$-module cohérent $\mathscr{G}'$, la suite de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$-modules*

$$0 \to \mathscr{F}' \otimes_{\mathfrak{Y}} \mathscr{G}' \to \mathscr{F} \otimes_{\mathfrak{Y}} \mathscr{G}' \to \mathscr{F}'' \otimes_{\mathfrak{Y}} \mathscr{G}' \to 0$$

est exacte.

(iii) *Pour que $\mathscr{F}$ soit f-plat, il faut et il suffit que $\mathscr{F}'$ le soit.*

Les propositions (i) et (iii) résultent aussitôt de ([28] 0.5.7.4). Montrons (ii). On notera que les $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$-modules de la suite sont cohérents (2.8.11). La question étant locale sur $\mathfrak{Y}$ et sur $\mathfrak{Y}'$, on peut se borner au cas où g est déployé (2.2.4). La conclusion résulte alors de (i), 5.1.2, 2.2.15, 2.8.5, et de l'assertion correspondante pour les schémas usuels ([31] 2.1.8(i)).

Proposition 5.1.5. *Soient $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathscr{S}$ des schémas formels idylliques, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme fini et de présentation finie, $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathscr{S}$ un morphisme adique, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Pour que $\mathscr{F}$ soit $\mathscr{S}$-plat, il faut et il suffit que $f_*(\mathscr{F})$ soit $\mathscr{S}$-plat.*

On notera que $f_*(\mathscr{F})$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module cohérent (2.8.19). La proposition résulte de 2.8.19, 5.1.2 et de l'assertion correspondante pour les schémas usuels.

Proposition 5.1.6. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique de schémas formels idylliques, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, $\mathscr{K}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{Y}$, $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$, $\mathfrak{Y}_n = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}^{n+1})$, $f_n\colon \mathfrak{X}_n \to \mathfrak{Y}_n$ le morphisme déduit de f. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\mathscr{F}$ est f-plat et pour tout $y \in \mathfrak{Y}$, si l'on note $\mathfrak{X} \otimes_{\mathfrak{Y}} \kappa(y)$ la fibre de $\mathfrak{X}$ au-dessus de y, le $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}\otimes_{\mathfrak{Y}}\kappa(y)}$-module $\mathscr{F} \otimes_{\mathfrak{Y}} \kappa(y)$ est non nul* (2.3.27).

(ii) *$\mathscr{F}$ est f-plat et $f(\mathrm{Supp}(\mathscr{F})) = \mathfrak{Y}$.*

(iii) *$\mathscr{F}_n = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$ est fidèlement plat relativement à f_n pour tout $n \geq 0$.*

En effet, l'équivalence de (i) et (ii) est immédiate ; celle de (ii) et (iii) résulte de 5.1.2 et du fait que $\mathrm{Supp}(\mathscr{F}) = \mathrm{Supp}(\mathscr{F}_n)$ pour tout $n \geq 0$.

Définition 5.1.7. Lorsque les conditions équivalentes de (5.1.6) sont satisfaites, on dit que $\mathscr{F}$ est fidèlement plat relativement à f (ou à $\mathfrak{Y}$).

On peut faire les remarques suivantes :

5.1.7.1. Si $\mathscr{F}$ est fidèlement plat relativement à f, le foncteur $\mathscr{G} \mapsto \mathscr{F} \otimes_{\mathfrak{Y}} \mathscr{G}$, de la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-modules cohérents dans celle des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents, est exact et fidèle. Cela résulte de 2.8.6, 2.8.11 et de l'assertion analogue pour les schémas ([31] 2.2.1).

5.1.7.2. Pour que $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ soit fidèlement plat relativement à f, il faut et il suffit qu'il soit f-plat et que f soit surjectif, autrement dit, que *le morphisme f soit fidèlement plat* ([28] 0.5.7.7).

Proposition 5.1.8. *Considérons un diagramme commutatif de schémas formels idylliques*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & \mathfrak{X} \arrow[d, "f"] \\ \mathfrak{Y}' \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "h"'] & \mathfrak{Y} \\ \mathfrak{Z} & \end{tikzcd}$$

où $\mathfrak{X}' = \mathfrak{Y}' \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{X}$, f' et g' sont les projections canoniques, et les flèches verticales sont adiques. Soient $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent fidèlement plat relativement *à $\mathfrak{Y}$, $\mathscr{G}'$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'}$-module cohérent. Pour que $\mathscr{G}'$ soit plat (resp. fidèlement plat) relativement à $\mathfrak{Z}$, il faut et il suffit que $\mathscr{G}' \otimes_{\mathfrak{Y}} \mathscr{F}$ soit plat (resp. fidèlement plat) relativement à $\mathfrak{Z}$.*

On notera que $\mathscr{G}' \otimes_{\mathfrak{Y}} \mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$-module cohérent (2.8.11). Il suffit de considérer successivement le cas où h est un isomorphisme, et le cas où g est un isomorphisme. Supposons h un isomorphisme. La question étant locale sur $\mathfrak{Y}$ et sur $\mathfrak{Y}'$, on peut se borner au cas où il existe des idéaux de définition cohérents $\mathscr{K}$ de $\mathfrak{Y}$ (resp. $\mathscr{K}'$ de $\mathfrak{Y}'$) tels que $g^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'} \subset \mathscr{K}'$ (2.2.4). L'assertion résulte alors de 5.1.2, 5.1.6, 2.2.15 et de la proposition correspondante pour les modules quasi-cohérents sur les schémas usuels ([31] 2.2.10). Les mêmes arguments (sans faire de réduction) permettent aussi de traiter le cas où g est un isomorphisme.

Lemme 5.1.9. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique, quasi-compact et fidèlement plat de schémas formels idylliques, $\mathscr{K}$ un idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$ tel que $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ soit un idéal de définition de $\mathfrak{X}$. Alors $\mathscr{K}$ est un idéal de définition de $\mathfrak{Y}$.*

On notera d'abord que $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ s'identifie à $f^*(\mathscr{K})$. La question étant locale sur $\mathfrak{Y}$, on peut le supposer quasi-compact. Donc $\mathfrak{X}$ est quasi-compact, et il existe un idéal de définition cohérent $\mathscr{K}'$ de $\mathfrak{Y}$ et un entier $n > 0$ tels que $f^*(\mathscr{K}^n) \subset f^*(\mathscr{K}') \subset f^*(\mathscr{K})$. On en déduit par 5.1.7.1 que $\mathscr{K}^n \subset \mathscr{K}' \subset \mathscr{K}$, d'où l'assertion.

Proposition 5.1.10. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme fidèlement plat de présentation finie de schémas formels idylliques, $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ un morphisme de schémas formels adiques tel que le morphisme composé $g \circ f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Z}$ soit adique (resp. de type fini, resp. de présentation finie). Alors g est un morphisme adique (resp. de type fini, resp. de présentation finie).*

En effet, la proposition relative aux morphismes adiques résulte de 2.8.2 et 5.1.9. Les deux autres propositions se réduisent par la première aux assertions analogues pour les morphismes de schémas ([31] 11.3.16).

Proposition 5.1.11. *Soient A un anneau idyllique, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre adique qui est un anneau idyllique, M un B-module cohérent ; posons $A_n = A/J^{n+1}$ $(n \geq 0)$, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B)$, $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A)$ et $\mathscr{F} = M^{\Delta}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *M est un A-module plat (resp. fidèlement plat).*
(ii) *$M \otimes_A A_n$ est un A_n-module plat (resp. fidèlement plat) pour tout $n \geq 0$.*
(iii) *$\mathscr{F}$ est plat (resp. fidèlement plat) relativement à $\mathfrak{Y}$.*

En effet, les conditions (i) et (ii) sont équivalentes en vertu de 1.12.4. Par suite, la condition (ii) ne dépend pas du choix de l'idéal J ; on peut donc le supposer de type fini. Les conditions (ii) et (iii) sont alors équivalentes en vertu de 5.1.2 (resp. 5.1.6).

Corollaire 5.1.12. *Soient A un anneau idyllique, U un ouvert formel affine de $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $B = \Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$. Alors B est A-plat.*

Cela résulte de 5.1.11 car B est idyllique (2.6.12).

Corollaire 5.1.13. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique de schémas formels idylliques, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, $\mathscr{G}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module cohérent. Si $\mathscr{F}$ est f-plat et si $\mathscr{G}$ est rig-pur* (2.10.1.4)*, alors $\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathscr{F}$ est rig-pur. En particulier, si $\mathscr{F}$ est f-plat et si $\mathfrak{Y}$ est rig-pur, alors $\mathscr{F}$ est rig-pur.*

La question étant locale, on peut se borner au cas où $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ sont formels affines globalement idylliques. La conclusion résulte alors de 2.10.13 et 5.1.11, compte tenu de (2.7.2.4) et 2.7.4.

Définition 5.1.14. Soient $\mathscr{S}$ un schéma formel, $\mathfrak{X}$ un $\mathscr{S}$-schéma formel, $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ deux $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules, $u\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-linéaire. On dit que u est *$\mathscr{S}$-universellement injectif* si pour tout schéma (usuel) S' et tout morphisme $S' \to \mathscr{S}$ (2.1.20), l'homomorphisme

$$u \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{S'}\colon \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{S'} \to \mathscr{G} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{S'}$$

est injectif.

Lemme 5.1.15. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme adique de schémas formels adiques, $\mathscr{I}$ un idéal de définition de type fini de $\mathscr{S}$, $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{I})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$, $\mathscr{S}_n = (\mathscr{S}, \mathscr{O}_{\mathscr{S}}/\mathscr{I}^{n+1})$, $f_n\colon \mathfrak{X}_n \to \mathscr{S}_n$ le morphisme déduit de f. Soit $u\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules. Pour que u soit $\mathscr{S}$-universellement injectif, il faut et il suffit que*

$$u \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}\colon \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n} \to \mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$$

soit $\mathscr{S}_n$-universellement injectif pour tout entier $n \geq 0$ (1.5.2)*.*

La condition est clairement nécessaire (2.2.9). Pour la suffisance, il suffit de montrer que pour tout morphisme $g\colon S' \to \mathscr{S}$ où S' est un schéma quasi-compact, l'homomorphisme $u \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{S'}$ est injectif, ce qui est évident car g se factorise à travers $\mathscr{S}_n$ pour un entier $n \geq 0$ (2.2.12).

Lemme 5.1.16. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme adique de schémas formels idylliques, $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ deux $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents, $u\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-linéaire, $\mathscr{S}$-universellement injectif. Soit $g\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ un morphisme de schémas formels idylliques tel que $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathscr{S}'$ soit idyllique. Alors $u \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}'}\colon \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}'} \to \mathscr{G} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}'}$ est injectif ; en particulier, u est injectif.*

La question étant locale sur $\mathscr{S}$ et sur $\mathscr{S}'$, on peut se borner au cas où g est déployé (2.2.4). La conclusion résulte alors de 2.8.5, 2.8.11 et 2.2.15.

Lemme 5.1.17. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme adique de schémas formels idylliques, $x \in \mathfrak{X}$, $s = f(x)$, $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ deux $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents, $u\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-linéaire, $\mathscr{S}$-universellement injectif, $\mathscr{H}$ le conoyau de u. Alors si $\mathscr{G}_x$ est $\mathscr{O}_s$-plat, $\mathscr{H}_x$ est $\mathscr{O}_s$-plat.*

Il suffit de montrer que pour tout idéal de type fini I de $\mathscr{O}_s$, le morphisme canonique $I \otimes_{\mathscr{O}_s} \mathscr{H}_x \to \mathscr{H}_x$ est injectif ([12] chap. I §2.3 rem. 1). Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{F}_x \arrow[r] & \mathscr{G}_x \arrow[r] & \mathscr{H}_x \arrow[r] & 0 \\
& I \otimes_{\mathscr{O}_s} \mathscr{F}_x \arrow[r] \arrow[u] & I \otimes_{\mathscr{O}_s} \mathscr{G}_x \arrow[r] \arrow[u] & I \otimes_{\mathscr{O}_s} \mathscr{H}_x \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes (5.1.16). Comme $\mathscr{G}_x$ est $\mathscr{O}_s$-plat, il suffit encore de montrer que le morphisme $\mathscr{F}_x/I\mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x/I\mathscr{G}_x$ est injectif ([12] chap. I §1.4 prop. 2). Il existe un voisinage ouvert formel affine globalement idyllique $\mathrm{Spf}(A)$ de s dans $\mathscr{S}$ et un idéal de type fini $\mathfrak{a}$ de A tels que $I = \mathfrak{a}\mathscr{O}_s$. Considérons le sous-schéma $\mathscr{S}' = \mathrm{Spf}(A/\mathfrak{a})$ de $\mathscr{S}$. En vertu de 5.1.16, le morphisme $u \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}'} \colon \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}'} \to \mathscr{G} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}'}$ est injectif, d'où l'assertion.

Proposition 5.1.18. *Soient $f \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique de schémas formels idylliques, $\mathscr{K}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{Y}$; posons $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$, $\mathfrak{Y}_n = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}^{n+1})$ et soit $f_n \colon \mathfrak{X}_n \to \mathfrak{Y}_n$ le morphisme déduit de f. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est lisse (resp. étale).*

(ii) *f_n est lisse (resp. étale) pour tout $n \geq 0$.*

(iii) *f est plat et localement de présentation finie, et f_0 est lisse (resp. étale).*

L'équivalence de (i) et (ii) est mentionnée à titre de rappel (2.4.8). L'équivalence de (ii) et (iii) résulte de 5.1.2 et ([31] 17.5.1 et 17.6.1).

5.2 Dévissage relatif

5.2.1. Soient $f \colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme adique de schémas formels idylliques, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, x un point de $\mathfrak{X}$, s son image dans $\mathscr{S}$, $\mathfrak{X} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s)$ la fibre de $\mathfrak{X}$ au-dessus de s (2.3.27). Il est clair que $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s)$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s)}$-module quasi-cohérent de type fini. On appelle *dimension relative* de $\mathscr{F}$ en x, et on note $\dim_x(\mathscr{F}/\mathscr{S})$, la dimension en x du module $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s)$, c'est à dire la dimension en x de son support en tant que partie fermée de $\mathfrak{X} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s)$ ([31] 5.1.12). On appelle *dimension relative* de $\mathscr{F}$, et on note $\dim(\mathscr{F}/\mathscr{S})$, la borne supérieure des nombres $\dim_x(\mathscr{F}/\mathscr{S})$, lorsque x parcourt les points de $\mathfrak{X}$. Pour $\mathscr{F} = \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, on retrouve les nombres $\dim_x(\mathfrak{X}/\mathscr{S})$ et $\dim(\mathfrak{X}/\mathscr{S})$ définis dans (2.3.27).

Il est utile de faire les rappels suivants :

5.2.1.1. La fibre de $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s)$ en x s'identifie à $\mathscr{F}_x \otimes_{\mathscr{O}_s} \kappa(s)$ (2.3.27).

5.2.1.2. Supposons $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B)$ et $\mathscr{S} = \mathrm{Spf}(A)$ formels affines globalement idylliques et $\mathscr{F} = M^{\Delta}$, où M est un B-module cohérent. Soient $\mathfrak{q}$ (resp. $\mathfrak{p}$) l'idéal premier ouvert de B (resp. A) correspondant à x (resp. s). Alors on a des isomorphismes canoniques

$$\mathscr{F}_x \otimes_{\mathscr{O}_s} \kappa(s) \simeq M_{\mathfrak{q}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} \kappa(s) \simeq M_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{q}}.$$

En effet, si I est un idéal de définition de type fini de A, on a $\mathscr{F}_x/I\mathscr{F}_x \simeq (M/IM)_{\mathfrak{q}}$, $\mathscr{O}_s/I\mathscr{O}_s \simeq (A/I)_{\mathfrak{p}}$ (2.5.2) et I annule $\kappa(s)$, d'où le premier isomorphisme. Le second isomorphisme résulte du premier et de 1.8.13.

5.2.1.3. Soit $\mathfrak{Y}$ le sous-schéma fermé de $\mathfrak{X}$ défini par l'idéal cohérent annulateur de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$. Alors $\mathfrak{Y} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s)$ est le support de $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s)$ en vertu de 2.8.12 ; on a donc $\dim_x(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s)) = \dim_x(\mathfrak{Y} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s))$.

Définition 5.2.2. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme de présentation finie de schémas formels idylliques quasi-compacts, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, s un point de $\mathscr{S}$, n un entier ≥ 0. Un *$\mathscr{S}$-dévissage*, ou *dévissage relatif* à $\mathscr{S}$, de $\mathscr{F}$ au-dessus de s, en dimension n, consiste en les données suivantes :

(i) Un sous-schéma fermé $\mathfrak{X}'$ de $\mathfrak{X}$, majorant le sous-schéma fermé défini par l'annulateur de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$. Le module $\mathscr{F}$ est alors l'image directe sur $\mathfrak{X}$ d'un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$-module cohérent que nous nous permettrons de noter encore $\mathscr{F}$.

(ii) Une factorisation $\mathfrak{X}' \to \mathscr{T} \to \mathscr{S}$ de la restriction de f à $\mathfrak{X}'$, telle que $\mathfrak{X}' \to \mathscr{T}$ soit fini et $\mathscr{T} \to \mathscr{S}$ soit affine, lisse, à fibres géométriques intègres de dimension n. On note τ le point générique de $\mathscr{T} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s)$.

(iii) Un homomorphisme α d'un $\mathscr{O}_{\mathscr{T}}$-module libre de type fini $\mathscr{L}$ dans le $\mathscr{O}_{\mathscr{T}}$-module $\mathscr{G}$ image directe sur $\mathscr{T}$ du $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$-module $\mathscr{F}$, tel que $\alpha \otimes \kappa(\tau)$ soit bijectif.

On peut faire les remarques suivantes :

5.2.2.1. Le morphisme $\mathfrak{X}' \to \mathscr{T}$ est fini et de présentation finie (2.6.8) ; donc $\mathscr{G}$ est un $\mathscr{O}_{\mathscr{T}}$-module cohérent (2.8.19). En particulier, le module $\mathscr{G} \otimes \kappa(\tau)$ est libre de rang fini r sur $\kappa(\tau)$. Toute suite de r éléments de $\Gamma(\mathscr{T}, \mathscr{G})$, dont l'image dans $\mathscr{G} \otimes \kappa(\tau)$ est une base sur le corps $\kappa(\tau)$ définit alors un homomorphisme $\alpha\colon \mathscr{O}_{\mathscr{T}}^r \to \mathscr{G}$ qui satisfait à la condition (iii).

5.2.2.2. La condition (ii) entraîne que $\dim(\mathscr{F}/\mathscr{S}) \leq \dim(\mathfrak{X}'/\mathscr{S}) \leq n$. Pour que $\mathscr{L} = 0$, il faut et il suffit que l'on ait $\dim(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s)) < n$. En effet, $\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s)$ est l'image directe du module $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s)$ par le morphisme fini $\mathfrak{X}' \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s) \to \mathscr{T} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s)$ (2.8.19).

5.2.2.3. Posons $\mathscr{H} = \operatorname{coker}(\alpha)$; c'est un $\mathscr{O}_{\mathscr{T}}$-module cohérent. Comme $\alpha \otimes \kappa(\tau)$ est surjectif, α_τ est surjectif par le lemme de Nakayama, et par suite

$$\dim(\mathscr{H} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s)) < n.$$

5.2.2.4. On désigne le dévissage relatif décrit ci-dessus par

$$D = (\mathfrak{X}' \to \mathscr{T}, \alpha\colon \mathscr{L} \to \mathscr{G}, \mathscr{H}).$$

5.2.2.5. Soit x un point de $\mathfrak{X} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s)$. Si $x \in \mathfrak{X}'$ est le seul point de $\mathfrak{X}'$ au-dessus de son image t dans $\mathscr{T}$, on dit que D est un $\mathscr{S}$-dévissage de $\mathscr{F}$ au point x, en dimension n. Comme $\mathfrak{X}' \to \mathscr{T}$ est fermé, les images réciproques des voisinages ouverts de t dans $\mathscr{T}$ forment une famille cofinale des voisinages ouverts de x dans $\mathfrak{X}'$. Donc $\mathscr{G}_t$ est le $\mathscr{O}_t$-module sous-jacent au $\mathscr{O}_x$-module $\mathscr{F}_x$.

Définition 5.2.3. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme de présentation finie de schémas formels idylliques quasi-compacts, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, s un point de $\mathscr{S}$, $n_1 > n_2 \cdots > n_\ell$ une suite strictement décroissante d'entiers ≥ 0. Un $\mathscr{S}$-dévissage de $\mathscr{F}$ au-dessus de s, en dimensions $n_1, \dots, n_\ell$, est défini par récurrence sur ℓ à l'aide des données suivantes :

(i) un $\mathscr{S}$-dévissage $D_1 = (\mathfrak{X}_1 \to \mathscr{T}_1, \alpha_1\colon \mathscr{L}_1 \to \mathscr{G}_1, \mathscr{H}_1)$ de $\mathscr{F}$ au-dessus de s, en dimension n_1 ;

(ii) un $\mathscr{S}$-dévissage D de $\mathscr{H}_1$ au-dessus de s, en dimensions $n_2, \dots, n_\ell$.

Soit de plus x un point de $\mathfrak{X} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s)$. Le dévissage ci-dessus est un $\mathscr{S}$-dévissage de $\mathscr{F}$ au point x si D_1 est un $\mathscr{S}$-dévissage de $\mathscr{F}$ au point x et si D est un dévissage de $\mathscr{H}_1$ au point t_1, image de x dans $\mathscr{T}_1$.

On peut préciser la terminologie comme suit :

5.2.3.1. Posons $\mathscr{T}_0 = \mathfrak{X}$ et $\mathscr{H}_0 = \mathscr{F}$. Alors, le dévissage précédent équivaut à la donnée, pour tout $1 \leq i \leq \ell$, d'un $\mathscr{S}$-dévissage

$$D_i = (\mathfrak{X}_i \to \mathscr{T}_i, \alpha_i\colon \mathscr{L}_i \to \mathscr{G}_i, \mathscr{H}_i)$$

du $(\mathscr{O}_{\mathscr{T}_{i-1}})$-module $\mathscr{H}_{i-1}$ au-dessus de s, en dimension n_i.

5.2.3.2. Soit t_0 le point de $\mathscr{T}_0$ correspondant à x. Alors, le dévissage précédent est un dévissage de $\mathscr{F}$ au point x, si pour tout $1 \leq i \leq \ell$, le point t_{i-1} est un point du sous-schéma fermé $\mathfrak{X}_i$ de $\mathscr{T}_{i-1}$ et est le seul point de $\mathfrak{X}_i$ au-dessus de son image t_i dans $\mathscr{T}_i$.

5.2.3.3. L'entier ℓ est la longueur du dévissage.

5.2.3.4. Soient n, n' deux entiers tels que $n \geq n_1$ et $\dim(\mathscr{H}_\ell \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s)) < n' \leq n_\ell$. On dit alors que l'on a un dévissage de $\mathscr{F}$ en dimensions comprises entre n et n'.

5.2.3.5. Si $\mathscr{H}_\ell = 0$, on dit que l'on a un dévissage total de $\mathscr{F}$. Si n est comme dans (5.2.3.4), on dit aussi que l'on a un dévissage de $\mathscr{F}$ en dimension $\leq n$.

5.2.3.6. Si $(\mathscr{S}', s') \to (\mathscr{S}, s)$ est un morphisme de schémas formels idylliques quasi-compacts, on définit de façon naturelle un $\mathscr{S}'$-dévissage au-dessus de s', de l'image réciproque $\mathscr{F}'$ de $\mathscr{F}$ sur $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathscr{S}'$ (2.8.19) ; ce dévissage sera appelé le dévissage relatif image réciproque du dévissage initial par le morphisme $(\mathscr{S}', s') \to (\mathscr{S}, s)$.

La proposition suivante est une version formelle d'un résultat de Raynaud-Gruson, établi initialement dans le cadre algébrique ([42] 1.2.3).

Proposition 5.2.4. *Soient $f\colon (\mathfrak{X}, x) \to (\mathscr{S}, s)$ un morphisme localement de présentation finie de schémas formels idylliques pointés, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent tel* *que* $\mathscr{F}_x \neq 0$ *; posons* $n = \dim_x(\mathscr{F}/\mathscr{S})$ *et* $r = \operatorname{coprof}_{\mathscr{O}_x \otimes \kappa(s)}(\mathscr{F}_x \otimes \kappa(s))$ ([31] 0.16.4.9). *Alors, il existe un diagramme commutatif de schémas formels pointés*

$$\begin{tikzcd} (\mathfrak{X}', x') \arrow[r] \arrow[d] & (\mathscr{S}', s') \arrow[d] \\ (\mathfrak{X}, x) \arrow[r] & (\mathscr{S}, s) \end{tikzcd}$$

dont les morphismes verticaux sont des voisinages étales élémentaires affines (2.4.13) *et tel que l'image réciproque* $\mathscr{F}'$ *de* $\mathscr{F}$ *sur* $\mathfrak{X}'$ *admette un* $\mathscr{S}'$*-dévissage total, au point* x'*, en dimensions comprises entre* n *et* $n - r$*.*

On notera que l'anneau local $\mathscr{O}_x \otimes \kappa(s)$ est noethérien (5.2.1.1), ce qui justifie la définition de r. On observera aussi que le morphisme $\mathfrak{X}' \to \mathscr{S}'$ est de présentation finie (2.3.18).

Pour la clarté de la preuve, nous appellerons provisoirement *ouvert formel simple* d'un schéma formel affine $\operatorname{Spf}(A)$, tout ouvert formel affine de la forme $\mathscr{D}(f) = \operatorname{Spf}(A_{\{f\}})$, où $f \in A$.

Nous prouvons d'abord un lemme :

Lemme 5.2.5. *Soient* $f\colon (\mathfrak{X}, x) \to (\mathscr{S}, s)$ *un morphisme de présentation finie de schémas formels affines idylliques pointés,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$*-module cohérent ayant un* $\mathscr{S}$*-dévissage au point* x*, en dimensions* $n_1, \ldots, n_\ell$*. Alors, pour tout voisinage ouvert* U *de* x *dans* $\mathfrak{X}$*, il existe un diagramme commutatif de schémas formels pointés*

$$\begin{tikzcd} (\mathfrak{X}', x) \arrow[r] \arrow[d] & (\mathscr{S}', s) \arrow[d] \\ (\mathfrak{X}, x) \arrow[r] & (\mathscr{S}, s) \end{tikzcd}$$

dont les morphismes verticaux sont des ouverts formels simples, tel que $\mathfrak{X}'$ *soit contenu dans* U *et que* $\mathscr{F}|\mathfrak{X}'$ *admette un* $\mathscr{S}'$*-dévissage au point* x*, en dimensions* $n_1, \ldots, n_\ell$*.*

On peut se borner au cas où U est un ouvert formel simple de $\mathfrak{X}$. Soit $(\mathfrak{X}_1 \to \mathscr{T}_1, \mathscr{L}_1 \to \mathscr{G}_1, \mathscr{H}_1)$ un $\mathscr{S}$-dévissage de $\mathscr{F}$ au point x, en dimension n_1 ; donc $\mathfrak{X}_1$ et $\mathscr{T}_1$ sont formels affines idylliques. Soit C le fermé complémentaire de $U \cap \mathfrak{X}_1$ dans $\mathfrak{X}_1$. Comme $g\colon \mathfrak{X}_1 \to \mathscr{T}_1$ est fermé et que x est le seul point de $\mathfrak{X}_1$ au-dessus de $t_1 = g(x)$, il existe un voisinage ouvert formel simple V de t_1 dans $\mathscr{T}_1$, contenu dans le complémentaire de $g(C)$ dans $\mathscr{T}_1$; on a donc $g^{-1}(V) \subset U \cap \mathfrak{X}_1$.

Raisonnons par récurrence sur la longueur ℓ du dévissage. Supposons d'abord $\ell = 1$. Comme $\mathscr{T}_1 \to \mathscr{S}$ est ouvert, il existe un voisinage ouvert formel simple $\mathscr{S}'$ de s dans $\mathscr{S}$, contenu dans l'image de V. Soient $\mathscr{T}_1'$ l'image réciproque de $\mathscr{S}'$ dans V, $\mathfrak{X}_1'$ l'image réciproque de $\mathscr{T}_1'$ dans $\mathfrak{X}_1$. On voit aussitôt que $\mathscr{T}_1' \to \mathscr{S}'$ est affine et surjectif, et $\mathfrak{X}_1'$ (resp. $\mathscr{T}_1'$) est un voisinage ouvert formel simple de x

dans $\mathfrak{X}_1$ (resp. t_1 dans $\mathscr{T}_1$). Par ailleurs, il existe un ouvert formel simple $\mathfrak{X}''$ de $\mathfrak{X}$ tel que $\mathfrak{X}'' \cap \mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}'_1$. Soient $\mathfrak{X}' = U \cap \mathfrak{X}''$, $\mathscr{L}'_1 \to \mathscr{G}'_1$ (resp. $\mathscr{H}'_1$) la restriction de $\mathscr{L}_1 \to \mathscr{G}_1$ (resp. $\mathscr{H}_1$) à $\mathscr{T}'_1$. Alors, $\mathfrak{X}'$ est un voisinage ouvert formel simple de x dans $\mathfrak{X}$, contenu dans U, $\mathfrak{X}' \cap \mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}'_1$ et $(\mathfrak{X}'_1 \to \mathscr{T}'_1, \mathscr{L}'_1 \to \mathscr{G}'_1, \mathscr{H}'_1)$ est un $\mathscr{S}'$-dévissage de $\mathscr{F}|\mathfrak{X}'$ au point x, en dimension n_1.

Supposons ensuite $\ell > 1$. Par hypothèse de récurrence, il existe un diagramme commutatif de schémas formels pointés

$$\begin{tikzcd} (\mathscr{T}'_1, t_1) \arrow[r] \arrow[d] & (\mathscr{S}', s) \arrow[d] \\ (\mathscr{T}_1, t_1) \arrow[r] & (\mathscr{S}, s) \end{tikzcd}$$

dont les morphismes verticaux sont des ouverts formels simples, tel que $\mathscr{T}'_1 \subset V$ et que $\mathscr{H}|\mathscr{T}'_1$ admette un $\mathscr{S}'$-dévissage au point t_1, en dimensions $n_2, \ldots, n_\ell$. Il est loisible de remplacer $\mathscr{S}'$ par un voisinage ouvert formel simple de s dans $\mathscr{S}'$ (5.2.3.6). Comme $\mathscr{T}_1 \to \mathscr{S}$ est ouvert, on peut donc supposer le morphisme $\mathscr{T}'_1 \to \mathscr{S}'$ affine et surjectif. On note $\mathfrak{X}'_1$ l'image réciproque de $\mathscr{T}'_1$ dans $\mathfrak{X}_1$ et on conclut comme dans le cas $\ell = 1$.

5.2.6. Revenons maintenant à la démonstration de 5.2.4. Soit $\mathfrak{Y}$ le sous-schéma fermé de $\mathfrak{X}$ défini par l'idéal cohérent annulateur de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$. Le module $\mathscr{F}$ est l'image directe sur $\mathfrak{X}$ d'un $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module cohérent que nous nous permettrons de noter encore $\mathscr{F}$; les entiers n et r ne changent pas si l'on remplace $\mathfrak{X}$ par $\mathfrak{Y}$ ([31] 16.4.11). Montrons en premier lieu qu'on peut se réduire au cas où $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$, et donc supposer $\dim_x(\mathfrak{X}/\mathscr{S}) = n$ (5.2.1.3). Considérons un diagramme commutatif de schémas formels pointés

$$\begin{tikzcd} (\mathfrak{Y}', x') \arrow[r] \arrow[d] & (\mathscr{S}', s') \arrow[d] \\ (\mathfrak{Y}, x) \arrow[r] & (\mathscr{S}, s) \end{tikzcd}$$

dont les morphismes verticaux sont des voisinages étales élémentaires affines et tel que l'image réciproque $\mathscr{F}'$ de $\mathscr{F}$ sur $\mathfrak{Y}'$ admette un $\mathscr{S}'$-dévissage total, au point x', en dimensions comprises entre n et $n - r$. Alors, il existe un diagramme commutatif de schémas formels pointés

$$\begin{tikzcd} (U, x') \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & (\mathfrak{X}', x') \arrow[r] \arrow[d] & (\mathscr{S}', s') \arrow[d] \\ (\mathfrak{Y}, x) \arrow[r] & (\mathfrak{X}, x) \arrow[r] & (\mathscr{S}, s) \end{tikzcd}$$

dont les morphismes verticaux sont des voisinages étales élémentaires affines, tel que le carré de gauche soit cartésien et que (U, x') soit un ouvert de $(\mathfrak{Y}', x')$. En effet, remplaçant $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$) par $\mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathscr{S}'$ (resp. $\mathfrak{Y} \times_{\mathscr{S}} \mathscr{S}'$) et x par l'unique point de $\mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathscr{S}'$ au-dessus de x et s', on peut supposer $\mathscr{S} = \mathscr{S}'$ (2.4.10) ; notre assertion résulte alors de 2.4.11 et de la forme locale d'un morphisme étale de schémas usuels ([31] 18.4.6 et [40] Chap. V). En vertu de 5.2.5, il existe un diagramme commutatif de schémas formels pointés

$$\begin{tikzcd} (\mathfrak{Y}'', x') \arrow[r] \arrow[d] & (\mathscr{S}'', s') \arrow[d] \\ (\mathfrak{Y}', x') \arrow[r] & (\mathscr{S}', s') \end{tikzcd}$$

dont les morphismes verticaux sont des ouverts formels simples, tel que $\mathfrak{Y}'' \subset U$ et que $\mathscr{F}'|\mathfrak{Y}''$ admette un $\mathscr{S}''$-dévissage total, au point x', en dimensions comprises entre n et $n-r$. Comme $\mathfrak{Y}''$ est aussi un ouvert formel simple de $U \times_{\mathscr{S}'} \mathscr{S}''$, il existe un ouvert formel simple $\mathfrak{X}''$ de $\mathfrak{X}' \times_{\mathscr{S}'} \mathscr{S}''$ tel que $\mathfrak{X}'' \cap (U \times_{\mathscr{S}'} \mathscr{S}'') = \mathfrak{Y}''$. Ceci achève la preuve de la réduction au cas où $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$.

Considérons un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} (\mathfrak{X}_1, x_1) \arrow[r] \arrow[d] & (\mathscr{T}, t) \arrow[r] & (\mathscr{S}_1, s_1) \arrow[d] \\ (\mathfrak{X}, x) \arrow[rr] & & (\mathscr{S}, s) \end{tikzcd}$$

vérifiant les conditions (i),(ii),(iii) de 2.4.14 et tel que $\mathscr{S}_1$ soit formel affine globalement idyllique. Pour établir la proposition, il est loisible de remplacer $(\mathscr{S}, s)$ par $(\mathscr{S}_1, s_1)$, $(\mathfrak{X}, x)$ par $(\mathfrak{X}_1, x_1)$ et $\mathscr{F}$ par son image inverse sur $\mathfrak{X}_1$. On suppose désormais $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1$ et $\mathscr{S} = \mathscr{S}_1$. Une fois cette réduction faite, on a encore $n = \dim_x(\mathscr{F}/\mathscr{S})$ et $r = \mathrm{coprof}_{\mathscr{O}_x \otimes \kappa(s)}(\mathscr{F}_x \otimes \kappa(s))$ ([31] 0.16.4.10(ii)).

Soit $\mathscr{G}$ l'image directe de $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{T}$. Comme $\mathfrak{X} \to \mathscr{T}$ est fini et de présentation finie (2.3.18), $\mathscr{G}$ est un $\mathscr{O}_{\mathscr{T}}$-module cohérent (2.8.19). De plus, x étant le seul point de $\mathfrak{X}$ au-dessus de t, $\mathscr{G}_t$ est le $\mathscr{O}_t$-module sous-jacent au $\mathscr{O}_x$-module $\mathscr{F}_x$ (5.2.2.5) ; par suite $r = \mathrm{coprof}_{\mathscr{O}_t \otimes \kappa(s)}(\mathscr{G}_t \otimes \kappa(s))$ ([31] 16.4.11).

Raisonnons par récurrence sur r. Si $r = 0$, $\mathscr{G}_t \otimes \kappa(s)$ est un $(\mathscr{O}_t \otimes \kappa(s))$-module libre de type fini ([31] 0.17.3.4). Il existe donc un homomorphisme α d'un $\mathscr{O}_{\mathscr{T}}$-module libre de type fini $\mathscr{L}$ dans $\mathscr{G}$ tel que $\alpha_t \otimes \kappa(s)$ soit bijectif (cf. 5.2.1.2). Posons $\mathscr{H} = \mathrm{coker}(\alpha)$. On a $\mathscr{H}_t = 0$ par le lemme de Nakayama. Donc il existe un voisinage ouvert formel affine U de t dans $\mathscr{T}$ tel que $\mathscr{H}|U = 0$. Comme $\mathscr{T} \to \mathscr{S}$ est ouvert, il existe un voisinage ouvert formel affine $\mathscr{S}'$ de s dans $\mathscr{S}$ contenu dans l'image de U. Quitte à remplacer $\mathscr{S}$ par $\mathscr{S}'$, $\mathscr{T}$ par l'image réciproque $\mathscr{T}'$ de $\mathscr{S}'$ dans U et $\mathfrak{X}$ par l'image réciproque de $\mathscr{T}'$ dans $\mathfrak{X}$, on peut supposer $\mathscr{H} = 0$. Par conséquent, $(\mathfrak{X} \to \mathscr{T}, \alpha\colon \mathscr{L} \to \mathscr{G}, 0)$ est un $\mathscr{S}$-dévissage total de longueur 1, de $\mathscr{F}$ au point x, en dimension n.

Supposons $r > 0$. Il existe un $\mathscr{S}$-dévissage $(\mathfrak{X} \to \mathscr{T}, \alpha\colon \mathscr{L} \to \mathscr{G}, \mathscr{H})$ du $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module $\mathscr{F}$ au point x, en dimension n (5.2.2.1). Soit τ le point générique de

$\mathscr{T} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s)$. Comme $\mathscr{T} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s)$ est intègre et que $\alpha_{\tau} \otimes \kappa(s)$ est injectif, $\alpha_t \otimes \kappa(s)$ est injectif. D'autre part, comme $r > 0$, $\alpha_t \otimes \kappa(s)$ n'est pas bijectif et $\mathscr{H}_t \neq 0$. Il résulte alors de ([31] 0.16.4.4) et de la suite exacte des Ext qu'on a

$$\operatorname{prof}_{\mathscr{O}_t \otimes \kappa(s)}(\mathscr{G}_t \otimes \kappa(s)) = \operatorname{prof}_{\mathscr{O}_t \otimes \kappa(s)}(\mathscr{H}_t \otimes \kappa(s)).$$

Par ailleurs, on a $\dim(\mathscr{H} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s)) < n$ (5.2.2.3), donc $\operatorname{coprof}_{\mathscr{O}_t \otimes \kappa(s)}(\mathscr{H}_t \otimes \kappa(s)) < r$ ([31] 5.1.12.2).

Appliquons alors l'hypothèse de récurrence : il existe un diagramme commutatif de schémas formels idylliques pointés

$$\begin{tikzcd}
(\mathscr{T}', t') \arrow[r] \arrow[d] & (\mathscr{S}', s') \arrow[d] \\
(\mathscr{T}, t) \arrow[r] & (\mathscr{S}, s)
\end{tikzcd}$$

dont les morphismes verticaux sont des voisinages étales élémentaires affines, tel que l'image réciproque $\mathscr{H}'$ de $\mathscr{H}$ sur $\mathscr{T}'$ admette un $\mathscr{S}'$-dévissage total, au point t', en dimensions comprises entre $n-1$ et $n-r$. Montrons qu'on peut supposer les fibres de $\mathscr{T}' \to \mathscr{S}'$ géométriquement intègres de dimension n. Soit C la composante connexe de $\mathscr{T}' \otimes_{\mathscr{S}'} \kappa(s')$ contenant t'. Comme l'adhérence de t dans $\mathscr{T} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s)$ est géométriquement irréductible par hypothèse (2.4.14), C est géométriquement irréductible ([42] 1.1.2). En vertu de 2.4.15, il existe un voisinage étale élémentaire affine $(\mathscr{S}'', s'')$ de $(\mathscr{S}', s')$ et un ouvert U'' de $\mathscr{T}'' = \mathscr{T}' \times_{\mathscr{S}'} \mathscr{S}''$ tels que U'' contienne C et que les fibres du morphisme $U'' \to \mathscr{S}''$ soient géométriquement intègres de dimension n ; donc l'unique point t'' de $\mathscr{T}''$ de projections t' et s'' appartient à U''. Notre assertion résulte alors de 5.2.5.

Soient $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_{\mathscr{T}} \mathscr{T}'$, x' l'unique point de $\mathfrak{X}'$ de projections x et t', $(\mathfrak{X}' \to \mathscr{T}', \alpha' \colon \mathscr{L}' \to \mathscr{G}', \mathscr{H}')$ l'image réciproque du dévissage $(\mathfrak{X} \to \mathscr{T}, \alpha \colon \mathscr{L} \to \mathscr{G}, \mathscr{H})$ de $\mathscr{F}$ par le morphisme étale $\mathscr{T}' \to \mathscr{T}$. Alors x' est l'unique point de $\mathfrak{X}'$ au-dessus de t' et l'image réciproque $\mathscr{F}'$ de $\mathscr{F}$ sur $\mathfrak{X}'$ admet un $\mathscr{S}'$-dévissage total, au point x', en dimensions comprises entre n et $n-r$.

Corollaire 5.2.7. *Soient $f \colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme de présentation finie de schémas formels idylliques, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, s un point de $\mathscr{S}$; posons $n = \dim(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s))$ et $r = \operatorname{coprof}_{\mathfrak{X} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s)}(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s))$. Alors, il existe un voisinage étale élémentaire $(\mathscr{S}', s')$ de $(\mathscr{S}, s)$, un $(\mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathscr{S}')$-schéma adique $\mathfrak{Y}$, affine, étale sur $\mathfrak{X}$ et dont l'image dans $\mathfrak{X}$ contient le support de $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s)$, et une partition finie $(\mathfrak{Y}_i)$ de $\mathfrak{Y}$ en sous-schémas ouverts et fermés, tels que pour tout i, l'image réciproque $\mathscr{F}_i$ de $\mathscr{F}$ sur $\mathfrak{Y}_i$ admette un $\mathscr{S}'$-dévissage total, au-dessus de s', de longueur $\leq r+1$, en dimensions $\leq n$.*

Pour tout point x de $\mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \kappa(s)$ tel que $\mathscr{F}_x \neq 0$, posons

$$n(x) = \dim_x(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s)) \quad \text{et} \quad r(x) = \operatorname{coprof}_{\mathscr{O}_x \otimes \kappa(s)}(\mathscr{F}_x \otimes \kappa(s))$$

et considérons un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} (\mathfrak{Y}_x, y_x) \arrow[r] \arrow[d] & (\mathscr{S}'_x, s'_x) \arrow[d] \\ (\mathfrak{X}, x) \arrow[r] & (\mathscr{S}, s) \end{tikzcd}$$

satisfaisant aux conditions énoncées dans 5.2.4, avec $n = n(x)$ et $r = r(x)$. Comme $\mathfrak{Y}_x \to \mathfrak{X}$ est étale, son image est un voisinage ouvert U_x de x dans $\mathfrak{X}$. Mais $\mathfrak{X} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s)$ est noethérien. Donc il existe une famille finie $(x_i)_{i\in I}$ de points de $\mathfrak{X} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s)$ tels que $\mathscr{F}_{x_i} \neq 0$ et que les $(U_{x_i})_{i\in I}$ couvrent le support de $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s)$. Soit $(\mathscr{S}', s')$ le produit fibré au-dessus de $(\mathscr{S}, s)$ de la famille $(\mathscr{S}'_{x_i}, s'_{x_i})$; c'est un voisinage étale élémentaire de $(\mathscr{S}, s)$. Pour tout i, notons $(\mathfrak{Y}_i, y_i)$ le produit fibré de $(\mathfrak{Y}_{x_i}, y_{x_i})$ et de $(\mathscr{S}', s')$ au-dessus de $(\mathscr{S}'_{x_i}, s'_{x_i})$. Alors, l'image réciproque $\mathscr{F}_i$ de $\mathscr{F}$ sur $\mathfrak{Y}_i$ admet un $\mathscr{S}'$-dévissage total, au-dessus de s', de longueur $\leq r(x_i) + 1$, en dimensions $\leq n(x_i)$ (5.2.3.6). Le schéma formel $\mathfrak{Y}$, somme disjointe de la famille $(\mathfrak{Y}_i)$ répond à la question.

5.3 Critère de platitude

Lemme 5.3.1. *Soit $(T, t) \to (S, s)$ un morphisme lisse de schémas pointés, tel que $T \otimes_S \kappa(s)$ soit intègre de point générique τ. Alors l'homomorphisme canonique $\mathscr{O}_t \to \mathscr{O}_\tau$ est injectif et a un conoyau $\mathscr{O}_s$-plat.*

On peut supposer S local de point fermé s et T affine. Considérons (S, s) comme limite projective filtrante de schémas affines noethériens pointés $(S_i, s_i)_{i\in I}$. Il existe alors $i \in I$, un S_i-schéma lisse T_i et un S-isomorphisme $T \simeq T_i \times_{S_i} S$ ([31] 8.8.2 et 17.7.8). Pour $j \geq i$, soient $T_j = T_i \times_{S_i} S_j$, t_j et τ_j les images de t et τ dans T_j. Alors l'homomorphisme $\mathscr{O}_t \to \mathscr{O}_\tau$ est la limite inductive des homomorphismes $\mathscr{O}_{t_j} \to \mathscr{O}_{\tau_j}$. On peut donc se borner au cas où S est noethérien.

Soit F la partie multiplicative de $\mathscr{O}_t$ formée des éléments non diviseurs de zéro dans $\mathscr{O}_t \otimes \kappa(s)$. Comme $T \otimes_S \kappa(s)$ est intègre, l'anneau $\mathscr{O}_t[F^{-1}]$ n'est autre que $\mathscr{O}_\tau$. Pour $f \in F$, il résulte de 1.5.3 que la multiplication par f dans $\mathscr{O}_t$ est injective et a un conoyau $\mathscr{O}_s$-plat. Le lemme s'en déduit par passage à la limite inductive.

Proposition 5.3.2 ([42] 2.2). *Soient $(T, t) \to (S, s)$ un morphisme lisse de schémas pointés tel que $T \otimes_S \kappa(s)$ soit intègre de point générique τ, α un homomorphisme d'un $\mathscr{O}_T$-module libre de type fini $\mathscr{L}$ dans un $\mathscr{O}_T$-module quasi-cohérent de type fini $\mathscr{G}$ tel que $\alpha \otimes \kappa(s)$ soit bijectif au point τ. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *α_t est $\mathscr{O}_s$-universellement injectif ;*

(b) *α_t est injectif ;*

(c) *α_τ est bijectif.*

Comme $\alpha \otimes \kappa(s)$ est surjectif au point τ, α_τ est surjectif. Donc (a)$\Rightarrow$(b)$\Rightarrow$(c) puisque $\mathscr{O}_\tau$ est $\mathscr{O}_t$-plat. En vertu de 5.3.1, l'homomorphisme $\mathscr{O}_t \to \mathscr{O}_\tau$ est $\mathscr{O}_s$-universellement injectif, et il en est de même de $\mathscr{L}_t \to \mathscr{L}_\tau$. On en déduit (c)$\Rightarrow$(a) grâce au diagramme commutatif de $\mathscr{O}_t$-modules

$$\begin{tikzcd} \mathscr{L}_t \arrow[r, "\alpha_t"] \arrow[d] & \mathscr{G}_t \arrow[d] \\ \mathscr{L}_\tau \arrow[r, "\alpha_\tau"'] & \mathscr{G}_\tau \end{tikzcd}$$

Corollaire 5.3.3. *Soient $f\colon T \to S$ un morphisme de schémas, lisse à fibres intègres, α un homomorphisme d'un $\mathscr{O}_T$-module libre de type fini $\mathscr{L}$ dans un $\mathscr{O}_T$-module de présentation finie $\mathscr{G}$. Notons U l'ensemble des points de T où α est un isomorphisme et posons $V = f(U)$. Alors U est ouvert dans T, V est ouvert dans S, et α est S-universellement injectif au-dessus de V.*

La première assertion est immédiate ; en effet, le conoyau de α étant de type fini, il a un support fermé ([28] 0.5.2.2), et sur l'ouvert complémentaire, le noyau de α est de type fini car $\mathscr{G}$ est de présentation finie. La seconde assertion s'ensuit car f est ouvert. Soient $s \in V$, $t \in T$ tel que $f(t) = s$, τ le point générique de $T \otimes_S \kappa(s)$. Comme $U \otimes_S \kappa(s) \neq \emptyset$, $\tau \in U$. Donc en vertu de 5.3.2, α_t est $\mathscr{O}_s$-universellement injectif, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 5.3.4. *Soient $f\colon \mathscr{T} \to \mathscr{S}$ un morphisme de schémas formels idylliques, lisse à fibres intègres, α un homomorphisme d'un $\mathscr{O}_{\mathscr{T}}$-module libre de type fini $\mathscr{L}$ dans un $\mathscr{O}_{\mathscr{T}}$-module cohérent $\mathscr{G}$. Notons U l'ensemble des points de $\mathscr{T}$ où α est un isomorphisme et posons $V = f(U)$. Alors U est ouvert dans $\mathscr{T}$, V est ouvert dans $\mathscr{S}$, et α est $\mathscr{S}$-universellement injectif au-dessus de V* (5.1.14).

En effet, le noyau et le conoyau de α étant cohérents, leurs annulateurs dans $\mathscr{O}_{\mathscr{T}}$ sont des idéaux cohérents (2.8.12). On en déduit la première assertion, qui implique la seconde assertion car f est ouvert. La dernière assertion résulte de 5.1.15 et 5.3.3.

5.3.5. Soient $f\colon (\mathfrak{X}, x) \to (\mathscr{S}, s)$ un morphisme localement de présentation finie de schémas formels idylliques pointés, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent tel que $\mathscr{F}_x \neq 0$. D'après 5.2.4, on peut trouver un diagramme commutatif de schémas formels pointés

$$\begin{tikzcd} (\mathfrak{X}', x') \arrow[r] \arrow[d] & (\mathscr{S}', s') \arrow[d] \\ (\mathfrak{X}, x) \arrow[r] & (\mathscr{S}, s) \end{tikzcd}$$

dont les morphismes verticaux sont des voisinages étales élémentaires affines, et un $\mathscr{S}'$-dévissage au point x', en dimension $n = \dim_x(\mathscr{F}/\mathscr{S})$, du $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$-module $\mathscr{F}'$

image réciproque de $\mathscr{F}$ sur $\mathfrak{X}'$; notons ce dévissage $(\mathfrak{Y} \to \mathscr{T}, \alpha \colon \mathscr{L} \to \mathscr{G}, \mathscr{H})$. Soient t l'image de x' dans $\mathscr{T}$, τ le point générique de $\mathscr{T} \otimes_{\mathscr{S}'} \kappa(s')$. Le théorème suivant est une version formelle d'un résultat de Raynaud-Gruson, établi initialement dans le cadre algébrique ([42] 2.1).

Théorème 5.3.6. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\mathscr{F}_x$ est $\mathscr{O}_s$-plat ;*

(i′) *$\mathscr{G}_t$ est $\mathscr{O}_{s'}$-plat ;*

(ii) *α_τ est bijectif et $\mathscr{H}_t$ est $\mathscr{O}_{s'}$-plat ;*

(ii′) *α_t est injectif et $\mathscr{H}_t$ est $\mathscr{O}_{s'}$-plat ;*

(ii″) *il existe un voisinage ouvert V' de s' dans $\mathscr{S}'$ tel que α soit $\mathscr{S}'$-universellement injectif au-dessus de V' et $\mathscr{H}_t$ est $\mathscr{O}_{s'}$-plat ;*

(iii) $\operatorname{Tor}_1^{\mathscr{O}_s}(\mathscr{F}_x, \kappa(s)) = 0$.

Nous établirons le théorème en démontrant le schéma suivant d'implications

$$\begin{tikzcd}
\text{(i)} \arrow[d, Rightarrow] & \text{(i}'\text{)} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & \text{(ii)} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{(iii)} \arrow[ur, Rightarrow] & \text{(ii}'\text{)} \arrow[u, Rightarrow] & \text{(ii}''\text{)} \arrow[l, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

Notons d'abord que $\mathscr{O}_{s'}$ (resp. $\mathscr{O}_{x'}$) est fidèlement plat sur $\mathscr{O}_s$ (resp. $\mathscr{O}_x$) (5.1.18). Si $\mathscr{F}'_{x'}$ est $\mathscr{O}_{s'}$-plat, il est $\mathscr{O}_s$-plat ; comme $\mathscr{F}'_{x'} = \mathscr{F}_x \otimes_{\mathscr{O}_x} \mathscr{O}_{x'}$, on en déduit que $\mathscr{F}_x$ est $\mathscr{O}_s$-plat ([12] chap. I §3.2 prop. 4). Par ailleurs, $\mathscr{G}_t$ et $\mathscr{F}'_{x'}$ sont isomorphes comme $\mathscr{O}_{s'}$-modules (5.2.2.5), d'où (i′) $\Rightarrow$ (i).

L'implication (ii′) $\Rightarrow$ (i′) résulte de la suite exacte $0 \to \mathscr{L}_t \to \mathscr{G}_t \to \mathscr{H}_t \to 0$ puisque $\mathscr{T} \to \mathscr{S}'$ est plat (5.1.18).

Soient U l'ensemble des points de $\mathscr{T}$ où α est un isomorphisme, V' son image dans $\mathscr{S}'$. On sait (5.3.4) que U est un ouvert de $\mathscr{T}$, V' est un ouvert de $\mathscr{S}'$ et α est $\mathscr{S}'$-universellement injectif au-dessus de V'.

Si $\tau \in U$, alors $s' \in V'$, d'où (ii) $\Rightarrow$ (ii″). L'implication (ii″) $\Rightarrow$ (ii′) est évidente (5.1.16).

Soit $\mathscr{R}$ le noyau de α, qui est un $\mathscr{O}_{\mathscr{T}}$-module cohérent. Comme $\mathscr{H}_\tau = 0$, on a une suite exacte de $\mathscr{O}_\tau$-modules

$$0 \longrightarrow \mathscr{R}_\tau \longrightarrow \mathscr{L}_\tau \xrightarrow{\alpha_\tau} \mathscr{G}_\tau \longrightarrow 0\,. \tag{5.3.6.1}$$

Montrons (i′) $\Rightarrow$ (ii). Comme $\mathscr{G}$ est un $\mathscr{O}_{\mathscr{T}}$-module cohérent, $\mathscr{G}_\tau \simeq \mathscr{G}_t \otimes_{\mathscr{O}_t} \mathscr{O}_\tau$ (2.7.6.2). Par suite, $\mathscr{G}_\tau$ est $\mathscr{O}_{s'}$-plat (2.6.9), et la suite (5.3.6.1) reste exacte après tensorisation par $\kappa(s')$ au-dessus de $\mathscr{O}_{s'}$

$$0 \longrightarrow \mathscr{R}_\tau \otimes \kappa(s') \longrightarrow \mathscr{L}_\tau \otimes \kappa(s') \xrightarrow{\alpha_\tau \otimes \kappa(s')} \mathscr{G}_\tau \otimes \kappa(s') \longrightarrow 0\,.$$

Mais $\alpha_\tau \otimes \kappa(s')$ est bijectif, donc $\mathscr{R}_\tau \otimes \kappa(s') = 0$ et $\mathscr{R}_\tau = 0$ par le lemme de Nakayama. Par conséquent, $\tau \in U$ et $s' \in V'$. Comme α est $\mathscr{S}'$-universellement injectif au-dessus de V', on en déduit par 5.1.17 que $\mathscr{H}_t$ est $\mathscr{O}_{s'}$-plat ; d'où (i′) ⇒ (ii).

L'implication (i) ⇒ (iii) est évidente.

Pour établir (iii) ⇒ (i′), nous raisonnons par récurrence sur $\dim_x(\mathscr{F}/\mathscr{S})$. On notera, compte tenu de ce qui précède, que l'implication (iii) ⇒ (i′) entraîne l'implication (iii)⇒(i) et que les conditions (i) et (iii) sont indépendantes du choix du dévissage relatif. Soit n un entier ≥ 0. Supposons (iii)⇒(i) vraie lorsque $\dim_x(\mathscr{F}/\mathscr{S}) < n$ (ce qui est évident pour $n = 0$), et prouvons (iii) ⇒ (i′) lorsque $\dim_x(\mathscr{F}/\mathscr{S}) = n$. Comme $\mathscr{O}_{x'}$ est $\mathscr{O}_x$-plat, on a

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}'_{x'} \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathscr{O}_s} \kappa(s) &\simeq (\mathscr{O}_{x'} \otimes_{\mathscr{O}_x} \mathscr{F}_x) \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathscr{O}_s} \kappa(s) \\
&\simeq (\mathscr{O}_{x'} \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathscr{O}_x} \mathscr{F}_x) \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathscr{O}_s} \kappa(s) \\
&\simeq \mathscr{O}_{x'} \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathscr{O}_x} (\mathscr{F}_x \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathscr{O}_s} \kappa(s)).
\end{aligned}$$

Donc l'hypothèse entraîne que $\mathrm{Tor}_1^{\mathscr{O}_s}(\mathscr{F}'_{x'}, \kappa(s)) = \mathrm{Tor}_1^{\mathscr{O}_s}(\mathscr{G}_t, \kappa(s)) = 0$. Comme $\mathscr{O}_\tau$ est $\mathscr{O}_t$-plat et que $\mathscr{G}_\tau \simeq \mathscr{G}_t \otimes_{\mathscr{O}_t} \mathscr{O}_\tau$, on en déduit par le même raisonnement que $\mathrm{Tor}_1^{\mathscr{O}_s}(\mathscr{G}_\tau, \kappa(s)) = 0$. D'autre part, $\mathscr{O}_{s'}$ étant $\mathscr{O}_s$-plat et $\mathscr{O}_{s'} \otimes_{\mathscr{O}_s} \kappa(s) = \kappa(s')$, on a

$$\begin{aligned}
\mathscr{G}_t \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathscr{O}_{s'}} \kappa(s') &\simeq \mathscr{G}_t \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathscr{O}_{s'}} (\mathscr{O}_{s'} \otimes_{\mathscr{O}_s} \kappa(s)) \\
&\simeq \mathscr{G}_t \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathscr{O}_{s'}} (\mathscr{O}_{s'} \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathscr{O}_s} \kappa(s)) \\
&\simeq \mathscr{G}_t \otimes^{\mathrm{L}}_{\mathscr{O}_s} \kappa(s);
\end{aligned}$$

par suite, $\mathrm{Tor}_1^{\mathscr{O}_{s'}}(\mathscr{G}_t, \kappa(s')) = 0$ et de même $\mathrm{Tor}_1^{\mathscr{O}_{s'}}(\mathscr{G}_\tau, \kappa(s')) = 0$. Donc la suite (5.3.6.1) reste exacte après tensorisation par $\kappa(s')$ au-dessus de $\mathscr{O}_{s'}$. Comme dans la démonstration de (i′) ⇒ (ii), on en déduit que $\mathscr{R}_\tau = 0$. Donc $\tau \in U$ et $s' \in V'$. Par suite, α étant $\mathscr{S}'$-universellement injectif au-dessus de V', la suite

$$0 \longrightarrow \mathscr{L}_t \xrightarrow{\alpha_t} \mathscr{G}_t \longrightarrow \mathscr{H}_t \longrightarrow 0$$

est exacte (5.1.16), et reste exacte après tensorisation par $\kappa(s')$ au-dessus de $\mathscr{O}_{s'}$ (5.2.1.1). La suite exacte des Tor montre alors que $\mathrm{Tor}_1^{\mathscr{O}_{s'}}(\mathscr{H}_t, \kappa(s')) = 0$; donc $\mathscr{H}_t$ est $\mathscr{O}_{s'}$-plat d'après l'hypothèse de récurrence. Mais alors $\mathscr{G}_t$ est $\mathscr{O}_{s'}$-plat comme extension de deux $\mathscr{O}_{s'}$-modules plats. C.Q.F.D.

Remarque 5.3.6.2. L'implication (i) ⇒ (i′) résulte aussi de 5.1.3.

5.3.7. Soient $f\colon (\mathfrak{X}, x) \to (\mathscr{S}, s)$ un morphisme localement de présentation finie de schémas formels idylliques pointés, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Supposons donné un diagramme commutatif de schémas formels idylliques pointés

$$\begin{tikzcd} (\mathfrak{X}', x') \arrow[r] \arrow[d] & (\mathscr{S}', s') \arrow[d] \\ (\mathfrak{X}, x) \arrow[r] & (\mathscr{S}, s) \end{tikzcd}$$

dont les morphismes verticaux sont des voisinages étales élémentaires affines et un $\mathscr{S}'$-dévissage au point x', $(\mathfrak{Y}_i \to \mathscr{T}_i, \alpha_i \colon \mathscr{L}_i \to \mathscr{G}_i, \mathscr{H}_i)_{1 \leq i \leq \ell}$, de l'image réciproque $\mathscr{F}'$ de $\mathscr{F}$ sur $\mathfrak{X}'$. Soient τ_i le point générique de $\mathscr{T}_i \otimes_{\mathscr{S}'} \kappa(s')$ et t_i le point de $\mathscr{T}_i$ déduit de proche en proche à partir de x'.

Corollaire 5.3.8. *Sous les hypothèses de* (5.3.7), *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\mathscr{F}$ est $\mathscr{S}$-plat en x ;*
(ii) *α_i est bijectif en τ_i pour tout $1 \leq i \leq \ell$ et $\mathscr{H}_\ell$ est $\mathscr{S}'$-plat en t_ℓ ;*
(iii) *$\mathscr{G}_i$ est libre sur un voisinage de τ_i pour tout $1 \leq i \leq \ell$ et $\mathscr{H}_\ell$ est $\mathscr{S}'$-plat en t_ℓ ;*
(iv) *α_i est injectif en t_i pour tout $1 \leq i \leq \ell$ et $\mathscr{H}_\ell$ est $\mathscr{S}'$-plat en t_ℓ ;*
(v) *il existe un voisinage ouvert V' de s' dans $\mathscr{S}'$ tel que α_i soit $\mathscr{S}'$-universellement injectif au-dessus de V' pour tout $1 \leq i \leq \ell$ et $\mathscr{H}_\ell$ est $\mathscr{S}'$-plat en t_ℓ.*

Cela résulte aussitôt de 5.3.6, sauf pour (iii), qui est équivalente à (ii) par 1.3.13 et 5.2.2.3.

Corollaire 5.3.9. *Soient $f \colon (\mathfrak{X}, x) \to (\mathscr{S}, s)$ un morphisme localement de présentation finie de schémas formels idylliques pointés, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent f-plat au point x ; posons $n = \dim_x(\mathscr{F}/\mathscr{S})$ et $r = \operatorname{coprof}_{\mathscr{O}_x \otimes \kappa(s)}(\mathscr{F}_x \otimes \kappa(s))$. Alors, il existe un diagramme commutatif de schémas formels pointés*

$$\begin{tikzcd} (\mathfrak{X}', x') \arrow[r] \arrow[d] & (\mathscr{S}', s') \arrow[d] \\ (\mathfrak{X}, x) \arrow[r] & (\mathscr{S}, s) \end{tikzcd}$$

dont les morphismes verticaux sont des voisinages étales élémentaires affines et un $\mathscr{S}'$-dévissage total au point x', $(\mathfrak{Y}_i \to \mathscr{T}_i, \alpha_i \colon \mathscr{L}_i \to \mathscr{G}_i, \mathscr{H}_i)_{1 \leq i \leq \ell}$, de l'image réciproque $\mathscr{F}'$ de $\mathscr{F}$ sur $\mathfrak{X}'$, en dimensions comprises entre n et $n - r$, tel que α_i soit $\mathscr{S}'$-universellement injectif pour tout $1 \leq i \leq \ell$.

Il suffit de conjuguer 5.2.4 et 5.3.8.

Corollaire 5.3.10. *Soient $f \colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme localement de présentation finie de schémas formels idylliques, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Alors l'ensemble des points x de $\mathfrak{X}$ tels que $\mathscr{F}$ soit f-plat en x est ouvert.*

En effet, soit x un point de $\mathfrak{X}$ tel que $\mathscr{F}$ soit f-plat en x. Considérons un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(\mathfrak{X}', x') \arrow[r] \arrow[d] & (\mathscr{S}', s') \arrow[d] \\
(\mathfrak{X}, x) \arrow[r] & (\mathscr{S}, s)
\end{tikzcd}$$

satisfaisant aux conditions énoncées dans 5.3.9. Compte tenu de 5.1.5, une récurrence décroissante montre que les $\mathscr{G}_i$ $(1 \leq i \leq \ell)$ et $\mathscr{F}'$ sont $\mathscr{S}'$-plats. Par suite, $\mathscr{F}$ est $\mathscr{S}$-plat sur l'image de $\mathfrak{X}'$ dans $\mathfrak{X}$, qui est ouverte.

Proposition 5.3.11. *Soient $f\colon (\mathfrak{X}, x) \to (\mathscr{S}, s)$ un morphisme localement de présentation finie de schémas formels idylliques pointés, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, Z l'ensemble fermé des points de $\mathfrak{X}$ où $\mathscr{F}$ n'est pas $\mathscr{S}$-plat, m un entier inférieur à $n = \dim_x(\mathscr{F}/\mathscr{S})$. Supposons donné un diagramme commutatif de schémas formels idylliques pointés*

$$\begin{tikzcd}
(\mathfrak{X}', x') \arrow[r] \arrow[d] & (\mathscr{S}', s') \arrow[d] \\
(\mathfrak{X}, x) \arrow[r] & (\mathscr{S}, s)
\end{tikzcd}$$

dont les morphismes verticaux sont des voisinages étales élémentaires affines et un $\mathscr{S}'$-dévissage au point x', $(\mathfrak{Y}_i \to \mathscr{T}_i, \alpha_i \colon \mathscr{L}_i \to \mathscr{G}_i, \mathscr{H}_i)_{1 \leq i \leq \ell}$, de l'image réciproque $\mathscr{F}'$ de $\mathscr{F}$ sur $\mathfrak{X}'$, en dimensions comprises entre n et m. Soient τ_i le point générique de $\mathscr{T}_i \otimes_{\mathscr{S}'} \kappa(s')$ et t_i le point de $\mathscr{T}_i$ déduit de proche en proche à partir de x'. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *$\dim_x(Z/\mathscr{S}) < m$, où $\dim_x(Z/\mathscr{S})$ est la dimension en x de la partie fermée induite par Z sur $\mathfrak{X} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s)$;*

(ii) *α_i est bijectif en τ_i pour tout $1 \leq i \leq \ell$;*

(iii) *α_i est injectif en t_i pour tout $1 \leq i \leq \ell$;*

(iv) *il existe un voisinage ouvert V' de s' dans $\mathscr{S}'$ tel que α_i soit $\mathscr{S}'$-universellement injectif au-dessus de V' pour tout $1 \leq i \leq \ell$.*

Soient Z' l'image réciproque de Z dans $\mathfrak{X}'$, Z_1 l'image de Z' dans $\mathscr{T}_1$. On voit facilement que Z' est l'ensemble des points de $\mathfrak{X}'$ où $\mathscr{F}'$ n'est pas $\mathscr{S}'$-plat, ou ce qui revient au même, l'ensemble des points de $\mathfrak{Y}_1$ où $\mathscr{F}'$ n'est pas $\mathscr{S}'$-plat. Comme $\mathfrak{Y}_1 \to \mathscr{T}_1$ est fini et de présentation finie, on en déduit par 5.1.5 que Z_1 est l'ensemble des points de $\mathscr{T}_1$ où $\mathscr{G}_1$ n'est pas $\mathscr{S}'$-plat. De plus, x' étant le seul point de $\mathfrak{Y}_1$ au-dessus de t_1, on a $\dim_x(Z/\mathscr{S}) = \dim_{x'}(Z'/\mathscr{S}') = \dim_{t_1}(Z_1/\mathscr{S}')$.

Raisonnons par récurrence sur n, le cas où $n < 0$ étant trivial. Comme $\mathscr{O}_{\tau_1}$ est $\mathscr{O}_{t_1}$-plat (2.6.9), appliquant 5.3.6 au $\mathscr{S}'$-dévissage au point τ_1 du $\mathscr{O}_{\mathscr{T}_1}$-module $\mathscr{G}_1$ donné par $(\mathrm{id}_{\mathscr{T}_1}, \alpha_1 \colon \mathscr{L}_1 \to \mathscr{G}_1, \mathscr{H}_1)$, on conclut que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i$_1$) $\tau_1 \notin Z_1$;

(ii$_1$) α_1 est bijectif en τ_1 ;

(iii$_1$) α_1 est injectif en t_1 ;

(iv$_1$) il existe un voisinage ouvert V' de s' dans $\mathscr{S}'$ tel que α_1 soit $\mathscr{S}'$-universellement injectif au-dessus de V'.

Chacune des conditions (i) à (iv) implique les conditions ci-dessus. De plus, quitte à restreindre $\mathscr{S}'$, elles entraînent que α_1 est $\mathscr{S}'$-universellement injectif, auquel cas Z_1 est l'ensemble des points de $\mathscr{T}_1$ où $\mathscr{H}_1$ n'est pas $\mathscr{S}'$-plat (5.1.17). Comme $\dim_{t_1}(\mathscr{H}_1/\mathscr{S}') < n$, l'hypothèse de récurrence entraîne que les quatre conditions sont équivalentes.

5.4 Modules cohérents rig-plats sur les schémas formels idylliques

5.4.1. Soient A un anneau, B une A-algèbre qui est un anneau préadmissible (1.8.3), K un idéal de définition de B, M un B-module ; posons $X = \mathrm{Spec}(B)$ et $Y = \mathrm{Spec}(A)$. On dit que M est *rig-A-plat* si le $\mathscr{O}_X$-module associé à M est Y-plat en dehors du fermé $\mathrm{V}(K)$. Cette définition ne dépend pas de l'idéal de définition K de B.

Proposition 5.4.2. *Soient A un anneau idyllique, J un idéal de définition de type fini de A, B une A-algèbre topologiquement de type fini, qui est un anneau idyllique, M un B-module cohérent ; posons $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B)$, $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A)$ et soit $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ le morphisme canonique. Soient $\mathscr{P}$ un point rigide fermé de $\mathfrak{X}$* (3.3.1)*, $U = \mathrm{Spf}(B')$ un voisinage ouvert formel affine de $\mathscr{P}$ dans $\mathfrak{X}$, $V = \mathrm{Spf}(A')$ un ouvert formel affine de $\mathfrak{Y}$ tel que $f(\mathfrak{X}) \subset V$. D'après* (3.3.2)*, $\mathscr{P}$ détermine un point fermé de* $\mathrm{Spec}(B) - \mathrm{V}(JB)$ *et donc un idéal premier $\mathfrak{p}$ de B ; de même, comme B' est un anneau idyllique* (2.6.12)*, $\mathscr{P}$ détermine un point fermé de* $\mathrm{Spec}(B') - \mathrm{V}(JB')$ *et donc un idéal premier $\mathfrak{p}'$ de B', qui est évidemment au-dessus de $\mathfrak{p}$.*

(i) *Pour que $M_{\mathfrak{p}}$ soit A-plat, il faut et il suffit que $(M \otimes_B B')_{\mathfrak{p}'}$ soit A-plat.*

(ii) *Si $M_{\mathfrak{p}}$ est A'-plat, il est A-plat.*

(iii) *Supposons que le point rigide $\mathscr{Q} = f(\mathscr{P})$ soit fermé dans $\mathfrak{Y}$* (3.3.5)*. Pour que $M_{\mathfrak{p}}$ soit A-plat, il faut et il suffit qu'il soit A'-plat.*

(i) Comme B' est B-plat (5.1.12) et que $(M \otimes_B B')_{\mathfrak{p}'} \simeq M_{\mathfrak{p}} \otimes_{B_{\mathfrak{p}}} B'_{\mathfrak{p}'}$, la proposition résulte de ([12] chap. I §3.2 prop. 4).

(ii) En effet, A' est A-plat (5.1.12).

(iii) Notons d'abord que A' est idyllique (2.6.12) et $\mathscr{Q}$ est fermé dans V. Donc $\mathscr{Q}$ détermine des points fermés $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$ et $\mathfrak{q}' \in \mathrm{Spec}(A') - \mathrm{V}(JA')$ (3.3.2). Il est clair que $\mathfrak{p}$ est au-dessus de $\mathfrak{q}'$, qui est au-dessus de $\mathfrak{q}$. D'après (ii), il suffit de montrer que si $M_{\mathfrak{p}}$ est A-plat, il est A'-plat. Pour ce faire, compte tenu de (i) et (ii), on peut remplacer $\mathfrak{X}$ par un ouvert formel affine contenant $\mathscr{P}$ et V

par un ouvert formel affine contenant $f(\mathfrak{X})$. On peut donc supposer $V = \mathscr{D}(t)$ où $t \in A$, de sorte que $A' = A_{\{t\}}$. Il résulte alors de 1.12.19 que $M_{\mathfrak{p}}$ est $A_{\{t\}}$-plat.

Définition 5.4.3. Les hypothèses étant celles de (5.4.2), supposons de plus que $f(\mathscr{P})$ soit fermé dans $\mathfrak{Y}$. On dit que M^{Δ} est *rig-f-plat* (ou *rig-$\mathfrak{Y}$-plat*) *en* $\mathscr{P}$ si $M_{\mathfrak{p}}$ est A-plat.

La condition que $f(\mathscr{P})$ *soit fermé dans* $\mathfrak{Y}$ est nécessaire pour garantir le caractère local de cette définition.

Corollaire 5.4.4. *Soient A un anneau idyllique, B une A-algèbre topologiquement de type fini, qui est un anneau idyllique, M un B-module cohérent ; posons $\mathfrak{X} =$ $\mathrm{Spf}(B)$, $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A)$ et soit $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ le morphisme canonique. Soient $\mathscr{P}$ un point rigide fermé de $\mathfrak{X}$ tel que $f(\mathscr{P})$ soit fermé dans $\mathfrak{Y}$, V un voisinage ouvert formel affine de $f(\mathscr{P})$ dans $\mathfrak{Y}$, U un voisinage ouvert formel affine de $\mathscr{P}$ dans $\mathfrak{X}$ tel que $f(U) \subset V$, $f|U\colon U \to V$ la restriction de f. Alors, pour que M^{Δ} soit rig-f-plat en $\mathscr{P}$, il faut et il suffit que $M^{\Delta}|U$ soit rig-$(f|U)$-plat en $\mathscr{P}$.*

En effet, si on pose $B' = \Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$, on a $M^{\Delta}|U \simeq (M \otimes_B B')^{\Delta}$ (2.7.4), et la conclusion résulte de 5.4.2.

Définition 5.4.5. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme localement de type fini de schémas formels idylliques, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, $\mathscr{P}$ un point rigide de $\mathfrak{X}$. On dit que $\mathscr{F}$ est *rig-f-plat en* $\mathscr{P}$ (ou *rig-$\mathfrak{Y}$-plat en* $\mathscr{P}$) s'il existe un voisinage ouvert formel affine globalement idyllique V de $f(\mathscr{P})$ dans $\mathfrak{Y}$ et un voisinage ouvert formel affine globalement idyllique U de $\mathscr{P}$ dans $\mathfrak{X}$ tels que $f(U) \subset V$, que $\mathscr{P}$ soit fermé dans U, que $f(\mathscr{P})$ soit fermé dans V et que $\mathscr{F}|U$ soit rig-V-plat en $\mathscr{P}$ (5.4.3). On dit que $\mathscr{F}$ est *rig-f-plat* (ou *rig-$\mathfrak{Y}$-plat*) s'il est rig-f-plat en tout point rigide de $\mathfrak{X}$, et que le morphisme f est *rig-plat en* $\mathscr{P}$ (resp. *rig-plat*) si $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est rig-f-plat en $\mathscr{P}$ (resp. rig-f-plat).

On peut faire les remarques suivantes :

5.4.5.1. D'après 5.4.4, cette notion est locale sur $\mathfrak{X}$ et sur $\mathfrak{Y}$, et est cohérente avec 5.4.3.

5.4.5.2. Pour que $\mathscr{F}$ soit rig-f-plat en $\mathscr{P}$, il faut et il suffit que son transformé strict le soit (2.10.1.4 et 2.10.13).

5.4.5.3. Si $\mathscr{F}$ est f-plat, il est rig-f-plat (5.1.11).

5.4.5.4. Si le $\mathscr{O}_{\mathscr{P}}$-module $\mathscr{F} \otimes_{\mathfrak{X}} \mathscr{O}_{\mathscr{P}}$ est rig-nul, $\mathscr{F}$ est rig-f-plat en $\mathscr{P}$. En effet, on peut se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B)$ et $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A)$ sont formels affines globalement idylliques, $\mathscr{P}$ est fermé dans $\mathfrak{X}$, $f(\mathscr{P})$ est fermé dans $\mathfrak{Y}$ et $\mathscr{F} = M^{\Delta}$ où M est un B-module cohérent. Si $\mathfrak{p}$ est l'idéal premier associé à $\mathscr{P}$, $M/\mathfrak{p}M$ est rig-nul en vertu de 2.7.4 ; donc $M_{\mathfrak{p}} = 0$.

Proposition 5.4.6. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ deux morphismes localement de type fini de schémas formels idylliques, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, $\mathscr{G}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module cohérent, $\mathscr{P}$ un point rigide de $\mathfrak{X}$.*

(i) *Si* $\mathscr{F}$ *est rig-f-plat en* $\mathscr{P}$ *et si* $\mathscr{G}$ *est rig-g-plat en* $f(\mathscr{P})$*,* $\mathscr{F} \otimes_{\mathfrak{Y}} \mathscr{G}$ *est rig-$(g \circ f)$-plat en* $\mathscr{P}$*. En particulier, si* f *et* g *sont rig-plats, il en est de même de* $g \circ f$*.*

(ii) *Supposons* f *rig-plat en* $\mathscr{P}$*. Pour que* $\mathscr{G}$ *soit rig-g-plat en* $f(\mathscr{P})$*, il faut et il suffit que* $f^*(\mathscr{G})$ *soit rig-$(g \circ f)$-plat en* $\mathscr{P}$*.*

Cela résulte de (2.7.2.4), 2.7.4 et ([12] chap. I §2.7 prop. 8 et §3.2 prop. 4).

Proposition 5.4.7. *Soient* $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ *un morphisme localement de type fini de schémas formels idylliques,* $\mathscr{F}$*,* $\mathscr{G}$ *deux* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$*-modules cohérents,* $u\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ *un morphisme* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$*-linéaire,* $\mathscr{S}$*-universellement injectif* (5.1.14)*,* $\mathscr{H}$ *le conoyau de* u*,* $\mathscr{P}$ *un point rigide de* $\mathfrak{X}$*. Alors si* $\mathscr{G}$ *est rig-f-plat en* $\mathscr{P}$*,* $\mathscr{H}$ *est rig-f-plat en* $\mathscr{P}$*.*

On peut se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B)$ et $\mathscr{S} = \mathrm{Spf}(A)$ sont formels affines globalement idylliques, $\mathscr{F} = M^{\Delta}$, $\mathscr{G} = N^{\Delta}$, $u = v^{\Delta}$, où M et N sont des B-modules cohérents et $v\colon M \to N$ est un morphisme B-linéaire. On peut supposer $\mathscr{P}$ fermé dans $\mathfrak{X}$ et $f(\mathscr{P})$ fermé dans $\mathscr{S}$. Soient $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de B associé à $\mathscr{P}$, H le conoyau de v, de sorte que $\mathscr{H} = H^{\Delta}$. La proposition revient à dire que $H_{\mathfrak{p}}$ est A-plat. Il suffit alors de montrer que pour tout idéal de type fini I de A, le morphisme canonique $I \otimes_A H_{\mathfrak{p}} \to H_{\mathfrak{p}}$ est injectif ([12] chap. I §2.3 rem. 1). Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_{\mathfrak{p}} \arrow[r] & N_{\mathfrak{p}} \arrow[r] & H_{\mathfrak{p}} \arrow[r] & 0 \\
& I \otimes_A M_{\mathfrak{p}} \arrow[r] \arrow[u] & I \otimes_A N_{\mathfrak{p}} \arrow[r] \arrow[u] & I \otimes_A H_{\mathfrak{p}} \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes (5.1.16). Comme $N_{\mathfrak{p}}$ est A-plat par hypothèse, il suffit encore de montrer que le morphisme $M_{\mathfrak{p}}/IM_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}}/IN_{\mathfrak{p}}$ est injectif ([12] chap. I §1.4 prop. 2). En vertu de 5.1.16 (appliqué au sous-schéma $\mathscr{S}' = \mathrm{Spf}(A/I)$ de $\mathscr{S}$), le morphisme $M/IM \to N/IN$ est injectif, d'où l'assertion.

Proposition 5.4.8. *Soient* $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A)$*,* $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B)$ *deux schémas formels affines globalement idylliques,* $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ *un morphisme de type fini,* J *un idéal de définition de type fini de* A*,* M *un* B*-module cohérent.*

(i) *Si* M^{Δ} *est rig-f-plat,* M *est rig-A-plat* (5.4.1)*.*

(ii) *Supposons de plus que* A/J *soit un anneau de Jacobson. Alors, pour que* M *soit rig-A-plat, il faut et il suffit que* M^{Δ} *soit rig-f-plat.*

Posons $Y = \mathrm{Spec}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(B)$, $X_{\mathfrak{g}} = X - \mathrm{V}(JB)$ et soit $h\colon X \to Y$ le morphisme déduit de f.

(i) Soient $\mathscr{P}$ un point rigide fermé de $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de B correspondant. Montrons en premier lieu que $M_{\mathfrak{p}}$ est A-plat (ce qui nécessite une preuve seulement si $f(\mathscr{P})$ n'est pas fermé dans $\mathfrak{Y}$). Soient $V = \mathrm{Spf}(A')$ un voisinage ouvert formel affine de $f(\mathscr{P})$ dans $\mathfrak{Y}$, $U = \mathrm{Spf}(B')$ un voisinage ouvert formel affine de $\mathscr{P}$ dans

$\mathfrak{X}$ tels que $f(U) \subset V$ et que $f(\mathscr{P})$ soit fermé dans V. On note $\mathfrak{p}'$ l'idéal de premier de B' associé à $\mathscr{P}$. Par hypothèse, $(M \otimes_B B')_{\mathfrak{p}'}$ est A'-plat (2.7.4) ; donc $M_{\mathfrak{p}}$ est A-plat en vertu de 5.4.2(i)-(ii). Il en résulte que $\widetilde{M}$ est Y-plat en tous les points fermés de X_{g} (3.3.2). Comme X_{g} est un schéma de Jacobson (1.11.9), $\widetilde{M}$ est Y-plat en tous les points localement fermés de X_{g} ([28] 0.2.8.2). On en déduit par restriction à des ouverts affines de X_{g} que $\widetilde{M}|X_{\mathrm{g}}$ est Y-plat ([12] chap. II §3.4 prop. 15).

(ii) On notera d'abord que B/JB est aussi un anneau de Jacobson ([12] chap. V §3.4 théo. 3). Donc tout point rigide de $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$) est fermé (3.3.1). On en déduit aussitôt que si $\widetilde{M}|X_{\mathrm{g}}$ est Y-plat, M^{Δ} est rig-f-plat.

Corollaire 5.4.9. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme localement de type fini de schémas formels idylliques, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\mathscr{F}$ est rig-f-plat.*

(ii) *Pour tout ouvert formel affine globalement idyllique $V = \mathrm{Spf}(A)$ de $\mathfrak{Y}$ et tout ouvert formel affine globalement idyllique $U = \mathrm{Spf}(B)$ de $\mathfrak{X}$ tels que $f(U) \subset V$, $M = \Gamma(U, \mathscr{F})$ est rig-A-plat.*

(iii) *Pour tout point rigide $\mathscr{P}$ de $\mathfrak{X}$, il existe un voisinage ouvert formel affine globalement idyllique $V = \mathrm{Spf}(A)$ de $f(\mathscr{P})$ dans $\mathfrak{Y}$ et un voisinage ouvert formel affine globalement idyllique $U = \mathrm{Spf}(B)$ de $\mathscr{P}$ dans $\mathfrak{X}$ tels que $f(U) \subset V$, que $\mathscr{P}$ soit fermé dans U, que $f(\mathscr{P})$ soit fermé dans V et que $M = \Gamma(U, \mathscr{F})$ soit rig-A-plat.*

On a clairement (ii)⇒(iii)⇒(i). D'autre part, l'implication (i)⇒(ii) résulte de 5.4.5.1 et 5.4.8(i).

Corollaire 5.4.10. *Soient $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathscr{S}$ des schémas formels idylliques, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme fini et de présentation finie, $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathscr{S}$ un morphisme localement de type fini, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Pour que $\mathscr{F}$ soit rig-$\mathscr{S}$-plat, il faut et il suffit que $f_*(\mathscr{F})$ soit rig-$\mathscr{S}$-plat.*

On notera que $f_*(\mathscr{F})$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module cohérent (2.8.19). La conclusion résulte de 5.4.9.

Lemme 5.4.11. *Soient A un anneau idyllique, J un idéal de définition de A, $\mathfrak{a}$ un idéal ouvert de type fini de A, $X = \mathrm{Spec}(A)$, X' l'éclatement de $\widetilde{\mathfrak{a}}$ dans X, $U = \mathrm{Spec}(B)$ un ouvert affine de X', $\widehat{B}$ le séparé complété de B pour la topologie J-préadique. Alors $\widehat{B}$ est rig-A-plat.*

Cela résulte aussitôt de 1.12.17.

Proposition 5.4.12. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ un éclatement admissible de présentation finie. Alors φ est rig-plat.*

La question étant locale sur $\mathfrak{X}$, on peut le supposer formel affine globalement idyllique. Il résulte alors de 3.1.3, 5.4.9 et 5.4.11 que φ est rig-plat.

Lemme 5.4.13. *Soient $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ deux schémas formels idylliques, $\mathscr{A}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{Y}$, $\psi\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$ l'éclatement de $\mathscr{A}$ dans $\mathfrak{Y}$, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}'$ un morphisme localement de type fini, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, $\mathscr{P}$ un point rigide de $\mathfrak{X}$. Pour que $\mathscr{F}$ soit rig-f-plat en $\mathscr{P}$, il faut et il suffit qu'il soit rig-$(\psi \circ f)$-plat en $\mathscr{P}$.*

On notera que ψ est de présentation finie (3.1.4). Si $\mathscr{F}$ est rig-f-plat en $\mathscr{P}$, il est rig-$(\psi \circ f)$-plat en $\mathscr{P}$, en vertu de 5.4.6 et 5.4.12. Montrons l'implication inverse. Posons $\mathscr{Q}' = f(\mathscr{P})$ et $\mathscr{Q} = \psi(\mathscr{Q}')$. On peut se borner au cas où $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A)$ est formel affine globalement idyllique, $\mathscr{Q}$ est fermé dans $\mathfrak{Y}$ et $\mathscr{A} = \mathfrak{a}^{\Delta}$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal de définition de type fini de A. Posons $Y = \mathrm{Spec}(A)$ et soit $\phi\colon Y' \to Y$ l'éclatement de $\widetilde{\mathfrak{a}}$ dans Y, de sorte que $\mathfrak{Y}'$ s'identifie au séparé complété de Y' le long de $\mathrm{V}(\mathfrak{a}\mathscr{O}_{Y'})$, ψ étant le prolongement de ϕ aux complétés (3.1.3). Soient $V = \mathrm{Spf}(B)$ un voisinage ouvert formel affine de $\mathscr{Q}'$ dans $\mathfrak{Y}'$, $U = \mathrm{Spf}(C)$ un voisinage ouvert formel affine globalement idyllique de $\mathscr{P}$ dans $\mathfrak{X}$ tels que $f(U) \subset V$ et que $\mathscr{P}$ soit fermé dans U. On peut supposer V algébrisable, *i.e.*, qu'il existe un ouvert affine $\mathrm{Spec}(B')$ de Y' tel que B soit le séparé complété de B' pour la topologie $\mathfrak{a}$-adique. On notera alors que B' est une A-algèbre de présentation finie (1.13.3) et que B est un anneau idyllique (2.6.12). De plus, $\mathscr{Q}'$ est fermé dans $\mathfrak{Y}'$ (1.11.5 et [29] 5.4.3) et donc aussi dans V. On a $\mathscr{F}|U = M^{\Delta}$, où M est un C-module cohérent, et $\mathscr{P}$ détermine un point fermé $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(C) - \mathrm{V}(\mathfrak{a}C)$. Comme $M_{\mathfrak{p}}$ est A-plat par hypothèse, il est B'-plat. Par suite, $M_{\mathfrak{p}}$ est B-plat en vertu de 1.12.19, d'où la proposition.

Proposition 5.4.14. *Considérons un diagramme commutatif de morphismes de schémas formels idylliques*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}' & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{X} \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathfrak{Y}' & \xrightarrow{\psi} & \mathfrak{Y} \end{array}$$

où f et f' sont localement de type fini, φ et ψ sont des éclatements admissibles de présentation finie. Soient $\mathscr{P}'$ un point rigide de $\mathfrak{X}'$, $\mathscr{P} = \varphi(\mathscr{P}')$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Pour que $\mathscr{F}$ soit rig-f-plat en $\mathscr{P}$, il faut et il suffit que $\varphi^*(\mathscr{F})$ soit rig-f'-plat en $\mathscr{P}'$; pour que $\mathscr{F}$ soit rig-f-plat, il faut et il suffit que $\varphi^*(\mathscr{F})$ soit rig-f'-plat.

Pour que $\mathscr{F}$ soit rig-f-plat en $\mathscr{P}$, il faut et il suffit que $\varphi^*(\mathscr{F})$ soit rig-$(f \circ \varphi)$-plat en $\mathscr{P}'$ (5.4.6 et 5.4.12). Si $\varphi^*(\mathscr{F})$ est rig-f'-plat en $\mathscr{P}'$, il est rig-$(f \circ \varphi)$-plat en $\mathscr{P}'$. Montrons l'implication inverse. Supposons que ψ soit l'éclatement dans $\mathfrak{Y}$ d'un idéal ouvert cohérent $\mathscr{A}$. Soient $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{Y}$, $\psi'\colon \mathfrak{Y}'' \to \mathfrak{Y}'$ l'éclatement de $\mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'}$ dans $\mathfrak{Y}'$, $\varphi'\colon \mathfrak{X}'' \to \mathfrak{X}'$ l'éclatement de $\mathscr{J}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$ dans $\mathfrak{X}'$. On sait que φ' et ψ' sont de présentation finie (3.1.4) et que $\psi \circ \psi'$ est l'éclatement de $\mathscr{A}\mathscr{J}$ dans $\mathfrak{Y}$ (3.1.13). En vertu de 3.1.4 et 3.1.9, il existe un morphisme $f''\colon \mathfrak{X}'' \to \mathfrak{Y}''$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X}'' \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "f''"'] & \mathfrak{X}' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f'"] & \mathfrak{X} \arrow[d, "f"] \\
\mathfrak{Y}'' \arrow[r, "\psi'"] & \mathfrak{Y}' \arrow[r, "\psi"] & \mathfrak{Y}
\end{tikzcd}$$

On notera que f'' est localement de type fini (2.3.18) et qu'il existe un point rigide $\mathscr{P}''$ de $\mathfrak{X}''$ tel que $\varphi'(\mathscr{P}'') = \mathscr{P}'$ (3.3.7). L'hypothèse entraîne que $\varphi'^*(\varphi^*(\mathscr{F}))$ est rig-$(f\circ\varphi\circ\varphi')$-plat en $\mathscr{P}''$. Donc en vertu de 5.4.13, $\varphi'^*(\varphi^*(\mathscr{F}))$ est rig-f''-plat en $\mathscr{P}''$. Il en résulte que $\varphi'^*(\varphi^*(\mathscr{F}))$ est rig-$(\psi'\circ f'')$-plat en $\mathscr{P}''$. Par suite, $\varphi^*(\mathscr{F})$ est rig-f'-plat en $\mathscr{P}'$, en vertu de 5.4.6 et 5.4.12. On a démontré la première assertion. La seconde assertion s'en déduit grâce à 3.3.7.

Corollaire 5.4.15. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $\psi\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$ deux morphismes de schémas formels idylliques tels que f soit localement de type fini et que ψ soit un éclatement admissible de présentation finie, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, $\mathscr{P}$ un point rigide de $\mathfrak{X}$; posons $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}'$, $\mathscr{F}' = \mathscr{F} \otimes_{\mathfrak{Y}} \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'}$ et soient $f'\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{Y}'$, $\psi'\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ les projections canoniques. Alors :*

(i) *Il existe un et un seul point rigide $\mathscr{P}'$ de $\mathfrak{X}'$ tel que $\mathscr{P} = \psi'(\mathscr{P}')$.*

(ii) *Pour que $\mathscr{F}$ soit rig-f-plat en $\mathscr{P}$, il faut et il suffit que $\mathscr{F}'$ soit rig-f'-plat en $\mathscr{P}'$; en particulier, pour que $\mathscr{F}$ soit rig-f-plat, il faut et il suffit que $\mathscr{F}'$ soit rig-f'-plat ; pour que f soit rig-plat, il faut et il suffit que f' soit rig-plat.*

En vertu de 3.1.17(i), il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X}'' \arrow[d, "\vartheta"] \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[dd, bend right, "f''"'] & \\
\mathfrak{X}' \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & \mathfrak{X} \arrow[d, "f"] \\
\mathfrak{Y}' \arrow[r, "\psi"'] & \mathfrak{Y}
\end{tikzcd}$$

où ϑ et φ sont des éclatements admissibles de présentation finie et f'' est localement de type fini. L'assertion (i) résulte alors de 3.3.7, et l'assertion (ii) de 5.4.14 (appliqué successivement à φ et ϑ).

Proposition 5.4.16. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $g\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$ deux morphismes de schémas formels idylliques, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent ; posons $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}'$, $\mathscr{F}' = \mathscr{F} \otimes_{\mathfrak{Y}} \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'}$ et soient $f'\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{Y}'$, $g'\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ les projections canoniques. Supposons f localement de type fini et l'une des conditions suivantes vérifiée :*

(i) *g est fini et de présentation finie.*

(ii) *g est étale.*

Soient $\mathscr{P}'$ un point rigide de $\mathfrak{X}'$, $\mathscr{P} = g'(\mathscr{P}')$, $\mathscr{Q}' = f'(\mathscr{P}')$, $\mathscr{Q} = f(\mathscr{P}) = g(\mathscr{Q}')$. Si $\mathscr{F}$ est rig-f-plat en $\mathscr{P}$, $\mathscr{F}'$ est rig-f'-plat en $\mathscr{P}'$; en particulier, si $\mathscr{F}$ est rig-f-plat, $\mathscr{F}'$ est rig-f'-plat ; si f est rig-plat, f' est rig-plat.

Il suffit évidemment de prouver la première assertion. La question étant locale, on peut se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B)$, $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A)$ et $\mathfrak{Y}' = \mathrm{Spf}(A')$ sont formels affines globalement idylliques, $\mathscr{F} = M^\Delta$, où M est un B-module cohérent, et $\mathscr{P}$ (resp. $\mathscr{Q}$) est fermé dans $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$). Comme A' est topologiquement de présentation finie sur A (2.6.11), le cas (ii) se ramène au cas (i) en vertu de 1.16.28. Considérons désormais le cas (i). Comme A' est un A-module cohérent, $\mathfrak{X}' = \mathrm{Spf}(B \otimes_A A')$ (1.10.2), et $\mathscr{P}'$ (resp. $\mathscr{Q}'$) est fermé dans $\mathfrak{X}'$ (resp. $\mathfrak{Y}'$) (1.11.5 et [29] 5.4.3). Soient $\mathfrak{p}$ (resp. $\mathfrak{p}'$) l'idéal premier de B (resp. $B \otimes_A A'$) associé à $\mathscr{P}$ (resp. $\mathscr{P}'$). Comme $\mathscr{F} \otimes_{\mathfrak{Y}} \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'} \simeq (M \otimes_A A')^\Delta$ (2.7.4) et que $\mathfrak{p}'$ est au-dessus de $\mathfrak{p}$, la conclusion résulte des propriétés de la platitude pour les schémas usuels ([31] 2.1.5).

Remarque 5.4.17. Les énoncés 5.4.15 et 5.4.16 seront étendus dans une certaine mesure (5.8.9).

5.5 Rig-platitude et morphismes de topos annelés

On se propose dans cette section d'interpréter la rig-platitude en terme de platitude relativement à certains morphismes de topos annelés (1.1.12).

Proposition 5.5.1. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de $\mathbf{S}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, $\mathscr{P}$ un point rigide de $\mathfrak{X}$, p le point de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ associé à $\mathscr{P}$* (4.4.5). *Pour que $\mathscr{F}$ soit rig-f-plat en $\mathscr{P}$, il faut et il suffit que $\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ soit $\underline{f}$-plat en p* (4.7.20.1).

On peut évidemment se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B)$ et $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A)$ sont formels affines globalement idylliques, f est associé à un homomorphisme topologiquement de présentation finie $\varphi\colon A \to B$, $\mathscr{F} = M^\Delta$ où M est un B-module cohérent, $\mathscr{P}$ est fermé dans $\mathfrak{X}$ et $f(\mathscr{P})$ est fermé dans $\mathfrak{Y}$. Soient $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ les idéaux premiers de B et A correspondants respectivement à $\mathscr{P}$ et $f(\mathscr{P})$ (3.3.2), q le point de $\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ associé à $f(\mathscr{P})$. On a alors des homomorphismes locaux canoniques d'anneaux locaux noethériens $B_\mathfrak{p} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}},p}$ et $A_\mathfrak{q} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}},q}$ dont les prolongements aux complétés sont des isomorphismes (4.8.9), et on a un isomorphisme canonique $\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}_p \simeq M_\mathfrak{p} \otimes_{B_\mathfrak{p}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}},p}$ (4.8.15.1). Par suite, d'après ([12] chap. III §5.4 prop. 4), $M_\mathfrak{p}$ est $A_\mathfrak{q}$-plat si et seulement si $\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}_p$ est $(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}},q})$-plat, d'où la proposition.

Lemme 5.5.2. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique de schémas formels idylliques tel que $\mathfrak{Y}$ admette localement un idéal de définition monogène, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ est f_g-plat* (2.10.29.1).

(ii) *Pour tout ouvert V de $\mathfrak{Y}$, si l'on pose $U = f^{-1}(V)$, le foncteur $\mathscr{G} \mapsto \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathscr{F})$ de la catégorie des $(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}|V)$-modules cohérents dans celle des $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|U)$-modules est exact.*

(iii) *La condition* (ii) *est vérifiée pour tout ouvert formel affine globalement idyllique V de $\mathfrak{Y}$, ayant un idéal de définition monogène.*

Soient V un ouvert de $\mathfrak{Y}$, $U = f^{-1}(V)$, $f_V \colon U \to V$ la restriction de f, $\mathscr{G}$ un $(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}|V)$-module cohérent. On a alors un isomorphisme canonique (2.10.21.1 et 2.10.30)

$$(f_V)^*_{\mathsf{g}}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G})) \otimes_{\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|U)} \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}|U) \simeq \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathscr{F}).$$

Par suite, (i) entraîne (ii) en vertu de 2.10.18, et (iii) entraîne (i) en vertu de 1.3.17 et 2.10.24. Il est clair que (ii) implique (iii).

Lemme 5.5.3. *Soient A un anneau idyllique, J un idéal de définition monogène de A, B une A-algèbre adique, qui est un anneau idyllique, M un B-module cohérent ; posons $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B)$, $X = \mathrm{Spec}(B)$ et $X_{\mathsf{g}} = X - \mathrm{V}(JB)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *M est rig-A-plat* (5.4.1).

(ii) *Le foncteur $N \mapsto \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}((N \otimes_A M)^{\Delta})$ de la catégorie des A-modules cohérents dans celle des $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-modules est exact.*

Montrons d'abord (i)⇒(ii). Il suffit de prouver que pour toute suite exacte de A-modules cohérents $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ et tout ouvert affine $U = \mathrm{Spec}(B')$ de X, la suite

$$\begin{aligned} 0 \to \Gamma(\mathfrak{X} \cap U, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}((N' \otimes_A M)^{\Delta})) &\to \Gamma(\mathfrak{X} \cap U, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}((N \otimes_A M)^{\Delta})) \\ &\to \Gamma(\mathfrak{X} \cap U, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}((N'' \otimes_A M)^{\Delta})) \to 0 \end{aligned}$$

est exacte. Soient $\widehat{B}'$ le séparé complété de B' pour la topologie J-adique, $U_{\mathsf{g}} = U \cap X_{\mathsf{g}}$. En vertu de 2.10.7, on a

$$\Gamma(\mathfrak{X} \cap U, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}((N \otimes_A M)^{\Delta})) = \Gamma(U_{\mathsf{g}}, (N \otimes_A M)^{\sim}) \otimes_{B'} \widehat{B}', \tag{5.5.3.1}$$

et de même pour N' et N''. D'autre part, B' étant une B-algèbre de type fini, $\widehat{B}'$ est B'-plat (1.12.17). Comme U_{g} est un schéma affine, l'assertion résulte alors de la suite exacte

$$0 \to (N' \otimes_A M)^{\sim}|X_{\mathsf{g}} \to (N \otimes_A M)^{\sim}|X_{\mathsf{g}} \to (N'' \otimes_A M)^{\sim}|X_{\mathsf{g}} \to 0.$$

Montrons ensuite (ii)⇒(i). Comme X_{g} est affine, il suffit de prouver que pour tout A-module cohérent N et tout sous-module de type fini N' de N, le morphisme canonique

$$\Gamma(X_{\mathsf{g}}, (N' \otimes_A M)^{\sim}) \to \Gamma(X_{\mathsf{g}}, (N \otimes_A M)^{\sim})$$

est injectif ([12] chap. I §2.3 rem. 1), ce qui résulte de (ii) et de (5.5.3.1) appliqué à $B' = B$.

Proposition 5.5.4. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme localement de type fini de schémas formels idylliques tel que $\mathfrak{Y}$ admette localement un idéal de définition monogène, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\mathscr{F}$ est rig-f-plat.*

(ii) *$\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ est f_{g}-plat.*

(iii) *Pour tout ouvert V de $\mathfrak{Y}$, si l'on pose $U = f^{-1}(V)$, le foncteur $\mathscr{G} \mapsto \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathscr{F})$ de la catégorie des $(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}|V)$-modules cohérents dans celle des $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|U)$-modules est exact.*

Cela résulte de 5.4.9, 5.5.2 et 5.5.3, compte tenu de 2.7.4 et (2.7.2.4).

Lemme 5.5.5. *Considérons un diagramme commutatif de $\mathbf{S}^+$*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{U} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & \mathfrak{X} \arrow[d, "f"] \\ \mathscr{V} \arrow[r, "p"'] & \mathfrak{Y} \end{tikzcd} \tag{5.5.5.1}$$

tel que p et q soient de présentation finie et que p^{rig} et q^{rig} soient des immersions ouvertes. Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent tel que $\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ soit $\underline{f}$-plat. Alors $(q^*\mathscr{F})^{\mathrm{rig}}$ est $\underline{g}$-plat.

En vertu de 4.4.7 et (4.7.15.1), le diagramme (5.5.5.1) induit un diagramme de topos annelés

$$\begin{tikzcd} (\mathscr{U}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_{\mathscr{U}^{\mathrm{rig}}}) \arrow[r, "\underline{q}"] \arrow[d, "\underline{g}"'] & (\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}) \arrow[d, "\underline{f}"] \\ (\mathscr{V}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_{\mathscr{V}^{\mathrm{rig}}}) \arrow[r, "\underline{p}"'] & (\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}}) \end{tikzcd}$$

commutatif à isomorphisme canonique près. Comme les flèches horizontales sont des morphismes de localisation (4.8.4), $\underline{g}$ s'identifie au morphisme de topos associé à $\underline{f}$ et $\mathscr{U}^{\mathrm{rig}} \to \mathscr{V}^{\mathrm{rig}}$ défini dans (1.1.6). L'assertion résulte alors de 1.1.12.5 et 4.7.18.

Lemme 5.5.6. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de $\mathbf{S}^+$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ est $\underline{f}$-plat.*

(ii) *Pour tout diagramme commutatif de $\mathbf{S}^+$*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{U} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathfrak{X}' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f'"] & \mathfrak{X} \arrow[d, "f"] \\ \mathscr{V} \arrow[r, "v"'] & \mathfrak{Y}' \arrow[r, "\psi"'] & \mathfrak{Y} \end{tikzcd} \tag{5.5.6.1}$$

tel que φ et ψ soient des éclatements admissibles de présentation finie, que v soit une immersion ouverte et que le carré de gauche soit cartésien, le foncteur $\mathscr{G} \mapsto (\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'}} (\varphi^*\mathscr{F}))^{\mathrm{rig}}$ de la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathscr{V}}$-modules cohérents dans celle des $\mathscr{O}_{\mathscr{U}^{\mathrm{rig}}}$-modules est exact.

Considérons un diagramme commutatif (5.5.6.1) et posons $q = \varphi u$. Pour tout $\mathscr{O}_{\mathscr{V}}$-module cohérent $\mathscr{G}$, on a un isomorphisme canonique (4.7.23 et (4.7.29.1))

$$\underline{g}^*(\mathscr{G}^{\mathrm{rig}}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{U}^{\mathrm{rig}}}} (q^*\mathscr{F})^{\mathrm{rig}} \simeq (\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'}} \varphi^*(\mathscr{F}))^{\mathrm{rig}}.$$

Par suite, (i) entraîne (ii) en vertu de 4.7.11 et 5.5.5. Inversement, comme $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ admet suffisamment de points (4.4.6) et que l'anneau $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$ est cohérent (4.8.18), (ii) entraîne (i) en vertu de 1.3.17 et 4.8.18.

Lemme 5.5.7. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de $\mathbf{S}^+$ tel que $\mathfrak{Y}$ admette localement un idéal de définition monogène, $0 \to \mathscr{G}' \to \mathscr{G} \to \mathscr{G}'' \to 0$ une suite exacte de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-modules cohérents, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Alors, si l'une des deux suites*

$$0 \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G}' \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathscr{F}) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathscr{F}) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G}'' \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathscr{F}) \to 0 \quad (5.5.7.1)$$

$$0 \to (\mathscr{G}' \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathscr{F})^{\mathrm{rig}} \to (\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathscr{F})^{\mathrm{rig}} \to (\mathscr{G}'' \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathscr{F})^{\mathrm{rig}} \to 0 \quad (5.5.7.2)$$

est exacte, l'autre l'est aussi.

Si (5.5.7.1) est exacte, (5.5.7.2) est exacte, en vertu de 4.7.28. Inversement, supposons (5.5.7.2) exacte, et montrons que (5.5.7.1) est exacte. Compte tenu de 2.10.18, il suffit de montrer que le morphisme

$$\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G}' \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathscr{F}) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathscr{F})$$

est injectif. En vertu de 4.7.8, ce dernier s'identifie à l'image directe par $\rho_{\mathfrak{X}}$ du morphisme

$$(\mathscr{G}' \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathscr{F})^{\mathrm{rig}} \to (\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathscr{F})^{\mathrm{rig}},$$

d'où l'assertion.

Proposition 5.5.8. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de type fini de $\mathbf{S}^+$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\mathscr{F}$ est rig-f-plat.*

(ii) *$\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ est $\underline{f}$-plat.*

(iii) *Pour tout diagramme commutatif de $\mathbf{S}^+$*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{U} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathfrak{X}' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f'"] & \mathfrak{X} \arrow[d, "f"] \\ \mathscr{V} \arrow[r, "v"'] & \mathfrak{Y}' \arrow[r, "\psi"'] & \mathfrak{Y} \end{tikzcd}$$

tel que φ et ψ soient des éclatements admissibles de présentation finie, que v soit une immersion ouverte et que le carré de gauche soit cartésien, le foncteur $\mathscr{G} \mapsto (\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'}} (\varphi^*\mathscr{F}))^{\mathrm{rig}}$ de la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathscr{V}}$-modules cohérents dans celle des $\mathscr{O}_{\mathscr{U}^{\mathrm{rig}}}$-modules est exact.

(iii′) *La condition* (iii) *est vérifiée lorsque $\mathfrak{Y}'$ admet localement un idéal de définition monogène.*

On sait déjà que les conditions (ii) et (iii) sont équivalentes (5.5.6) ; donc les conditions (ii) et (iii′) sont aussi équivalentes (5.5.5). La condition (iii′) implique que $\varphi^*(\mathscr{F})$ est rig-f'-plat en vertu de 5.5.4 et 5.5.7 ; donc d'après 5.4.14, $\mathscr{F}$ est rig-f-plat. Montrons enfin que (i) entraîne (iii′). Si $\mathscr{F}$ est rig-f-plat, $\varphi^*(\mathscr{F})$ est rig-f'-plat (5.4.14), et notre assertion résulte encore de 5.5.4 et 5.5.7.

Définition 5.5.9. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme localement de type fini de schémas formels idylliques, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. On dit que $\mathscr{F}$ est *fidèlement rig-plat* relativement à f si $\mathscr{F}$ est rig-f-plat et si pour tout point rigide $\mathscr{Q}$ de $\mathfrak{Y}$, il existe un point rigide $\mathscr{P}$ de $\mathfrak{X}$ au-dessus de $\mathscr{Q}$ tel que, notant $i\colon \mathscr{P} \to \mathfrak{X}$ l'injection canonique, $i^*(\mathscr{F})$ ne soit pas rig-nul (2.10.1.4). On dit que f est *fidèlement rig-plat* si $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est fidèlement rig-plat relativement à f.

Cette notion est locale sur $\mathfrak{Y}$, mais non sur $\mathfrak{X}$. Pour que $i^*(\mathscr{F})$ ne soit pas rig-nul, il faut et il suffit que l'on ait $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(i^*\mathscr{F}) \neq 0$ (2.10.10), ou encore que $(i^*\mathscr{F})^{\mathrm{rig}} \neq 0$ (4.7.10).

On peut faire les remarques suivantes :

5.5.9.1. Pour que $\mathscr{F}$ soit fidèlement rig-plat, il faut et il suffit que son transformé strict le soit (2.10.1.4 et 5.4.5.2).

5.5.9.2. Il revient au même de dire que f est fidèlement rig-plat, ou qu'il est rig-plat et que l'application associée $\langle\mathfrak{X}\rangle \to \langle\mathfrak{Y}\rangle$ est surjective. Si de plus f est un morphisme de $\mathbf{S}$, ces conditions sont aussi équivalentes au fait que f^{rig} est plat et couvrant pour les points rigides (4.3.5 et 5.5.8).

Proposition 5.5.10. *Soit $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme plat localement de type fini de schémas formels idylliques.*

(i) *Si f est fidèlement plat, il est fidèlement rig-plat.*

(ii) *Supposons $\mathfrak{Y}$ rig-pur. Pour que f soit fidèlement plat, il faut et il suffit qu'il soit fidèlement rig-plat.*

(i) Il suffit de montrer que l'application $\langle\mathfrak{X}\rangle \to \langle\mathfrak{Y}\rangle$ associée à f est surjective (5.4.5.3). On peut se réduire au cas où $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A)$ et A est un ordre 1-valuatif (5.1.8). L'espace sous-jacent à $\mathfrak{Y}$ étant réduit à un point, il existe un ouvert affine globalement idyllique de $\mathfrak{X}$ qui est fidèlement plat relativement à $\mathfrak{Y}$. Donc on peut supposer $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B)$ formel affine globalement idyllique, où B est topologiquement de type fini et fidèlement plat sur A (5.1.11). Par suite, $\langle\mathfrak{X}\rangle \neq \emptyset$ en vertu de 3.3.2.

(ii) Si f est fidèlement rig-plat, il est surjectif en vertu de 3.3.10, et donc fidèlement plat. L'implication inverse est déjà établie dans (i).

Proposition 5.5.11. *Considérons un diagramme commutatif de morphismes de schémas formels idylliques*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f'"'] & \mathfrak{X} \arrow[d, "f"] \\ \mathfrak{Y}' \arrow[r, "\psi"] & \mathfrak{Y} \end{tikzcd}$$

où f et f' sont localement de type fini, φ et ψ sont des éclatements admissibles de présentation finie. Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Pour que $\mathscr{F}$ soit fidèlement rig-plat relativement à f, il faut et il suffit que $\varphi^*(\mathscr{F})$ soit fidèlement rig-plat relativement à f'.

Cela résulte de 5.4.14 et 3.3.7.

Proposition 5.5.12. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $\psi\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$ deux morphismes de schémas formels idylliques tels que f soit localement de type fini et que ψ soit un éclatement admissible de présentation finie, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent ; posons $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}'$, $\mathscr{F}' = \mathscr{F} \otimes_{\mathfrak{Y}} \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'}$ et soient $f'\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{Y}'$, $\psi'\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ les projections canoniques. Pour que $\mathscr{F}$ soit fidèlement rig-plat relativement à f, il faut et il suffit que $\mathscr{F}'$ soit fidèlement rig-plat relativement à f'.*

Cela résulte de 5.4.15.

Proposition 5.5.13. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme localement de type fini de schémas formels idylliques tel que $\mathfrak{Y}$ admette localement un idéal de définition monogène, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\mathscr{F}$ est fidèlement rig-plat relativement à f.*

(ii) *Pour tout ouvert V de $\mathfrak{Y}$, si l'on pose $U = f^{-1}(V)$, le foncteur $\mathscr{G} \mapsto \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathscr{F})$ de la catégorie des $(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}|V)$-modules cohérents dans celle des $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|U)$-modules est exact et satisfait la propriété suivante :*

$$\textit{si} \quad \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathscr{F}) = 0, \quad \textit{alors} \quad \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G}) = 0.$$

Montrons d'abord (i)$\Rightarrow$(ii). On sait déjà que le foncteur en question est exact (5.5.4). Pour le reste, on peut se borner au cas où $V = \mathfrak{Y}$. Soit $\mathscr{G}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module cohérent tel que $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathscr{F}) = 0$. Pour montrer que $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G}) = 0$, il suffit de montrer que, pour tout point rigide $\mathscr{Q}$ de $\mathfrak{Y}$, si $j\colon \mathscr{Q} \to \mathfrak{Y}$ désigne l'injection canonique, on a $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(j^*\mathscr{G}) = 0$ (3.3.13). Il existe un point rigide $\mathscr{P}$ de $\mathfrak{X}$ au-dessus de $\mathscr{Q}$ tel que, si l'on note $i\colon \mathscr{P} \to \mathfrak{X}$ l'injection canonique, on ait $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(i^*\mathscr{F}) \neq 0$.

On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathscr{P} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"'] & \mathfrak{X} \arrow[d, "f"] \\ \mathscr{Q} \arrow[r, "j"] & \mathfrak{Y} \end{tikzcd}$$

où g est de présentation finie (3.3.4). En vertu de (2.10.21.1) et 2.10.30, on a

$$\begin{aligned} i^*_{\mathsf{g}}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathscr{F})) &\simeq \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(i^*(\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathscr{F})) \\ &\simeq g^*_{\mathsf{g}}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(j^*\mathscr{G})) \otimes_{\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathscr{P}})} \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(i^*\mathscr{F}). \end{aligned} \tag{5.5.13.1}$$

Comme $(\mathscr{P}_{\mathrm{zar}}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathscr{P}}))$ est un topos ponctuel annelé par un corps, et de même pour $\mathscr{Q}$, on en déduit que $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(j^*\mathscr{G}) = 0$.

Montrons ensuite (ii)⇒(i). On sait déjà que $\mathscr{F}$ est rig-f-plat (5.5.4). Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe un point rigide $\mathscr{Q}$ de $\mathfrak{Y}$ tel que, pour tout point rigide $\mathscr{P}$ de $\mathfrak{X}$ au-dessus de $\mathscr{Q}$, si $i\colon \mathscr{P} \to \mathfrak{X}$ désigne l'injection canonique, on ait $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(i^*\mathscr{F}) = 0$. Quitte à remplacer $\mathfrak{Y}$ par un ouvert, on peut supposer $\mathscr{Q}$ fermé dans $\mathfrak{Y}$. Soient $j\colon \mathscr{Q} \to \mathfrak{Y}$ l'injection canonique, $\mathscr{G} = j_*(\mathscr{O}_{\mathscr{Q}})$ qui est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module cohérent, $\mathscr{P}$ un point rigide de $\mathfrak{X}$, $i\colon \mathscr{P} \to \mathfrak{X}$ l'injection canonique. Si $f(\mathscr{P}) = \mathscr{Q}$, $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(i^*\mathscr{F}) = 0$ par hypothèse, et par suite $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(i^*(\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathscr{F})) = 0$ (5.5.13.1). Supposons $f(\mathscr{P}) = \mathscr{Q}' \neq \mathscr{Q}$ et notons $j'\colon \mathscr{Q}' \to \mathfrak{Y}$ l'injection canonique. Comme $j'^*(\mathscr{G})$ est clairement rig-nul, on a $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(j'^*\mathscr{G}) = 0$, et donc $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(i^*(\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathscr{F})) = 0$ (5.5.13.1). On a montré dans tous les cas que $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(i^*(\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathscr{F})) = 0$; donc $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathscr{F}) = 0$ en vertu de 3.3.13. La condition (ii) entraîne alors que $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G}) = 0$, et par suite que $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(j^*\mathscr{G}) = 0$ (2.10.30), ce qui est absurde.

Proposition 5.5.14. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de type fini de $\mathbf{S}^+$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\mathscr{F}$ est fidèlement rig-plat relativement à f.*

(ii) *Pour tout diagramme commutatif de $\mathbf{S}^+$*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{U} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathfrak{X}' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f'"] & \mathfrak{X} \arrow[d, "f"] \\ \mathscr{V} \arrow[r, "v"'] & \mathfrak{Y}' \arrow[r, "\psi"'] & \mathfrak{Y} \end{tikzcd} \tag{5.5.14.1}$$

tel que φ et ψ soient des éclatements admissibles de présentation finie, que v soit une immersion ouverte et que le carré de gauche soit cartésien, le foncteur $\mathscr{G} \mapsto (\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'}} (\varphi^*\mathscr{F}))^{\mathrm{rig}}$ de la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathscr{V}}$-modules cohérents dans celle des $\mathscr{O}_{\mathscr{U}^{\mathrm{rig}}}$-modules, est exact et satisfait la propriété suivante : si $(\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'}} (\varphi^*\mathscr{F}))^{\mathrm{rig}} = 0$, alors $\mathscr{G}^{\mathrm{rig}} = 0$.

Pour montrer que (i) entraîne (ii), il suffit de calquer la preuve de 5.5.13, en tenant compte de 5.5.8, 5.5.11 et 4.7.10. Inversement, la condition (ii), où φ et ψ sont fixés de sorte que $\mathfrak{Y}'$ admet localement un idéal de définition monogène, implique la condition (i) en vertu de 5.5.13, 5.5.11 et 4.7.10.

Corollaire 5.5.15. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de* $\mathbf{S}$, *$\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\mathscr{F}$ est fidèlement rig-plat relativement à f.*

(ii) *$\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ est $\underline{f}$-plat et pour tout point rigide (Q, j) de $\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}$* (4.3.1), *il existe un point rigide (P, i) de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ tel que (Q, j) majore $(P, f^{\mathrm{rig}} \circ i)$ et que $i^*(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}) \neq 0$.*

(iii) *Pour toute immersion ouverte $V \to \mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}$, si l'on pose $U = \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}} \times_{\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}} V$, le foncteur $G \mapsto G \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}}} \mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ de la catégorie des $\mathscr{O}_V$-modules cohérents dans celle des $\mathscr{O}_U$-modules est exact et fidèle.*

L'équivalence de (i) et (ii) résulte de 5.5.8, 4.1.20, 4.3.4 et 4.8.11 ; et l'équivalence de (i) et (iii) est une conséquence de 5.5.14, 4.8.18, 4.7.11, 4.7.23 et (4.7.29.1).

5.6 Idéaux de coefficients

5.6.1. Il sera sous-entendu que les schémas formels envisagés dans cette section et les suivantes, en particulier les schémas (2.1.20), sont éléments de l'univers fixé $\mathbb{U}$ (4.1.1). On désigne par $\mathbf{Sch}$ la catégorie des schémas et par $\widehat{\mathbf{Sch}}$ la catégorie des préfaisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur $\mathbf{Sch}$. Tout schéma formel $\mathscr{S}$ définit un objet de $\widehat{\mathbf{Sch}}$ que l'on note abusivement $\mathscr{S}$. Le foncteur ainsi défini est pleinement fidèle.

5.6.2. Soient $\mathscr{S}$ un schéma formel idyllique, $\mathfrak{X}$ un $\mathscr{S}$-schéma formel, $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ deux $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules, $u\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-linéaire. On désigne par $\mathscr{E}_u$ le sous-objet de $\mathscr{S}$ dans $\widehat{\mathbf{Sch}}$ défini, pour tout schéma T, par l'ensemble des morphismes $T \to \mathscr{S}$ tels que $u \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{S}}} \mathscr{O}_T$ soit un isomorphisme.

On dit qu'un idéal cohérent $\mathscr{C}$ de $\mathscr{O}_{\mathscr{S}}$ est un *idéal de coefficients* pour u si $\mathscr{E}_u$ est représentable par le sous-schéma fermé de $\mathscr{S}$ défini par $\mathscr{C}$. Lorsqu'un tel idéal existe, il est unique. On dit alors que u admet un idéal de coefficients relativement à $\mathscr{S}$.

Le fait que u admet un idéal de coefficients relativement à $\mathscr{S}$ est une question locale pour la topologie de Zariski sur $\mathscr{S}$.

Si u admet un idéal de coefficients $\mathscr{C}$ relativement à $\mathscr{S}$, alors pour tout morphisme de schémas formels idylliques $\mathscr{S}' \to \mathscr{S}$, $\mathscr{C}\mathscr{O}_{\mathscr{S}'}$ est un idéal de coefficients pour l'homomorphisme

$$u \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}'} \colon \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}'} \to \mathscr{G} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}'}.$$

Lemme 5.6.3. *Soient $\mathscr{S}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{I}$ un idéal de définition cohérent de $\mathscr{S}$, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme adique, $u\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules ; posons $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{I})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$, $\mathscr{S}_n = (\mathscr{S}, \mathscr{O}_{\mathscr{S}}/\mathscr{I}^{n+1})$*

et soit $f_n\colon \mathfrak{X}_n \to \mathscr{S}_n$ le morphisme déduit de f. Pour que u admette un idéal de coefficients $\mathscr{C}$ relativement à $\mathscr{S}$, il faut et il suffit que $u \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n} \colon \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n} \to \mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$ admette un idéal de coefficients cohérent $\mathscr{C}_n$ relativement à $\mathscr{S}_n$, pour tout $n \geq 0$ (1.6.2). On a alors $\mathscr{C}_n = \mathscr{C}\mathscr{O}_{\mathscr{S}_n}$ pour tout $n \geq 0$.

La condition est clairement nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. En vertu de 2.9.7, comme $\mathscr{C}_n\mathscr{O}_{\mathscr{S}_m} = \mathscr{C}_m$ pour tout $m \leq n$, la limite $\mathscr{C}$ du système projectif $(\mathscr{C}_n)$ est un idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\mathscr{S}}$, vérifiant $\mathscr{C}_n = \mathscr{C}\mathscr{O}_{\mathscr{S}_n}$ pour tout $n \geq 0$. Soient $\mathscr{S}'$ le sous-schéma de $\mathscr{S}$ défini par $\mathscr{C}$, T un schéma quasi-compact, $g\colon T \to \mathscr{S}$ un morphisme. D'après 2.2.12, g se factorise à travers un morphisme $g_n\colon T \to \mathscr{S}_n$, pour un entier $n \geq 0$. On en déduit aussitôt que $u \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_T$ est un isomorphisme si et seulement si g se factorise à travers $\mathscr{S}'$.

Lemme 5.6.4. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$, $g\colon \mathscr{T} \to \mathscr{S}$ deux morphismes de schémas formels idylliques tels que f soit adique et que $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathscr{T}$ soit idyllique, $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ deux $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents, $u\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-linéaire, ayant un idéal de coefficients $\mathscr{C}$ relativement à $\mathscr{S}$. Pour que l'homomorphisme*

$$u \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{T}} \colon \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{T}} \to \mathscr{G} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{T}}$$

soit bijectif, il faut et il suffit que g se factorise à travers le sous-schéma fermé de $\mathscr{S}$ défini par $\mathscr{C}$.

La question étant locale sur $\mathscr{T}$ et sur $\mathscr{S}$, on peut se borner au cas où g est déployé (2.2.4). La conclusion résulte alors de 2.2.15, 2.8.5 et 2.8.11.

Définition 5.6.5. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme adique de schémas formels idylliques, $\mathscr{A}$ un idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$. On dit qu'un idéal cohérent $\mathscr{C}$ de $\mathscr{O}_{\mathscr{S}}$ est un *idéal de coefficients* de $\mathscr{A}$ si $\mathscr{C}$ est un idéal de coefficients pour l'homomorphisme surjectif canonique $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}$. Lorsqu'un tel idéal existe, il est unique et $\mathscr{A} \subset f^*(\mathscr{C})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ (5.6.4). On dit alors que $\mathscr{A}$ admet un idéal de coefficients relativement à f (ou à $\mathscr{S}$).

Lemme 5.6.6. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme adique de schémas formels idylliques, $\mathscr{A}$ un idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathscr{I}$ un idéal de définition cohérent de $\mathscr{S}$; posons $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{I})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$, $\mathscr{S}_n = (\mathscr{S}, \mathscr{O}_{\mathscr{S}}/\mathscr{I}^{n+1})$ et soit $f_n\colon \mathfrak{X}_n \to \mathscr{S}_n$ le morphisme déduit de f. Pour que $\mathscr{A}$ admette un idéal de coefficients $\mathscr{C}$ relativement à $\mathscr{S}$, il faut et il suffit que $\mathscr{A}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$ admette un idéal de coefficients cohérent $\mathscr{C}_n$ relativement à $\mathscr{S}_n$, pour tout $n \geq 0$ (1.6.3). On a alors $\mathscr{C}_n = \mathscr{C}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$ pour tout $n \geq 0$.*

C'est un cas particulier de 5.6.3.

Lemme 5.6.7. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathscr{S}$ deux morphismes adiques de schémas formels idylliques, $\mathscr{A}$ (resp. $\mathscr{B}$) un idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ (resp. $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$) tels que $\mathscr{A} \subset f^*(\mathscr{B})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$. Notons $u\colon \mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}$ et $v\colon \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{B}$ les homomorphismes surjectifs canoniques et $\mathscr{E}_u$ (resp. $\mathscr{E}_v$) le sous-objet de $\mathscr{S}$ dans $\widehat{\mathbf{Sch}}$ associé à u (resp. v) (5.6.2). Alors :*

(i) *$\mathscr{E}_v$ est un sous-objet de $\mathscr{E}_u$. En particulier, si $\mathscr{A}$ (resp. $\mathscr{B}$) admet un idéal de coefficients $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{D}$) relativement à $\mathscr{S}$, alors $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$.*

(ii) *Supposons que $\mathscr{B}$ soit l'idéal de coefficients de $\mathscr{A}$. Alors $\mathscr{E}_v = \mathscr{E}_u$. En particulier, pour qu'un idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\mathscr{S}}$ soit l'idéal de coefficients de $\mathscr{A}$, il faut et il suffit qu'il soit l'idéal de coefficients de $\mathscr{B}$.*

(i) C'est une conséquence immédiate de la définition (5.6.2).

(ii) Compte tenu de (i), il suffit de montrer que $\mathscr{E}_u$ est un sous-objet de $\mathscr{E}_v$. Soient T un schéma, $i \in \mathscr{E}_u(T)$, qu'on peut considérer comme un morphisme $i \colon T \to \mathscr{S}$. Posons $Z = \mathfrak{Y} \times_{\mathscr{S}} T$, qui est un schéma (2.2.12), et soit $j \colon Z \to \mathfrak{Y}$ la projection canonique. L'hypothèse entraîne que j se factorise à travers le sous-schéma de $\mathfrak{Y}$ défini par $\mathscr{B}$; par suite $i \in \mathscr{E}_v(T)$.

Lemme 5.6.8. *Soient $f \colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme adique et fidèlement plat de schémas formels idylliques, $\mathscr{C}$ un idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\mathscr{S}}$. Alors :*

(i) *$\mathscr{C}$ est l'idéal de coefficients de $f^*(\mathscr{C})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$.*

(ii) *Supposons de plus f quasi-compact. Si $\mathscr{C}$ est l'idéal de coefficients d'un idéal ouvert cohérent $\mathscr{A}$ de $\mathfrak{X}$, alors $\mathscr{C}$ est ouvert.*

(i) Cela résulte de 5.1.6, 5.6.6 et de la propriété analogue pour les schémas (1.6.4).

(ii) On peut se borner au cas où $\mathscr{S}$ est quasi-compact. Il existe alors un idéal de définition cohérent $\mathscr{I}$ de $\mathscr{S}$ tel que $f^*(\mathscr{I})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathscr{A}$. Par suite $\mathscr{I} \subset \mathscr{C}$ en vertu de (i) et 5.6.7(i).

Proposition 5.6.9. *Soient $\mathfrak{X}, \mathscr{S}$ deux schémas formels idylliques, $f \colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme quasi-compact, lisse, à fibres géométriquement intègres de dimension constante. Alors tout idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ admet un idéal de coefficients relativement à f.*

Cela résulte de 5.6.6 et de l'assertion analogue pour les schémas (1.6.7).

Proposition 5.6.10. *Soient $\mathfrak{X}, \mathscr{S}$ deux schémas formels idylliques, $f \colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme affine, lisse, à fibres géométriquement intègres de dimension constante, $\mathscr{A}$ un idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathscr{C}$ l'idéal de coefficients de $\mathscr{A}$ relativement à f* (5.6.9), *$\mathscr{L}$ un idéal localement monogène de $\mathscr{O}_{\mathscr{S}}$. Alors $\mathscr{L}\mathscr{C}$ est l'idéal de coefficients de $\mathscr{L}\mathscr{A}$.*

Cela résulte de 5.6.6 et de l'assertion analogue pour les schémas (1.6.9).

Lemme 5.6.11. *Soient A un anneau, B une A-algèbre telle que le morphisme $f \colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ soit surjectif, lisse à fibres géométriquement intègres, h un élément de B ne s'annulant sur aucune fibre de f. Alors h n'est pas un diviseur de zéro dans B.*

Considérons A comme limite inductive filtrante d'anneaux noethériens $(A_i)_{i \in I}$. Il existe alors $i \in I$, une A_i-algèbre lisse B_i et un isomorphisme de A-algèbres $B \simeq B_i \otimes_{A_i} A$ ([28] 0.6.3.13 et [31] 17.7.8). Posons $B_j = B_i \otimes_{A_i} A_j$ pour $j \geq i$. Alors B est la limite inductive des anneaux B_j, et on peut supposer $h \in B_i$.

Montrons que l'on peut supposer que pour tout $j \geq i$, le morphisme $f_j\colon \mathrm{Spec}(B_j) \to \mathrm{Spec}(A_j)$ est surjectif à fibres géométriquement intègres et que h ne s'annule sur aucune fibre de f_j. Soit E_j l'ensemble des $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A_j)$ tels que $\mathrm{Spec}(B_j \otimes_{A_j} \kappa(\mathfrak{p}))$ soit géométriquement intègre. On sait que E_j est constructible dans $\mathrm{Spec}(A_j)$ ([31] 9.7.7), et par suite globalement constructible car A_j est noethérien[2]. Pour tout $j \geq i$, E_j est l'image inverse de E_i dans $\mathrm{Spec}(A_j)$. Par hypothèse, l'image inverse de E_i dans $\mathrm{Spec}(A)$ est égale à $\mathrm{Spec}(A)$. Donc en vertu de ([31] 8.3.5), il existe $i_1 \geq i$ tel que $E_j = \mathrm{Spec}(A_j)$ pour tout $j \geq i_1$. De même, comme les morphismes f_j sont ouverts et que les anneaux A_j sont noethériens, on montre qu'il existe $i_2 \geq i$ tel que $f_j(\mathrm{Spec}(B_j) - \mathrm{V}(h)) = \mathrm{Spec}(A_j)$ pour tout $j \geq i_2$, ce qui implique que f_j est surjectif et que h ne s'annule sur aucune fibre de f_j.

Pour montrer que h n'est pas diviseur de zéro dans B, il suffit de montrer qu'il n'est pas diviseur de zéro dans B_j pour tout $j \geq i$. Donc compte tenu de ce qui précède, on peut se borner au cas où A est noethérien. En vertu de ([31] 3.3.1), on a

$$\mathrm{Ass}(B) = \cup_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}(A)} \mathrm{Ass}(B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})).$$

Par suite, les idéaux associés de B sont des points génériques de fibres de f, d'où la conclusion ([12] chap. IV §1.1 cor. 3 de la prop. 2).

Théorème 5.6.12 ([9] 2.4). *Soient A un anneau idyllique, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B)$, $\mathscr{S} = \mathrm{Spf}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(B)$, $S = \mathrm{Spec}(A)$, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$, $g\colon X \to S$ les morphismes canoniques. Supposons f lisse, à fibres géométriquement intègres de dimension constante. Alors g est ouvert, fidèlement plat, à fibres géométriquement intègres.*

On notera que, g n'étant pas en général de présentation finie, il ne suffit pas de montrer qu'il est fidèlement plat pour déduire qu'il est ouvert ([31] 2.4.6 et 2.4.8).

Soit J un idéal de définition de type fini de A. Posons $A_n = A/J^{n+1}$, $B_n = B \otimes_A A_n$ $(n \geq 0)$ et soit $f_n\colon \mathrm{Spec}(B_n) \to \mathrm{Spec}(A_n)$ le morphisme déduit de f. Rappelons que f et f_n ont mêmes fibres (2.3.27). Pour $h \in B$, on désigne par $\mathscr{C}(h)$ l'idéal de coefficients de hB relativement à A (5.6.9). On notera que $h = 0$ si et seulement si $\mathscr{C}(h) = 0$.

Nous aurons besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 5.6.12.1.

(i) *Si h est un élément de B ne s'annulant sur aucune fibre de f_0, alors h n'est pas un diviseur de zéro dans B.*

(ii) *Soient $h, h' \in B$ tels que h ne s'annule sur aucune fibre de f_0. Alors $\mathscr{C}(hh') = \mathscr{C}(h')$.*

(iii) *Soient $h, h' \in B$ tels que $\mathscr{C}(h)$ soit monogène. Alors $\mathscr{C}(hh') = \mathscr{C}(h)\mathscr{C}(h')$.*

[2]Nous utilisons pour la notion de constructibilité la terminologie de ([28] 0.2.3) qui diffère de celle utilisée dans [31].

(i) En vertu de 5.6.11, h n'est pas un diviseur de zéro dans B_n pour tout $n \geq 0$. Par suite h n'est pas un diviseur de zéro dans B, car B est séparé pour la topologie JB-adique.

(ii) La relation $h'h \in \mathscr{C}(h')B$ entraîne que $\mathscr{C}(hh') \subset \mathscr{C}(h')$ car f est fidèlement plat (5.6.8). Pour établir l'inclusion inverse, la formation des idéaux de coefficients étant compatible à tout changement de base (5.6.2), on se ramène aussitôt au cas où $\mathscr{C}(hh') = 0$; d'où $hh' = 0$. Par suite $h' = 0$ en vertu de (i), ce qui entraîne que $\mathscr{C}(h') = 0$ et achève la preuve.

(iii) Il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $\mathscr{C}(h) = aA$ et $h = ab$. La relation $hh' \in \mathscr{C}(h)\mathscr{C}(h')B$ entraîne que $\mathscr{C}(hh') \subset \mathscr{C}(h)\mathscr{C}(h')$ car f est fidèlement plat (5.6.8). Pour établir l'égalité, il suffit de montrer que pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, on a $\mathscr{C}(hh')A_{\mathfrak{m}} = \mathscr{C}(h)\mathscr{C}(h')A_{\mathfrak{m}}$. On peut supposer $\mathscr{C}(h)\mathscr{C}(h')A_{\mathfrak{m}} \neq 0$. On notera que $J \subset \mathfrak{m}$. Si b s'annule sur la fibre de f_0 au-dessus de $\mathfrak{m}$, alors $h \in a\mathfrak{m}B$, et par suite $\mathscr{C}(h) \subset a\mathfrak{m}$. En effet, il suffit d'appliquer 5.6.8 à l'idéal aI, où I est un idéal de type fini de A tel que $I \subset \mathfrak{m}$ et $h \in aIB$. Mais la relation $aA = \mathscr{C}(h) \subset a\mathfrak{m}$ contredit l'hypothèse $aA_{\mathfrak{m}} \neq 0$. On conclut que b ne s'annule pas sur la fibre de f_0 au-dessus de $\mathfrak{m}$. Comme f_0 est ouvert, b ne s'annule sur aucune des fibres de f_0 au-dessus d'un voisinage de $\mathfrak{m}$. En vertu de (ii) et 5.6.10, on en déduit les égalités

$$\mathscr{C}(hh') = \mathscr{C}(abh') = \mathscr{C}(ah') = a\mathscr{C}(h') = \mathscr{C}(h)\mathscr{C}(h')$$

sur un voisinage ouvert de $\mathfrak{m}$ dans $\mathrm{Spf}(A)$. D'où $\mathscr{C}(hh')A_{\mathfrak{m}} = \mathscr{C}(h)\mathscr{C}(h')A_{\mathfrak{m}}$ par 1.8.13 et le lemme de Nakayama.

Lemme 5.6.12.2. *Si A est intègre et rig-pur, alors B est intègre.*

Il suffit de montrer que pour tous éléments non nuls $h_1, h_2 \in B$, $\mathscr{C}(h_1h_2) \neq 0$. Soit S_{g} l'ouvert $S - \mathrm{V}(J)$ de S. Il existe alors un point fermé $\mathfrak{q}$ de S_{g} tel que $\mathscr{C}(h_i) \not\subset \mathfrak{q}$ pour $i = 1, 2$. En effet, si tous les points fermés de S_{g} appartiennent à $\mathrm{V}(\mathscr{C}(h_1)\mathscr{C}(h_2))$, alors $S_{\mathrm{g}} \subset \mathrm{V}(\mathscr{C}(h_1)\mathscr{C}(h_2))$ car S_{g} est un schéma de Jacobson (1.11.9) ; par suite, $\mathrm{V}(\mathscr{C}(h_1)\mathscr{C}(h_2)) = S$ puisque S_{g} est schématiquement dense dans S (1.8.30.2), ce qui est impossible car A est intègre. Soit R la normalisation de $A/\mathfrak{q}$, qui est un anneau 1-valuatif (1.11.8 et 1.11.4). Il suffit de montrer que $\mathscr{C}(h_1h_2)R \neq 0$. Comme la formation des idéaux de coefficients est compatible à tout changement de base (5.6.2), notre assertion résulte de 5.6.12.1(iii).

5.6.12.3. Revenons maintenant à la démonstration de 5.6.12. La fidèle platitude de g résulte de 1.12.4. Montrons que pour tout $\mathfrak{q} \in S$, $X \otimes_S \kappa(\mathfrak{q})$ est géométriquement intègre. Compte tenu des hypothèses, on peut se borner au cas où $\mathfrak{q}$ n'est pas ouvert ; donc $\mathfrak{q}$ est cohérent (1.10.3). Remplaçant f par le morphisme $\mathrm{Spf}(B/\mathfrak{q}B) \to \mathrm{Spf}(A/\mathfrak{q})$, on se réduit au cas où A est intègre et $\mathfrak{q} = 0$; en particulier, A est rig-pur. Soient $k = \kappa(0)$ le corps des fractions de A, k' une extension finie de k, A' une extension de A engendrée par une base de k' sur k, formée d'éléments entiers sur A ([12] chap. V §1.5 cor. 2 de prop. 16). Alors A' est fini sur A, séparé et complet pour la topologie J-adique (1.10.2), et idyllique. En effet, si A est topologiquement de présentation finie sur un anneau 1-valuatif R, alors

A' est topologiquement de type fini sur R et R-plat (1.9.12), donc idyllique en vertu de 1.9.16. Par suite, $B\widehat{\otimes}_A A' \simeq B \otimes_A A'$. Appliquant 5.6.12.2 au morphisme $\mathrm{Spf}(B \otimes_A A') \to \mathrm{Spf}(A')$, on en déduit que $X \otimes_S k'$ est intègre.

Montrons que g est ouvert. Pour $h \in B$ et $\mathfrak{q} \in S$, on a l'équivalence $\mathscr{C}(h) \subset \mathfrak{q} \Leftrightarrow h \in \mathfrak{q}B$. En effet, si $\mathscr{C}(h) \subset \mathfrak{q}$, alors $h \in \mathscr{C}(h)B \subset \mathfrak{q}B$. Inversement, il suffit d'appliquer 5.6.8 à un idéal de type fini I de A tel que $I \subset \mathfrak{q}$ et $h \in IB$. Par ailleurs, il résulte des propriétés déjà démontrées que $\mathfrak{q}B$ est un idéal premier de B, correspondant au point générique de $X \otimes_S \kappa(\mathfrak{q})$. On en déduit que pour tous $\mathfrak{p} \in X$ et $h \in B$ tels que $\mathfrak{p} \in \mathrm{D}(h)$, on a

$$g(\mathfrak{p}) \in (S - \mathrm{V}(\mathscr{C}(h))) \subset g(\mathrm{D}(h)),$$

ce qui nous prouve que g est ouvert.

Proposition 5.6.13 ([9] 2.5). *Les hypothèses étant celles de* (5.6.12)*, supposons de plus A rig-pur. Soit Z un sous-schéma fermé de X, défini par un idéal ouvert de type fini $\mathfrak{b}$ de B, tel que l'ouvert complémentaire dans X se projette sur S. Alors $\mathscr{O}_X$ est Z-clos* ([31] 5.9.9)*.*

Soient W l'ouvert complémentaire de Z dans X, $i\colon W \to X$ l'injection canonique. Dire que $\mathscr{O}_X$ est Z-clos, c'est dire que le morphisme canonique $\mathscr{O}_X \to i_*i^*(\mathscr{O}_X)$ est un isomorphisme. Par hypothèse, i est quasi-compact. Donc $i_*i^*(\mathscr{O}_X)$ est un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent, et il suffit de montrer que le morphisme canonique $u\colon B \to \Gamma(W, \mathscr{O}_X)$ est bijectif.

Supposons d'abord A noethérien ; donc B est aussi noethérien. Soit $x \in Z$, s son image dans S. Comme A est rig-pur, on a $\mathrm{prof}(\mathscr{O}_{S,s}) \geq 1$ (1.8.30.2 et [31] 0.16.4.6). De même, comme x n'est pas le point générique de $X \otimes_S \kappa(s)$, on a $\mathrm{prof}(\mathscr{O}_{X,x} \otimes \kappa(s)) \geq 1$. On en déduit que $\mathrm{prof}(\mathscr{O}_{X,x}) \geq 2$ ([31] 6.3.1), et donc $\mathscr{O}_X$ est Z-clos ([31] 5.10.5).

Supposons ensuite que A soit topologiquement de présentation finie sur un anneau 1-valuatif R. Soient t un élément non nul de l'idéal maximal de R, $X_{\mathrm{g}} = \mathrm{Spec}(B_t)$. Comme B est A-plat, il est rig-pur, et X_{g} est schématiquement dense dans X (1.8.30.2). Par ailleurs, W contient X_{g} ; donc les morphismes de restriction

$$B \xrightarrow{u} \Gamma(W, \mathscr{O}_X) \longrightarrow \Gamma(X_{\mathrm{g}}, \mathscr{O}_X)$$

sont injectifs. Soit $h \in \Gamma(W, \mathscr{O}_X)$. Il existe $b \in B$ et un élément $\pi \neq 0$ de l'idéal maximal de R, tels que $b = \pi h$. Posons $\mathfrak{X}_0 = \mathrm{Spec}(B/\pi B)$ et $\mathscr{S}_0 = \mathrm{Spec}(A/\pi A)$. Le morphisme $\mathfrak{X}_0 \to \mathscr{S}_0$ étant plat de présentation finie, on a, d'après ([42] 3.4.3),

$$\mathrm{Ass}(\mathfrak{X}_0) = \cup_{s \in \mathscr{S}_0} \mathrm{Ass}(\mathfrak{X} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s)).$$

Donc $\mathrm{Ass}(\mathfrak{X}_0) \subset W \cap \mathfrak{X}_0$, ce qui entraîne que $W \cap \mathfrak{X}_0$ est schématiquement dense dans $\mathfrak{X}_0$ (1.5.5.5). Par suite, le morphisme $B/\pi B \to \Gamma(W \cap \mathfrak{X}_0, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_0})$ est injectif. On en déduit que $b \in \pi B$ et $h \in B$, car π n'est pas un diviseur de zéro dans B, ce qui achève la démonstration.

5.7 Platification par éclatements admissibles dans un cas particulier

Définition 5.7.1. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme de présentation finie de schémas formels idylliques, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, n un entier. On dit que $\mathscr{F}$ est $\mathscr{S}$-plat en dimension $\geq n$, s'il existe un ouvert U de $\mathfrak{X}$ tel que $\dim((\mathfrak{X} - U)/\mathscr{S}) < n$ et que $\mathscr{F}|U$ soit $\mathscr{S}$-plat.

Définition 5.7.2. Soient $\mathscr{S}$ un schéma formel idyllique, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme affine, lisse, à fibres géométriquement intègres de dimension n, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. On dit que $\mathscr{F}$ est rig-f-plat en dimension $\geq n$, si pour tout point rigide $\mathscr{Q}$ de $\mathscr{S}$, il existe un point rigide $\mathscr{P}$ de $\mathfrak{X}$ tel que $f(\mathscr{P}) = \mathscr{Q}$ et que $\mathscr{F}$ soit rig-f-plat en $\mathscr{P}$.

5.7.3. Soient A un anneau idyllique, J un idéal de définition de type fini de A, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie, M un B-module cohérent, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B)$, $\mathscr{F} = M^{\Delta}$, $\mathscr{S} = \mathrm{Spf}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(B)$, $\mathscr{M} = \widetilde{M}$, $S = \mathrm{Spec}(A)$, S_{g} l'ouvert $S - \mathrm{V}(J)$ de S. Supposons le morphisme canonique $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ lisse à fibres géométriquement intègres de dimension n. Alors, d'après 5.6.12, le morphisme canonique $g\colon X \to S$ est ouvert, fidèlement plat, à fibres géométriquement intègres. Soient $s \in S$, x le point générique de $X \otimes_S \kappa(s)$. Comme l'anneau local $\mathscr{O}_x \otimes_{\mathscr{O}_s} \kappa(s)$ de $X \otimes_S \kappa(s)$ en x est un corps, on peut poser

$$r(s) = \mathrm{rang}_{\mathscr{O}_x \otimes_{\mathscr{O}_s} \kappa(s)}(\mathscr{M}_x \otimes_{\mathscr{O}_s} \kappa(s)). \tag{5.7.3.1}$$

On note E l'ensemble des $s \in S$ pour lesquels $\mathscr{M}_x$ est libre de rang $r(s)$ sur $\mathscr{O}_x$.

Lemme 5.7.3.2. *Soient $\mathscr{P}$ un point rigide de $\mathfrak{X}$ d'image fermée dans $\mathscr{S}$, s le point fermé de S_{g} associé à $f(\mathscr{P})$* (3.3.2)*.*

(i) *L'ensemble E est ouvert dans S, et la fonction $r(s)$ est localement constante sur E.*
(ii) *Si $\mathscr{F}$ est rig-f-plat en $\mathscr{P}$, alors $s \in E$.*
(iii) *Si $\mathscr{F} \otimes_{\mathfrak{X}} \mathscr{O}_{\mathscr{P}}$ est rig-nul* (2.10.1.4)*, alors $s \in E$ et $r(s) = 0$.*
(iv) *Si $\mathscr{F}$ est rig-f-plat en dimension $\geq n$, alors S_{g} est contenu dans E.*

(i) En effet, pour tout $s \in E$, il existe un ouvert U de X, tel que $s \in g(U)$ et $\mathscr{M}|U$ soit localement libre de rang $r(s)$. Alors $g(U)$ est un ouvert de S (5.6.12), contenu dans E, et la fonction $r(t)$ pour $t \in g(U)$ est constante de valeur $r(s)$.

(ii) On notera que $\mathscr{P}$ est fermé dans $\mathfrak{X}$ (1.11.5 et [29] 5.4.3) et le point $t \in X$ qui lui est associé est au-dessus de s. Soit x le point générique de $X \otimes_S \kappa(s)$. Par hypothèse, $\mathscr{M}_t$ est $\mathscr{O}_s$-plat ; donc $\mathscr{M}_x = \mathscr{M}_t \otimes_{\mathscr{O}_t} \mathscr{O}_x$ est $\mathscr{O}_s$-plat. Comme $\mathscr{O}_x \otimes_{\mathscr{O}_s} \kappa(s)$ est un corps, $\mathscr{M}_x \otimes_{\mathscr{O}_s} \kappa(s)$ est plat sur $\mathscr{O}_x \otimes_{\mathscr{O}_s} \kappa(s)$. Par ailleurs, $\mathscr{O}_x$ est noethérien (1.10.2) et $\mathscr{O}_s$-plat. Il en résulte par ([12] chap. III §5.4 prop. 3) que $\mathscr{M}_x$ est libre sur $\mathscr{O}_x$.

(iii) Cela résulte aussitôt de la preuve de (ii) et du fait que $\mathscr{M}_t = 0$ (5.4.5.4).

(iv) En effet, $S_{\mathrm{g}} \cap E$ est un ouvert de S_{g} contenant tous les points fermés (3.3.2), il est donc égal à S_{g}.

5.7.3.3. Soient $\phi\colon S' \to S$ un morphisme de type fini, $X' = X \times_S S'$, $\mathscr{M}' = \mathscr{M} \otimes_S \mathscr{O}_{S'}$, V' un ouvert de S'. L'introduction de S' a une raison technique pour la suite. Supposons que les conditions suivantes soient remplies :

(a) $\mathscr{F}$ est rig-f-plat en dimension $\geq n$; en particulier, $S_{\mathrm{g}} \subset E$ (5.7.3.2).

(b) $\phi^{-1}(S_{\mathrm{g}}) \subset V' \subset \phi^{-1}(E)$ et la fonction $r \circ \phi$ est constante de valeur r sur V'.

Soient $\mathrm{F}_r(M)$ le r-ième idéal de Fitting de M (1.7.2), $\mathfrak{c}$ l'idéal cohérent de A tel que $\mathfrak{c}^{\Delta}$ soit l'idéal de coefficients de $\mathrm{F}_r(M)^{\Delta}$ relativement à $\mathscr{S}$ (5.6.9), $\mathscr{C}' = \mathfrak{c}\mathscr{O}_{S'}$. On notera qu'on a $\mathrm{F}_r(\mathscr{M}') = \mathrm{F}_r(M)\mathscr{O}_{X'}$, et par suite $\mathrm{F}_r(\mathscr{M}') \subset \mathscr{C}'\mathscr{O}_{X'}$.

Lemme 5.7.3.4. $\mathrm{V}(\mathscr{C}') \cap V' = \emptyset$.

Soient $s' \in V'$, $s = \phi(s')$, x le point générique de $X \otimes_S \kappa(s)$. Si on note $\mathfrak{q}$ l'idéal premier de A associé à s, alors $\xi = \mathfrak{q}B$ est l'idéal premier de B associé à x (5.6.12). Comme $s \in E$ et $r(s) = r$, alors $\mathrm{F}_r(M)_\xi = B_\xi$. Si $s' \in \mathrm{V}(\mathscr{C}')$, alors $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{q}$; donc $\mathrm{F}_r(M) \subset \mathfrak{c}B \subset \mathfrak{q}B$ et $\mathfrak{q}B_\xi = B_\xi$, ce qui est impossible, d'où l'assertion.

Lemme 5.7.3.5. *Les hypothèses étant celles de* (5.7.3.3)*, supposons de plus l'ouvert $\phi^{-1}(S_{\mathrm{g}})$ schématiquement dense dans S' et $\mathscr{C}'$ inversible sur S' ; donc $\mathscr{C}'\mathscr{O}_{X'}$ est inversible sur X'. Soient $\mathscr{B}'$ l'idéal $(\mathscr{C}'\mathscr{O}_{X'})^{-1}\mathrm{F}_r(\mathscr{M}')$ de $\mathscr{O}_{X'}$, W' l'ouvert complémentaire de $\mathrm{V}(\mathscr{B}')$ dans X'. Alors le quotient $\mathscr{M}'/\mathrm{Ann}_{\mathscr{M}'}(\mathscr{C}'\mathscr{O}_{X'})$ est localement libre de rang r sur W'.*

Il suffit d'appliquer 1.7.5, en prenant pour f la projection canonique $g'\colon X' \to S'$, pour $\mathscr{F}$ le module $\mathscr{M}'$, pour $\mathscr{J}$ l'idéal $J\mathscr{O}_{S'}$, et pour $\mathscr{C}$ l'idéal $\mathscr{C}'$ (cf. 5.6.12 et 1.10.2).

Lemme 5.7.3.6. *Les hypothèses étant celles de* (5.7.3.3) *et* (5.7.3.5)*, supposons de plus que ϕ soit de présentation finie. Posons $S'_0 = \mathrm{V}(J\mathscr{O}_{S'})$, $X'_0 = \mathrm{V}(J\mathscr{O}_{X'})$, $\mathscr{S}' = S'_{/S'_0}$, $\mathfrak{X}' = X'_{/X'_0}$ et $\mathscr{F}' = \mathscr{M}'_{/X'_0}$; donc $\mathfrak{X}'$ et $\mathscr{S}'$ sont idylliques, $\mathfrak{X}' \simeq \mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathscr{S}'$ et $\mathscr{F}' \simeq \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}'}$* (2.5.11)*. Alors l'ouvert $W' \cap \mathfrak{X}'$ se projette sur $\mathscr{S}'$, et le transformé strict* (2.10.1.4) *de $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}'}$ est localement libre de rang r sur $W' \cap \mathfrak{X}'$.*

Notons d'abord que $\mathscr{S}'$ est rig-pur. En effet, on peut supposer S' affine d'anneau A'. Soit $\widehat{A}'$ le séparé complété de A' pour la topologie J-adique. Comme A' est J-pur (1.8.30.2) et que $\widehat{A}'$ est A'-plat (1.12.17), $\widehat{A}'$ est J-pur.

On a $\mathscr{C}'_{/S'_0} = \mathscr{C}'\mathscr{O}_{\mathscr{S}'}$ et $(\mathscr{C}'\mathscr{O}_{X'})_{/X'_0} = \mathscr{C}'\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$ (2.5.5). D'autre part, les anneaux $\mathscr{O}_{X'}$ et $\mathscr{O}_{S'}$ sont cohérents (2.6.18) ; en particulier, $\mathscr{C}'\mathscr{O}_{X'}$ et $\mathscr{M}'$ sont des $\mathscr{O}_{X'}$-modules cohérents. Donc le noyau $\mathrm{Ann}_{\mathscr{F}'}(\mathscr{C}'\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'})$ de l'homomorphisme canonique

$$\mathscr{F}' \to \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}}(\mathscr{C}'\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}, \mathscr{F}')$$

s'identifie au complété de $\mathrm{Ann}_{\mathscr{M}'}(\mathscr{C}'\mathscr{O}_{X'})$ le long de X' (2.5.5 et 2.6.20). Il résulte alors de 5.7.3.5 que $\mathscr{F}'/\mathrm{Ann}_{\mathscr{F}'}(\mathscr{C}'\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'})$ est localement libre de rang r sur $W' \cap \mathfrak{X}'$

(2.8.9). Comme $\mathscr{C}'\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$ est ouvert (5.7.3.4), $\mathrm{Ann}_{\mathscr{F}'}(\mathscr{C}'\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}) \subset \mathscr{F}'_{\mathrm{tor}}$ (2.10.13) ; et comme $\mathscr{F}'/\mathrm{Ann}_{\mathscr{F}'}(\mathscr{C}'\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'})$ est rig-pur sur $W' \cap \mathfrak{X}'$ (5.1.13), $\mathscr{F}'/\mathrm{Ann}_{\mathscr{F}'}(\mathscr{C}'\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'})$ coïncide avec le transformé strict de $\mathscr{F}'$ au-dessus de $W' \cap \mathfrak{X}'$, d'où la seconde assertion du lemme.

D'une part, $\mathscr{C}'\mathscr{O}_{\mathscr{S}'} = \mathfrak{c}\mathscr{O}_{\mathscr{S}'}$ est l'idéal de coefficients de $\mathrm{F}_r(\mathscr{M}')_{/X'_0} = \mathrm{F}_r(M)\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$ relativement à $\mathscr{S}'$ (5.6.2). D'autre part, $\mathscr{C}'\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$ est inversible (2.8.9) et $\mathscr{B}'_{/X'_0} = (\mathscr{C}'\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'})^{-1}\mathrm{F}_r(\mathscr{M}')_{/X'_0}$ (2.5.6). Il résulte alors de 5.6.10 que $\mathscr{O}_{\mathscr{S}'}$ est l'idéal de coefficients de $\mathscr{B}'_{/X'_0}$ relativement à $\mathscr{S}'$; donc $\mathscr{O}_{S'_0}$ est l'idéal de coefficients de $\mathscr{B}'\mathscr{O}_{X'_0}$ relativement à S'_0 (5.6.6). Cela implique aussitôt que $W' \cap \mathfrak{X}'$ se projette sur $\mathscr{S}'$, d'où la première assertion du lemme.

Théorème 5.7.4. *Soient $\mathscr{S}$ un schéma formel idyllique rig-pur et quasi-compact, U un ouvert de $\mathscr{S}$, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme affine, lisse, à fibres géométriquement intègres de dimension n, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, $\mathscr{S}$-plat en dimension $\geq n$ au-dessus de U, et rig-f-plat en dimension $\geq n$. Alors, il existe un éclatement admissible et U-admissible* (3.1.2) *$\varphi\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ tel que le transformé strict* (2.10.1.4) *de $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}'}$ soit $\mathscr{S}'$-plat en dimension $\geq n$.*

On notera que φ est de présentation finie et $\mathscr{S}'$ est rig-pur (3.1.4). La sous-catégorie des éclatements admissibles et U-admissibles de $\mathscr{S}$ qui répondent à la question est un crible (2.10.12 et 5.1.13). Il est donc loisible de remplacer $\mathscr{S}$ par un recouvrement ouvert fini (3.1.8 et 3.1.17(ii)). On peut alors se borner au cas où $\mathscr{S}$ est formel affine globalement idyllique et rig-pur. On reprend dans la suite de la preuve sans mention explicite les notations de (5.7.3). On a alors $S_{\mathrm{g}} \subset E$ en vertu de 5.7.3.2(iv), et $U \subset E$ en vertu de 5.3.6, 2.6.9(i) et (2.7.6.2).

Comme U est quasi-compact (2.6.6), il existe un idéal ouvert de type fini $\mathfrak{J}$ de A tel que U soit le complémentaire de $\mathrm{V}(\mathfrak{J})$ dans $\mathscr{S}$. Soit V l'ouvert $S - \mathrm{V}(\mathfrak{J})$, de sorte que $S_{\mathrm{g}} \subset V$ et $U = V \cap \mathrm{V}(J)$; donc V est contenu dans E. En vertu de 5.7.3.2(i), il existe une partition finie (V_i) de V en ouverts telle que $r(s)$ soit une fonction constante de valeur r_i pour $s \in V_i$. Soient $\mathrm{F}_{r_i}(M)$ le r_i-ième idéal de Fitting de M, $\mathfrak{c}_i$ l'idéal cohérent de A tel que $\mathfrak{c}_i^{\Delta}$ soit l'idéal de coefficients de $\mathrm{F}_{r_i}(M)^{\Delta}$ relativement à $\mathscr{S}$ (5.6.9). D'après ([42] 5.1.5), il existe un éclatement V-admissible $\phi\colon S' \to S$ et une partition (S'_i) de S' en ouverts tels que $\phi^{-1}(V_i) = \phi^{-1}(V) \cap S'_i$ pour tout i. Posons $V' = \phi^{-1}(V)$, $V'_i = \phi^{-1}(V_i)$, $\mathscr{C}'_i = \mathfrak{c}_i\mathscr{O}_{S'_i}$ et soit $\phi_i\colon S'_i \to S$ la restriction de ϕ. On a alors $\mathrm{V}(\mathscr{C}'_i) \cap V'_i = \emptyset$ (5.7.3.4). Quitte à faire éclater $\mathscr{C}'_i$ dans S'_i, on peut supposer $\mathscr{C}'_i$ inversible sur S'_i pour tout i. On notera que le nouveau morphisme $\phi\colon S' \to S$ est toujours un éclatement V-admissible (1.13.5) ; en particulier, ϕ est l'éclatement d'un idéal ouvert de type fini de A ([28] 6.8.4). Comme A est rig-pur, S_{g} est schématiquement dense dans S (1.8.30.2) et ϕ est de présentation finie (1.13.3). Comme $S_{\mathrm{g}} \subset V$, par transitivité des images schématiques ([28] 6.10.3), $\phi^{-1}(S_{\mathrm{g}})$ est schématiquement dense dans S'. Donc les conditions de 5.7.3.6 sont remplies par chacun des ϕ_i, et le théorème s'ensuit.

Proposition 5.7.5. *Soient $\mathscr{S}$ un schéma formel idyllique rig-pur et quasi-compact, U un ouvert de $\mathscr{S}$, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme affine, lisse, à fibres géométrique-*

ment intègres de dimension n, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent vérifiant les conditions suivantes :

(i) $\dim(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_U/U) < n$.

(ii) *Pour tout point rigide $\mathscr{Q}$ de $\mathscr{S}$, il existe un point rigide $\mathscr{P}$ de $\mathfrak{X}$ tel que $f(\mathscr{P}) = \mathscr{Q}$ et que $\mathscr{F} \otimes_{\mathfrak{X}} \mathscr{O}_{\mathscr{P}}$ soit rig-nul* (2.10.1.4) *; en particulier, $\mathscr{F}$ est rig-f-plat en dimension $\geq n$* (5.4.5.4).

Alors, il existe un éclatement admissible et U-admissible $\varphi\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ tel que, si $\overline{\mathscr{F}}'$ est le transformé strict de $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}'}$, on ait $\dim(\overline{\mathscr{F}}'/\mathscr{S}') < n$.

La démonstration est similaire à celle de 5.7.4. On peut clairement se borner au cas où $\mathscr{S}$ est formel affine globalement idyllique et rig-pur. On reprend dans la suite de la preuve sans mention explicite les notations de (5.7.3). On a alors $U \cup S_{\mathrm{g}} \subset E$ et la fonction $r(s)$ est nulle sur $U \cup S_{\mathrm{g}}$ en vertu de 5.7.3.2. Comme U est quasi-compact (2.6.6), il existe un idéal ouvert de type fini $\mathfrak{J}$ de A tel que U soit le complémentaire de $\mathrm{V}(\mathfrak{J})$ dans $\mathscr{S}$. Soit V l'ouvert $S - \mathrm{V}(\mathfrak{J})$, de sorte que $S_{\mathrm{g}} \subset V$ et $U = V \cap \mathrm{V}(J)$; donc $V \subset E$ et la fonction $r(s)$ est nulle sur V. Soient $\mathrm{F}_0(M)$ le 0-ième idéal de Fitting de M, $\mathfrak{c}$ l'idéal cohérent de A tel que $\mathfrak{c}^{\triangle}$ soit l'idéal de coefficients de $\mathrm{F}_0(M)^{\triangle}$ relativement à $\mathscr{S}$ (5.6.9), $\phi\colon S' \to S$ l'éclatement de $\mathfrak{c}$ dans S. Comme $\mathrm{V}(\mathfrak{c}) \cap V = \emptyset$ (5.7.3.4), $\mathfrak{c}$ est un idéal ouvert de type fini de A ([28] 6.8.4). Comme A est rig-pur, ϕ est de présentation finie (1.13.3), et par transitivité des images schématiques, $\phi^{-1}(S_{\mathrm{g}})$ est schématiquement dense dans S'. Donc les conditions de 5.7.3.6 sont remplies, et la proposition s'ensuit.

5.8 Platification par éclatements admissibles

Le théorème suivant est une version formelle d'un résultat de Raynaud-Gruson, établi initialement dans le cadre algébrique ([42] 5.2.2).

Théorème 5.8.1. *Soient $\mathscr{S}$ un schéma formel idyllique quasi-compact, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme de présentation finie, U un ouvert de $\mathscr{S}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent rig-$f$-plat. Supposons vérifiée l'une des conditions suivantes :*

(i) *$\mathscr{S}$ est rig-pur et $\mathscr{F}$ est $\mathscr{S}$-plat au-dessus de U.*

(ii) *$U = \emptyset$.*

Alors, il existe un éclatement admissible, U-admissible et de présentation finie $\varphi\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ tel que le transformé strict (2.10.1.4) *de $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}'}$ soit $\mathscr{S}'$-plat.*

Corollaire 5.8.2. *Soient $\mathscr{S}$ un schéma formel idyllique quasi-compact, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme de présentation finie et rig-plat, U un ouvert de $\mathscr{S}$. Supposons vérifiée l'une des conditions suivantes :*

(i) *$\mathscr{S}$ est rig-pur et f est plat au-dessus de U.*

(ii) *$U = \emptyset$.*

Alors, il existe un éclatement admissible, U-admissible et de présentation finie $\varphi\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ tel que le transformé strict (2.10.16) *de $\mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathscr{S}'$ soit $\mathscr{S}'$-plat.*

Nous établirons le lemme technique suivant :

Lemme 5.8.3. *Soient $\mathscr{S}$ un schéma formel idyllique, rig-pur et quasi-compact, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme de présentation finie, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, n un entier ≥ 0, U un ouvert de $\mathscr{S}$, $\varphi\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ un éclatement admissible, $U' = \varphi^{-1}(U)$. On suppose vérifiées les hypothèses suivantes :*

(i) *$\mathscr{F}$ est rig-f-plat, et $\mathscr{S}$-plat en dimension $\geq n+1$ (5.7.1).*

(ii) *Le transformé strict de $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}'}$ est $\mathscr{S}'$-plat en dimension $\geq n$ au-dessus de U'.*

(iii) *$U \neq \mathscr{S}$.*

Alors, il existe un ouvert W de $\mathscr{S}$, strictement plus grand que U et un éclatement admissible et U'-admissible $\varphi'\colon \mathscr{S}'' \to \mathscr{S}'$ tels que le transformé strict de $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}''}$ soit plat en dimension $\geq n$, au-dessus de l'image réciproque W'' de W dans $\mathscr{S}''$.

On notera que φ et φ' sont de présentation finie (3.1.4).

5.8.4. Montrons d'abord comment le lemme entraîne le théorème. Il est loisible de remplacer $\mathscr{S}$ par un éclatement admissible, U-admissible et de présentation finie $\mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ et $\mathscr{F}$ par le transformé strict de $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}'}$ (2.10.12, 3.1.4(ii), 3.1.14, 5.1.13, 5.4.15 et 5.4.5.2) ; en particulier, on peut se borner au cas où la condition (i) est remplie. Il suffit de montrer que pour tout entier n, il existe un éclatement admissible et U-admissible $\mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ tel que le transformé strict de $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}'}$ soit $\mathscr{S}'$-plat en dimension $\geq n$. L'assertion est évidente pour $n > \dim(\mathfrak{X}/\mathscr{S})$. Raisonnons par récurrence décroissante sur n ; on peut supposer que $\mathscr{F}$ est $\mathscr{S}$-plat en dimension $\geq n+1$. Soit E la famille des ouverts V de $\mathscr{S}$, contenant U, tels que l'assertion soit vraie pour la restriction de la situation au-dessus de V. Alors E est non vide car $U \in E$ (5.1.13). Comme l'espace topologique sous-jacent à $\mathscr{S}$ est noethérien (2.6.6), E possède un élément maximal V_0. Le lemme 5.8.3 (appliqué avec $U = V_0$) entraîne, compte tenu de 3.1.8 et 3.1.14, que $V_0 = \mathscr{S}$.

5.8.5. Revenons maintenant à la démonstration de 5.8.3. Soit s un point maximal de $\mathscr{S} - U$. On peut trouver un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{Y} \arrow[r] & \mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \widetilde{\mathscr{S}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{X} \arrow[d] \\ & \widetilde{\mathscr{S}} \arrow[r] & \mathscr{S} \end{tikzcd}$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

(a) $\widetilde{\mathscr{S}}$ possède un unique point $\widetilde{s}$ au-dessus de s, et $(\widetilde{\mathscr{S}}, \widetilde{s})$ est un voisinage étale élémentaire affine de $(\mathscr{S}, s)$.

(b) Le morphisme $\mathfrak{Y} \to \mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \widetilde{\mathscr{S}}$ est étale et son image contient $\mathfrak{X} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s)$.

(c) $\mathfrak{Y}$ est affine somme disjointe d'ouverts affines $(\mathfrak{Y}_i)_{i\in I}$; notons $\mathscr{F}_i$ l'image réciproque de $\mathscr{F}$ sur $\mathfrak{Y}_i$.

(d) Pour tout $i \in I$ tel que $\dim(\mathscr{F}_i/\widetilde{\mathscr{S}}) \geq n$, $\mathscr{F}_i$ possède un $\widetilde{\mathscr{S}}$-dévissage au-dessus de $\widetilde{s}$, en dimensions $\geq n$, $(\mathfrak{Z}_{ij} \to \mathscr{T}_{ij}, \alpha_{ij} \colon \mathscr{L}_{ij} \to \mathscr{G}_{ij}, \mathscr{H}_{ij})$, tel que les morphismes α_{ij} soient $\widetilde{\mathscr{S}}$-universellement injectifs pour les indices (i,j) tels que $\dim(\mathscr{T}_{ij}/\widetilde{\mathscr{S}}) > n$, et soient surjectifs au-dessus d'un ouvert de $\mathscr{T}_{ij}$ qui se projette sur $\widetilde{\mathscr{S}}$, pour tous les indices (i,j).

L'existence de telles données résulte pour l'essentiel de 5.2.7 et 5.3.11 ; les conditions auxiliaires énoncées dans (a) et (d) peuvent être réalisées après restriction convenable du voisinage étale $\widetilde{\mathscr{S}}$. Soient $\mathscr{I}$ un idéal de définition cohérent de $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}_0 = (\mathscr{S}, \mathscr{O}_{\mathscr{S}}/\mathscr{I})$, H le sous-schéma réduit de $\mathscr{S}_0$ d'espace sous-jacent $\mathscr{S} - U$, $\widetilde{H} = H \times_{\mathscr{S}} \widetilde{\mathscr{S}}$. D'après la condition (a), la projection canonique $\widetilde{H} \to H$ est un isomorphisme au-dessus de $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{H,s})$, donc aussi au-dessus d'un voisinage ouvert de s dans H. Quitte à restreindre $\widetilde{\mathscr{S}}$, on peut supposer que l'image de $\widetilde{\mathscr{S}}$ dans $\mathscr{S}$ est un ouvert $\mathscr{S}_{\mathrm{u}}$ tel que $\widetilde{\mathscr{S}} \to \mathscr{S}_{\mathrm{u}}$ soit un isomorphisme au-dessus de $H_{\mathrm{u}} = H \cap \mathscr{S}_{\mathrm{u}}$. On peut également renforcer la condition (b) en la condition (b$'$) ci-après :

(b$'$) Le morphisme $\mathfrak{Y} \to \mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \widetilde{\mathscr{S}}$ est étale et son image contient $\mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} H_{\mathrm{u}}$.

Nous affecterons d'un indice $_{\mathrm{u}}$ (resp. d'un $\widetilde{\ }$) les objets déduits d'objets au-dessus de $\mathscr{S}$ par le changement de base $\mathscr{S}_{\mathrm{u}} \to \mathscr{S}$ (resp. $\widetilde{\mathscr{S}} \to \mathscr{S}$). On notera que les hypothèses du lemme 5.8.3 sont préservées par ces changements de base (5.4.16).

Supposons avoir résolu le lemme 5.8.3 après le changement de base $\widetilde{\mathscr{S}} \to \mathscr{S}$, avec $\widetilde{W} = \widetilde{\mathscr{S}}$ et un éclatement admissible et $\widetilde{U}'$-admissible $\widetilde{\mathscr{S}''} \to \widetilde{\mathscr{S}'}$. Cet éclatement est celui d'un idéal ouvert cohérent $\widetilde{\mathscr{A}'}$ de $\widetilde{\mathscr{S}'}$ tel que $\mathrm{V}(\widetilde{\mathscr{A}'}) \cap \widetilde{U}' = \emptyset$. Considérons le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathscr{S}'} \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"'] & \mathscr{S}'_{\mathrm{u}} \arrow[d, "\varphi_{\mathrm{u}}"] \\ \widetilde{\mathscr{S}} \arrow[r] & \mathscr{S}_{\mathrm{u}} \end{tikzcd}$$

Alors $\widetilde{\mathscr{S}'} \to \mathscr{S}'_{\mathrm{u}}$ est un morphisme étale surjectif et un isomorphisme au-dessus de $\varphi_{\mathrm{u}}^{-1}(H_{\mathrm{u}})$ (dont l'espace sous-jacent est $\mathscr{S}'_{\mathrm{u}} - U'_{\mathrm{u}}$). Dans ces conditions, le morphisme naturel $\mathrm{V}(\widetilde{\mathscr{A}'}) \to \mathscr{S}'_{\mathrm{u}}$ est une immersion fermée (2.9.6 et [31] 8.11.5), et l'idéal $\widetilde{\mathscr{A}'}$ est l'image réciproque d'un idéal ouvert cohérent $\mathscr{A}'_{\mathrm{u}}$ de $\mathscr{S}'_{\mathrm{u}}$. Soit $\mathscr{S}''_{\mathrm{u}} \to \mathscr{S}'_{\mathrm{u}}$ l'éclatement de $\mathscr{A}'_{\mathrm{u}}$ dans $\mathscr{S}'_{\mathrm{u}}$. Comme $\widetilde{\mathscr{S}''} \to \mathscr{S}''_{\mathrm{u}}$ est un morphisme étale surjectif, par descente fidèlement plate de $\widetilde{\mathscr{S}''}$ à $\mathscr{S}''_{\mathrm{u}}$ (cf. la preuve de (i$'$) $\Rightarrow$ (i) de 5.3.6), on voit que l'on a prouvé le lemme 5.8.3, pour la restriction de la situation au-dessus de $\mathscr{S}_{\mathrm{u}}$ et avec l'ouvert $W_{\mathrm{u}} = \mathscr{S}_{\mathrm{u}}$. D'après 3.1.8, on peut prolonger l'éclatement

$\mathscr{S}''_{\mathrm{u}} \to \mathscr{S}'_{\mathrm{u}}$ en un éclatement admissible et U'-admissible $\mathscr{S}'' \to \mathscr{S}'$; on a alors démontré le lemme 5.8.3 avec $W = U \cup \mathscr{S}_{\mathrm{u}}$.

Nous sommes donc ramenés à démontrer 5.8.3 dans le cas où $\mathscr{S} = \widetilde{\mathscr{S}}$ avec $W = \widetilde{\mathscr{S}}$. Par descente fidèlement plate (cf. la condition (b′)), on peut remplacer $\mathfrak{X}$ par $\mathfrak{Y}$. Une fois ces réductions faites, la sous-catégorie des éclatements admissibles et U'-admissibles de $\mathscr{S}'$ qui conviennent pour $\mathfrak{Y}_i$ et $\mathscr{F}_i$ est un crible (2.10.12, 3.1.4(ii) et 5.1.13). On peut donc se ramener au cas où $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}_i$ (3.1.17(ii)) ; bref, il nous suffit de prouver le lemme suivant :

Lemme 5.8.6. *Soient $\mathscr{S}$ un schéma formel affine, idyllique et rig-pur, U un ouvert de $\mathscr{S}$, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme affine de présentation finie, n un entier ≥ 0, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent rig-$f$-plat, qui possède un $\mathscr{S}$-dévissage au-dessus d'un point maximal de $\mathscr{S} - U$, en dimensions $\geq n$, $(\mathfrak{Z}_j \to \mathscr{T}_j, \alpha_j\colon \mathscr{L}_j \to \mathscr{G}_j, \mathscr{H}_j)$ dans lequel les α_j sont $\mathscr{S}$-universellement injectifs pour les indices j tels que* $\dim(\mathscr{T}_j/\mathscr{S}) \geq n+1$, *et sont surjectifs au-dessus d'un ouvert de $\mathscr{T}_j$ qui se projette sur $\mathscr{S}$, pour tous les indices j.*

Soient $\varphi\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ un éclatement admissible, $U' = \varphi^{-1}(U)$, $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathscr{S}'$, $\mathscr{F}' = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}'}$ tels que le transformé strict $\overline{\mathscr{F}}'$ de $\mathscr{F}'$ soit $\mathscr{S}'$-plat en dimension $\geq n$ au-dessus de U'. Alors il existe un éclatement admissible et U'-admissible $\mathscr{S}'' \to \mathscr{S}'$, tel que le transformé strict de $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}''}$ soit $\mathscr{S}''$-plat en dimension $\geq n$.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 5.8.7. *Soient $\mathscr{S}$ un schéma formel idyllique rig-pur, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme affine, lisse, à fibres géométriquement intègres de dimension r, $0 \to \mathscr{L} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H} \to 0$ une suite exacte de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents telle que $\mathscr{L}$ soit localement libre et que* $\dim(\mathscr{H}/\mathscr{S}) < r$. *Alors le morphisme $\mathscr{G}_{\mathrm{tor}} \to \mathscr{H}_{\mathrm{tor}}$ est bijectif; en particulier, la suite $0 \to \mathscr{L} \to \mathscr{G}/\mathscr{G}_{\mathrm{tor}} \to \mathscr{H}/\mathscr{H}_{\mathrm{tor}} \to 0$ est exacte.*

Il résulte de 2.10.1.3 que $\mathscr{L} \cap \mathscr{G}_{\mathrm{tor}} \subset \mathscr{L}_{\mathrm{tor}}$. Mais $\mathscr{L}_{\mathrm{tor}} = 0$ (5.1.13), donc le morphisme $\mathscr{G}_{\mathrm{tor}} \to \mathscr{H}_{\mathrm{tor}}$ est injectif. Pour la surjectivité, on peut supposer $\mathscr{S} = \mathrm{Spf}(A)$ et $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B)$ formels affines globalement idylliques, $\mathscr{L} = L^{\Delta}$, $\mathscr{G} = G^{\Delta}$ et $\mathscr{H} = H^{\Delta}$, où L, G, H sont trois B-modules cohérents tels que la suite $0 \to L \to G \to H \to 0$ soit exacte et que L soit localement libre. Soient $R = H_{\mathrm{tor}}$, R' son image réciproque dans G, $\mathfrak{b}$ l'idéal annulateur de R dans B. On sait (1.10.3) que R est un B-module cohérent; donc $\mathfrak{b}$ est un idéal ouvert de type fini de B. Posons $S = \mathrm{Spec}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(B)$ et soit $g\colon X \to S$ le morphisme déduit de f. Soient Z le sous-schéma de X défini par l'idéal $\mathfrak{b}$, W l'ouvert complémentaire de Z dans X, $i\colon W \to X$ l'injection canonique, $\beta\colon \widetilde{L} \to \widetilde{R}'$ la flèche canonique. Alors $i^*(\beta)\colon i^*(\widetilde{L}) \to i^*(\widetilde{R}')$ est un isomorphisme. Par ailleurs, W se projette sur S puisque $\dim(\mathscr{H}/\mathscr{S}) < r$ (2.8.12) et g est ouvert (5.6.12). Il résulte de 5.6.13 que $\widetilde{L}$ est Z-clos, autrement dit le morphisme canonique $\widetilde{L} \to i_*i^*(\widetilde{L})$ est un isomorphisme. Considérons alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \widetilde{R}' \arrow[r, "\alpha"] & i_*i^*(\widetilde{R}') \\ \widetilde{L} \arrow[u, "\beta"] \arrow[r, "\sim"] & i_*i^*(\widetilde{L}) \arrow[u, "i_*i^*(\beta)"'] \end{tikzcd}$$

où α est le morphisme canonique. Il nous montre que β admet un inverse à gauche de noyau $\ker(\alpha)$. Donc $\ker(\alpha) = \widetilde{Q}$, où Q est un sous-B-module de R', isomorphe à R. On a $Q \subset G_{\rm tor}$ (1.8.30.2), $G_{\rm tor} \subset R'$ et $L \cap G_{\rm tor} = 0$; par suite $Q = G_{\rm tor}$, ce qui achève la preuve.

5.8.8. Il nous reste à démontrer le lemme 5.8.6. Notons d'abord que si $\dim(\mathscr{T}_j/\mathscr{S}) > n$ pour tous les indices j, alors $\mathscr{F}$ est $\mathscr{S}$-plat en dimension $\geq n$, et la conclusion est immédiate. Quitte à ré-indexer le $\mathscr{S}$-dévissage de $\mathscr{F}$, on peut supposer $j = \dim(\mathscr{T}_j/\mathscr{S})$ et que le plus petit indice est n. Soient $(\mathfrak{Z}'_j \to \mathscr{T}'_j, \alpha'_j \colon \mathscr{L}'_j \to \mathscr{G}'_j, \mathscr{H}'_j)$ l'image réciproque du $\mathscr{S}$-dévissage de $\mathscr{F}$ sur $\mathfrak{X}'$ (5.2.3.6), $\overline{\mathscr{G}}'_j$ (resp. $\overline{\mathscr{H}}'_j$) le transformé strict de $\mathscr{G}'_j$ (resp. $\mathscr{H}'_j$), $\overline{\alpha}'_j \colon \mathscr{L}'_j \to \overline{\mathscr{G}}'_j$ le morphisme déduit de α'_j. Pour tout $j \geq n+1$, la suite $0 \to \mathscr{L}'_j \to \mathscr{G}'_j \to \mathscr{H}'_j \to 0$ est exacte (5.1.16) et $\dim(\mathscr{H}'_j/\mathscr{S}') < j$; donc, en vertu de 5.8.7, la suite $0 \to \mathscr{L}'_j \to \overline{\mathscr{G}}'_j \to \overline{\mathscr{H}}'_j \to 0$ est exacte. Par suite, $(\mathfrak{Z}'_j \to \mathscr{T}'_j, \overline{\alpha}'_j \colon \mathscr{L}'_j \to \overline{\mathscr{G}}'_j, \overline{\mathscr{H}}'_j)_{j \geq n+1}$ est un $\mathscr{S}'$-dévissage de $\overline{\mathscr{F}}'$ au-dessus de n'importe quel point de $\mathscr{S}'$ (2.10.32). Par contre, $(\mathfrak{Z}'_n \to \mathscr{T}'_n, \overline{\alpha}'_n \colon \mathscr{L}_n \to \overline{\mathscr{G}}'_n, \overline{\mathscr{H}}'_n)$ n'est pas forcement un $\mathscr{S}'$-dévissage en dimension n.

Montrons que pour tout $j \geq n$, $\overline{\mathscr{G}}'_j$ est $\mathscr{S}'$-plat en dimension $\geq n$, au-dessus de U'. Comme $\overline{\mathscr{F}}'$ est $\mathscr{S}'$-plat en dimension $\geq n$, au-dessus de U', il en est de même de $\overline{\mathscr{G}}'_j$ pour j suffisamment grand (5.1.5). Raisonnons par récurrence décroissante sur $j \geq n+1$; supposons que $\overline{\mathscr{G}}'_j$ soit $\mathscr{S}'$-plat en dimension $\geq n$, au-dessus de U'. Il résulte alors de 5.3.6, appliqué au $\mathscr{S}'$-dévissage du $\mathscr{O}_{\mathscr{T}'_j}$-module $\overline{\mathscr{G}}'_j$ donné par $(\mathrm{id}_{\mathscr{T}'_j}, \overline{\alpha}'_j \colon \mathscr{L}'_j \to \overline{\mathscr{G}}'_j, \overline{\mathscr{H}}'_j)$, que $\overline{\mathscr{H}}'_j$ est $\mathscr{S}'$-plat en dimension $\geq n$, au-dessus de U', ce qui conclut la récurrence (5.1.5).

Montrons que pour tout $j \geq n$, $\mathscr{G}'_j$ est rig-$\mathscr{S}'$-plat ; il en serait alors de même de $\overline{\mathscr{G}}'_j$ (5.4.5.2). Comme $\mathscr{F}'$ est rig-$\mathscr{S}'$-plat (5.4.15), il en est de même de $\mathscr{G}'_j$ pour j suffisamment grand (5.4.10). Pour tout $j \geq n+1$, α'_j est $\mathscr{S}'$-universellement injectif. Donc notre assertion s'obtient par une récurrence décroissante sur j, à l'aide de 5.4.7 et 5.4.10.

Appliquons 5.7.4 au morphisme $\mathscr{T}'_n \to \mathscr{S}'$ et au $\mathscr{O}_{\mathscr{T}'_n}$-module $\overline{\mathscr{G}}'_n$. Il existe alors un éclatement admissible et U'-admissible $\mathscr{S}'' \to \mathscr{S}'$ tel que le transformé strict $\overline{\mathscr{G}}''_n$ de $\mathscr{G}_n \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}''}$ soit $\mathscr{S}''$-plat en dimension $\geq n$ (2.10.12). Soient $(\mathfrak{Z}''_j \to \mathscr{T}''_j, \alpha''_j \colon \mathscr{L}''_j \to \mathscr{G}''_j, \mathscr{H}''_j)$ l'image réciproque du $\mathscr{S}$-dévissage de $\mathscr{F}$ sur $\mathfrak{X}'' = \mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathscr{S}''$, $\overline{\mathscr{G}}''_j$ (resp. $\overline{\mathscr{H}}''_j$) le transformé strict de $\mathscr{G}''_j$ (resp. $\mathscr{H}''_j$). Pour tout $j \geq n+1$, la suite $0 \to \mathscr{L}''_j \to \mathscr{G}''_j \to \mathscr{H}''_j \to 0$ est exacte (5.1.16) et $\dim(\mathscr{H}''_j/\mathscr{S}'') < j$; donc, en vertu de 5.8.7, la suite $0 \to \mathscr{L}''_j \to \overline{\mathscr{G}}''_j \to \overline{\mathscr{H}}''_j \to 0$ est exacte. On en déduit par une récurrence croissante sur $j \geq n+1$ que le transformé strict de $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}''}$ est $\mathscr{S}''$-plat en dimension $\geq n$ (2.10.32 et 5.1.5).

Corollaire 5.8.9. *Soient $\mathscr{S}$ un schéma formel idyllique quasi-compact, $\mathfrak{X}, \mathscr{S}'$ deux schémas formels idylliques, $f \colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme de présentation finie, $g \colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ un morphisme adique, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent ; posons $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathscr{S}'$, $\mathscr{F}' = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}'}$ et soit $f' \colon \mathfrak{X}' \to \mathscr{S}'$ la projection canonique.*

(i) *Si $\mathscr{F}$ est rig-f-plat, $\mathscr{F}'$ est rig-f'-plat ; en particulier, si f est rig-plat, f' est rig-plat.*

(ii) *Si f est fidèlement rig-plat, f' est fidèlement rig-plat.*

(i) D'après 5.8.1, il existe un éclatement admissible de présentation finie $\varphi \colon \mathscr{S}_1 \to \mathscr{S}$ tel que le transformé strict de $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}_1}$ soit $\mathscr{S}_1$-plat. En vertu de 3.1.17(i), il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathscr{S}'_1 \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d] & \mathscr{S}' \arrow[d, "g"] \\ \mathscr{S}_1 \arrow[r, "\varphi"] & \mathscr{S} \end{tikzcd}$$

tel que $\mathscr{S}'_1$ soit rig-pur et φ' soit un éclatement admissible de présentation finie. Posons $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathscr{S}_1$ et $\mathfrak{X}'_1 = \mathfrak{X}' \times_{\mathscr{S}'} \mathscr{S}'_1$, de sorte qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}'_1 \arrow[rrr] \arrow[dr] \arrow[ddd] & & & \mathfrak{X}' \arrow[dl] \arrow[ddd] \\ & \mathscr{S}'_1 \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d] & \mathscr{S}' \arrow[d, "g"] & \\ & \mathscr{S}_1 \arrow[r, "\varphi"] & \mathscr{S} & \\ \mathfrak{X}_1 \arrow[rrr] \arrow[ur] & & & \mathfrak{X} \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

où les carrés latéraux sont cartésiens. On en déduit, compte tenu de 5.1.3, 5.1.13 et 2.10.12, que le transformé strict de $\mathscr{F}' \otimes_{\mathscr{S}'} \mathscr{O}_{\mathscr{S}'_1}$ est $\mathscr{S}'_1$-plat. Par suite, $\mathscr{F}' \otimes_{\mathscr{S}'} \mathscr{O}_{\mathscr{S}'_1}$ est rig-$\mathscr{S}'_1$-plat (5.4.5.2) ; donc $\mathscr{F}'$ est rig-$\mathscr{S}'$-plat (5.4.15).

(ii) Reprenons les constructions ci-dessus pour $\mathscr{F} = \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$; supposons de plus $\mathscr{S}_1$ rig-pur, ce qui est loisible. Soient $\overline{\mathfrak{X}}_1$ (resp. $\overline{\mathfrak{X}}'_1$) le transformé strict de $\mathfrak{X}_1$ (resp. $\mathfrak{X}'_1$). Comme $\overline{\mathfrak{X}}_1 \to \mathscr{S}_1$ est plat et fidèlement rig-plat (5.5.12), il est fidèlement plat en vertu de 5.5.10(ii). Par suite, $\overline{\mathfrak{X}}'_1 = \overline{\mathfrak{X}}_1 \times_{\mathscr{S}_1} \mathscr{S}'_1$ (2.10.12 et 5.1.13) et $\overline{\mathfrak{X}}'_1 \to \mathscr{S}'_1$ est fidèlement plat (5.1.8). Donc $\mathfrak{X}'_1 \to \mathscr{S}'_1$ est fidèlement rig-plat en vertu de 5.5.10(i). On en déduit que $\mathfrak{X}' \to \mathscr{S}'$ est fidèlement rig-plat (5.5.12).

5.9 Dimension relative d'un module cohérent

5.9.1. Soient $f\colon X \to S$ un morphisme d'espaces rigides cohérents, F un $\mathscr{O}_X$-module cohérent, p un point rigide de X_{ad}, q son image dans S_{ad}, $X \otimes_S \kappa(q)$ la fibre de X au-dessus de q (4.8.48). On peut considérer p aussi comme un point rigide de $X \otimes_S \kappa(q)$ (*loc. cit.*). On appelle *dimension relative* de F en p, et on note $\dim_p(F/S)$, la dimension en p du $(\mathscr{O}_{X\otimes_S\kappa(q)})$-module $F \otimes_S \kappa(q)$ (4.9.1). On appelle dimension relative de F sur S et l'on note $\dim(F/S)$ la borne supérieure des nombres $\dim_p(F/S)$, lorsque p parcourt les points rigides de X_{ad}. On appelle *dimension relative* de f en p (ou *dimension relative* de X sur S en p) et l'on note $\dim_p(f)$ ou $\dim_p(X/S)$ le nombre $\dim_p(\mathscr{O}_X/S)$. On appelle dimension relative de f (ou dimension relative de X sur S) et l'on note $\dim(f)$ ou $\dim(X/S)$ le nombre $\dim(\mathscr{O}_X/S)$.

5.9.2. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme de $\mathbf{S}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. On appelle *dimension relative rigide* de $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{S}$ et l'on note $\dim_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}/\mathscr{S})$ le nombre $\dim(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}/\mathscr{S}^{\mathrm{rig}})$; on appelle *dimension relative rigide* de $\mathfrak{X}$ sur $\mathscr{S}$ et l'on note $\dim_{\mathrm{rig}}(\mathfrak{X}/\mathscr{S})$ le nombre $\dim(\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}/\mathscr{S}^{\mathrm{rig}})$.

Proposition 5.9.3. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathscr{S}$ deux morphismes de* $\mathbf{S}$, *$\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Si f est fini, on a* $\dim_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}/\mathscr{S}) = \dim_{\mathrm{rig}}(f_*(\mathscr{F})/\mathscr{S})$.

Cela résulte de 4.9.8(i), 4.7.23 et 2.8.19.

Proposition 5.9.4. *Soient R un ordre* 1*-valuatif,* $\mathscr{S} = \mathrm{Spf}(R)$, *$f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme lisse de présentation finie, p un point rigide de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$. Alors le $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$-module localement libre $(\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})^{\mathrm{rig}}$ a un rang en p égal à* $\dim_p(\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}})$.

On rappelle d'abord que $\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module localement libre de type fini (2.15.13). Quitte à remplacer $\mathscr{S}$ par un éclatement admissible, on peut supposer que R admet un idéal de définition principal I (3.3.12). Soit $\mathscr{P}$ un point rigide de $\mathfrak{X}$ définissant p (4.1.20). On peut évidemment se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ est formel affine et $\mathscr{P}$ est fermé dans $\mathfrak{X}$. Par suite, A est topologiquement de présentation finie et formellement lisse sur R ; en particulier, A est R-plat (5.1.18) et donc rig-pur. Soit K le corps des fractions de R. On rappelle que $\mathscr{P}$ détermine un point fermé de $\mathrm{Spec}(A \otimes_R K)$, donc un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, et que l'on a $\dim_p(\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}) = \dim(A_{\mathfrak{p}})$ (4.9.15). En vertu de 1.16.29, il existe une R-algèbre de présentation finie A', lisse sur $\mathrm{Spec}(R)$ en dehors de $\mathrm{V}(I)$, dont le séparé complété pour la topologie I-préadique est R-isomorphe à A. Choisissons un tel isomorphisme et soient $\varphi\colon A' \to A$ l'homomorphisme induit, $\mathfrak{p}' = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$. Il résulte de 1.12.20 que $\mathfrak{p}'$ définit un point fermé de $\mathrm{Spec}(A' \otimes_R K)$ et on a $\dim(A_{\mathfrak{p}}) = \dim(A'_{\mathfrak{p}'})$. On notera que $\Omega^1_{A'/R}$ est un A'-module de type fini, localement libre sur $\mathrm{Spec}(A' \otimes_R K)$, de rang $\dim(A'_{\mathfrak{p}'})$ en $\mathfrak{p}'$. Soit $\widehat{\Omega}^1_{A/R}$ le séparé complété du A-module topologique $\Omega^1_{A/R}$ (1.14.1). Comme $\widehat{\Omega}^1_{A/R}$ est isomorphe à $\Omega^1_{A'/R} \otimes_{A'} A$ (1.12.16), on en déduit que le A-module localement libre $\widehat{\Omega}^1_{A/R}$ a un rang en $\mathfrak{p}$ égal à $\dim(A_{\mathfrak{p}})$. La proposition s'ensuit compte tenu de l'isomorphisme (4.8.15.1).

Corollaire 5.9.5. *Si $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ est un morphisme lisse de* $\mathbf{S}$*, à fibres équidimensionnelles de dimension n, alors* $\dim_{\mathrm{rig}}(\mathfrak{X}/\mathscr{S}) = n$.

Corollaire 5.9.6. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme lisse de* $\mathbf{S}$*, à fibres équidimensionnelles de dimension n, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent tel que* $\dim_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}/\mathscr{S}) < n$*, $\mathscr{Q}$ un point rigide de $\mathscr{S}$. Alors il existe un point rigide $\mathscr{P}$ de $\mathfrak{X}$ tel que $f(\mathscr{P}) = \mathscr{Q}$ et $\mathscr{F} \otimes_{\mathfrak{X}} \mathscr{O}_{\mathscr{P}}$ soit rig-nul.*

On peut se borner au cas où $\mathscr{S} = \mathscr{Q}$, de sorte que l'on a $\dim(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}) < n$. Soient $\mathfrak{Y}$ le sous-schéma fermé de $\mathfrak{X}$ défini par l'annulateur de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ l'injection canonique. Compte tenu de 4.9.3 et 5.9.5, on a

$$\dim(\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}) = \dim(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}) < n = \dim(\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}).$$

Par suite, le morphisme g^{rig} n'est pas couvrant pour les points rigides en vertu de 4.9.8(iii), d'où l'assertion compte tenu 4.1.20.

Proposition 5.9.7. *Soient R un ordre* 1*-valuatif, $\mathscr{S} = $* $\mathrm{Spf}(R)$*, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme de présentation finie, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, $\mathscr{P}$ un point rigide de $\mathfrak{X}$, de spécialisation $x \in \mathfrak{X}$, p le point de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ associé à $\mathscr{P}$; alors* $\dim_p(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}) \leq \dim_x(\mathscr{F}/\mathscr{S})$.

Rappelons d'abord que R est hensélien (1.11.1.3) et que l'on a $\dim_p(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}) = \dim(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}_p)$ (4.9.14). Si $\mathscr{F}_x = 0$, $\mathscr{F} \otimes_{\mathfrak{X}} \mathscr{O}_{\mathscr{P}} = 0$ et par suite $\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}_p = 0$ (4.8.15.1). On peut donc se borner au cas où $\mathscr{F}_x \neq 0$. En vertu de 5.2.4, il existe un voisinage étale élémentaire affine $(\mathfrak{X}', x')$ de $(\mathfrak{X}, x)$ tel que l'image réciproque $\mathscr{F}'$ de $\mathscr{F}$ sur $\mathfrak{X}'$ admette un $\mathscr{S}$-dévissage au point x', en dimension $n = \dim_x(\mathscr{F}/\mathscr{S})$; notons ce dévissage $(\mathfrak{Y} \to \mathscr{T}, \alpha\colon \mathscr{L} \to \mathscr{G}, \mathscr{H})$. Soient $\mathscr{P}'$ un point rigide de $\mathfrak{X}'$, de spécialisation x', au-dessus de $\mathscr{P}$ (3.3.9), p' le point de $\mathfrak{X}'^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ associé à $\mathscr{P}'$. On a $\mathscr{F}'^{\mathrm{rig}} \simeq \mathscr{F}^{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}'^{\mathrm{rig}}}$ (4.7.23). L'homomorphisme canonique $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}},p} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}'^{\mathrm{rig}},p'}$ est local (4.8.13) et plat (5.5.8). On en déduit ([31] 6.1.2) que l'on a

$$\dim(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}_p) \leq \dim(\mathscr{F}'^{\mathrm{rig}}_{p'}).$$

Par ailleurs, on a $\dim(\mathscr{F}'^{\mathrm{rig}}) \leq \dim(\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}) \leq \dim(\mathscr{T}^{\mathrm{rig}})$ ((4.9.2.3), 4.9.3 et 4.9.8) et l'on sait que $\dim(\mathscr{T}^{\mathrm{rig}}) = n$ (5.9.5), d'où la proposition.

Corollaire 5.9.8. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme de* $\mathbf{S}$*, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent ; alors* $\dim_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}/\mathscr{S}) \leq \dim(\mathscr{F}/\mathscr{S})$.

Proposition 5.9.9. *Soient $\mathscr{S}$ un schéma formel idyllique rig-pur et quasi-compact, U un ouvert de $\mathscr{S}$, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme affine, lisse, à fibres géométriquement intègres de dimension n, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent tel que* $\dim_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}/\mathscr{S}) < n$ *et* $\dim(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_U/U) < n$*. Alors, il existe un éclatement admissible et U-admissible $\varphi\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ tel que, si $\overline{\mathscr{F}}'$ est le transformé strict* (2.10.1.4) *de $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}'}$, on ait*$\dim(\overline{\mathscr{F}}'/\mathscr{S}') < n$.

Cela résulte de 5.7.5 et 5.9.6.

Théorème 5.9.10. *Soient* $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ *un morphisme de* $\mathbf{S}$, $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$*-module cohérent,* U *un ouvert de* $\mathscr{S}$ *tel que* $\dim(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_U/U) \leq \dim_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}/\mathscr{S})$*. Alors, il existe un éclatement admissible,* U*-admissible et de présentation finie* $\varphi\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ *tel que, si* $\overline{\mathscr{F}}'$ *est le transformé strict* (2.10.1.4) *de* $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}'}$*, on ait*

$$\dim(\overline{\mathscr{F}}'/\mathscr{S}') = \dim_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}/\mathscr{S}).$$

Nous établirons le lemme technique suivant :

Lemme 5.9.11. *Soient* $\mathscr{S}$ *un schéma formel idyllique, rig-pur et quasi-compact,* $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ *un morphisme de présentation finie,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$*-module cohérent,* n *un entier* ≥ 0, U *un ouvert de* $\mathscr{S}$, $\varphi\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ *un éclatement admissible,* $U' = \varphi^{-1}(U)$*. On suppose vérifiées les hypothèses suivantes :*

(i) $\dim_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}/\mathscr{S}) \leq n$ *et* $\dim(\mathscr{F}/\mathscr{S}) \leq n+1$.

(ii) *Si* $\overline{\mathscr{F}}'$ *est le transformé strict de* $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}'}$*, on a* $\dim(\overline{\mathscr{F}}' \otimes_{\mathscr{S}'} \mathscr{O}_{U'}/U') \leq n$.

(iii) $U \neq \mathscr{S}$.

Alors, il existe un ouvert W *de* $\mathscr{S}$*, strictement plus grand que* U *et un éclatement admissible et* U'*-admissible* $\varphi'\colon \mathscr{S}'' \to \mathscr{S}'$ *tels que, si* $\overline{\mathscr{F}}''$ *est le transformé strict de* $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}''}$ *et* W'' *est l'image réciproque de* W *dans* $\mathscr{S}''$*, on ait*

$$\dim(\overline{\mathscr{F}}'' \otimes_{\mathscr{S}''} \mathscr{O}_{W''}/W'') \leq n.$$

On notera que φ et φ' sont de présentation finie (3.1.4).

5.9.12. Montrons d'abord comment le lemme 5.9.11 entraîne le théorème 5.9.10. Il est loisible de remplacer $\mathscr{S}$ par un éclatement admissible, U-admissible et de présentation finie $\mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ et $\mathscr{F}$ par le transformé strict de $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}'}$ (2.10.12, 3.1.14, 4.7.12 et 4.7.23) ; en particulier, on peut supposer $\mathscr{S}$ rig-pur (3.1.4). Compte tenu de 5.9.8, il suffit de montrer que pour tout entier $n \geq \dim_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}/\mathscr{S})$, il existe un éclatement admissible et U-admissible $\mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ tel que, si $\overline{\mathscr{F}}'$ est le transformé strict de $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}'}$, on ait $\dim(\overline{\mathscr{F}}'/\mathscr{S}') \leq n$. L'assertion est évidente pour $n > \dim(\mathfrak{X}/\mathscr{S})$. Raisonnons par récurrence décroissante sur n ; on peut supposer $\dim(\mathscr{F}/\mathscr{S}) \leq n+1$. Soit E la famille des ouverts V de $\mathscr{S}$, contenant U, tel que l'assertion soit vraie pour la restriction de la situation au-dessus de V. Alors E est non vide car $U \in E$. Comme l'espace topologique sous-jacent à $\mathscr{S}$ est noethérien (2.6.6), E possède un élément maximal V_0. Le lemme 5.9.11 (appliqué avec $U = V_0$) entraîne, compte tenu de 3.1.8 et 3.1.14, que $V_0 = \mathscr{S}$.

5.9.13. Revenons maintenant à la démonstration de 5.9.11, qui est similaire à celle de 5.8.3. Soit s un point maximal de $\mathscr{S} - U$. En vertu de 5.2.7, on peut trouver un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{Y} \arrow[r] & \mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \widetilde{\mathscr{S}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{X} \arrow[d] \\ & \widetilde{\mathscr{S}} \arrow[r] & \mathscr{S} \end{tikzcd}$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

(a) $\widetilde{\mathscr{S}}$ possède un unique point $\widetilde{s}$ au-dessus de s, et $(\widetilde{\mathscr{S}}, \widetilde{s})$ est un voisinage étale élémentaire affine de $(\mathscr{S}, s)$.

(b) Le morphisme $\mathfrak{Y} \to \mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \widetilde{\mathscr{S}}$ est étale et son image contient $\mathfrak{X} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s)$.

(c) $\mathfrak{Y}$ est affine somme disjointe d'ouverts affines $(\mathfrak{Y}_i)_{i\in I}$; notons $\mathscr{F}_i$ l'image réciproque de $\mathscr{F}$ sur $\mathfrak{Y}_i$.

(d) Pour tout $i \in I$, $\mathscr{F}_i$ possède un $\widetilde{\mathscr{S}}$-dévissage total, au-dessus de $\widetilde{s}$, en dimensions $\leq n+1$.

Soient $\mathscr{I}$ un idéal de définition cohérent de $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}_0 = (\mathscr{S}, \mathscr{O}_{\mathscr{S}}/\mathscr{I})$, H le sous-schéma réduit de $\mathscr{S}_0$ d'espace sous-jacent $\mathscr{S} - U$, $\widetilde{H} = H \times_{\mathscr{S}} \widetilde{\mathscr{S}}$. D'après la condition (a), la projection canonique $\widetilde{H} \to H$ est un isomorphisme au-dessus de $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{H,s})$, donc aussi au-dessus d'un voisinage ouvert de s dans H. Quitte à restreindre $\widetilde{\mathscr{S}}$, on peut supposer que l'image de $\widetilde{\mathscr{S}}$ dans $\mathscr{S}$ est un ouvert $\mathscr{S}_{\mathrm{u}}$ tel que $\widetilde{\mathscr{S}} \to \mathscr{S}_{\mathrm{u}}$ soit un isomorphisme au-dessus de $H_{\mathrm{u}} = H \cap \mathscr{S}_{\mathrm{u}}$. On peut également renforcer la condition (b) en la condition (b′) ci-après :

(b′) Le morphisme $\mathfrak{Y} \to \mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \widetilde{\mathscr{S}}$ est étale et son image contient $\mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} H_{\mathrm{u}}$.

Nous affecterons d'un indice $_{\mathrm{u}}$ (resp. d'un $\widetilde{\ }$) les objets déduits d'objets au-dessus de $\mathscr{S}$ par le changement de base $\mathscr{S}_{\mathrm{u}} \to \mathscr{S}$ (resp. $\widetilde{\mathscr{S}} \to \mathscr{S}$). On notera que les hypothèses du lemme 5.9.11 sont préservées par ces changements de base.

Supposons avoir démontré le lemme 5.9.11 après le changement de base $\widetilde{\mathscr{S}} \to \mathscr{S}$, avec $\widetilde{W} = \widetilde{\mathscr{S}}$ et un éclatement admissible et $\widetilde{U}'$-admissible $\widetilde{\mathscr{S}''} \to \widetilde{\mathscr{S}'}$. Cet éclatement est celui d'un idéal ouvert cohérent $\widetilde{\mathscr{A}'}$ de $\widetilde{\mathscr{S}'}$ tel que $\mathrm{V}(\widetilde{\mathscr{A}'}) \cap \widetilde{U}' = \emptyset$. Considérons le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathscr{S}'} \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"'] & \mathscr{S}'_{\mathrm{u}} \arrow[d, "\varphi_{\mathrm{u}}"] \\ \widetilde{\mathscr{S}} \arrow[r] & \mathscr{S}_{\mathrm{u}} \end{tikzcd}$$

Alors $\widetilde{\mathscr{S}'} \to \mathscr{S}'_{\mathrm{u}}$ est un morphisme étale surjectif et un isomorphisme au-dessus de $\varphi_{\mathrm{u}}^{-1}(H_{\mathrm{u}})$ (dont l'espace sous-jacent est $\mathscr{S}'_{\mathrm{u}} - U'_{\mathrm{u}}$). Dans ces conditions, le morphisme naturel $\mathrm{V}(\widetilde{\mathscr{A}'}) \to \mathscr{S}'_{\mathrm{u}}$ est une immersion fermée (2.9.6 et [31] 8.11.5), et l'idéal $\widetilde{\mathscr{A}'}$ est l'image réciproque d'un idéal ouvert cohérent $\mathscr{A}'_{\mathrm{u}}$ de $\mathscr{S}'_{\mathrm{u}}$. Soit $\mathscr{S}''_{\mathrm{u}} \to \mathscr{S}'_{\mathrm{u}}$

l'éclatement de $\mathscr{A}'_{\mathrm{u}}$ dans $\mathscr{S}'_{\mathrm{u}}$. Comme $\widetilde{\mathscr{S}''} \to \mathscr{S}''_{\mathrm{u}}$ est un morphisme étale surjectif, on voit que l'on a prouvé le lemme 5.9.11, pour la restriction de la situation au-dessus de $\mathscr{S}_{\mathrm{u}}$ et avec l'ouvert $W_{\mathrm{u}} = \mathscr{S}_{\mathrm{u}}$. D'après 3.1.8, on peut prolonger l'éclatement $\mathscr{S}''_{\mathrm{u}} \to \mathscr{S}'_{\mathrm{u}}$ en un éclatement admissible et U'-admissible $\mathscr{S}'' \to \mathscr{S}'$; on a alors démontré le lemme 5.9.11 avec $W = U \cup \mathscr{S}_{\mathrm{u}}$. Nous sommes donc ramenés à démontrer 5.9.11 dans le cas où $\mathscr{S} = \widetilde{\mathscr{S}}$ avec $W = \widetilde{\mathscr{S}}$. Compte tenu de la condition (b′), on peut remplacer $\mathfrak{X}$ par $\mathfrak{Y}$ (4.9.10 et [31] 6.1.2). Enfin, on peut clairement se ramener au cas où $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}_i$ (3.1.17(ii)) ; bref, il nous suffit de prouver le lemme suivant :

Lemme 5.9.14. *Soient $\mathscr{S}$ un schéma formel affine, idyllique et rig-pur, U un ouvert de $\mathscr{S}$, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme affine de présentation finie, n un entier ≥ 0, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent qui possède un $\mathscr{S}$-dévissage $(\mathfrak{Z} \to \mathscr{T}, \alpha\colon \mathscr{L} \to \mathscr{G}, \mathscr{H})$ au-dessus d'un point maximal de $\mathscr{S} - U$, en dimension $n+1$, $\varphi\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ un éclatement admissible, $U' = \varphi^{-1}(U)$, $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathscr{S}'$. On suppose vérifiées les hypothèses suivantes :*

(i) $\dim_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}/\mathscr{S}) \leq n$.

(ii) *Si $\overline{\mathscr{F}}'$ est le transformé strict de $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}'}$, on a* $\dim(\overline{\mathscr{F}}' \otimes_{\mathscr{S}'} \mathscr{O}_{U'}/U') \leq n$.

Alors, il existe un éclatement admissible et U'-admissible $\varphi'\colon \mathscr{S}'' \to \mathscr{S}'$ tel que, si $\overline{\mathscr{F}}''$ est le transformé strict de $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}''}$, on ait $\dim(\overline{\mathscr{F}}''/\mathscr{S}'') \leq n$.

Soient $(\mathfrak{Z}' \to \mathscr{T}', \alpha'\colon \mathscr{L}' \to \mathscr{G}', \mathscr{H}')$ l'image réciproque du $\mathscr{S}$-dévissage de $\mathscr{F}$ sur $\mathfrak{X}'$ (5.2.3.6), $\overline{\mathscr{G}}'$ le transformé strict de $\mathscr{G}'$. On a $\dim(\overline{\mathscr{G}}' \otimes_{\mathscr{S}'} \mathscr{O}_{U'}/U') \leq n$ (2.10.32) et $\dim_{\mathrm{rig}}(\overline{\mathscr{G}}'/\mathscr{S}') \leq n$ (5.9.3). Appliquons 5.9.9 au morphisme $\mathscr{T}' \to \mathscr{S}'$ et au $\mathscr{O}_{\mathscr{T}'}$-module $\overline{\mathscr{G}}'$. Il existe alors un éclatement admissible et U'-admissible tel que, si $\overline{\mathscr{G}}''$ est le transformé strict de $\mathscr{G} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}''}$, on ait $\dim(\overline{\mathscr{G}}''/\mathscr{S}'') \leq n$. Par suite, si $\overline{\mathscr{F}}''$ est le transformé strict de $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}''}$, on a $\dim(\overline{\mathscr{F}}''/\mathscr{S}'') \leq n$ (2.8.19 et 2.10.32).

Remarque 5.9.15. On notera que dans les preuves de 5.9.7 et 5.9.11, nous n'avons pas utilisé la propriété 5.2.2(iii) des dévissages relatifs. On aurait pu utiliser seulement 2.4.14.

Définition 5.9.16. On dit qu'un morphisme d'espaces rigides cohérents $f\colon X \to S$ est *quasi-fini* s'il est de dimension relative 0 ; on dit alors que X est quasi-fini sur S.

Proposition 5.9.17. *Soit $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme de* $\mathbf{S}$. *Pour que f^{rig} soit quasi-fini* (*resp. fini*)*, il faut et il suffit qu'il existe un éclatement admissible de présentation finie $\varphi\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ tel que le transformé strict* (2.10.16) *de $\mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathscr{S}'$ soit quasi-fini* (*resp. fini*) *sur $\mathscr{S}'$.*

La proposition relative à la quasi-finitude résulte de 5.9.8 et 5.9.10, et elle implique celle relative à la finitude en vertu de 2.3.30 et 4.2.17.

Corollaire 5.9.18. *Pour qu'un morphisme d'espaces rigides cohérents soit fini, il faut et il suffit qu'il soit propre et quasi-fini.*

Cela résulte de 5.9.17 et de l'assertion correspondante pour les morphismes de $\mathbf{S}$ (2.3.30).

Corollaire 5.9.19. *La catégorie de Raynaud vérifie les propriétés suivantes :*

(i) *Le composé de deux morphismes finis est fini.*

(ii) *Si $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to Z$ sont deux morphismes tels que $g \circ f$ soit fini et que g soit séparé, alors f est fini.*

(i) Cela résulte de 5.9.17 et de l'assertion correspondante pour les morphismes de $\mathbf{S}$ (2.3.26).

(ii) Il suffit de calquer la preuve de 4.2.12(v). Avec les notations de *loc. cit.* et compte tenu des hypothèses, 4.2.5(ii) et 4.2.14(ii), Γ_f est une immersion fermée et p_2 est un morphisme fini. Donc f est fini en vertu de (i).

5.10 Platitude en géométrie rigide

5.10.1. Soient $f\colon X \to Y$ un morphisme d'espaces rigides cohérents, F un $\mathscr{O}_X$-module. On dit que F est *f-plat* (ou *Y-plat*) (resp. *f-plat en un point* p de X_{ad}), s'il est plat (resp. plat au point p) relativement au morphisme de topos annelés $f\colon (X_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_X) \to (Y_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_Y)$, et que le morphisme f est *plat* (resp. *plat au point* p), si $\mathscr{O}_X$ est f-plat (resp. f-plat au point p). Comme X_{ad} a suffisamment de points (4.4.6), il revient au même de dire que F est f-plat ou qu'il est f-plat en tout point de X_{ad} (1.1.10).

Proposition 5.10.2. *Soient $f\colon X \to Y$ un morphisme d'espaces rigides cohérents, F un $\mathscr{O}_X$-module. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *F est f-plat.*

(ii) *Pour toute immersion ouverte $V \to Y$, si l'on pose $U = X \times_Y V$, le foncteur $G \mapsto G \otimes_{\mathscr{O}_Y} F$ de la catégorie des $\mathscr{O}_V$-modules cohérents dans celle des $\mathscr{O}_U$-modules, est exact.*

Cela résulte de 1.3.17 et du fait que $\mathscr{O}_Y$ est cohérent (4.8.18).

Proposition 5.10.3. *Soient $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ deux morphismes d'espaces rigides cohérents, F un $\mathscr{O}_X$-module, G un $\mathscr{O}_Y$-module, p un point de X_{ad}.*

(i) *Si F est f-plat en p et G est g-plat en $f(p)$, $F \otimes_{\mathscr{O}_Y} G$ est $(g \circ f)$-plat en p ; en particulier, si f et g sont plats, il en est de même de $g \circ f$.*

(ii) *Supposons p rigide et f plat en p. Pour que G soit g-plat en $f(p)$, il faut et il suffit que $f^*(G)$ soit $(g \circ f)$-plat en p. En particulier, pour que $g \circ f$ soit plat en p, il faut et il suffit que g soit plat en $f(p)$.*

(i) Cela résulte immédiatement de ([12] chap. I §2.7 prop. 8).

(ii) Si on pose $q = f(p)$, l'homomorphisme $\mathscr{O}_{Y,q} \to \mathscr{O}_{X,p}$ est local (4.8.13) et plat ; il est donc fidèlement plat ([28] 0.6.6.1). La proposition résulte alors de ([12] chap. I §3.2 prop. 4).

Proposition 5.10.4. *Soient $f\colon X \to Y$ un morphisme d'espaces rigides cohérents, F un $\mathscr{O}_X$-module cohérent. Pour que F soit f-plat, il faut et il suffit qu'il soit f-plat en tout point rigide de X_{ad}.*

Considérons un modèle formel $h\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ de f. En vertu de 4.8.18(ii), il existe un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathscr{F}$ tel que $F = \mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$. Soient $\mathscr{P}$ un point rigide de $\mathfrak{X}$, p le point de X_{ad} associé. La proposition résulte du fait que F est f-plat si et seulement si $\mathscr{F}$ est rig-h-plat (5.5.8) ; et F est f-plat en p si et seulement si $\mathscr{F}$ est rig-h-plat en $\mathscr{P}$ (5.5.1).

Proposition 5.10.5. *Soient $f\colon X \to Y$ un morphisme d'espaces rigides cohérents,*

$$0 \to F' \to F \to F'' \to 0 \tag{5.10.5.1}$$

une suite exacte de $\mathscr{O}_X$-modules cohérents, telle que F'' soit f-plat.

(i) *Pour tout morphisme d'espaces rigides cohérents $g\colon Y' \to Y$ et tout $\mathscr{O}_{Y'}$-module cohérent G', la suite $0 \to F' \otimes_Y G' \to F \otimes_Y G' \to F'' \otimes_Y G' \to 0$ de $\mathscr{O}_{X'}$-modules (où $X' = X \times_Y Y'$) est exacte.*

(ii) *Pour que F soit f-plat, il faut et il suffit que F' le soit.*

(i) Considérons un modèle formel $h\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ de f. En vertu de 4.8.18(iv), il existe une suite exacte de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}' \xrightarrow{u} \mathscr{F} \xrightarrow{v} \mathscr{F}'' \longrightarrow 0 \tag{5.10.5.2}$$

dont la fibre rigide est la suite (5.10.5.1). De plus, on peut supposer que $\mathscr{F}''$ est h-plat. En effet, en vertu de 5.8.1, il existe un éclatement admissible de présentation finie $\mathfrak{Y}_1 \to \mathfrak{Y}$ tel que le transformé strict $\mathscr{F}''_1$ de $\mathscr{F}'' \otimes_{\mathfrak{Y}} \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_1}$ soit $\mathfrak{Y}_1$-plat. Soient $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}_1$, $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F} \otimes_{\mathfrak{Y}} \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_1}$, $h_1\colon \mathfrak{X}_1 \to \mathfrak{Y}_1$ la projection canonique, $v_1\colon \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}''_1$ l'homomorphisme surjectif déduit de v, $\mathscr{F}'_1 = \ker v_1$. Alors h_1 est un modèle formel de f, v_1^{rig} s'identifie à v^{rig} (4.7.23), et compte tenu de 4.7.11, la fibre rigide de la suite $0 \to \mathscr{F}'_1 \to \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}''_1 \to 0$ est la suite (5.10.5.1), ce qui démontre notre assertion. La proposition (i) s'en déduit compte tenu de 5.1.4(ii), 4.8.18(ii), 4.7.11, 4.7.23 et (4.7.29.1).

(ii) Cela résulte de ([12] chap. 1 §2.5 prop. 5).

Proposition 5.10.6. *Soient $f\colon X \to Y$ un morphisme d'espaces rigides cohérents, F, F' deux $\mathscr{O}_X$-modules cohérents, $u\colon F' \to F$ un morphisme $\mathscr{O}_X$-linéaire, p un point rigide de X_{ad}, $q = f(p)$; on suppose que F est f-plat au point p. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $(\ker u)_p = 0$ *et* $\operatorname{coker}(u)$ *est f-plat au point p.*

(ii) *L'homomorphisme $(u \otimes 1)_p\colon (F' \otimes_Y \kappa(q))_p \to (F \otimes_Y \kappa(q))_p$ est injectif* (4.8.48).

Notons d'abord que les anneaux locaux $\mathscr{O}_{X,p}$ et $\mathscr{O}_{Y,q}$ sont noethériens (4.8.10), l'homomorphisme $\mathscr{O}_{Y,q} \to \mathscr{O}_{X,p}$ est local (4.8.13) et on a un isomorphisme canonique $(F \otimes_Y \kappa(q))_p \simeq F_p \otimes_{\mathscr{O}_{Y,q}} \kappa(q)$ et de même pour F' (4.8.48). La proposition résulte alors de 1.5.3.

5.10.7. Soient X un espace rigide cohérent, F un $\mathscr{O}_X$-module, g_i $(1 \leq i \leq n)$ une suite de sections de $\mathscr{O}_X$ au-dessus de X. On dit que la suite (g_i) est *F-régulière* si l'endomorphisme de $F/\big(\sum_{j=1}^{i-1} g_j F\big)$ défini par g_i est injectif pour $1 \leq i \leq n$ ([31] 0.15.2.2). Lorsque $F = \mathscr{O}_X$, on dit simplement *suite régulière*. Pour que la suite $(g_i)_{1\leq i\leq n}$ soit F-régulière, il faut et il suffit que, pour tout point p de $X_{\rm ad}$, la suite $((g_i)_p)_{1\leq i\leq n}$ soit F_p-régulière. Si F est cohérent, pour que la suite $(g_i)_{1\leq i\leq n}$ soit F-régulière, il faut et il suffit que, pour tout point rigide p de $X_{\rm ad}$, la suite $((g_i)_p)_{1\leq i\leq n}$ soit F_p-régulière (4.8.21).

Proposition 5.10.8. *Soient $f\colon X \to Y$ un morphisme d'espaces rigides cohérents, F un $\mathscr{O}_X$-module cohérent, p un point rigide de $X_{\rm ad}$, $(g_i)_{1\leq i\leq n}$ une suite de sections de $\mathscr{O}_X$ au-dessus de X telle que l'image de $(g_i)_p$ dans $\kappa(p)$ soit nulle pour tout $0 \leq i \leq n$. Posons $F_i = F/\sum_{j=1}^{i} g_j F$ pour $0 \leq i \leq n$ (avec $F_0 = F$), $q = f(p)$, $X \otimes_Y \kappa(q)$ la fibre de X au-dessus de q (4.8.48) et $F \otimes_Y \kappa(q)$ l'image réciproque de F sur $X \otimes_Y \kappa(q)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *La suite $((g_i)_p)$ est F_p-régulière et les F_i $(0 \leq i \leq n)$ sont f-plats en p.*
- (ii) *La suite $((g_i)_p)$ est F_p-régulière et F_n est f-plat en p.*
- (ii$'$) *Il existe un voisinage U de p dans $\mathbf{Ad}_{/X}$ tel que la suite $(g_i|U)$ soit $(F|U)$-régulière, et F_n est f-plat en p.*
- (iii) *F est f-plat au point p, et la suite $((g_i \otimes 1)_p)$ d'éléments de $(\mathscr{O}_X \otimes_Y \kappa(q))_p$ images des $((g_i)_p)$ est $(F \otimes_Y \kappa(q))_p$-régulière.*

Notons d'abord que les anneaux locaux $\mathscr{O}_{X,p}$ et $\mathscr{O}_{Y,q}$ sont noethériens (4.8.10), l'homomorphisme $\mathscr{O}_{Y,q} \to \mathscr{O}_{X,p}$ est local (4.8.13) et on a un isomorphisme canonique $(F \otimes_Y \kappa(q))_p \simeq F_p \otimes_{\mathscr{O}_{Y,q}} \kappa(q)$ et de même pour $\mathscr{O}_X$ (4.8.48). L'équivalence de (i), (ii) et (iii) résulte alors de ([31] 0.15.1.16), et celle de (ii) et (ii$'$) est immédiate (1.3.11).

Proposition 5.10.9. *Soient $f\colon X \to Y$, $g\colon Y' \to Y$ deux morphismes d'espaces rigides cohérents, F un $\mathscr{O}_X$-module cohérent, $X' = X \times_Y Y'$, $F' = F \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_{Y'}$, $f'\colon X' \to Y'$ la projection canonique. Si F est f-plat, F' est f'-plat ; en particulier, si f est plat, f' est plat.*

Cela résulte de 5.8.9(i), compte tenu de 4.8.18(ii), 5.5.8 et 4.7.23.

Proposition 5.10.10. *Soient $f\colon X \to Y$ un morphisme d'espaces rigides cohérents, F un $\mathscr{O}_X$-module cohérent. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *F est f-plat et pour tout point rigide (Q, j) de Y (4.3.1), il existe un point rigide (P, i) de X tel que (Q, j) majore $(P, f \circ i)$ et que $i^*(F) \neq 0$.*

(ii) *Pour toute immersion ouverte $V \to Y$, si l'on pose $U = X \times_Y V$, le foncteur $G \mapsto G \otimes_{\mathscr{O}_Y} F$ de la catégorie des $\mathscr{O}_V$-modules cohérents dans celle des $\mathscr{O}_U$-modules, est exact et fidèle.*

Cela résulte de 5.5.15 et 4.8.18(ii).

Définition 5.10.11. Lorsque les conditions équivalentes de (5.10.10) sont satisfaites, on dit que le $\mathscr{O}_X$-module cohérent F est *fidèlement plat* relativement à f (ou à Y). On dit que le morphisme f est *fidèlement plat* si $\mathscr{O}_X$ est fidèlement plat relativement à f.

On notera que f est fidèlement plat si et seulement si f est plat et couvrant pour les points rigides (4.3.1).

Proposition 5.10.12. *Considérons un diagramme commutatif de morphismes d'espaces rigides cohérents*

$$\begin{tikzcd} X & X' \arrow[l, "g'"'] \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[from=u, "f"'] & Y' \arrow[l, "g"'] \arrow[d, "h"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

où $X' = X \times_Y Y'$, f' et g' étant les projections canoniques. Soient F un $\mathscr{O}_X$-module cohérent, fidèlement plat relativement à Y, G' un $\mathscr{O}_{Y'}$-module cohérent. Pour que G' soit plat (resp. fidèlement plat) relativement à Z, il faut et il suffit que $F \otimes_{\mathscr{O}_Y} G'$ soit plat (resp. fidèlement plat) relativement à Z.

Montrons d'abord que $F' = F \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_{Y'}$ est fidèlement plat relativement à Y'. On sait déjà que F' est Y'-plat (5.10.9). Soit (Q', j') un point rigide de Y'. Comme F est fidèlement plat relativement à f, il existe un point rigide (P, i) de X tel que $(Q', g \circ j')$ majore $(P, f \circ i)$ et que $i^*(F) \neq 0$. Il est clair que (P, i) induit un point rigide (P, i') de X' tel que (Q', j') majore $(P, f' \circ i')$ et que $i'^*(F') \neq 0$, d'où notre assertion.

Si G' est plat relativement à Z, il en est de même de $F \otimes_{\mathscr{O}_Y} G' = F' \otimes_{\mathscr{O}_{Y'}} G'$ d'après 5.10.3(i). Considérons une immersion ouverte $W \to Z$ et posons $V = Y' \times_Z W$ et $U = X' \times_Z W$; si G' est fidèlement plat relativement à Z, le foncteur

$$H \mapsto H \otimes_{\mathscr{O}_Z} G' \mapsto (H \otimes_{\mathscr{O}_Z} G') \otimes_{\mathscr{O}_{Y'}} F' = H \otimes_{\mathscr{O}_Z} (G' \otimes_{\mathscr{O}_Y} F)$$

de la catégorie des $\mathscr{O}_W$-modules cohérents dans celle des $\mathscr{O}_U$-modules est composé de deux foncteurs exacts et fidèles ; il est donc exact et fidèle. Inversement, si ce foncteur composé est exact (resp. exact et fidèle), il en est de même de $H \mapsto H \otimes_{\mathscr{O}_Z} G'$, puisque le foncteur $M \mapsto M \otimes_{\mathscr{O}_{Y'}} F'$ (de la catégorie des $\mathscr{O}_V$-modules cohérents dans celle des $\mathscr{O}_U$-modules) est exact et fidèle.

Corollaire 5.10.13.

(i) *Soient* $f\colon X \to Y$, $g\colon Y' \to Y$ *deux morphismes d'espaces rigides cohérents,* $X' = X \times_Y Y'$, F *un* $\mathscr{O}_X$*-module cohérent. Si* F *est fidèlement plat relativement à* Y, $F \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_{Y'}$ *est fidèlement plat relativement à* Y'.

(ii) *Soient* $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ *deux morphismes d'espaces rigides cohérents,* F *un* $\mathscr{O}_X$*-module cohérent fidèlement plat relativement à* Y*. Pour que* g *soit un morphisme plat* (*resp. fidèlement plat*)*, il faut et il suffit que* F *soit plat* (*resp. fidèlement plat*) *relativement à* Z.

(iii) *Soient* $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ *deux morphismes d'espaces rigides cohérents,* G *un* $\mathscr{O}_Y$*-module cohérent. On suppose le morphisme* f *fidèlement plat. Pour que* G *soit plat* (*resp. fidèlement plat*) *relativement à* Z*, il faut et il suffit qu'il en soit de même de* $f^*(G)$.

Proposition 5.10.14. *Soit* $f\colon X \to Y$ *un morphisme d'espaces rigides cohérents. Pour que* f *soit plat, il faut et il suffit qu'il se factorise en* $X \xrightarrow{g} U \xrightarrow{j} Y$*, où* g *est un morphisme fidèlement plat et* j *est une immersion ouverte.*

La condition est clairement suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. En vertu de 5.5.8 et 5.8.2, on peut trouver un modèle formel $h\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ de f qui est plat. Comme h est un morphisme ouvert ([31] 2.4.6), il se factorise en $\mathfrak{X} \xrightarrow{l} \mathscr{U} \xrightarrow{k} \mathfrak{Y}$, où l est un morphisme fidèlement plat et k est une immersion ouverte. Les morphismes $g = l^{\mathrm{rig}}$ et $j = k^{\mathrm{rig}}$ répondent à la question compte tenu de 5.5.10(i).

5.11 Descente fidèlement plate des modules cohérents

Les résultats de cette section sont dus à Gabber, Bosch et Görtz [6].

5.11.1. On désigne par $\mathscr{E}$ la catégorie dont les objets sont les schémas formels idylliques appartenant à l'univers $\mathbb{U}$ (4.1.2) et les morphismes sont les morphismes adiques plats, et par $\mathscr{C}$ la $\mathscr{E}$-catégorie fibrée clivée normalisée (1.1.2) obtenue en associant à tout $\mathfrak{X} \in \mathrm{Ob}(\mathscr{E})$ la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents rig-purs (2.10.1.4), et à tout morphisme $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ le foncteur image inverse au sens des modules. La $\mathscr{E}$-catégorie $\mathscr{C}$ est bien définie en vertu de 5.1.13.

Théorème 5.11.2. *Soient* $\mathscr{S}$ *un schéma formel idyllique ayant localement un idéal de définition monogène,* $f\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ *un morphisme de présentation finie et fidèlement plat* (5.1.7)*. Alors* f *est un morphisme de* $\mathscr{C}$*-descente effective.*

Rappelons ([24], [26] VIII) que cela signifie deux choses :

Corollaire 5.11.3. *Les hypothèses étants celles de* (5.11.2)*, soient de plus* $\mathscr{F}$ *et* $\mathscr{G}$ *deux* $\mathscr{O}_{\mathscr{S}}$*-modules cohérents rig-purs,* $\mathscr{F}'$ *et* $\mathscr{G}'$ *leurs images inverses sur* $\mathscr{S}'$, $\mathscr{F}''$ *et* $\mathscr{G}''$ *leurs images inverses sur* $\mathscr{S}'' = \mathscr{S}' \times_{\mathscr{S}} \mathscr{S}'$ *; notons* $p_1, p_2\colon \mathscr{S}'' \rightrightarrows \mathscr{S}'$ *les* *deux projections canoniques. Alors le diagramme d'applications d'ensembles*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(\mathscr{F},\mathscr{G}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}'}(\mathscr{F}',\mathscr{G}') \rightrightarrows \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}''}(\mathscr{F}'',\mathscr{G}'')$$

défini par les foncteurs de changement de base par f, p_1 et p_2 est exact.

En d'autres termes, le foncteur de changement de base par f, $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}'$, définit un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathscr{S}}$-modules cohérents rig-purs dans la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathscr{S}'}$-modules cohérents rig-purs munis d'une donnée de descente relativement à f. De plus,

Corollaire 5.11.4. *Pour tout $\mathscr{O}_{\mathscr{S}'}$-module cohérent rig-pur $\mathscr{F}'$, toute donnée de descente sur $\mathscr{F}'$ relativement à f est effective.*

En d'autres termes, le foncteur pleinement fidèle précédent est même une équivalence.

5.11.5. Comme f est quarrable et que les hypothèses qu'il vérifie sont stables par changement de base (5.1.8), le théorème 5.11.2 équivaut à l'énoncé plus fort que f est un morphisme de $\mathscr{C}$-descente effective universelle.

Soit $(\mathscr{S}_i)$ une famille couvrante d'ouverts formels de $\mathscr{S}$. Il est évident que les injections canoniques $(\mathscr{S}_i \to \mathscr{S})$ forment une famille de $\mathscr{C}$-descente effective universelle. Donc en vertu de ([24] 6.25(i)), pour que $f\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ soit un morphisme de $\mathscr{C}$-descente effective universelle, il faut et il suffit qu'il en soit de même des projections canoniques $f_i\colon \mathscr{S}' \times_{\mathscr{S}} \mathscr{S}_i \to \mathscr{S}_i$ pour tout i. On se ramène ainsi au cas où $\mathscr{S} = \mathrm{Spf}(A)$ est formel affine et A est un anneau idyllique ayant un idéal de définition principal.

Alors $\mathscr{S}'$ est réunion finie d'ouverts formels affines, et prenant le $\mathscr{S}'$-schéma formel somme de ces derniers, on trouve un $\mathscr{S}$-schéma formel affine $\mathscr{S}_1$ et un $\mathscr{S}$-morphisme $\mathscr{S}_1 \to \mathscr{S}'$ plat et surjectif. Par suite, en vertu de ([24] 6.25(ii)), il suffit de montrer le théorème 5.11.2 sous l'hypothèse supplémentaire que f est affine (cette hypothèse est aussi stable par changement de base).

On peut donc se borner au cas où f est affine, $\mathscr{S} = \mathrm{Spf}(A)$ est formel affine et A est un anneau idyllique ayant un idéal de définition principal ; donc l'anneau A' de $\mathscr{S}'$ est topologiquement de présentation finie et fidèlement plat sur A (2.6.11 et 5.1.11). Dans ce cas, 5.11.3 équivaut au

Lemme 5.11.6. *Soient A un anneau idyllique ayant un idéal de définition principal J, engendré par t, A' une A-algèbre topologiquement de présentation finie et fidèlement plate, M et N deux A-modules cohérents rig-purs, M' et N' les A'-modules déduits par le changement d'anneau $A \to A'$, $A'' = A'\widehat{\otimes}_A A'$, M'' et N'' les A''-modules déduits par le changement d'anneau $A \to A''$. Alors le diagramme d'applications d'ensembles*

$$\mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_{A'}(M',N') \rightrightarrows \mathrm{Hom}_{A''}(M'',N'')$$

est exact.

Comme l'homomorphisme $N \to N'$ est injectif (A' étant fidèlement plat sur A), on voit que la première flèche est injective. Il reste à montrer que si un A'-homomorphisme $u' \colon M' \to N'$ est compatible avec les données de descente, alors il provient d'un A-homomorphisme $u \colon M \to N$; ce qui signifie que u' applique le sous-ensemble M de M' dans le sous-ensemble N de N'. Or si $x \in M$, alors $u'(x)$ est un élément dans le noyau du couple d'applications $N' \rightrightarrows N''$. On est donc ramené pour prouver 5.11.6 au cas particulier suivant (correspondant au cas où $M = A$) :

Corollaire 5.11.7. *Sous les hypothèses de* (5.11.6), *pour tout A-module cohérent rig-pur N, le diagramme d'applications d'ensembles*

$$N \to N' \rightrightarrows N''$$

est exact.

Par la théorie classique de la descente fidèlement plate (cf. [26] VIII 1.5), les morphismes A-linéaires

$$\begin{array}{cccc} u_n \colon & A'^{\otimes n} & \longrightarrow & A'^{\otimes(n+1)} \\ & x_1 \otimes \cdots \otimes x_n & \longmapsto & \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x_1 \otimes \cdots \otimes x_{i-1} \otimes 1 \otimes x_i \otimes \cdots \otimes x_n \end{array}$$

induisent une suite exacte

$$0 \to N \to N \otimes_A A' \to N \otimes_A A' \otimes_A A' \to N \otimes_A A' \otimes_A A' \otimes_A A' \to \cdots . \quad (5.11.7.1)$$

On veut montrer que la suite

$$0 \to N \to N \otimes_A A' \to N \otimes_A (A' \widehat{\otimes}_A A') \to N \otimes_A (A' \widehat{\otimes}_A A' \widehat{\otimes}_A A') \to \cdots , \quad (5.11.7.2)$$

déduite de (5.11.7.1) par prolongement aux complétés J-adiques (1.10.2) est exacte. En vertu de ([12] chap. III §2.12 lem. 2), il suffit de montrer que pour tout $n \geq 0$, le morphisme $\mathrm{id}_N \otimes u_n$ est strict pour les topologies J-adiques. Comme tout morphisme surjectif de A-modules est strict, il suffit encore de montrer que, si L_n désigne le noyau de $\mathrm{id}_N \otimes u_n$, l'injection canonique $L_n \to N \otimes_A A'^{\otimes n}$ est stricte. Comme $A'^{\otimes n}$ est A-plat, $N \otimes_A A'^{\otimes n}$ est (t)-pur (1.8.30). Donc L_n est t-saturé dans $N \otimes_A A'^{\otimes n}$, c'est à dire qu'on a

$$L_n = \{x \in N \otimes A'^{\otimes n} \mid t^m x \in L_n \text{ pour un } m \geq 1\},$$

ce qui implique notre assertion (cf. la preuve de 1.9.13).

Remarque 5.11.8. Contrairement à ([6] 2.3), l'auteur ne sait pas si le corollaire (5.11.7) reste vrai lorsque A n'a pas d'idéal de définition principal.

Pour achever la démonstration du théorème 5.11.2, il reste à établir le lemme suivant :

Lemme 5.11.9. *Soient A un anneau idyllique, J un idéal de définition de type fini de A, A' une A-algèbre topologiquement de présentation finie et fidèlement plate, N' un A'-module cohérent muni d'une donnée de descente pour $A \to A'$. Alors, il existe un A-module cohérent tel que N' soit isomorphe avec sa donnée de descente à $N \otimes_A A'$. De plus, si N' est rig-pur, N est rig-pur.*

Posons $A'' = A' \widehat{\otimes}_A A'$, $A_n = A/J^{n+1}$, $A'_n = A' \otimes_A A_n$, $A''_n = A'' \otimes_A A_n$ et $N'_n = N' \otimes_{A'} A'_n$ $(n \geq 0)$. On a alors $A''_n = A'_n \otimes_{A_n} A'_n$, et la donnée de descente pour N' induit une donnée de descente pour N'_n. Par la théorie classique de la descente ([26] VIII 1.6), il existe un A_n-module N_n tel que N'_n soit isomorphe avec sa donnée de descente à $N_n \otimes_{A_n} A'_n$. Comme N'_n est un A'_n-module de présentation finie, N_n est un A_n-module de présentation finie ([26] VIII 1.10), donc cohérent. De plus, il résulte encore de la théorie classique de la descente que les N_n forment un système projectif, et $N_n \otimes_{A_n} A_m = N_m$ pour $m \leq n$. Donc en vertu de 1.10.11, $N = \varprojlim N_n$ est un A-module cohérent. Par passage à la limite projective, on voit que N' est isomorphe avec sa donnée de descente à $N \otimes_A A'$ (1.10.2). La dernière assertion du lemme est évidente puisque A' est fidèlement plat sur A.

Corollaire 5.11.10. *Soient $\mathscr{S}$ un schéma formel idyllique rig-pur ayant localement un idéal de définition monogène, $f\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ un morphisme de présentation finie et fidèlement plat, $\mathscr{S}'' = \mathscr{S}' \times_{\mathscr{S}} \mathscr{S}'$, $g\colon \mathscr{S}'' \to \mathscr{S}$ le morphisme structural. Soient $\mathscr{G}$ un $\mathscr{O}_{\mathscr{S}}$-module cohérent rig-pur, $\mathscr{G}'$ et $\mathscr{G}''$ ses images inverses sur $\mathscr{S}'$ et $\mathscr{S}''$. Alors, le diagramme d'homomorphismes de $\mathscr{O}_{\mathscr{S}}$-modules*

$$\mathscr{G} \to f_*(\mathscr{G}') \rightrightarrows g_*(\mathscr{G}'')$$

est exact.

En effet, cela signifie que pour tout ouvert U de $\mathscr{S}$, le diagramme correspondant formé par les sections sur U est exact. On peut évidemment supposer $U = \mathscr{S}$, et l'exactitude en question est alors un cas particulier de 5.11.3, obtenu en prenant $\mathscr{F} = \mathscr{O}_{\mathscr{S}}$ (qui est rig-pur en vertu de 2.10.15).

Théorème 5.11.11. *Soit $\mathbf{C}$ la catégorie fibrée clivée normalisée des modules cohérents sur les espaces rigides cohérents. Soit $f\colon S' \to S$ un morphisme fidèlement plat d'espaces rigides cohérents. Alors f est un morphisme de $\mathbf{C}$-descente effective.*

Cela signifie deux choses :

Corollaire 5.11.12. *Soit $f\colon S' \to S$ un morphisme fidèlement plat d'espaces rigides cohérents, $S'' = S' \times_S S'$, $p_1, p_2\colon S'' \rightrightarrows S'$ les deux projections canoniques.*

(i) *Soient F et G deux $\mathscr{O}_S$-modules cohérents, F' et G' leurs images inverses sur S', F'' et G'' leurs images inverses sur S''. Alors le diagramme d'applications d'ensembles*

$$\mathrm{Hom}_S(F,G) \to \mathrm{Hom}_{S'}(F',G') \rightrightarrows \mathrm{Hom}_{S''}(F'',G'')$$

défini par les foncteurs de changement de base par f, p_1 et p_2 est exact.

(ii) *Pour tout $\mathscr{O}_{S'}$-module cohérent F', toute donnée de descente sur F' relativement à f est effective.*

Comme f est quarrable et que l'hypothèse qu'il vérifie est stable par changement de base (5.10.13), le théorème 5.11.11 équivaut à l'énoncé plus fort que f est un morphisme de **C**-descente effective universelle.

Soit $g\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ un modèle formel de f tel que $\mathscr{S}$ soit rig-pur et admette localement un idéal de définition monogène. En vertu de 5.5.8, 5.8.2 et 4.1.18, on peut supposer g plat, et donc fidèlement plat (5.5.10). Soient $(\mathscr{S}_i)$ une famille couvrante d'ouverts formels de $\mathscr{S}$, $S_i = \mathscr{S}_i^{\mathrm{rig}}$. D'après ([25] II 3.4.4), les immersions ouvertes $(S_i \to S)$ forment une famille de **C**-descente effective universelle. Donc en vertu de ([24] 6.25(i)), pour que f soit un morphisme de **C**-descente effective universelle, il faut et il suffit qu'il en soit de même des projections canoniques $f_i\colon S' \times_S S_i \to S_i$ pour tout i. On se ramène ainsi au cas où $\mathscr{S} = \mathrm{Spf}(A)$ est formel affine et A est un anneau idyllique ayant un idéal de définition principal.

Alors $\mathscr{S}'$ est réunion finie d'ouverts formels affines, et prenant le $\mathscr{S}'$-schéma formel somme de ces derniers, on trouve un $\mathscr{S}$-schéma formel affine $\mathscr{S}_1$ et un $\mathscr{S}$-morphisme $\mathscr{S}_1 \to \mathscr{S}'$ plat et surjectif. Par suite, en vertu de ([24] 6.25(ii)), il suffit de montrer que si g est affine, f est un morphisme de **C**-descente effective, et donc un morphisme de **C**-descente effective universelle (les hypothèses étant stables par changement de base).

On peut donc se borner au cas où g est affine, $\mathscr{S} = \mathrm{Spf}(A)$ est formel affine et A est un anneau idyllique rig-pur ayant un idéal de définition principal, engendré par t. Par suite, l'anneau A' de $\mathscr{S}'$ est topologiquement de présentation finie et fidèlement plat sur A (2.6.11 et 5.1.11). Posons $A'' = A' \widehat{\otimes}_A A'$ et $A''' = A' \widehat{\otimes}_A A' \widehat{\otimes}_A A'$.

Montrons d'abord 5.11.12(i). Soient M et N deux A-modules cohérents rig-purs tels que $F = (M^{\Delta})^{\mathrm{rig}}$ et $G = (N^{\Delta})^{\mathrm{rig}}$ (4.8.18 et 4.7.12), M' et N' les A'-modules déduits par le changement d'anneau $A \to A'$, M'' et N'' les A''-modules déduits par le changement d'anneau $A \to A''$. L'isomorphisme canonique fonctoriel (4.7.29.2)

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_S}(F, G) \simeq ((\mathrm{Hom}_A(M, N))^{\Delta})^{\mathrm{rig}}$$

induit, d'après 4.7.8 et 2.10.5, un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_S(F, G) \simeq \mathrm{Hom}_A(M, N) \otimes_A A_t;$$

et de même pour (F', G') et (F'', G'') compte tenu de 4.7.23. La proposition 5.11.12(i) résulte alors de 5.11.6.

Montrons ensuite 5.11.12(ii). On note $\pi_i\colon \mathrm{Spec}(A'') \to \mathrm{Spec}(A')$ $(i = 1, 2)$, $p_i\colon \mathrm{Spec}(A''') \to \mathrm{Spec}(A')$ $(i = 1, 2, 3)$ et $p_{ij}\colon \mathrm{Spec}(A''') \to \mathrm{Spec}(A'')$ $(1 \leq i < j \leq 3)$ les projections canoniques. On notera que ces morphismes sont fidèlement plats (1.12.4). Soit M' un A'-module cohérent rig-pur tel que $F' = (M'^{\Delta})^{\mathrm{rig}}$. D'après

4.8.24, la donnée de descente sur F' est équivalente à un isomorphisme A''-linéaire

$$\eta\colon \pi_1^*(M'_t) \xrightarrow{\sim} \pi_2(M'_t)$$

tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} p_1^*(M'_t) \arrow[rr, "p_{12}^*(\eta)"] \arrow[dr, "p_{13}^*(\eta)"'] & & p_2^*(M'_t) \arrow[dl, "p_{23}^*(\eta)"] \\ & p_3^*(M'_t) & \end{tikzcd} \tag{5.11.12.1}$$

soit commutatif. Soit θ le morphisme A'-linéaire

$$M'_t \longrightarrow \pi_1^*(M'_t) \xrightarrow{\eta} \pi_2^*(M'_t)$$

composé de η et du morphisme $x \mapsto x \otimes (1\widehat{\otimes}1)$, où la structure de A'-module sur $\pi_2^*(M'_t)$ est déduite du premier facteur de $A'' = A'\widehat{\otimes}_A A'$. Comme M' est rig-pur, le morphisme de localisation $M' \to M'_t$ est injectif ; donc $\pi_2^*(M')$ s'identifie à un sous-A''-module de $\pi_2^*(M'_t)$. Posons $L' = \theta^{-1}(\pi_2^*(M'))$, qui est un sous-$A'$-module (rig-pur) de M'_t. Si $\delta\colon \mathrm{Spec}(A') \to \mathrm{Spec}(A'')$ désigne le plongement diagonal, alors $\delta^*(\eta)$ est l'identité de M'_t. On en déduit que L' est contenu dans M'. Par ailleurs, comme M' est de type fini sur A', il existe un entier $r \geq 0$ tel que $t^r M' \subset L'$; donc $M'_t = L'_t$.

On établit d'abord les deux lemmes suivants :

Lemme 5.11.12.2. *L'isomorphisme η induit une donnée de descente sur L', i.e., un isomorphisme*

$$\alpha\colon \pi_1^*(L') \xrightarrow{\sim} \pi_2^*(L')$$

vérifiant une condition de cocycle analogue à (5.11.12.1).

If suffit de montrer que $\theta(L') \subset \pi_2^*(L')$. En effet, on en déduirait un morphisme A''-linéaire $\alpha\colon \pi_1^*(L') \to \pi_2^*(L')$ vérifiant une condition de cocycle analogue à (5.11.12.1). Cette dernière induit par le changement de base $A''' \to A''$ défini par $x\widehat{\otimes}y\widehat{\otimes}z \mapsto xz\widehat{\otimes}y$, le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \pi_1^*(L') \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & & \pi_2^*(L') \arrow[dl, "s^*(\alpha)"] \\ & \pi_1^*(L') & \end{tikzcd}$$

où s est l'isomorphisme de $\mathrm{Spec}(A'')$ obtenu en échangeant les facteurs A'. Par suite, α est un isomorphisme, ce qui démontre notre assertion.

Considérons le diagramme commutatif (sans la flèche pointillée)

$$\begin{tikzcd}
 & A'' \otimes_{A'} L' \arrow[r] \arrow[d] & A'' \otimes_{A'} A'' \otimes_{A'} M' \arrow[d] \\
L' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ur, dotted] & A'' \otimes_{A'} M' \arrow[r] \arrow[d] & A'' \otimes_{A'} A'' \otimes_{A'} M'_t \arrow[d] \\
M'_t \arrow[r, "\theta"] & A'' \otimes_{A'} M'_t \arrow[r, "A''\otimes_{A'}\theta"] & A'' \otimes_{A'} A'' \otimes_{A'} M'_t
\end{tikzcd}$$

Le carré de gauche est cartésien, et comme A'' est fidèlement plat sur A', le grand rectangle de droite est aussi cartésien. Il s'agit de montrer que l'on peut compléter le diagramme ci-dessus par la flèche pointillée. Il suffit alors de voir que le morphisme composé

$$M'_t \xrightarrow{\theta} A'' \otimes_{A'} M'_t \xrightarrow{A''\otimes_{A'}\theta} A'' \otimes_{A'} A'' \otimes_{A'} M'_t \tag{5.11.12.3}$$

envoie L' dans $A'' \otimes_{A'} A'' \otimes_{A'} M'$, autrement dit, que le composé de (5.11.12.3) avec le morphisme canonique

$$A'' \otimes_{A'} A'' \otimes_{A'} M'_t \to A'' \otimes_{A'} A'' \otimes_{A'} (M'_t/M')$$

est nul sur L'. Comme M'_t/M' est (t)-nul (1.8.30), le morphisme canonique

$$A'' \otimes_{A'} A'' \otimes_{A'} (M'_t/M') \to (A''\widehat{\otimes}_{A'}A'') \otimes_{A'} (M'_t/M')$$

est un isomorphisme. Il suffit donc de montrer que le composé de (5.11.12.3) avec le morphisme canonique

$$A'' \otimes_{A'} A'' \otimes_{A'} M'_t \to (A''\widehat{\otimes}_{A'}A'') \otimes_{A'} M'_t = p_3^*(M'_t)$$

envoie L' sur $p_3^*(M')$. Ce composé coïncide avec le composé des morphismes

$$M'_t \longrightarrow p_1^*(M'_t) \xrightarrow{p_{12}^*(\eta)} p_2^*(M'_t) \xrightarrow{p_{23}^*(\eta)} p_3^*(M'_t)\ ,$$

et compte tenu de la relation de cocycle (5.11.12.1), est aussi le composé des morphismes

$$M'_t \longrightarrow p_1^*(M'_t) \xrightarrow{p_{13}^*(\eta)} p_3^*(M'_t)\ .$$

Ce dernier envoie L' sur $p_3^*(M')$ car θ envoie L' sur $\pi_2^*(M')$, ce qui démontre l'assertion.

Lemme 5.11.12.4. *Il existe un sous-A'-module cohérent P' de L' et un entier $r \geq 0$ tels que les conditions suivantes soient remplies :*

(i) $t^r M' \subset P' \subset L' \subset M'$ *;*

(ii) *la donnée de descente α sur L' induit une donnée de descente β sur P'.*

Nous avons déjà vu qu'il existe un entier $r \geq 0$ tel que $t^r M' \subset L' \subset M'$. Soient $f_1, \ldots, f_s$ des générateurs du A'-module $t^r M'$. Posons $\overline{A} = A/t^r A$; nous affectons d'un $^-$ les objets déduits d'objets au-dessus de A par le changement d'anneau $A \to \overline{A}$. Par la théorie classique de la descente ([26] 1.3), la donnée de descente $\overline{\alpha}$ sur $\overline{L}'$ relativement à l'homomorphisme $\overline{A} \to \overline{A}'$, est effective ; autrement dit, il existe un $\overline{A}$-module $\overline{N}$ tel que $\overline{L}'$ soit isomorphe avec sa donnée de descente à $\overline{N} \otimes_{\overline{A}} \overline{A}'$. Considérons $\overline{N}$ comme limite inductive filtrante de ses sous-$\overline{A}$-modules de type fini $\overline{N} = \varinjlim \lim \overline{N}_\lambda$; alors

$$\overline{L}' \simeq \overline{N} \otimes_{\overline{A}} \overline{A}' = \varinjlim (\overline{N}_\lambda \otimes_{\overline{A}} \overline{A}'),$$

et chacun des sous-$\overline{A}'$-module $\overline{N}_\lambda \otimes_{\overline{A}} \overline{A}'$ de $\overline{L}'$ est invariant par $\overline{\alpha}$. En particulier, il existe un sous-$\overline{A}'$-module $\overline{P}'$ de $\overline{L}'$, stable par $\overline{\alpha}$ et contenant les classes de $f_1, \ldots, f_s$.

Soit P' l'image réciproque de $\overline{P}'$ par la projection canonique $L' \to \overline{L}'$. Il est clair que α induit une donnée de descente sur P'. Par ailleurs, il existe un sous-A'-module de type fini Q' tel que $P' = Q' + t^r L' \subset Q' + t^r M'$. Comme $f_1, \ldots, f_s \in P'$, on a $P' = Q' + t^r M'$. Par suite, P' est un sous-A'-module de type fini de M', donc cohérent, ce qui démontre le lemme.

5.11.12.5. On peut maintenant achever la démonstration de 5.11.12(ii). En vertu de 5.11.9, la donnée de descente β sur P' est effective ; autrement dit, il existe un A-module cohérent N tel que P' soit isomorphe avec sa donnée de descente à $N \otimes_A A'$. D'autre part, F' est isomorphe à $(P'^{\Delta})^{\mathrm{rig}}$ (5.11.12.4), et sa donnée de descente correspond à β_t (4.8.24) ; elle est donc effective.

5.12 Descente fidèlement plate des morphismes

Proposition 5.12.1. *Soient $\mathscr{S}$ un schéma formel idyllique rig-pur ayant localement un idéal de définition monogène, $f\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ un morphisme fidèlement plat de présentation finie. Alors f est un épimorphisme effectif dans la catégorie des schémas formels.*

En effet, le critère 3.5.8(ii) donne le résultat voulu, compte tenu de 5.11.10 et ([26] VIII 4.3).

Corollaire 5.12.2. *Soient $\mathscr{S}$ un schéma formel idyllique, rig-pur, quasi-compact et ayant localement un idéal de définition monogène, $f\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ un morphisme fidèlement plat de présentation finie. Alors f est un épimorphisme effectif de* $\mathbf{S}$.

Posons $\mathscr{S}'' = \mathscr{S}' \times_{\mathscr{S}} \mathscr{S}'$ et soient $p_1, p_2 \colon \mathscr{S}'' \rightrightarrows \mathscr{S}'$ les projections canoniques. Il s'agit de montrer que pour tout objet $\mathfrak{Z}$ de $\mathbf{S}$, le diagramme d'applications d'ensembles

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(\mathscr{S}, \mathfrak{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(\mathscr{S}', \mathfrak{Z}) \rightrightarrows \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(\mathscr{S}'', \mathfrak{Z}) \qquad (5.12.2.1)$$

obtenu en composant avec f, p_1 et p_2 dans $\mathbf{S}$ est exact. L'injectivité de la première application de (5.12.2.1) est une conséquence immédiatement de 5.12.1. Soit $h\colon \mathscr{S}' \to \mathfrak{Z}$ un morphisme de $\mathbf{S}$ tel que $h \circ p_1 = h \circ p_2$. En vertu de 5.12.1, il existe un morphisme de schémas formels $g\colon \mathscr{S} \to \mathfrak{Z}$ tel que $h = g \circ f$. Il résulte de 5.1.10 que g est de présentation finie, d'où l'exactitude au centre de (5.12.2.1).

Théorème 5.12.3. *Un morphisme fidèlement plat d'espaces rigides cohérents $f\colon S' \to S$ est un épimorphisme effectif de* $\mathbf{R}$.

Cela signifie donc la chose suivante : soient $S'' = S' \times_S S'$, $p_1, p_2\colon S'' \rightrightarrows S'$ les deux projections canoniques. Alors, pour tout objet Z de $\mathbf{R}$, le diagramme d'applications d'ensembles

$$\mathrm{Hom}(S, Z) \to \mathrm{Hom}(S', Z) \rightrightarrows \mathrm{Hom}(S'', Z) \qquad (5.12.3.1)$$

obtenu en composant avec f, p_1 et p_2 est exact.

Considérons un modèle formel $g\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ de f tel que $\mathscr{S}$ soit rig-pur et admette localement un idéal de définition monogène. On notera que g est fidèlement rig-plat (5.5.15). Compte tenu de 5.8.2 et 4.1.18, on peut supposer g plat, et donc fidèlement plat (5.5.10). Par suite, g est un épimorphisme effectif de $\mathbf{S}$ (5.12.2).

Montrons d'abord l'injectivité de la première application de (5.12.3.1). Soient $a_1, a_2\colon S \to Z$ deux morphismes tels que $a_1 f = a_2 f$. Quitte à remplacer $\mathscr{S}$ par un éclatement admissible, on peut supposer que a_1, a_2 admettent des modèles formels $h_1, h_2\colon \mathscr{S} \to \mathfrak{Z}$. Par hypothèse, il existe un éclatement admissible de présentation finie $\varphi\colon \mathscr{S}^\dagger \to \mathscr{S}'$ tel que $h_1 g \varphi = h_2 g \varphi$. Comme $\mathscr{S}'$ est rig-pur (5.1.13), φ est un épimorphisme dans la catégorie des schémas formels en vertu de 3.5.9. Donc $g\varphi$ est un épimorphisme de $\mathbf{S}$, ce qui implique que $h_1 = h_2$ et $a_1 = a_2$.

Montrons ensuite l'exactitude de (5.12.3.1) au centre. Il faut montrer que si $a\colon S' \to Z$ est un morphisme de $\mathbf{R}$ tel que $ap_1 = ap_2$, alors a est de la forme bf, où $b\colon S \to Z$ est un morphisme de $\mathbf{R}$. On représente a par un éclatement admissible de présentation finie $\varphi\colon \mathscr{S}^\dagger \to \mathscr{S}'$ et un morphisme $h\colon \mathscr{S}^\dagger \to \mathfrak{Z}$ de $\mathbf{S}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{S}^\dagger \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "h"] & \\
\mathscr{S}' \arrow[d, "g"'] & \mathfrak{Z} \\
\mathscr{S} &
\end{tikzcd}$$

En vertu de 5.8.2, quitte à remplacer $\mathscr{S}$ par un éclatement admissible et $\mathscr{S}'$ par le transformé strict de l'image inverse de $\mathscr{S}^\dagger$, on peut supposer que a admet un modèle formel $h\colon \mathscr{S}' \to \mathfrak{Z}$. Soient $\mathscr{S}'' = \mathscr{S}' \times_{\mathscr{S}} \mathscr{S}'$, $\pi_1, \pi_2\colon \mathscr{S}'' \to \mathscr{S}'$ les projections canoniques. Par hypothèse, il existe un éclatement admissible de présentation finie $\psi\colon \mathscr{S}^\ddagger \to \mathscr{S}''$ tel que $h\pi_1\psi = h\pi_2\psi$. Par suite, $h\pi_1 = h\pi_2$ car

ψ est un épimorphisme (3.5.9). Comme g est un épimorphisme effectif de $\mathbf{S}$, h est de la forme tg, où $t\colon \mathscr{S} \to \mathfrak{Z}$ est un morphisme de $\mathbf{S}$, ce qui achève la preuve de 5.12.3.

Corollaire 5.12.4. *Soit $\mathscr{F}$ la catégorie fibrée des flèches dans* $\mathbf{R}$ ([26] VI 11.a). *Alors tout morphisme fidèlement plat $f\colon S' \to S$ est un morphisme de $\mathscr{F}$-descente.*

Cela signifie la chose suivante : soient X, Y deux S-espaces rigides cohérents, X', Y' leurs images inverses sur S', X'', Y'' leurs images inverses sur $S'' = S' \times_S S'$. Alors le diagramme canonique d'applications d'ensembles

$$\mathrm{Hom}_S(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{S'}(X', Y') \rightrightarrows \mathrm{Hom}_{S''}(X'', Y'') \qquad (5.12.4.1)$$

est exact. Comme $\mathrm{Hom}_{S'}(X', Y')$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_S(X', Y)$ et $\mathrm{Hom}_{S''}(X'', Y'')$ à $\mathrm{Hom}_S(X'', Y)$, notre assertion résulte de 5.12.3, compte tenu de 5.10.13.

Chapitre 6

Invariants différentiels. Morphismes lisses

Ce chapitre donne les principales propriétés différentielles des espaces rigides cohérents. Nous introduisons d'abord les invariants normaux d'une immersion et les invariants différentiels fondamentaux d'un morphisme. Nous définissons ensuite les morphismes lisses, non ramifiés et étales par les critères infinitésimaux, et nous étudions leurs principales propriétés. Nous donnons enfin quelques critères de lissité, entre autres le *critère jacobien* (6.4.21).

6.1 Invariants normaux d'une immersion

6.1.1. Soit $f\colon Y \to X$ une immersion d'espaces rigides cohérents (4.2.1). D'après 4.8.39, l'homomorphisme canonique

$$\theta_f^\sharp\colon f^{-1}(\mathscr{O}_X) \to \mathscr{O}_Y$$

est un épimorphisme, de sorte que $\mathscr{O}_Y$ s'identifie à un anneau quotient $f^{-1}(\mathscr{O}_X)/I_f$. On peut alors munir $f^{-1}(\mathscr{O}_X)$ de la filtration I_f-adique. L'anneau $f^{-1}(\mathscr{O}_X)/I_f^{n+1}$ est appelé le n-ième *invariant normal* de f, et noté $\mathscr{O}_{Y^{(n)}}$. L'anneaux gradué associé à l'anneau filtré $f^{-1}(\mathscr{O}_X)$

$$\mathrm{Gr}_\bullet(f) = \oplus_{n\geq 0}(I_f^n/I_f^{n+1})$$

est appelé le faisceau d'anneaux gradués associé à f. Le faisceau $\mathrm{Gr}_1(f) = I_f/I_f^2$ est appelé le *faisceau conormal* de f (que l'on note aussi $\mathscr{N}_{Y/X}$ s'il n'en résulte pas de confusion).

Il est clair que $\mathrm{Gr}_\bullet(f)$ est une algèbre graduée sur l'anneau $\mathscr{O}_Y = \mathrm{Gr}_0(f)$, et les $\mathrm{Gr}_n(f)$ des $\mathscr{O}_Y$-modules.

6.1.2. Soient $i\colon U \to X$ une immersion ouverte d'espace rigides cohérents, Y un sous-espace fermé de U défini par un idéal cohérent I de $\mathscr{O}_U$, $j_0\colon Y \to U$ l'injection canonique (4.8.34). Notons $\theta_0^\sharp\colon j_0^{-1}(\mathscr{O}_U) \to \mathscr{O}_Y$ l'homomorphisme canonique et

A. Abbes, *Éléments de Géométrie Rigide*, Progress in Mathematics 286,
DOI 10.1007/978-3-0348-0012-9_6, © Springer Basel AG 2010

$\theta_0 \colon \mathscr{O}_U \to (j_0)_*(\mathscr{O}_Y)$ l'homomorphisme adjoint, qui s'identifie à l'homomorphisme canonique $\mathscr{O}_U \to \mathscr{O}_U/I$. On a $\theta_0^\sharp = \alpha \circ j_0^{-1}(\theta_0)$, où $\alpha \colon j_0^{-1}((j_0)_*(\mathscr{O}_Y)) \to \mathscr{O}_Y$ est l'homomorphisme d'adjonction, qui est un isomorphisme en vertu de 4.6.14. Par suite, $\theta_0^\sharp$ est un épimorphisme de noyau $j_0^{-1}(I)$. On peut appliquer les définitions précédentes à l'immersion $j = i \circ j_0$; $\mathscr{O}_{Y^{(n)}}$ est égal à $j_0^{-1}(\mathscr{O}_U/I^{n+1})$, et l'on a $\mathrm{Gr}_n(j) = \mathrm{Gr}_n(j_0) = j_0^{-1}(I^n/I^{n+1}) = j_0^*(I^n/I^{n+1})$. On en déduit par adjonction des isomorphismes

$$\mathscr{O}_U/I^{n+1} \xrightarrow{\sim} (j_0)_*(\mathscr{O}_{Y^{(n)}}), \tag{6.1.2.1}$$
$$I^n/I^{n+1} \xrightarrow{\sim} (j_0)_*(\mathrm{Gr}_n(j)). \tag{6.1.2.2}$$

En effet, le morphisme (6.1.2.1) est un isomorphisme en chaque point de U_{ad}, en vertu de 4.6.15, 4.6.18 et 4.8.36 ; il est donc un isomorphisme (4.4.6). Comme le foncteur $(j_0)_*$ est exact à gauche, le morphisme (6.1.2.2) est aussi un isomorphisme.

Proposition 6.1.3. *Si $f \colon Y \to X$ est une immersion d'espaces rigides cohérents, les $\mathscr{O}_Y$-modules $\mathrm{Gr}_n(f)$ sont cohérents.*

Cela résulte de 4.8.41 et 6.1.2.

Proposition 6.1.4. *Soient $f \colon Y \to X$ une immersion d'espaces rigides cohérents, q un point de Y_{ad}. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe un voisinage U de q dans $\mathbf{Ad}_{/Y}$ tel que $f|U$ soit une immersion ouverte, autrement dit, f est un isomorphisme local en q.*

(ii) *On a $(\mathscr{N}_{Y/X})_q = 0$.*

On peut évidemment se borner au cas où f est une immersion fermée, et même au cas où Y est un sous-espace fermé de X défini par un idéal cohérent I de $\mathscr{O}_X$. Montrons d'abord que (i) entraîne (ii). On sait (4.2.4) qu'il existe un objet V de $\mathbf{Ad}_{/X}$ tel que U soit Y-isomorphisme à $V \times_X Y$. Il résulte de 4.2.8 que la projection $f' \colon U \to V$ est une immersion ouverte. Comme $\mathscr{N}_{Y/X}|U = \mathscr{N}_{U/V}$, on en déduit que $(\mathscr{N}_{Y/X})_q = 0$. Montrons ensuite que (ii) implique (i) ; posons $p = f(q)$. Compte tenu de (6.1.2.2) et 4.6.15, l'hypothèse (ii) entraîne que $I_p = I_p^2$, et comme I_p est contenu dans l'idéal maximal de $\mathscr{O}_{X,p}$ (4.8.36), on a $I_p = 0$ par le lemme de Nakayama. Par suite, il existe un voisinage V de p dans $\mathbf{Ad}_{/X}$ tel que $I|V = 0$, et la projection canonique $Y \times_X V \to V$ est un isomorphisme (4.8.35).

6.1.5. Soient $f \colon Y \to X$ une immersion d'espaces rigides cohérents, n un entier ≥ 0. Considérons, pour un X-espace rigide cohérent Z, la propriété suivante :

6.1.5.1. La projection canonique $Y \times_X Z \to Z$ est une immersion fermée dont l'idéal associé I de $\mathscr{O}_Z$ vérifie la relation $I^{n+1} = 0$.

Elle définit un crible de X dans la catégorie des espaces rigides cohérents (4.8.35), et donc un sous-objet $Y^{(n)}$ de X dans la catégorie $\widehat{\mathbf{R}}$ (4.1.12) ; notons $f_n \colon Y^{(n)} \to X$ le morphisme structural. On dit que $(Y^{(n)}, f_n)$ est le n-ième *voisinage infinitésimal* de (Y, f), ou que $Y^{(n)}$ est le n-ième voisinage infinitésimal de Y dans X.

Comme f est un monomorphisme (4.2.7), les deux projections canoniques $Y \times_X Y \to Y$ sont des isomorphismes. On a donc un X-morphisme canonique $h_n \colon Y \to Y^{(n)}$. Il est clair que h_0 est un isomorphisme. Pour $0 \leq m \leq n$, on a un X-morphisme canonique $h_{mn} \colon Y^{(m)} \to Y^{(n)}$ vérifiant la relation $h_n = h_{mn} \circ h_m$.

Proposition 6.1.6.

(i) $Y^{(n)}$ *est représentable par un* X*-espace rigide cohérent* (*que l'on note aussi* $Y^{(n)}$ *puisqu'il est unique à isomorphisme unique près*)*.*

(ii) f_n *est une immersion, et* h_n (*resp.* h_{mn} *pour* $0 \leq m \leq n$) *est une immersion fermée d'idéal associé nilpotent ; en particulier,* h_n *induit une équivalence des topos admissibles de* Y *et* $Y^{(n)}$*.*

(iii) *Si* I_f *est le noyau de l'homomorphisme canonique* $f^{-1}(\mathscr{O}_X) \to \mathscr{O}_Y$*,* I_f^{n+1} *est le noyau de l'homomorphisme canonique* $f^{-1}(\mathscr{O}_X) \to h_n^{-1}(\mathscr{O}_{Y^{(n)}})$ *; autrement dit, les notations du* n*-ième voisinage infinitésimal et du* n*-ième invariant normal sont cohérentes.*

Soient $i \colon U \to X$ une immersion ouverte, $j \colon Y \to U$ une immersion fermée telles que $f = i \circ j$. Montrons d'abord que i majore f_n, *i.e.*, que f_n se factorise en

$$Y^{(n)} \xrightarrow{j_n} U \xrightarrow{i} X \;;$$

le morphisme j_n est alors uniquement déterminé (4.2.7). Il suffit de montrer que si $g \colon Z \to X$ est un morphisme d'espaces rigides cohérents vérifiant la propriété (6.1.5.1), i majore g ou, ce qui revient au même, que la projection canonique $p \colon Z \times_X U \to Z$ est un isomorphisme. On sait que le foncteur $p_* \colon (Z \times_X U)_{\mathrm{ad}} \to Z_{\mathrm{ad}}$ est pleinement fidèle (4.6.14), et il résulte de 4.8.37 et (6.1.5.1) qu'il est essentiellement surjectif. Par suite, p est un isomorphisme en vertu de 4.6.21. On a aussi montré que $(Y^{(n)}, j_n)$ est le n-ième voisinage infinitésimal de (Y, j) ; en effet, pour tout U-espace rigide cohérent Z, on a $Y \times_U Z = Y \times_X Z$.

On peut donc se borner au cas où Y est un sous-espace fermé de X défini par un idéal cohérent I de $\mathscr{O}_X$ (4.8.41). Pour tout morphisme d'espaces rigides cohérents $g \colon Z \to X$, la condition (6.1.5.1) équivaut à la condition $g^*(I^{n+1})\mathscr{O}_Z = 0$ (4.8.35), et donc par adjonction, au fait que I^{n+1} est contenu dans le noyau de l'homomorphisme canonique $\mathscr{O}_X \to g_*(\mathscr{O}_Z)$. On en déduit que $Y^{(n)}$ est représentable par le sous-espace fermé de X défini par I^{n+1} (4.8.34). Il est clair que h_n (resp. h_{mn} pour $0 \leq m \leq n$) est une immersion fermée d'idéal associé nilpotent. La dernière proposition de (ii) résulte de 4.8.37, et la proposition (iii) de 6.1.2.

Corollaire 6.1.7. *Soient* X *un espace rigide cohérent,* Y *un sous-espace fermé de* X *défini par un idéal cohérent* I *de* $\mathscr{O}_X$*. Alors le* n*-ième voisinage infinitésimal de* Y *dans* X *est canoniquement isomorphisme au sous-espace fermé de* X *défini par l'idéal* I^{n+1}*.*

Corollaire 6.1.8. *Soient* $f \colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ *une immersion de* $\mathbf{S}$*,* $\mathfrak{Y}^{(n)}$ *le* n*-ième voisinage infinitésimal de* $\mathfrak{Y}$ *dans* $\mathfrak{X}$ (2.14.1)*. Alors* $(\mathfrak{Y}^{(n)})^{\mathrm{rig}}$ *est canoniquement isomorphe* *au n-ième voisinage infinitésimal de $\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}$ dans $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$, et on a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Gr}_n(f^{\mathrm{rig}}) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Gr}_n(f))^{\mathrm{rig}}. \tag{6.1.8.1}$$

On peut clairement se borner au cas où f est une immersion fermée, et même au cas où $\mathfrak{Y}$ est un sous-schéma fermé de $\mathfrak{X}$ défini par un idéal cohérent $\mathscr{I}$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ étant l'injection canonique. Par suite, $\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}$ est le sous-espace fermé de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ défini par l'idéal $\mathscr{I}^{\mathrm{rig}}$ (4.8.34). Comme on a $(\mathscr{I}^n)^{\mathrm{rig}} = (\mathscr{I}^{\mathrm{rig}})^n$ (4.7.11 et (4.7.29.1)), la première assertion résulte de 6.1.7. Pour la seconde assertion, on a $\mathrm{Gr}_n(f^{\mathrm{rig}}) = \underline{f}^{-1}((\mathscr{I}^n/\mathscr{I}^{n+1})^{\mathrm{rig}}) = \underline{f}^*((\mathscr{I}^n/\mathscr{I}^{n+1})^{\mathrm{rig}})$ (6.1.2) et $\mathrm{Gr}_n(f) = f^{-1}(\mathscr{I}^n/\mathscr{I}^{n+1}) = f^*(\mathscr{I}^n/\mathscr{I}^{n+1})$ (2.14.2). On en déduit un isomorphisme canonique $\mathrm{Gr}_n(f^{\mathrm{rig}}) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Gr}_n(f))^{\mathrm{rig}}$ (4.7.23.1).

6.1.9. Considérons un diagramme commutatif d'espaces rigides cohérents

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "u"'] & X' \arrow[d, "v"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd} \tag{6.1.9.1}$$

où f et f' sont deux immersions. Il résulte aussitôt des définitions que pour tout entier $n \geq 0$, on a un morphisme canonique $w_n\colon Y'^{(n)} \to Y^{(n)}$ (qui, pour $n = 0$, s'identifie à u) tel que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} Y'^{(m)} \arrow[r, "h'_n"] \arrow[d, "w_m"'] & Y'^{(n)} \arrow[r, "f'_n"] \arrow[d, "w_n"'] & X' \arrow[d, "v"] \\ Y^{(m)} \arrow[r, "h_n"] & Y^{(n)} \arrow[r, "f_n"] & X \end{tikzcd}$$

soient commutatifs ($m \leq n$). On en déduit un homomorphisme d'anneaux

$$\nu_n\colon u^{-1}(\mathscr{O}_{Y^{(n)}}) \to \mathscr{O}_{Y'^{(n)}}. \tag{6.1.9.2}$$

Par passage au quotient, on obtient un homomorphisme de $u^{-1}(\mathscr{O}_Y)$-algèbres graduées

$$\mathrm{gr}_\bullet(u)\colon u^{-1}(\mathrm{Gr}_\bullet(f)) \to \mathrm{Gr}_\bullet(f'), \tag{6.1.9.3}$$

et par suite un homomorphisme de $\mathscr{O}_{Y'}$-algèbres graduées

$$\mathrm{Gr}_\bullet(u) = \mathrm{gr}_\bullet(u) \otimes 1\colon u^{-1}(\mathrm{Gr}_\bullet(f)) \otimes_{u^{-1}(\mathscr{O}_Y)} \mathscr{O}_{Y'} \to \mathrm{Gr}_\bullet(f'). \tag{6.1.9.4}$$

Proposition 6.1.10. *Supposons que $Y' = Y \times_X X'$, f' et u étant les projections canoniques.*

(i) *On a $Y'^{(n)} = Y^{(n)} \times_X X'$.*

(ii) *L'homomorphisme*

$$u^{-1}(\mathscr{O}_{Y^{(n)}}) \otimes_{(fu)^{-1}(\mathscr{O}_X)} f'^{-1}(\mathscr{O}_{X'}) \to \mathscr{O}_{Y'^{(n)}} \tag{6.1.10.1}$$

déduit de (6.1.9.2) *est bijectif.*

(iii) *L'homomorphisme* $\mathrm{Gr}_\bullet(u)$ (6.1.9.4) *est surjectif.*

En effet, on peut se borner au cas où Y est un sous-espace fermé de X (cf. la preuve de 6.1.6). La proposition résulte alors de 4.8.35, 6.1.2 et 6.1.7.

Proposition 6.1.11. *Soient $g\colon X \to Y$, $u\colon Y' \to Y$ deux morphismes d'espaces rigides cohérents, $X' = X \times_Y Y'$, $g'\colon X' \to Y'$ et $v\colon X' \to X$ les projections canoniques. Soient $f\colon Y \to X$ une section de g (donc une immersion), $f'\colon Y' \to X'$ la section de g' déduite de f par le changement de base u ; notons $(Y^{(n)}, f_n)$ et $(Y'^{(n)}, f'_n)$ les n-ièmes voisinages infinitésimaux de (Y, f) et (Y', f') respectivement. On munit le n-ième invariant normal $\mathscr{O}_{Y^{(n)}}$ de f de la structure de $\mathscr{O}_Y$-algèbre définie par g, et le n-ième invariant normal $\mathscr{O}_{Y'^{(n)}}$ de f' de la structure de $\mathscr{O}_{Y'}$-algèbre définie par g'.*

(i) *La $\mathscr{O}_Y$-algèbre $\mathscr{O}_{Y^{(n)}}$ est cohérente ; le morphisme $g \circ f_n\colon Y^{(n)} \to Y$ est fini, et il identifie $Y^{(n)}$ à $\mathrm{Sp}(\mathscr{O}_{Y^{(n)}})$.*

(ii) *L'homomorphisme*

$$u^{-1}(\mathscr{O}_{Y^{(n)}}) \otimes_{u^{-1}(\mathscr{O}_Y)} \mathscr{O}_{Y'} \to \mathscr{O}_{Y'^{(n)}} \tag{6.1.11.1}$$

déduit de (6.1.9.2) *est bijectif.*

(iii) *L'homomorphisme de $\mathscr{O}_{Y'}$-modules*

$$\mathrm{Gr}_1(u)\colon u^*(\mathrm{Gr}_1(f)) \to \mathrm{Gr}_1(f') \tag{6.1.11.2}$$

est bijectif.

(i) La $\mathscr{O}_Y$-algèbre $\mathscr{O}_{Y^{(n)}}$ est munie d'une augmentation canonique $\mathscr{O}_{Y^{(n)}} \to \mathscr{O}_Y$. L'algèbre graduée associée à la filtration de $\mathscr{O}_{Y^{(n)}}$ définie par l'idéal d'augmentation s'identifie à $\oplus_{0 \le i \le n} \mathrm{Gr}_i(f)$, d'où la première assertion.

Pour montrer que $g \circ f_n$ est fini, il suffit de trouver un morphisme $h\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ de $\mathbf{S}$ et une section $t\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ de h (donc une immersion) tels que $g = h^{\mathrm{rig}}$ et $f = t^{\mathrm{rig}}$ (2.14.6 et 6.1.8). Soient $h_0\colon \mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{Y}_0$ un modèle formel de g, $\varphi\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Y}_0$ un morphisme de $\mathbf{B}$, $t_0\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}_0$ un morphisme de $\mathbf{S}$ tels que le triplet $(\mathfrak{Y}, \varphi, t_0)$ représente f (4.1.7). Quitte à remplacer $(\mathfrak{Y}, \varphi)$ par un objet de $\mathbf{B}_{\mathfrak{Y}_0}$ qu'il majore, on peut supposer $\varphi = h_0 \circ t_0$. On peut alors prendre $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_0 \times_{\mathfrak{Y}_0} \mathfrak{Y}$, $h\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ la projection canonique et $t\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ la section de h déduite de t_0.

La dernière assertion résulte du fait que le morphisme $g \circ f_n$ induit une équivalence des topos admissibles de $Y^{(n)}$ et Y.

(ii) On a $Y'^{(n)} = Y^{(n)} \times_Y Y'$ en vertu de 6.1.10(i). La proposition résulte alors de (i) et 4.8.33.

(iii) Notons I_f (resp. $I_{f'}$) le noyau de l'homomorphisme canonique

$$f^{-1}(\mathscr{O}_X) \to \mathscr{O}_Y \quad \text{(resp. } f'^{-1}(\mathscr{O}_{X'}) \to \mathscr{O}_{Y'}\text{)}.$$

L'homomorphisme canonique (6.1.11.1) est compatible avec les augmentations $\mathscr{O}_{Y^{(n)}} \to \mathscr{O}_Y$ et $\mathscr{O}_{Y'^{(n)}} \to \mathscr{O}_{Y'}$. Comme $\mathscr{O}_{Y^{(n)}}$ est somme directe (en tant que $\mathscr{O}_Y$-module) de $\mathscr{O}_Y$ et de l'idéal de l'augmentation I_f/I_f^{n+1}, on voit donc que l'homomorphisme canonique (6.1.11.1), restreint à $(I_f/I_f^{n+1}) \otimes_{\mathscr{O}_Y} \mathscr{O}_{Y'}$, est une bijection de ce dernier sur $I_{f'}/I_{f'}^{n+1}$. Pour $n = 1$, cela démontre que $\mathrm{Gr}_1(u)$ est bijectif.

6.1.12. Considérons le cas particulier du diagramme (6.1.9.1) où $X' = X$, v étant l'identité, u et f sont deux immersions et $f' = f \circ u$. On identifie $\mathscr{O}_Y$ à $f^{-1}(\mathscr{O}_X)/I_f$, $\mathscr{O}_{Y'}$ à $u^{-1}(\mathscr{O}_Y)/I_u$; comme u^{-1} est un foncteur exact, on a

$$u^{-1}(\mathscr{O}_Y) = u^{-1}(f^{-1}(\mathscr{O}_X))/u^{-1}(I_f) = f'^{-1}(\mathscr{O}_X)/u^{-1}(I_f),$$

et comme $\mathscr{O}_{Y'}$ s'identifie à $f'^{-1}(\mathscr{O}_X)/I_{f'}$, on voit que $I_u \simeq I_{f'}/u^{-1}(I_f)$. On en déduit un homomorphisme canonique de $\mathscr{O}_Y$-algèbres graduées $\mathrm{Gr}_\bullet(f') \to \mathrm{Gr}_\bullet(u)$. Il résulte aussitôt que la suite

$$u^{-1}(I_f)/u^{-1}(I_f)I_{f'} \to I_{f'}/I_{f'}^2 \to I_u/I_u^2 \to 0$$

est exacte.

Proposition 6.1.13. *Soient $f\colon Y \to X$ et $u\colon Y' \to Y$ deux immersions d'espaces rigides cohérents. On a alors une suite exacte canonique de faisceaux conormaux*

$$u^*(\mathscr{N}_{Y/X}) \to \mathscr{N}_{Y'/X} \to \mathscr{N}_{Y'/Y} \to 0.$$

Remarque 6.1.14. Soit

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{Y}' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "u"'] & \mathfrak{X}' \arrow[d, "v"] \\ \mathfrak{Y} \arrow[r, "f"] & \mathfrak{X} \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif de $\mathbf{S}$, où f et f' sont deux immersions. On vérifie facilement que pour tout $n \geq 0$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} (u^*(\mathrm{Gr}_n(f)))^{\mathrm{rig}} \arrow[r, "(\mathrm{Gr}_n(u))^{\mathrm{rig}}"] \arrow[d, equal] & (\mathrm{Gr}_n(f'))^{\mathrm{rig}} \arrow[d, equal] \\ \underline{u}^*(\mathrm{Gr}_n(f^{\mathrm{rig}})) \arrow[r, "\mathrm{Gr}_n(u^{\mathrm{rig}})"] & \mathrm{Gr}_n(f'^{\mathrm{rig}}) \end{tikzcd} \tag{6.1.14.1}$$

où $\mathrm{Gr}_n(u)$ est le morphisme (2.14.4.4) et les identifications verticales proviennent de (6.1.8.1) et (4.7.23.1) est commutatif.

6.2 Invariants différentiels fondamentaux d'un morphisme

Définition 6.2.1. Soient $f\colon X \to S$ un morphisme d'espaces rigides cohérents, $\Delta_f\colon X \to X \times_S X$ le morphisme diagonal correspondant, qui est une immersion (4.2.6). On désigne par $\mathscr{P}_f^n$ ou $\mathscr{P}_{X/S}^n$, et l'on appelle *faisceau des parties principales d'ordre n de f*, l'anneau $\mathscr{O}_X$-augmenté, n-ième invariant normal de Δ_f. On pose $\mathscr{P}_f^\infty = \mathscr{P}_{X/S}^\infty = \varprojlim \mathscr{P}_{X/S}^n$, $\mathrm{Gr}_n(\mathscr{P}_f) = \mathrm{Gr}_n(\mathscr{P}_{X/S}) = \mathrm{Gr}_n(\Delta_f)$; le $\mathscr{O}_X$-module $\mathrm{Gr}_1(\Delta_f)$, idéal d'augmentation de $\mathscr{P}_{X/S}^1$, est aussi noté $\Omega_{X/S}^1$, et appelé le $\mathscr{O}_X$-module des 1-*différentielles* de f.

Il résulte de cette définition que $\mathscr{P}_{X/S}^0$ s'identifie canoniquement à $\mathscr{O}_X$. En vertu de 6.1.3, les $\mathrm{Gr}_n(\mathscr{P}_{X/S})$ sont des $\mathscr{O}_X$-modules cohérents ; en particulier, $\Omega_{X/S}^1$ est un $\mathscr{O}_X$-module cohérent.

6.2.2. Notons p_1, p_2 les deux projections canoniques du produit $X \times_S X$. Chacun de ces morphismes définit, pour tout n, un homomorphisme d'anneaux $\mathscr{O}_X \to \mathscr{P}_{X/S}^n$ inverse à droite de l'augmentation $\mathscr{P}_{X/S}^n \to \mathscr{O}_X$. La structure de $\mathscr{O}_X$-algèbre sur $\mathscr{P}_{X/S}^n$ déduite de p_1 (resp. p_2) sera nommée gauche (resp. droite), et quand on regardera $\mathscr{P}_{X/S}^n$ comme une $\mathscr{O}_X$-algèbre sans préciser, il sera sous-entendu qu'il s'agit de la structure gauche. On notera que $\mathscr{P}_{X/S}^n$ est un $\mathscr{O}_X$-module cohérent. On désigne par d^n l'homomorphisme d'anneaux $\mathscr{O}_X \to \mathscr{P}_{X/S}^n$ déduit de p_2. Pour tout $U \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Ad}_{/X})$ (4.4.1) et tout $t \in \Gamma(U, \mathscr{O}_X)$, on pose $dt = d^1t - t$, et on dit que dt est la *différentielle* de t (élément de $\Gamma(U, \Omega_{X/S}^1)$, aussi noté $d_{X/S}(t)$).

6.2.3. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme de $\mathbf{S}$, $\mathscr{P}_f^n$ le faisceau des parties principales d'ordre n de f, $\mathrm{Gr}_\bullet(\mathscr{P}_f)$ le faisceau d'anneaux gradués associé à f (2.15.1). On a des isomorphismes canoniques de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$-modules $\mathscr{P}_{f^{\mathrm{rig}}}^n \xrightarrow{\sim} (\mathscr{P}_f^n)^{\mathrm{rig}}$ (6.1.8 et 4.7.36) et $\mathrm{Gr}_n(\mathscr{P}_{f^{\mathrm{rig}}}) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Gr}_n(\mathscr{P}_f))^{\mathrm{rig}}$ (6.1.8.1). En particulier, on a un isomorphisme canonique de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$-modules

$$\Omega^1_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}/\mathscr{S}^{\mathrm{rig}}} \xrightarrow{\sim} (\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})^{\mathrm{rig}}. \tag{6.2.3.1}$$

Pour tout ouvert U de $\mathfrak{X}$ et tout $t \in \Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$, si l'on pose $\mathscr{U} = (U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|U)$ et l'on note $\mathtt{t}$ l'image canonique de t dans $\Gamma(\mathscr{U}^{\mathrm{rig}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}})$, $d(\mathtt{t})$ est l'image canonique de $d(t)$ dans $\Gamma(\mathscr{U}^{\mathrm{rig}}, \Omega^1_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}/\mathscr{S}^{\mathrm{rig}}})$.

Proposition 6.2.4. *Soit $f\colon X \to S$ un morphisme d'espaces rigides cohérents. Alors l'image de l'homomorphisme $d_{X/S}\colon \mathscr{O}_X \to \Omega^1_{X/S}$ (6.2.2) engendre le $\mathscr{O}_X$-module $\Omega^1_{X/S}$.*

Cela résulte de 1.14.2(i), 2.15.6 et 6.2.3.

6.2.5. Considérons un diagramme commutatif d'espaces rigides cohérents

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ S' \arrow[r, "w"] & S \end{tikzcd}$$

On en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\Delta_{f'}"'] & X \arrow[d, "\Delta_f"] \\ X' \times_{S'} X' \arrow[r, "v"] & X \times_S X \end{tikzcd}$$

Comme il a été expliqué dans 6.1.9, u et v définissent des homomorphismes d'anneaux augmentés

$$\nu_n \colon u^{-1}(\mathscr{P}^n_{X/S}) \to \mathscr{P}^n_{X'/S'}.$$

Par passage aux quotients, ces homomorphismes donnent un homomorphisme d'algèbres graduées

$$\mathrm{gr}_\bullet(u) \colon u^{-1}(\mathrm{Gr}_\bullet(\mathscr{P}_{X/S})) \to \mathrm{Gr}_\bullet(\mathscr{P}_{X'/S'}).$$

Le diagramme

$$\begin{tikzcd} u^{-1}(\mathscr{O}_X) \arrow[r, "\theta_u^\sharp"] \arrow[d] & \mathscr{O}_{X'} \arrow[d] \\ u^{-1}(\mathscr{P}^n_{X/S}) \arrow[r, "\nu_n"] & \mathscr{P}^n_{X'/S'} \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont celles définissant les structures d'algèbres choisies dans 6.2.2 (*i.e.*, celles provenant des premières projections) est commutatif. On en déduit un homomorphisme canonique de $\mathscr{O}_{X'}$-algèbres

$$\mathrm{P}^n(u) \colon u^*(\mathscr{P}^n_{X/S}) = u^{-1}(\mathscr{P}^n_{X/S}) \otimes_{u^{-1}(\mathscr{O}_X)} \mathscr{O}_{X'} \to \mathscr{P}^n_{X'/S'}. \tag{6.2.5.1}$$

Il s'ensuit un homomorphisme de $\mathscr{O}_{X'}$-algèbres graduées

$$\mathrm{Gr}_\bullet(u) = \mathrm{gr}_\bullet(u) \otimes 1 \colon u^*(\mathrm{Gr}_\bullet(\mathscr{P}_{X/S})) \to \mathrm{Gr}_\bullet(\mathscr{P}_{X'/S'}), \tag{6.2.5.2}$$

et en particulier un homomorphisme de $\mathscr{O}_{X'}$-modules

$$\mathrm{Gr}_1(u) \colon u^*(\Omega^1_{X/S}) \to \Omega^1_{X'/S'}. \tag{6.2.5.3}$$

Proposition 6.2.6. *Supposons que $X' = X \times_S S'$, f' et u étant les projections canoniques. Alors les homomorphismes canoniques* $\mathrm{P}^n(u)$ (6.2.5.1) *et* $\mathrm{Gr}_1(u)$ (6.2.5.3) *sont bijectifs.*

Cela résulte de 6.1.11.

Proposition 6.2.7. *Soient $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ deux morphismes d'espaces rigides cohérents. Considérons les homomorphismes canoniques de $\mathscr{O}_X$-algèbres augmentées* (6.2.5.1)

$$\begin{aligned} g_{X/Y/Z}\colon \mathscr{P}^n_{X/Z} &\to \mathscr{P}^n_{X/Y} \qquad (6.2.7.1)\\ f_{X/Y/Z}\colon f^*(\mathscr{P}^n_{Y/Z}) &\to \mathscr{P}^n_{X/Z}. \qquad (6.2.7.2)\end{aligned}$$

Alors $g_{X/Y/Z}$ est surjectif, et son noyau est l'image par $f_{X/Y/Z}$ de l'idéal d'augmentation de $f^*(\mathscr{P}^n_{Y/Z})$.

On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Delta_f"] \arrow[dr, "f"'] & X \times_Y X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "p"] & X \times_Z X \arrow[d, "f\times_Z f"] \\ & Y \arrow[r, "\Delta_g"] & Y \times_Z Y \end{tikzcd} \qquad (6.2.7.3)$$

où $j = (1_X, 1_X)_Z$, $j \circ \Delta_f = \Delta_{f\circ g}$ et p est le morphisme structural. On voit aussitôt que le carré dans ce diagramme est cartésien ; donc j est une immersion. Les anneaux $\mathscr{O}_X$ et $\mathscr{O}_{X\times_Y X}$ s'identifient respectivement à $\Delta^{-1}_{g\circ f}(\mathscr{O}_{X\times_Z X})/J$ et $j^{-1}(\mathscr{O}_{X\times_Z X})/L$, où J est un idéal de $\Delta^{-1}_{g\circ f}(\mathscr{O}_{X\times_Z X})$ et L est un idéal de $j^{-1}(\mathscr{O}_{X\times_Z X})$ tels que $J \supset \Delta^{-1}_f(L)$. La $\mathscr{O}_X$-algèbre $\mathscr{P}^n_{X/Z}$ s'identifie donc à $\Delta^{-1}_{g\circ f}(\mathscr{O}_{X\times_Z X})/J^{n+1}$, et $\mathscr{P}^n_{X/Y}$ à $\Delta^{-1}_f(\mathscr{O}_{X\times_Y X})/(J/\Delta^{-1}_f(L))^{n+1}$, c'est-à-dire à

$$\Delta^{-1}_{g\circ f}(\mathscr{O}_{X\times_Z X})/(J^{n+1} + \Delta^{-1}_f(L)),$$

et par suite au quotient de $\mathscr{P}^n_{X/Z}$ par $(J^{n+1}+\Delta^{-1}_f(L))/J^{n+1}$. Si $\mathscr{O}_Y$ est identifié à $\Delta^{-1}_g(\mathscr{O}_{Y\times_Z Y})/K$, où K est un idéal de $\Delta^{-1}_g(\mathscr{O}_{Y\times_Z Y})$, L est l'idéal de $j^{-1}(\mathscr{O}_{X\times_Z X})$ engendré par l'image de $p^{-1}(K)$ (4.8.35). La proposition s'ensuit puisque $(J^{n+1} + \Delta^{-1}_f(L))/J^{n+1}$ est l'idéal de $\mathscr{P}^n_{X/Z}$ engendré par l'image de $\Delta^{-1}_f(L)$.

Corollaire 6.2.8. *Avec les notations de* (6.2.7), *on a une suite exacte de $\mathscr{O}_X$-modules*

$$f^*(\Omega^1_{Y/Z}) \xrightarrow{f_{X/Y/Z}} \Omega^1_{X/Z} \xrightarrow{g_{X/Y/Z}} \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow 0\,. \qquad (6.2.8.1)$$

Proposition 6.2.9. *Soient $X \to S$, $Y \to S$ deux morphismes d'espaces rigides cohérents, $Z = X \times_S Y$ leur produit, $p\colon X\times_S Y \to X$ et $q\colon X \times_S Y \to Y$ les projections canoniques. Alors l'homomorphisme canonique*

$$p^*(\Omega^1_{X/S}) \oplus q^*(\Omega^1_{Y/S}) \to \Omega^1_{(X\times_S Y)/S}$$

est bijectif.

Il suffit de calquer la démonstration de ([31] 16.4.23), en utilisant 6.2.6 et 6.2.7 au lieu de ([31] 16.4.5 et 16.4.18).

Proposition 6.2.10. *Soient $f\colon Y \to Z$ un morphisme d'espaces rigides cohérents, $j\colon X \to Y$ une immersion fermée, J l'idéal cohérent de $\mathscr{O}_Y$ correspondant à j.*

Alors on a $\mathscr{P}^n_{X/Y} = \mathscr{O}_X$*, l'homomorphisme canonique* $j_{X/Y/Z}\colon j^*(\mathscr{P}^n_{Y/Z}) \to \mathscr{P}^n_{X/Z}$ (6.2.7.2) *est surjectif, et son noyau est l'idéal de* $j^*(\mathscr{P}^n_{Y/Z})$ *engendré par* $j^*(\mathscr{O}_Y.d^n_{Y/Z}(J))$.

On voit aussitôt que la diagonale $\Delta_j\colon X \to X \times_Y X$ est un isomorphisme (4.2.7), d'où la première assertion. Soient θ_1 et θ_2 les deux homomorphismes d'algèbres $\mathscr{O}_Y \to \mathscr{P}^n_{Y/Z}$ correspondant respectivement aux deux projections canoniques p_1 et p_2 de $Y \times_Z Y$. La $\mathscr{O}_X$-algèbre $j^*(\mathscr{P}^n_{Y/Z})$ s'identifie donc à

$$j^{-1}(\mathscr{P}^n_{Y/Z})/j^{-1}(\theta_1(J)\mathscr{P}^n_{Y/Z})$$

et son quotient par l'idéal engendré par $j^*(\mathscr{O}_Y.d^n_{Y/Z}(J))$ à

$$j^{-1}(\mathscr{P}^n_{Y/Z})/j^{-1}((\theta_1(J)+\theta_2(J))\mathscr{P}^n_{Y/Z}).$$

On a un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\Delta_{f\circ j}"'] & Y \arrow[d, "\Delta_f"] \\ X \times_Z X \arrow[r, "j\times_Z j"] & Y \times_Z Y \end{tikzcd}$$

D'après 4.8.35, $j \times_Z j$ est une immersion fermée et

$$\mathscr{O}_{X\times_Z X} = \mathscr{O}_{Y\times_Z Y}/(p_1^{-1}(J)+p_2^{-1}(J))\mathscr{O}_{Y\times_Z Y}.$$

Par suite, en vertu de 6.1.10(ii), $\mathscr{P}^n_{X/Z}$ s'identifie au quotient de $j^{-1}(\mathscr{P}^n_{Y/Z})$ par l'idéal engendré par l'image dans $j^{-1}(\mathscr{P}^n_{Y/Z})$ de $p_1^{-1}(J)+p_2^{-1}(J)$. Mais cet idéal est aussi engendré par $j^{-1}(\theta_1(J)+\theta_2(J))$.

Corollaire 6.2.11. *Soient* $f\colon Y \to Z$ *un morphisme d'espaces rigides cohérents,* $j\colon X \to Y$ *une immersion. On a une suite exacte de* $\mathscr{O}_X$*-modules*

$$\mathscr{N}_{X/Y} \to j^*(\Omega^1_{Y/Z}) \to \Omega^1_{X/Z} \to 0. \tag{6.2.11.1}$$

Remarque 6.2.12. Soit

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f'"'] & \mathfrak{X} \arrow[d, "f"] \\ \mathscr{S}' \arrow[r, "w"] & \mathscr{S} \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif de $\mathbf{S}$. Il résulte de (6.1.14.1) que le diagramme

$$\begin{tikzcd} (u^*\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})^{\mathrm{rig}} \arrow[r, "(\mathrm{Gr}_1(u))^{\mathrm{rig}}"] \arrow[d, equal] & (\Omega^1_{\mathfrak{X}'/\mathscr{S}'})^{\mathrm{rig}} \arrow[d, equal] \\ \underline{u}^*(\Omega^1_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}/\mathscr{S}^{\mathrm{rig}}}) \arrow[r, "\mathrm{Gr}_1(u^{\mathrm{rig}})"] & \Omega^1_{\mathfrak{X}'^{\mathrm{rig}}/\mathscr{S}'^{\mathrm{rig}}} \end{tikzcd} \tag{6.2.12.1}$$

où les identifications verticales proviennent de (6.2.3.1) et (4.7.23.1) est commutatif.

6.3 Dérivations et déformations infinitésimales

Définition 6.3.1 ([32] II 1.1). Soient $f\colon X \to S$ un morphisme d'espaces rigides cohérents, F un $\mathscr{O}_X$-module. Une *S-dérivation* de $\mathscr{O}_X$ dans F est un homomorphisme de $f^{-1}(\mathscr{O}_S)$-modules $d\colon \mathscr{O}_X \to F$ tel que, pour tous $U \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Ad}_{/X})$ (4.4.1) et $x, y \in \Gamma(U, \mathscr{O}_X)$, on ait

$$d(xy) = xd(y) + yd(x). \tag{6.3.1.1}$$

Il revient au même de dire que pour tout point p de X_{ad}, l'homomorphisme de groupes additifs $d_p\colon \mathscr{O}_{X,p} \to F_p$ est une $\mathscr{O}_{S,f(p)}$-dérivation (4.4.6).

Les S-dérivations de $\mathscr{O}_X$ dans F forment un $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$-module $\mathrm{Dér}_S(\mathscr{O}_X, F)$.

Une autre interprétation consiste à considérer la $\mathscr{O}_X$-algèbre des nombres duaux sur F

$$\mathrm{D}_X(F) = \mathscr{O}_X \oplus F = \mathrm{S}_X(F)/ \oplus_{i\geq 2} \mathrm{S}^i_X(F), \tag{6.3.1.2}$$

où $\mathrm{S}_X(F)$ est l'algèbre symétrique de F sur $\mathscr{O}_X$. On désigne par $\mathscr{O}_S$-Alg$/\mathscr{O}_X$ la catégorie des $f^{-1}(\mathscr{O}_S)$-algèbres au-dessus de $\mathscr{O}_X$. Alors l'application $d \mapsto \mathrm{id}_{\mathscr{O}_X} + d$ est un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{Dér}_S(\mathscr{O}_X, F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S\text{-Alg}/\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X, \mathrm{D}_X(F)). \tag{6.3.1.3}$$

Notons $\mathscr{P}^1_{X/S}$ le faisceau des parties principales d'ordre 1 de f, $\varepsilon\colon \mathscr{P}^1_{X/S} \to \mathscr{O}_X$ l'augmentation canonique et $j_1, j_2\colon \mathscr{O}_X \rightrightarrows \mathscr{P}^1_{X/S}$ les homomorphismes déduits respectivement des deux projections canoniques p_1, p_2 de $X \times_S X$. On rappelle que l'on considère $\mathscr{P}^1_{X/S}$ comme une $\mathscr{O}_X$-algèbre par j_1 (6.2.2). Si $\psi\colon \mathscr{P}^1_{X/S} \to \mathrm{D}_X(F)$ est un homomorphisme de $\mathscr{O}_X$-algèbres augmentées, l'homomorphisme $\psi \circ (j_2 - j_1)$ est clairement une S-dérivation de $\mathscr{O}_X$ dans F.

Définition 6.3.2. On dit qu'une S-dérivation d de $\mathscr{O}_X$ dans F est *bornée* s'il existe un homomorphisme de $\mathscr{O}_X$-algèbres augmentées $\psi\colon \mathscr{P}^1_{X/S} \to \mathrm{D}_X(F)$ tel que $d = \psi \circ (j_2 - j_1)$.

Proposition 6.3.3. *Soit $f\colon X \to S$ un morphisme d'espaces rigides cohérents.*

(i) *Il existe un isomorphisme unique de $\mathscr{O}_X$-algèbres augmentées*

$$\varphi\colon \mathscr{P}^1_{X/S} \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}_X(\Omega^1_{X/S}) \tag{6.3.3.1}$$

qui se réduit à l'identité dans $\Omega^1_{X/S}$.

(ii) *L'homomorphisme $d_{X/S}$* (6.2.2) *est une S-dérivation bornée de $\mathscr{O}_X$ dans $\Omega^1_{X/S}$, ayant la propriété universelle suivante : pour tout $\mathscr{O}_X$-module F, l'application $u \mapsto u \circ d_{X/S}$*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\Omega^1_{X/S}, F) \to \mathrm{Dér}_S(\mathscr{O}_X, F) \tag{6.3.3.2}$$

est injective et a pour image l'ensemble des S-dérivations bornées de $\mathscr{O}_X$ dans F.

(i) Il est immédiat que φ (avec les notations de 6.3.1) est nécessairement le morphisme $z \mapsto (\varepsilon(z), z - j_1(\varepsilon(z)))$, et l'isomorphisme réciproque est le morphisme $(x,t) \mapsto j_1(x) + t$.

(ii) Comme on a $d_{X/S} = j_2 - j_1 = \varphi \circ (j_2 - j_1)$, le morhisme $d_{X/S}$ est une S-dérivation bornée, et d'après (i), l'image de l'application (6.3.3.2) est l'ensemble des S-dérivations bornées de $\mathscr{O}_X$ dans F. D'autre part, l'application (6.3.3.2) est injective en vertu de 6.2.4.

6.3.4. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme de $\mathbf{S}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Rappelons (4.7.24.2) qu'on a un diagramme de morphismes de topos annelés, commutatif à isomorphisme canonique près

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}} \arrow[r, "\underline{f}"] \arrow[d, "\rho_{\mathfrak{X}}"'] & \mathscr{S}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}} \arrow[d, "\rho_{\mathscr{S}}"] \\ \mathfrak{X}_{\mathrm{zar}} \arrow[r, "f"] & \mathscr{S}_{\mathrm{zar}} \end{tikzcd}$$

Si $d\colon \mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}} \to \mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ est une $\mathscr{S}^{\mathrm{rig}}$-dérivation, son image directe $\rho_{\mathfrak{X}*}(d)\colon \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ est un morphisme $\rho_{\mathfrak{X}*}(\underline{f}^{-1}(\mathscr{O}_{\mathscr{S}^{\mathrm{rig}}}))$-linéaire (4.7.8.1). Pour tous ouvert U de $\mathfrak{X}$ et $x, y \in \Gamma(U, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}))$, on a

$$\rho_{\mathfrak{X}*}(d)(xy) = x(\rho_{\mathfrak{X}*}(d)(y)) + y(\rho_{\mathfrak{X}*}(d)(x)).$$

Compte tenu du morphisme de changement de base (1.2.2.2)

$$f^{-1}(\rho_{\mathscr{S}*}(\mathscr{O}_{\mathscr{S}^{\mathrm{rig}}})) \to \rho_{\mathfrak{X}*}(\underline{f}^{-1}(\mathscr{O}_{\mathscr{S}^{\mathrm{rig}}}))$$

et de l'isomorphisme $\rho_{\mathscr{S}*}(\mathscr{O}_{\mathscr{S}^{\mathrm{rig}}}) \simeq \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathscr{S}})$ (4.7.8.1), $\rho_{\mathfrak{X}*}(d)$ est $f^{-1}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathscr{S}}))$-linéaire. On notera que la structure de $f^{-1}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathscr{S}}))$-algèbre sur $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ déduite de ce qui précède est la structure canonique (4.7.24.1). Par suite, $\rho_{\mathfrak{X}*}(d)$ est une $f^{-1}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathscr{S}}))$-dérivation de $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ dans $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$.

Avec les notations de (2.16.16), l'application $d \mapsto \rho_{\mathfrak{X}*}(d)$ est un homomorphisme

$$\mathrm{Dér}_{\mathscr{S}^{\mathrm{rig}}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}, \mathscr{F}^{\mathrm{rig}}) \to \mathrm{Dér}_{\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathscr{S}})}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}), \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})). \tag{6.3.4.1}$$

On a $\Omega^1_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}/\mathscr{S}^{\mathrm{rig}}} \simeq (\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})^{\mathrm{rig}}$ (6.2.3.1). On vérifie facilement que l'image par $\rho_{\mathfrak{X}*}$ de la dérivation canonique $d_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}/\mathscr{S}^{\mathrm{rig}}}$ (6.2.2) est la dérivation canonique $\delta_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ (2.16.16.1).

Proposition 6.3.5. *Soient $f\colon X \to S$ un morphisme d'espaces rigides cohérents, F un $\mathscr{O}_X$-module cohérent. Alors l'application $u \mapsto u \circ d_{X/S}$ (6.2.2)*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\Omega^1_{X/S}, F) \to \mathrm{Dér}_S(\mathscr{O}_X, F) \tag{6.3.5.1}$$

est bijective, autrement dit, toute S-dérivation de $\mathscr{O}_X$ dans F est bornée.

On note d'abord que l'équivalence des deux assertions résulte de 6.3.3(ii). Considérons un modèle formel $h\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ de f tel que $\mathfrak{X}$ admette localement un idéal de définition monogène. On a $F = \mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ où $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent (4.8.18). Pour tout objet $(\mathfrak{X}', \varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\Omega^1_{X/S}, F) \arrow[r, "(6.3.5.1)"] \arrow[d, "\mu_{\varphi*}"'] & \mathrm{Dér}_S(\mathscr{O}_X, F) \arrow[d, "\mu_{\varphi*}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'})}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\Omega^1_{\mathfrak{X}'/\mathscr{S}}), \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F})) \arrow[r, "\theta_\varphi"] & \mathrm{Dér}_{\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathscr{S}})}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}), \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F}))
\end{tikzcd} \tag{6.3.5.2}$$

où $\mu_\varphi\colon : X_{\mathrm{ad}} \to \mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}}$ est le morphisme de topos (4.5.10.2) et $\theta_\varphi(v) = v \circ \delta_{\mathfrak{X}'/\mathscr{S}}$ (2.16.16.1). On sait (2.16.18) que θ_φ est un isomorphisme. On en déduit par 4.5.22 que l'homomorphisme (6.3.5.1) est un isomorphisme.

6.3.6. Considérons deux morphismes d'espaces rigides cohérents $f\colon X \to S$, $g\colon Y \to S$, et un sous-espace fermé Y_0 de Y défini par un idéal *de carré nul* I de $\mathscr{O}_Y$. Supposons donné un S-morphisme $u_0\colon Y_0 \to X$, de sorte qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
Y_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "j"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dotted, "u"] & S
\end{tikzcd} \tag{6.3.6.1}$$

On note $\mathrm{P}_f(Y, u_0)$ l'ensemble des S-morphismes $u\colon Y \to X$ tels que $u_0 = u \circ j$ (autrement dit, l'ensemble des flèches pointillées u qui complètent le diagramme précédent de façon à le laisser commutatif).

Si $h\colon Y' \to Y$ est un morphisme d'espaces rigides cohérents, on pose $Y'_0 = Y' \times_Y Y_0$ et on note $h_0\colon Y'_0 \to Y_0$ la projection canonique. Il résulte de 4.3.13.1 que le foncteur contravariant

$$(Y', h) \mapsto \mathrm{P}_f(Y', u_0 \circ h_0) \tag{6.3.6.2}$$

est un faisceau pour la topologie admissible de $\mathbf{R}_{/Y}$ (4.3.13). Donc il définit, par restriction à $\mathbf{Ad}_{/Y}$ (4.4.1), un faisceau pour la topologie admissible de Y, que l'on note $\mathscr{P}_f(Y, u_0)$.

6.3.7. Conservons les hypothèses de (6.3.6) et soient $P^{(1)}_{X/S}$ le premier voisinage infinitésimal du morphisme diagonal $\Delta_f\colon X \to X \times_S X$, $\delta_1\colon X \to P^{(1)}_{X/S}$ le morphisme canonique, $\pi_1, \pi_2\colon P^{(1)}_{X/S} \rightrightarrows X$ les morphismes déduits respectivement des projections canoniques p_1, p_2 de $X \times_S X$. Pour tout $u, v \in \mathrm{P}_f(Y, u_0)$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} Y_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "j"'] & X \arrow[d, "\Delta_f"] \\ Y \arrow[r, "(u,v)"'] & X \times_S X \end{tikzcd}$$

est commutatif. Il en résulte par 4.6.21 et 4.8.37 que le changement de base de Δ_f par (u, v) est une immersion fermée (dont l'idéal associée est clairement de carré nul). Par suite, (u, v) se factorise uniquement à travers un morphisme $w \colon Y \to P^{(1)}_{X/S}$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} Y_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "j"'] & X \arrow[d, "\delta_1"] \\ Y \arrow[r, "w"] \arrow[dr, "u"'] & P^{(1)}_{X/S} \arrow[d, "\pi_1"] \\ & X \end{tikzcd} \tag{6.3.7.1}$$

soit commutatif. Lorsqu'on fixe $u \in \mathrm{P}_f(Y, u_0)$, il est clair que l'application $v \mapsto w$ est un isomorphisme de $\mathrm{P}_f(Y, u_0)$ sur l'ensemble G_u des morphismes $w \colon Y \to P^{(1)}_{X/S}$ tels que le diagramme (6.3.7.1) soit commutatif. D'autre part, G_u s'identifie à l'ensemble des homomorphismes de $\mathscr{O}_X$-algèbres $\rho \colon \mathscr{P}^1_{X/S} \to u_*(\mathscr{O}_Y)$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{P}^1_{X/S} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & u_*(\mathscr{O}_Y) \arrow[d, "u_*(\theta_j)"] \\ \mathscr{O}_X \arrow[r, "\theta_{u_0}"'] & u_{0*}(\mathscr{O}_{Y_0}) \end{tikzcd}$$

où ε est l'augmentation canonique, soit commutatif (4.8.30). Par suite, G_u est canoniquement isomorphe au module $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\Omega^1_{X/S}, u_*(I))$ (6.3.3.1).

Identifions les topos admissibles de Y_0 et Y (4.8.37), et considérons I comme un $\mathscr{O}_{Y_0}$-module. On obtient une application canonique

$$\mathrm{P}_f(Y, u_0) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{Y_0}}(u_0^*(\Omega^1_{X/S}), I) \to \mathrm{P}_f(Y, u_0). \tag{6.3.7.2}$$

On a démontré la proposition suivante :

Proposition 6.3.8. *Sous les hypothèses de* (6.3.6)*, s'il n'est pas vide,* $\mathrm{P}_f(Y, u_0)$ *est un torseur sous* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{Y_0}}(u_0^*(\Omega^1_{X/S}), I)$*.*

Remarque 6.3.9. Avec les notations de (6.3.7), $\mathrm{P}_f(P^{(1)}_{X/S}, \delta_1)$ est un torseur sous le $\mathscr{O}_X$-module $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\Omega^1_{X/S}, \Omega^1_{X/S})$, et la différence $\pi_2 - \pi_1$ correspond à l'identité de $\Omega^1_{X/S}$.

Corollaire 6.3.10. *Sous les hypothèses de* (6.3.6)*, il existe sur* $\mathscr{P}_f(Y, u_0)$ *une structure de pseudo-torseur sous le* $\mathscr{O}_{Y_0}$*-module* $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{Y_0}}(u_0^*(\Omega^1_{X/S}), I)$ ([31] 16.5.15).

Corollaire 6.3.11. *Sous les hypothèses de* (6.3.6)*, supposons de plus* Y *affinoïde* (4.8.25) *; s'il existe un recouvrement admissible* $(Y_i \to Y)_{i \in I}$ *et, pour tout* $i \in I$*, un* S*-morphisme* $u_i \colon Y_i \to X$ *tel que si* $p_i \colon Y_i \times_Y Y_0 \to Y_i$ *et* $q_i \colon Y_i \times_Y Y_0 \to Y_0$ *sont les projections canoniques, on ait* $u_i \circ p_i = u_0 \circ q_i$*, alors il existe un* S*-morphisme* $u \colon Y \to X$ *tel que* $u \circ j = u_0$*.*

En effet, comme Y_0 est affinoïde et que $\mathscr{G} = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{Y_0}}(u_0^*(\Omega^1_{X/S}), I)$ est un $\mathscr{O}_{Y_0}$-module cohérent, le faisceau $\mathscr{P}_f(Y, u_0)$, qui est par hypothèse un torseur sous $\mathscr{G}$, et non seulement un pseudo-torseur, est trivial en vertu de 4.8.26(ii).

6.4 Morphismes lisses, morphismes non ramifiés, morphismes étales

Définition 6.4.1. Soit $f \colon X \to Y$ un morphisme de $\widehat{\mathbf{R}}$ (4.1.12).

(i) On dit que f est *formellement lisse* (resp. *formellement non ramifié*, resp. *formellement étale*) si, pour tout affinoïde Y' (4.8.25), tout sous-espace fermé Y'_0 de Y' défini par un idéal nilpotent I de $\mathscr{O}_{Y'}$, et tout morphisme $Y' \to Y$, l'application
$$\mathrm{Hom}_Y(Y', X) \to \mathrm{Hom}_Y(Y'_0, X)$$
déduite de l'injection canonique $Y'_0 \to Y'$, est surjective (resp. injective, resp. bijective). On dit encore alors que X est *formellement lisse* (resp. *formellement non ramifié*, resp. *formellement étale*) sur Y.

(ii) Si f est un morphisme d'espaces rigides cohérents, on dit que f est *lisse* (resp. *non ramifié*, resp. *étale*) s'il est formellement lisse (resp. formellement non ramifié, resp. formellement étale). On dit encore alors que X est *lisse* (resp. *non ramifié*, resp. *étale*) sur Y.

Remarque 6.4.2.

(i) Pour vérifier que f est formellement lisse (resp. formellement non ramifié, resp. formellement étale), on peut, dans la définition (6.4.1) se borner au cas où $I^2 = 0$.

(ii) Supposons que X soit un faisceau pour la topologie admissible de $\mathbf{R}$ et que f soit formellement non ramifié (resp. formellement étale). Considérons un Y-espace rigide cohérent quelconque Y' et un sous-espace fermé Y'_0 de Y'

défini par un idéal nilpotent I de $\mathscr{O}_{Y'}$. Alors l'application

$$\mathrm{Hom}_Y(Y', X) \to \mathrm{Hom}_Y(Y'_0, X)$$

déduite de l'injection canonique $Y'_0 \to Y'$ est encore injective (resp. bijective).

Proposition 6.4.3. *La catégorie* $\widehat{\mathbf{R}}$ *vérifie les propriétés suivantes :*

(i) *Un monomorphisme est formellement non ramifié ; en particulier, une immersion d'espaces rigides cohérents est non ramifiée* (4.2.7)*.*
(ii) *Une immersion ouverte d'espaces rigides cohérents est étale.*
(iii) *Le composé de deux morphismes formellement lisses* (*resp. formellement non ramifiés, resp. formellement étales*) *est formellement lisse* (*resp. formellement non ramifié, resp. formellement étale*)*.*
(iv) *Si* $f\colon X \to Y$ *est un morphisme formellement lisse* (*resp. formellement non ramifié, resp. formellement étale*)*, il en est de même de* $f'\colon X \times_Y Y' \to Y'$ *pour tout morphisme* $Y' \to Y$*.*
(v) *Soient* $f\colon X \to Y$*,* $g\colon Y \to Z$ *deux morphismes ; si* $g \circ f$ *est formellement non ramifié, il en est de même de* f*.*
(vi) *Soient* $f\colon X \to Y$*,* $g\colon Y \to Z$ *deux morphismes, et supposons* g *formellement non ramifié. Alors, si* $g \circ f$ *est formellement lisse* (*resp. formellement étale*)*, il en est de même de* f*.*

Cela résulte immédiatement de la définition (6.4.1), sauf pour (ii). Considérons un diagramme commutatif de $\mathbf{R}$

$$\begin{tikzcd} X'_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "j"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ X' \arrow[r, "u"'] & X \end{tikzcd}$$

où f est une immersion ouverte et X'_0 est un sous-espace fermé de X' défini par un idéal nilpotent de $\mathscr{O}_{X'}$. Pour montrer (ii), il suffit de montrer que la projection canonique $f'\colon X' \times_X Y \to X'$ est un isomorphisme. Comme f' est une immersion ouverte, le foncteur $f'_*\colon (X' \times_X Y)_{\mathrm{ad}} \to X'_{\mathrm{ad}}$ est pleinement fidèle (4.6.14). D'autre part, il résulte de 4.8.37 que f'_* est essentiellement surjectif. On en déduit que f' est un isomorphisme en vertu de 4.6.21.

Proposition 6.4.4. *Soit* $f\colon X \to Y$ *un morphisme d'espaces rigides cohérents.*

(i) *Soit* $(\alpha_i\colon X_i \to X)_{i \in I}$ *un recouvrement admissible de* X*. Pour que* f *soit lisse* (*resp. non ramifié, resp. étale*)*, il faut et il suffit que chacun des morphismes* $f \circ \alpha_i$ *le soit.*
(ii) *Soit* $(\beta_j\colon Y_j \to Y)_{j \in J}$ *un recouvrement admissible de* Y*. Pour que* f *soit lisse* (*resp. non ramifié, resp. étale*)*, il faut et il suffit que chacune des projections canoniques* $f_j\colon X \times_Y Y_j \to Y_j$ *le soit.*

Notons d'abord que (ii) est une conséquence de (i) et de 6.4.3. Comme les α_i sont étales, tout revient à montrer que si les $f \circ \alpha_i$ sont lisses (resp. non ramifiés), il en est de même de f. Soient Y' un affinoïde, Y'_0 un sous-espace fermé défini par un idéal nilpotent, $g\colon Y' \to Y$ un morphisme. Supposons donné un Y-morphisme $u_0\colon Y'_0 \to X$ et posons $V_i = X_i \times_X Y'_0$. Soit J un sous-ensemble fini de I tel que $(V_j \to Y'_0)_{j\in J}$ soit encore un recouvrement admissible. En vertu de 4.8.38, il existe un recouvrement admissible $(W_j \to Y')_{j\in J}$ tel que, pour tout $j \in J$, V_j soit Y'_0-isomorphe à $W_j \times_{Y'} Y'_0$. Supposons d'abord que les $f \circ \alpha_i$ soient formellement non ramifiés et montrons que, si u' et u'' sont deux Y-morphismes de Y' dans X dont les restrictions à Y'_0 coïncident, alors on a $u' = u''$. En effet, compte tenu de 4.8.38 et 6.4.2(ii), l'hypothèse entraîne que pour tout $j \in J$, on a $u'|W_j = u''|W_j$. D'où la conclusion dans ce cas.

Supposons maintenant que tous les $f \circ \alpha_i$ soient lisses et prouvons qu'il existe un Y-morphisme $u\colon Y' \to X$ dont u_0 est la restriction à Y'_0. Comme Y' est affinoïde, on peut appliquer 6.3.11 dont les hypothèses sont satisfaites (pour un recouvrement admissible de Y' plus fin que $(W_j \to Y')_{j\in J}$), et dont la conclusion démontre précisément l'existence de u.

Définition 6.4.5. Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme d'espaces rigides cohérents. On dit que f est *lisse* (resp. *non ramifié*, resp. *étale*) *en un point* p de X_{ad} s'il existe un voisinage (U, u) de p dans $\mathbf{Ad}_{/X}$ (1.1.8) tel que $f \circ u$ soit un morphisme lisse (resp. non ramifié, resp. étale) de U dans Y.

Compte tenu de 6.4.4(i), il revient au même de dire que f est un morphisme lisse (resp. non ramifié, resp. étale) ou qu'il est lisse (resp. non ramifié, resp. étale) en chaque point de X_{ad}, et il suffit qu'il soit lisse (resp. non ramifié, resp. étale) en chaque point rigide de X_{ad} (4.4.5).

Proposition 6.4.6. *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme d'espaces rigides cohérents. Pour que f soit non ramifié, il faut et il suffit que l'on ait $\Omega^1_{X/Y} = 0$.*

Si $\Omega^1_{X/Y}$ est nul, f est non ramifié en vertu de 6.3.8. Inversement, supposons f non ramifié. Soient $P^{(1)}_{X/Y}$ le premier voisinage infinitésimal du morphisme diagonal $\Delta_f\colon X \to X \times_Y X$, π_1, π_2 les projections canoniques de $P^{(1)}_{X/Y}$ dans X. Compte tenu de 6.4.2(ii), on a $\pi_1 = \pi_2$. On en déduit par 6.3.9 que l'identité de $\Omega^1_{X/Y}$ est nulle, d'où $\Omega^1_{X/Y} = 0$ (1.3.12).

Proposition 6.4.7. *Soient $f\colon X \to Y$ un morphisme d'espaces rigides cohérents, p un point de X_{ad}. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est non ramifié en p.*

(ii) *Le morphisme diagonal $\Delta_f\colon X \to X \times_Y X$ est un isomorphisme local en p.*

(iii) *On a $(\Omega^1_{X/Y})_p = 0$.*

Si de plus p est un point rigide de X_{ad}, posons $q = f(p)$ et soit X_q la fibre de X au-dessus de q (4.8.48), *ces conditions sont aussi équivalentes aux suivantes :*

(iv) X_q *est non ramifié sur* $\mathrm{Sp}(\kappa(q))$ *en* p.

(v) *L'anneau* $\mathscr{O}_{X_q,p} = \mathscr{O}_{X,p} \otimes_{\mathscr{O}_{Y,q}} \kappa(q)$ *est un corps, extension finie séparable de* $\kappa(q)$.

L'équivalence de (i) et (iii) résulte de 6.4.6 et 1.3.11(iv), et celle de (ii) et (iii) est une conséquence de 6.1.4.

Supposons maintenant que p soit un point rigide de X_{ad}. L'équivalence de (i) et (iii) implique celle de (i) et (iv). En effet, comme $\Omega^1_{X/Y}$ est un $\mathscr{O}_X$-module de type fini, il résulte du lemme de Nakayama que la condition (iii) est équivalente à $(\Omega^1_{X/Y})_p \otimes_{\mathscr{O}_{Y,q}} \kappa(q) = 0$, c'est à dire à $(\Omega^1_{X_q/\mathrm{Sp}(\kappa(q))})_p = 0$.

Il reste à établir l'équivalence de (v) et des autres conditions. On peut se borner au cas où $Y = \mathrm{Spf}(A)^{\mathrm{rig}}$ et A est un ordre 1-valuatif, q étant l'unique point de Y_{ad} ; soit K le corps des fractions de A. On notera qu'en vertu de 6.1.4, il revient au même de dire que $\mathscr{O}_{X,p}$ est un corps (donc égal à $\kappa(p)$), ou que le morphisme canonique $i_p\colon \mathrm{Sp}(\kappa(p)) \to X$ est un isomorphisme local (donc une immersion ouverte (4.2.9)), ou encore qu'il est plat.

(v)⇒(iii). Comme i_p est une immersion ouverte, on peut se borner au cas où $X = \mathrm{Spf}(B)^{\mathrm{rig}}$ et B est une A-algèbre topologiquement de présentation finie et un ordre 1-valuatif de corps des fractions L, extension finie séparable de K, p étant l'unique point de X_{ad} et $\kappa(p) = L$ (3.3.12). Par suite, B est un A-module cohérent (1.11.5), et on a $\widehat{\Omega}^1_{B/A} = \Omega^1_{B/A}$ (1.10.2). Comme $\Omega^1_{L/K} = 0$ ([31] 0.20.6.20), on en déduit que $(\widehat{\Omega}^1_{B/A})^{\mathrm{rig}} = 0$ (4.7.10).

(ii)⇒(v). Si $Y = \mathrm{Sp}(\kappa(p))$ et si i_p est une section de f, le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sp}(\kappa(p)) \arrow[r, "i_p"] \arrow[d, "i_p"'] & X \arrow[d, "i_p \times_Y \mathrm{id}_X"] \\ X \arrow[r, "\Delta_f"] & X \times_Y X \end{tikzcd}$$

montre que i_p est un isomorphisme local. Dans le cas général, les conditions équivalentes (i) et (ii) étant stables par changement de base (6.4.3), le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sp}(\kappa(p)) \arrow[rr, "\mathrm{id} \times i_p"] \arrow[dr, "i_p"'] & & \mathrm{Sp}(\kappa(p)) \times_Y X \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

et le fait $\mathrm{id} \times i_p$ soit un isomorphisme local impliquent que i_p est plat ; donc $\mathscr{O}_{X,p} = \kappa(p)$ et i_p est une immersion ouverte. Pour montrer la seconde assertion de (v), on peut alors se borner au cas où $X = \mathrm{Spf}(B)^{\mathrm{rig}}$ et B est une A-algèbre topologiquement de présentation finie et un ordre 1-valuatif, de corps des fractions L, p étant l'unique point de X_{ad} et $\kappa(p) = L$. D'une part on a $(\widehat{\Omega}^1_{B/A})^{\mathrm{rig}} = 0$ car les conditions (ii) et (iii) sont équivalentes. D'autre part on a $\widehat{\Omega}^1_{B/A} = \Omega^1_{B/A}$ car B est un A-module cohérent. On en déduit que $\Omega^1_{L/K} = 0$ (4.8.24), et par suite que L est une extension finie séparable de K ([31] 17.4.1).

Proposition 6.4.8. *Soient A un anneau idyllique, $B = A\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$ une algèbre de séries formelles restreintes sur A, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B)$, $\mathscr{S} = \mathrm{Spf}(A)$, $f \colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ le morphisme structural. Alors $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ est lisse sur $\mathscr{S}^{\mathrm{rig}}$.*

Soient S' un affinoïde, S'_0 un sous-espace fermé défini par un idéal nilpotent, $j \colon S'_0 \to S'$ l'injection canonique, $h \colon S' \to \mathscr{S}^{\mathrm{rig}}$ un morphisme. Supposons donné un $\mathscr{S}^{\mathrm{rig}}$-morphisme $u_0 \colon S'_0 \to \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ et montrons qu'il existe un $\mathscr{S}^{\mathrm{rig}}$-morphisme $u \colon S' \to \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ tel que $u_0 = u \circ j$. Compte tenu de 3.2.4 et 6.3.11, on peut se réduire au cas où on a un diagramme commutatif de $\mathbf{S}$

$$\begin{tikzcd} \mathscr{S}'_0 \arrow[r, "v_0"] \arrow[d, "i"'] & \mathfrak{X} \arrow[d, "f"] \\ \mathscr{S}' \arrow[r, "g"] & \mathscr{S} \end{tikzcd}$$

tel que $\mathscr{S}'$ soit formel affine globalement idyllique, i soit une immersion fermée (pas nécessairement nilpotente), $j = i^{\mathrm{rig}}$, $h = g^{\mathrm{rig}}$ et $u_0 = v_0^{\mathrm{rig}}$. Par suite, en vertu de la propriété universelle de B ([12] III 4.2 prop. 4), il existe un $\mathscr{S}$-morphisme $v \colon \mathscr{S}' \to \mathfrak{X}$ qui prolonge v_0, d'où la proposition.

Proposition 6.4.9. *Soient A un anneau idyllique, J un idéal de définition de A, M un A-module projectif de type fini, N un A-module cohérent, $u \colon N \to M$ un morphisme A-linéaire ; posons $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathscr{F} = M^{\Delta}$, $\mathscr{G} = N^{\Delta}$, $X = \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ et $h = (u^{\Delta})^{\mathrm{rig}} \colon \mathscr{G}^{\mathrm{rig}} \to \mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *u est localement inversible à gauche sur* $\mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$.

(ii) *Pour toute A-algèbre B et tout point $\mathfrak{q}$ de $\mathrm{Spec}(B) - \mathrm{V}(JB)$, l'homomorphisme $u \otimes_A \kappa(\mathfrak{q})$ est injectif.*

(iii) *Pour tout point fermé $\mathfrak{p}$ de $\mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$, l'homomorphisme $u \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$ est injectif.*

(iv) *h est localement inversible à gauche relativement au site admissible de X.*

(v) *Pour tout point p de X_{ad}, si on désigne par $\kappa(p)$ le corps résiduel de $\mathscr{O}_{X,p}$, l'homomorphisme $h_p \otimes \kappa(p)$ est injectif.*

(vi) *La condition* (v) *est remplie par tout point rigide p de X_{ad}.*

En effet, les conditions (iv), (v) et (vi) sont équivalentes en vertu de 1.3.15. De même, comme $\mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$ est un schéma de Jacobson (1.11.9), les conditions (i), (ii) et (iii) sont équivalentes. Enfin, on a (ii)$\Rightarrow$(vi)$\Rightarrow$(iii) compte tenu de 3.3.2, 4.8.9 et (4.8.15.1).

Corollaire 6.4.10. *Soient A un anneau idyllique, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie et formellement lisse sur A, C une A-algèbre topologiquement de présentation finie, $\varphi \colon B \to C$ un homomorphisme surjectif ; posons*

$X = \mathrm{Spf}(C)^{\mathrm{rig}}$, $Y = \mathrm{Spf}(B)^{\mathrm{rig}}$, $S = \mathrm{Spf}(A)^{\mathrm{rig}}$ *et soit* $i\colon X \to Y$ *l'immersion fermée déduite de* φ. *Pour que* C *soit rig-lisse sur* A (1.14.7), *il faut et il suffit que l'homomorphisme canonique*

$$h\colon \mathscr{N}_{X/Y} \to i^*(\Omega^1_{Y/S}) \tag{6.4.10.1}$$

soit localement inversible à gauche.

En effet, si $\mathfrak{I}$ est le noyau de φ et $\widehat{\delta}\colon \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \to \widehat{\Omega}^1_{B/A} \otimes_B C$ est l'homomorphisme canonique (1.14.4.1), on a $h = (\widehat{\delta}^{\Delta})^{\mathrm{rig}}$. Comme $\widehat{\Omega}^1_{B/A}$ est un B-module projectif de type fini (1.14.2), on peut appliquer 6.4.9, dont l'équivalence de (i) et (iv) démontre le corollaire.

Corollaire 6.4.11. *Soient* A *un anneau idyllique,* C *une* A*-algèbre topologiquement de présentation finie et rig-lisse ; posons* $X = \mathrm{Spf}(C)^{\mathrm{rig}}$, $S = \mathrm{Spf}(A)^{\mathrm{rig}}$ *et soit* $f\colon X \to S$ *le morphisme structural. Alors* $\Omega^1_{X/S}$ *est un* $\mathscr{O}_X$*-module localement libre de type fini.*

Cela résulte de 6.4.10, (6.2.11.1) et 1.3.16.

Proposition 6.4.12. *Soient* A *un anneau idyllique,* C *une* A*-algèbre topologiquement de présentation finie ; posons* $X = \mathrm{Spf}(C)^{\mathrm{rig}}$, $S = \mathrm{Spf}(A)^{\mathrm{rig}}$ *et soit* $f\colon X \to S$ *le morphisme structural. Pour que* f *soit lisse* (*resp. étale*)*, il faut et il suffit que* C *soit une* A*-algèbre rig-lisse* (*resp. rig-étale*)*.*

Notons d'abord que le cas étale résulte du cas lisse, 6.4.6 et (6.2.3.1). Pour démontrer la proposition dans le cas lisse, considérons un homomorphisme surjectif $\varphi\colon B \to C$ où $B = A\langle \xi_1, \ldots, \xi_n\rangle$ est une algèbre de séries formelles restreintes sur A. Posons $Y = \mathrm{Spf}(B)^{\mathrm{rig}}$ et soient $i\colon X \to Y$ l'immersion fermée déduite de φ, I l'idéal de $\mathscr{O}_Y$ associé à i. Compte tenu de 6.4.10, tout revient à voir que f est lisse si et seulement si l'homomorphisme canonique

$$h\colon i^*(I) \to i^*(\Omega^1_{Y/S}) \tag{6.4.12.1}$$

est localement inversible à gauche.

Supposons d'abord h localement inversible à gauche. Soient S' un affinoïde, S'_0 un sous-espace fermé défini par un idéal de carré nul J de $\mathscr{O}_{S'}$, $j\colon S'_0 \to S'$ l'injection canonique, $g\colon S' \to S$ un morphisme. Supposons donné un S-morphisme $u_0\colon S'_0 \to X$ et montrons qu'il existe un S-morphisme $u\colon S' \to X$ tel que $u_0 = u \circ j$. Comme Y est lisse sur S (6.4.8), il existe un S-morphisme $v\colon S' \to Y$ tel que $i \circ u_0 = v \circ j$

$$\begin{tikzcd} S'_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[dd, "j"'] & X \arrow[d, "i"] \\ & Y \arrow[d] \\ S' \arrow[ur, "v"] \arrow[r, "g"'] & S \end{tikzcd}$$

Soit $\theta_v\colon \mathscr{O}_Y \to v_*(\mathscr{O}_{S'})$ l'homomorphisme induit par v. En vertu de 4.8.30, pour qu'il existe un morphisme $u\colon S' \to X$ tel que $v = i \circ u$, il faut et il suffit que l'on ait $\theta_v(I) = 0$; un tel morphisme est unique et vérifie $u_0 = u \circ j$ d'après 4.2.7 ; il répond donc à la question. On a en général $\theta_v(I) \subset v_*(J)$; comme $J^2 = 0$, θ_v induit un homomorphisme de I/I^2 dans $v_*(J)$. Identifiant les topos admissibles de S'_0 et S' (4.8.37), l'homomorphisme canonique (6.1.9.4)

$$\mathrm{Gr}_1(v)\colon u_0^*(i^*(I)) \to j^*(J)$$

s'interprète comme un homomorphisme de $v^*(I/I^2)$ dans J, dont l'homomorphisme adjoint $I/I^2 \to v_*(J)$ est induit par θ_v. Par suite, $\theta_v(I) = 0$ si et seulement si $\mathrm{Gr}_1(v) = 0$.

D'autre part, l'ensemble des S-morphismes $v\colon S' \to Y$ tels que $i \circ u_0 = v \circ j$ est un torseur sous $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{S'_0}}(u_0^*(i^*(\Omega^1_{Y/S})), J)$ (6.3.8). Si $v\colon S' \to Y$ est un tel morphisme et si $\psi\colon u_0^*(i^*(\Omega^1_{Y/S})) \to J$ est un morphisme $\mathscr{O}_{S'_0}$-linéaire, on a

$$\mathrm{Gr}_1(v + \psi) - \mathrm{Gr}_1(v) = \psi | u_0^*(i^*(I)). \tag{6.4.12.2}$$

Comme h est localement inversible à gauche, on en déduit qu'il existe un recouvrement admissible $(S'_\alpha \to S')_{\alpha \in E}$ et pour tout $\alpha \in E$, un S-morphisme $v_\alpha\colon S'_\alpha \to Y$ tel que $\mathrm{Gr}_1(v_\alpha) = 0$ (où $\mathrm{Gr}_1(v_\alpha)$ est défini comme plus haut en remplaçant j par sa restriction au-dessus de S'_α) (4.8.38). Par suite, pour tout $\alpha \in E$, il existe un S-morphisme $u_\alpha\colon S'_\alpha \to X$ tel que si $p_\alpha\colon S'_0 \times_{S'} S'_\alpha \to S'_\alpha$ et $q_\alpha\colon S'_0 \times_{S'} S'_\alpha \to S'_0$ sont les projections canoniques, on ait $u_\alpha \circ p_\alpha = u_0 \circ q_\alpha$. On conclut par 6.3.11 qu'il existe un S-morphisme $u\colon S' \to X$ tel que $u \circ j = u_0$, autrement dit que f est lisse.

Supposons ensuite f lisse. Compte tenu de 6.4.3(iv), pour montrer que h est localement inversible à gauche, on peut se borner au cas où A admet un idéal de définition monogène. Soient $X^{(1)}$ le premier voisinage infinitésimal de X dans Y, qui s'identifie au sous-espace fermé de Y défini par l'idéal I^2, $h_1\colon X \to X^{(1)}$ le morphisme canonique. Il résulte des hypothèses que $X^{(1)}$ est un affinoïde ; donc il existe un S-morphisme $u\colon X^{(1)} \to X$ tel que $u \circ h_1$ soit l'identité de X. L'ensemble des S-morphismes $v\colon X^{(1)} \to X^{(1)}$ tels que $v \circ h_1 = h_1$ est un torseur sous $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(h_1^*(\Omega^1_{X^{(1)}/S}), i^*(I))$ (6.3.8). Par suite, la différence $\mathrm{id}_{X^{(1)}} - h_1 \circ u$ induit un morphisme $\mathscr{O}_X$-linéaire $i^*(\Omega^1_{Y/S}) \to i^*(I)$, qui est clairement un inverse à gauche de h (6.4.12.2).

Corollaire 6.4.13. *Si $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ est un morphisme lisse* (*resp. étale*) *de* $\mathbf{S}$, f^{rig} *est lisse* (*resp. étale*).

On peut se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B)$ et $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A)$ sont formels affines globalement idylliques, B étant une A-algèbre topologiquement de présentation finie et formellement lisse (resp. formellement étale) (6.4.4). Comme B est rig-lisse sur A, f^{rig} est lisse en vertu de 6.4.12. Si f est étale, $\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} = 0$; donc f^{rig} est non ramifié en vertu de 6.4.6 et (6.2.3.1), et par suite étale.

Corollaire 6.4.14. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de* $\mathbf{S}$, $g\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$ *un morphisme de* $\mathbf{S}^+$, $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}'$, $f'\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{Y}'$ *et* $g'\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ *les projections canoniques. Si* f^{rig} *est lisse* (*resp. étale*)*, il en est de même de* f'^{rig}.

On peut se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B)$, $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A)$ et $\mathfrak{Y}' = \mathrm{Spf}(A')$ sont formels affines globalement idylliques, B étant une A-algèbre topologiquement de présentation finie (6.4.4). Si f^{rig} est lisse, B est rig-lisse sur A en vertu de 6.4.12. Donc $B\widehat{\otimes}_A A'$ est topologiquement de présentation finie et rig-lisse sur A' en vertu de 1.14.11 ; par suite f'^{rig} est lisse (6.4.12). Compte tenu de 4.7.23 et (6.2.3.1), l'isomorphisme $\Omega^1_{\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}'} \simeq g'^*(\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}})$ (2.15.4) induit un isomorphisme

$$\Omega^1_{\mathfrak{X}'^{\mathrm{rig}}/\mathfrak{Y}'^{\mathrm{rig}}} \simeq \underline{g}'^*(\Omega^1_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}/\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}}).$$

Par suite, si f^{rig} est étale, f'^{rig} est non ramifié (6.4.6), et donc étale.

Corollaire 6.4.15. *Soient X un schéma cohérent, X' un sous-schéma fermé, $f\colon Y \to X$ un morphisme de présentation finie, lisse* (*resp. étale*) *en dehors de X', $\widehat{X} = X_{/X'}$ le complété de X le long de X', $\widehat{Y}$ le complété de Y le long de l'image réciproque de X', $\hat{f}\colon \widehat{Y} \to \widehat{X}$ le prolongement de f aux complétés. Supposons la paire* (X, X') *idyllique* (2.6.17). *Alors le morphisme $\hat{f}^{\mathrm{rig}}\colon \widehat{Y}^{\mathrm{rig}} \to \widehat{X}^{\mathrm{rig}}$ est lisse* (*resp. étale*).

On peut se borner au cas où X et Y sont affines (6.4.4). Comme f est lisse en dehors de X', $\hat{f}^{\mathrm{rig}}$ est lisse en vertu de 1.14.14 et 6.4.12. Si $\iota\colon \widehat{Y} \to Y$ désigne le morphisme canonique d'espaces annelés (2.5.3), on a $\iota^*(\Omega^1_{Y/X}) \simeq \Omega^1_{\widehat{Y}/\widehat{X}}$ (2.5.5). Si f est étale en dehors de X', $\Omega^1_{\widehat{Y}/\widehat{X}}$ est rig-nul (2.10.10 et [28] 6.8.4) ; donc $\hat{f}^{\mathrm{rig}}$ est non ramifié en vertu de 6.4.6 et (6.2.3.1), et par suite étale.

Remarque 6.4.16. On peut déduire la proposition 1.14.10 de 6.4.12. En effet, si $\mathfrak{a}$ désigne l'idéal des éléments de torsion topologique de A (1.8.30.1), B est rig-lisse sur A si et seulement si $B/\mathfrak{a}B$ est rig-lisse sur $A/\mathfrak{a}$. On peut donc se borner au cas où A est idyllique (1.9.16), auquel cas la proposition 1.14.10 résulte de 6.4.3(iii) et 6.4.12.

Proposition 6.4.17. *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme lisse d'espaces rigides cohérents.*

(i) *Le $\mathscr{O}_X$-module $\Omega^1_{X/Y}$ est localement libre de rang fini.*

(ii) *Pour tout morphisme lisse d'espaces rigides cohérents $g\colon Y \to Z$, la suite canonique de $\mathscr{O}_X$-modules*

$$0 \to f^*(\Omega^1_{Y/Z}) \to \Omega^1_{X/Z} \to \Omega^1_{X/Y} \to 0 \qquad (6.4.17.1)$$

est exacte et localement scindée.

Les questions étant locales (6.4.4), la proposition (i) résulte de 6.4.11 et 6.4.12, et la proposition (ii) de 6.2.8, 1.14.12, 6.4.9 et 6.4.12.

Proposition 6.4.18. *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme d'espaces rigides cohérents, lisse en un point rigide p de X_{ad}. Alors le rang du $\mathscr{O}_{X,p}$-module libre $(\Omega^1_{X/Y})_p$ est égal à* $\dim_p(X/Y)$.

La preuve est analogue à celle de 5.9.4. On peut se borner au cas où f est lisse. Posons $q = f(p)$. Comme la fibre de $\Omega^1_{X/Y} \otimes_Y \kappa(q)$ en p est isomorphe à $(\Omega^1_{X/Y})_p \otimes_{\mathscr{O}_{Y,q}} \kappa(q)$ (4.8.48), on peut remplacer Y par $\mathrm{Sp}(\kappa(q))$ et f par sa fibre au-dessus de q. Soient alors R un ordre 1-valuatif, $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(R)$, $h\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un modèle formel de f. On peut supposer que R admet un idéal de définition principal I (3.3.12) et que $\mathfrak{X}$ est rig-pur. Soit $\mathscr{P}$ un point rigide de $\mathfrak{X}$ définissant p (4.1.20). On peut évidemment se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ est formel affine et $\mathscr{P}$ est fermé dans $\mathfrak{X}$. Par suite, A est topologiquement de présentation finie et rig-lisse sur R (6.4.12). Soit K le corps des fractions de R. On rappelle que $\mathscr{P}$ détermine un point fermé de $\mathrm{Spec}(A \otimes_R K)$, donc un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, et que l'on a $\dim_p(\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}) = \dim(A_{\mathfrak{p}})$ (4.9.15). D'après 1.16.29, il existe une R-algèbre de présentation finie A', lisse sur $\mathrm{Spec}(R)$ en dehors de $\mathrm{V}(I)$, dont le séparé complété pour la topologie I-préadique est R-isomorphe à A. Choisissons un tel isomorphisme et soient $\varphi\colon A' \to A$ l'homomorphisme induit, $\mathfrak{p}' = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$. Il résulte de 1.12.20 que $\mathfrak{p}'$ définit un point fermé de $\mathrm{Spec}(A' \otimes_R K)$ et on a $\dim(A_{\mathfrak{p}}) = \dim(A'_{\mathfrak{p}'})$. On notera que $\Omega^1_{A'/R}$ est un A'-module de type fini, localement libre sur $\mathrm{Spec}(A' \otimes_R K)$, de rang $\dim(A'_{\mathfrak{p}'})$ en $\mathfrak{p}'$. Soit $\widehat{\Omega}^1_{A/R}$ le séparé complété du A-module topologique $\Omega^1_{A/R}$ (1.14.1). Comme $\widehat{\Omega}^1_{A/R}$ est isomorphe à $\Omega^1_{A'/R} \otimes_{A'} A$ (1.12.16), on en déduit que le rang du $A_{\mathfrak{p}}$-module libre $(\widehat{\Omega}^1_{A/R})_{\mathfrak{p}}$ est égal à $\dim(A_{\mathfrak{p}})$. La proposition s'ensuit compte tenu de (4.8.15.1) et (6.2.3.1).

Définition 6.4.19. Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme d'espaces rigides cohérents, lisse en un point p de X_{ad}. On appelle *dimension relative* de f en p le rang du $\mathscr{O}_{X,p}$-module libre $(\Omega^1_{X/Y})_p$.

On notera (6.4.18) que cette notion coïncide avec celle introduite dans (5.9.1) pour les points rigides de X_{ad}.

Proposition 6.4.20. *Soient $f\colon X \to S$, $g\colon Y \to S$ deux morphismes d'espaces rigides cohérents, $j\colon Y \to X$ une immersion telle que $g = f \circ j$. Supposons f lisse ; alors pour que g soit lisse, il faut et il suffit que l'homomorphisme canonique* (6.2.11.1)

$$h\colon \mathscr{N}_{Y/X} \to j^*(\Omega^1_{X/S}) \tag{6.4.20.1}$$

soit localement inversible à gauche.

La question étant locale (6.4.4), elle résulte de 1.14.9, 6.4.9 et 6.4.12.

Corollaire 6.4.21 (Critère jacobien). *Soient $f\colon X \to S$ un morphisme d'espaces rigides cohérents, Y un sous-espace fermé de X défini par un idéal cohérent I de $\mathscr{O}_X$, $j\colon Y \to X$ l'injection canonique, $g = f \circ j$, q un point de Y_{ad}, $p = j(q)$.*

Supposons f lisse en p de dimension relative n. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) *g est lisse en q de dimension relative r.*

(ii) *L'homomorphisme canonique* (6.2.11.1)

$$(\mathscr{N}_{Y/X})_q \to (j^*(\Omega^1_{X/S}))_q$$

est inversible à gauche et $r = \mathrm{rang}((\Omega^1_{Y/S})_q \otimes_{\mathscr{O}_{Y,q}} \kappa(q))$.

(ii′) *L'homomorphisme canonique* (6.2.11.1)

$$I \otimes_X \kappa(p) = \mathscr{N}_{Y/X} \otimes_Y \kappa(q) \to \Omega^1_{X/S} \otimes_X \kappa(p)$$

est injectif et $r = \mathrm{rang}((\Omega^1_{Y/S})_q \otimes_{\mathscr{O}_{Y,q}} \kappa(q))$; on notera que l'on a $\kappa(p) = \kappa(q)$ (4.8.48).

(iii) *Il existe un voisinage U de p dans $\mathbf{Ad}_{/X}$ et des sections $u_{r+1}, \dots, u_n \in \Gamma(U, I)$ qui engendrent I_p tels que les différentielles $du_{r+1}, \dots, du_n$ soient linéairement indépendantes dans $(\Omega^1_{X/S})_p \otimes_{\mathscr{O}_{X,p}} \kappa(p)$.*

Cela résulte de 1.3.15, 6.4.20 et du fait que le $\mathscr{O}_X$-module $\Omega^1_{X/S}$ est localement libre de type fini sur un voisinage de p dans $\mathbf{Ad}_{/X}$.

Proposition 6.4.22. *Soient $f\colon X \to Y$ un morphisme d'espaces rigides cohérents, p un point rigide de X_{ad}, $q = f(p)$; notons X_q la fibre de X au-dessus de q* (4.8.48). *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est lisse au point p.*

(ii) *f est plat au point p et X_q est lisse sur $\mathrm{Sp}(\kappa(q))$ au point p.*

On peut se borner au cas où il existe un anneau idyllique A, une A-algèbre de séries formelles restreintes $B = A\langle\xi_1, \dots, \xi_n\rangle$ et un idéal de type fini $\mathfrak{I}$ de B tels que si on pose $C = B/\mathfrak{I}$, on ait $X = \mathrm{Spf}(C)^{\mathrm{rig}}$ et $Y = \mathrm{Spf}(A)^{\mathrm{rig}}$.

Montrons d'abord que (i) entraîne (ii). L'hypothèse (i) entraîne que X_q est lisse sur $\mathrm{Sp}(\kappa(q))$ au point p par 6.4.3(iv), et il s'agit de montrer en outre que f est plat au point p. On peut supposer que f est lisse, donc C est rig-lisse sur A (6.4.12), et p est associé à un point rigide fermé $\mathscr{P}$ de $\mathrm{Spf}(C)$ dont l'image $\mathscr{Q}$ est fermée dans $\mathrm{Spf}(A)$. On note $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de C associé à $\mathscr{P}$, $\mathfrak{q}$ l'idéal premier de A associé à $\mathscr{Q}$; on a $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'/\mathfrak{I}$, où $\mathfrak{p}'$ est un idéal premier de B et $\mathfrak{q}$ est l'image réciproque de $\mathfrak{p}$ dans A.

En vertu de 1.14.8, il existe dans $\mathfrak{I}$ un système de r séries u_i $(1 \leq i \leq r)$ et r indices j_i $(1 \leq i \leq r)$ tels que les u_i engendrent $\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}'}$ et que l'on ait

$$\det(\partial u_i/\partial \xi_{j_k}) \notin \mathfrak{p}'. \tag{6.4.22.1}$$

Il résulte de 1.12.20(ii) et ([31] 0.17.1.5) que l'anneau $B_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{q}B_{\mathfrak{p}'}$ est régulier. La condition (6.4.22.1) entraîne que les images canoniques v_i des u_i dans l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $B_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{q}B_{\mathfrak{p}'}$ sont linéairement indépendantes modulo $\mathfrak{m}^2$ (cf. la preuve de

[31] 17.5.1). On conclut donc de ([31] 0.17.1.7) que (v_i) est une suite régulière dans $B_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{q}B_{\mathfrak{p}'}$. Mais comme B est A-plat, il résulte de ([31] 0.15.1.16) que les images canoniques u'_i des u_i dans $B_{\mathfrak{p}'}$ forment aussi une suite régulière et que $C_{\mathfrak{p}} = B_{\mathfrak{p}'}/\big(\sum_i u'_i B_{\mathfrak{p}'}\big)$ est un $A_{\mathfrak{q}}$-module plat ; donc f est plat au point p.

Prouvons ensuite que (ii) entraîne (i). Posons $Z = \mathrm{Spf}(B)^{\mathrm{rig}}$, de sorte que X s'identifie au sous-espace fermé de Z défini par l'idéal $I = (\mathfrak{J}^{\Delta})^{\mathrm{rig}}$ de $\mathscr{O}_Z$, et soient $j\colon X \to Z$ l'injection canonique, $p' = j(p)$, Z_q la fibre de Z au-dessus de q. Comme f est plat en p, l'homomorphisme

$$I_{p'} \otimes_{\mathscr{O}_{Y,q}} \kappa(q) \to \mathscr{O}_{Z,p'} \otimes_{\mathscr{O}_{Y,q}} \kappa(q) = \mathscr{O}_{Z_q,p'}$$

est injectif (4.8.48). Par suite, si J désigne l'idéal de $\mathscr{O}_{Z_q}$ associé à l'immersion fermée $j_q = j \otimes_Y \kappa(q)\colon X_q \to Z_q$, on a $J_{p'} = I_{p'} \otimes_{\mathscr{O}_{Y,q}} \kappa(q)$ (4.8.35). On peut donc identifier les homomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} I_{p'} \otimes_{\mathscr{O}_{Z,p'}} \kappa(p') = \mathscr{N}_{X/Z} \otimes_X \kappa(p) &\quad\to\quad \Omega^1_{Z/Y} \otimes_Z \kappa(p'), \\ J_{p'} \otimes_{\mathscr{O}_{Z_q,p'}} \kappa(p') = \mathscr{N}_{X_q/Z_q} \otimes_{X_q} \kappa(p) &\quad\to\quad \Omega^1_{Z_q/\mathrm{Sp}(\kappa(q))} \otimes_{Z_q} \kappa(p'). \end{aligned}$$

Par suite, l'hypothèse (ii) et 6.4.21 entraînent que f est lisse en p.

Corollaire 6.4.23. *Un morphisme lisse d'espaces rigides cohérents est plat.*

Cela résulte de 5.10.4 et 6.4.22.

Proposition 6.4.24. *Soient $f\colon X \to Y$ un morphisme d'espaces rigides cohérents, p un point rigide de X_{ad}, $q = f(p)$; notons X_q la fibre de X au-dessus de q* (4.8.48). *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est étale au point p.*
(ii) *f est lisse au point p et non ramifié au point p.*
(iii) *f est plat au point p et X_q est étale sur* $\mathrm{Sp}(\kappa(q))$ *au point p.*
(iv) *f est plat au point p et non ramifié au point p.*
(v) *f est plat au point p et l'anneau $\mathscr{O}_{X_q,p} = \mathscr{O}_{X,p} \otimes_{\mathscr{O}_{Y,q}} \kappa(q)$ est un corps, extension finie séparable de $\kappa(q)$.*

L'équivalence de (i) et (ii) résulte aussitôt des définitions, et celle de (ii) et (iii) de 6.4.7 et 6.4.22. L'équivalence de (iv) et (v) est une conséquence de 6.4.7. Le fait que (ii) implique (iv) résulte de 6.4.22. Il reste à montrer que (v) implique (iii). On peut évidemment se borner au cas où $Y = \mathrm{Spf}(A)^{\mathrm{rig}}$ et A est un ordre 1-valuatif, q étant l'unique point de Y_{ad} ; soit K le corps des fractions de A. Compte tenu de 6.4.7, il s'agit de montrer que X est lisse sur Y au point p. Le fait que $\mathscr{O}_{X,p}$ soit un corps implique que le morphisme canonique $i_p\colon \mathrm{Sp}(\kappa(p)) \to X$ est une immersion ouverte (6.1.4). On peut donc se borner au cas où $X = \mathrm{Spf}(B)^{\mathrm{rig}}$ et B est une A-algèbre topologiquement de présentation finie et un ordre 1-valuatif de corps des fractions L, extension finie séparable de K, p étant l'unique point de X_{ad} et $\kappa(p) = L$ (3.3.12). Comme B est une A-algèbre de présentation finie (1.11.5) et que L est étale sur K, B est rig-lisse sur A (1.14.14). Par suite, X est lisse sur Y en vertu de 6.4.12.

Proposition 6.4.25. *Soient $f\colon X \to Y$, $g\colon Y' \to Y$ deux morphismes d'espaces rigides cohérents, $X' = X \times_Y Y'$, $f'\colon X' \to Y'$ et $g'\colon X' \to X$ les projections canoniques. Soit p' un point rigide de X'_{ad} et posons $p = g'(p')$.*

(i) *Si f' est non ramifié au point p', alors f est non ramifié au point p.*

(ii) *Supposons de plus que g soit plat. Alors si f' est étale au point p', f est étale au point p.*

(i) Posons $q' = f'(p')$ et $q = f(p) = g(q')$ et soient X_q la fibre de X au-dessus de q, $X'_{q'}$ la fibre de X' au-dessus de q'. D'après 4.8.48, g induit un morphisme $\mathrm{Sp}(\kappa(q')) \to \mathrm{Sp}(\kappa(q))$ et on a $X'_{q'} = X_q \times_{\mathrm{Sp}(\kappa(q))} \mathrm{Sp}(\kappa(q'))$. Comme la propriété pour un morphisme d'être non ramifié en un point rigide ne fait intervenir que la fibre du morphisme en ce point (6.4.7(iv)), on peut se borner au cas où Y et Y' sont respectivement $\mathrm{Sp}(\kappa(q))$ et $\mathrm{Sp}(\kappa(q'))$, de sorte que g est plat. Par suite, g' est plat (5.10.9) et donc $\mathscr{O}_{X',p'}$ est fidèlement plat sur $\mathscr{O}_{X,p}$ (4.8.13 et [28] 0.6.6.1). Si f' est non ramifié au point p', alors $(\Omega^1_{X'/Y'})_{p'}$ est nul. Comme on a

$$(\Omega^1_{X'/Y'})_{p'} \simeq (\Omega^1_{X/Y})_p \otimes_{\mathscr{O}_{X,p}} \mathscr{O}_{X',p'}$$

en vertu de 6.2.6, on en déduit que $(\Omega^1_{X/Y})_p$ est nul, d'où la conclusion (6.4.7).

(ii) Comme f' est plat au point p' (6.4.24), $f \circ g' = g \circ f'$ est plat au point p'. Comme g' est plat (5.10.9), f est plat au point p en vertu de 5.10.3(ii). La proposition résulte alors de (i) et 6.4.24(iv).

Corollaire 6.4.26. *Soient $f\colon X \to Y$, $g\colon Y' \to Y$ deux morphismes d'espaces rigides cohérents, $X' = X \times_Y Y'$, $f'\colon X' \to Y'$ et $g'\colon X' \to X$ les projections canoniques.*

(i) *Supposons g couvrant pour les points rigides. Alors pour que f soit non ramifié, il faut et il suffit que f' le soit.*

(ii) *Supposons g fidèlement plat. Alors pour que f soit étale, il faut et il suffit que f' le soit.*

En effet, dans les deux cas, les conditions sont nécessaires d'après 6.4.3(iv), et sont suffisantes en vertu 6.4.25 car g' est couvrant pour les points rigides (6.4.5).

Chapitre 7

Espaces rigides quasi-séparés

Ce chapitre est consacré aux espaces rigides quasi-séparés (mais pas nécessairement quasi-compacts). La notion de recouvrement admissible s'étend naturellement aux préfaisceaux sur $\mathbf{R}$. On appelle *espace rigide quasi-séparé* un faisceau du gros topos admissible $\widetilde{\mathbf{R}}$ qui admet un recouvrement admissible par des objets de $\mathbf{R}$. Nous donnons une caractérisation simple de ces espaces (7.1.12) qui permet de retrouver des exemples classiques, comme le disque unité ouvert relatif (7.1.20). Nous étudions ensuite leurs propriétés géométriques, puis leurs structures héritées des espaces rigides cohérents (site et topos admissibles, structure annelée...).

Soient S un schéma cohérent, T un sous-schéma fermé, U l'ouvert $S-T$ de S. Supposons la paire (S,T) idyllique (2.6.17), notons $\mathscr{S}=S_{/T}$ le schéma formel complété de S le long de T et posons $\Theta=\mathscr{S}^{\rm rig}$. Nous associons fonctoriellement à tout U-schéma de type fini V un préfaisceau $\mathfrak{A}(V)$ sur la catégorie $\mathbf{R}_{/\Theta}$. Nous montrons que si V est séparé de type fini sur U, alors $\mathfrak{A}(V)$ est un Θ-espace rigide quasi-séparé (7.4.11) ; on le notera $V^{\rm an}$. Le foncteur $V\mapsto V^{\rm an}$ ainsi défini est appelé *foncteur GAGA* relatif à (S,T). Nous l'étudions et montrons qu'il préserve certaines propriétés des morphismes (*e.g.*, être propre, fini, lisse, étale, une immersion, une immersion ouverte, une immersion fermée).

Soit V un U-schéma séparé de type fini. Le foncteur GAGA induit un morphisme de topos annelés

$$\Phi_V\colon (V^{\rm an}_{\rm ad},\mathscr{O}_{V^{\rm an}})\to (V_{\rm zar},\mathscr{O}_V).$$

Nous montrons qu'il est plat (7.6.8). Si F est un $\mathscr{O}_V$-module, on pose $F^{\rm an}=\Phi_V^*(F)$ (l'image réciproque étant prise au sens des modules). Soient $f\colon V'\to V$ un morphisme séparé de type fini, F' un $\mathscr{O}_{V'}$-module. On a pour tout $q\geq 0$, un morphisme de changement de base (ou de comparaison)

$$\mathsf{c}^q\colon ({\rm R}^qf_*F')^{\rm an}\to {\rm R}^qf^{\rm an}_*(F'^{\rm an}).$$

Nous montrons que si f est propre et F' est cohérent, alors c^q est un isomorphisme pour tout $q\geq 0$ (7.6.11).

A. Abbes, *Éléments de Géométrie Rigide*, Progress in Mathematics 286,
DOI 10.1007/978-3-0348-0012-9_7,

Notations. On désigne par **Sch** la catégorie des schémas éléments de l'univers fixé $\mathbb{U}$ (4.1.1). Si X est un objet de **Sch**, on désigne par $\mathbf{Sch}_{\mathrm{pf}/X}$ (resp. $\mathbf{Sch}_{\mathrm{spf}/X}$) la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Sch}_{/X}$ formée des schémas de présentation finie au-dessus de X (resp. séparés et de présentation finie au-dessus de X). On note $\widehat{\mathbf{Sch}}_{\mathrm{pf}/X}$ la catégorie des préfaisceaux de $\mathbb{V}$-ensembles sur $\mathbf{Sch}_{\mathrm{pf}/X}$.

7.1 Espaces rigides quasi-séparés

Définition 7.1.1. Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme de $\widehat{\mathbf{R}}$.

(i) On dit que f est *représentable* si pour tout $X' \in \mathrm{Ob}(\mathbf{R})$ et tout morphisme $u\colon X' \to X$, le produit $X' \times_X Y$ est représentable par un objet de $\mathbf{R}$.

(ii) On dit que f est une *immersion quasi-compacte* (resp. une *immersion fermée*, resp. une *immersion ouverte quasi-compacte*) si f est représentable et si pour tout $X' \in \mathrm{Ob}(\mathbf{R})$ et tout morphisme $u\colon X' \to X$, la projection canonique $X' \times_X Y \to X'$, qui est de la forme $\mathrm{h}_{\mathbf{R}}(f')$, où $f'\colon Y' \to X'$ est un morphisme de $\mathbf{R}$ (1.1.3), est tel que f' soit une immersion (resp. une immersion fermée, resp. une immersion ouverte) (condition qui ne dépend pas de l'objet Y' choisi).

Le qualificatif "quasi-compact" sera justifié ultérieurement (7.1.19 et 7.2.6).

Remarque 7.1.2. Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme de $\mathbf{R}$. Il est clair que $\mathrm{h}_{\mathbf{R}}(f)$ est représentable. Pour que $\mathrm{h}_{\mathbf{R}}(f)$ soit une immersion quasi-compacte (resp. une immersion ouverte quasi-compacte, resp. une immersion fermée), il faut et il suffit que f soit une immersion (resp. une immersion ouverte, resp. une immersion fermée) (4.2.5).

Proposition 7.1.3. *Soit $f\colon Y \to X$ une immersion quasi-compacte de $\widehat{\mathbf{R}}$. Alors f est un monomorphisme ; autrement dit, le morphisme diagonal $\Delta_f\colon Y \to Y \times_X Y$ est un isomorphisme.*

Il suffit de montrer que pour tout $Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{R})$, l'application $\mathrm{Hom}(Z, Y) \to \mathrm{Hom}(Z, X)$ obtenue en composant avec f est injective. Considérons un morphisme $u\colon Z \to Y$. Soient $p\colon Z \times_X Y \to Z$ la projection canonique, $s = (\mathrm{id}_Z, u)\colon Z \to Z \times_X Y$, de sorte que l'on a $p \circ s = \mathrm{id}_Z$. Comme p est une immersion de $\mathbf{R}$, c'est un monomorphisme (4.2.7). La relation $p \circ s \circ p = p$ entraîne alors que $s \circ p = \mathrm{id}_{Z \times_X Y}$; et donc p est un isomorphisme. Si $v\colon Z \to Y$ est un morphisme tel que $f \circ v = f \circ u$, $(\mathrm{id}_Z, v)\colon Z \to Z \times_X Y$ est une section de p ; d'où $v = u$, ce qui démontre l'assertion.

Proposition 7.1.4. *La catégorie $\widehat{\mathbf{R}}$ vérifie les propriétés suivantes :*

(i) *Le composé de deux immersions quasi-compactes* (*resp. deux immersions ouvertes quasi-compactes, resp. deux immersions fermées*) *est une immersion quasi-compacte* (*resp. une immersion ouverte quasi-compacte, resp. une immersion fermée*).

(ii) *Soient* $f\colon X \to Y$, $g\colon Y' \to Y$ *deux morphismes. Si* f *est une immersion quasi-compacte* (*resp. une immersion ouverte quasi-compacte, resp. une immersion fermée*), *il en est de même du morphisme* $X \times_Y Y' \to Y'$.

(iii) *Soient* $f\colon X \to Y$ *un morphisme,* $g\colon Y \to Z$ *un monomorphisme* (*en particulier une immersion quasi-compacte*). *Si* $g \circ f$ *est une immersion quasi-compacte* (*resp. une immersion ouverte quasi-compacte, resp. une immersion fermée*), *il en est de même de* f.

La proposition (i) résulte de l'assertion analogue pour les morphismes de $\mathbf{R}$ (4.2.5). La proposition (ii) est une conséquence immédiate des définitions. La proposition (iii) résulte formellement de (ii) : comme le morphisme $(\mathrm{id}_X, f)\colon X \to X \times_Z Y$ est un isomorphisme, on peut identifier f au changement de base de $g \circ f$ par le morphisme g.

Proposition 7.1.5. *Soit* $f\colon Y \to X$ *une immersion quasi-compacte de* $\widehat{\mathbf{R}}$. *Si* X *est un objet de* $\widetilde{\mathbf{R}}$, *il en est de même de* Y *et* f *est un morphisme cohérent de* $\widetilde{\mathbf{R}}$.

Soit $(Z_k \to Z)_{k\in K}$ un recouvrement admissible de $\mathbf{R}$. Montrons que le diagramme d'applications d'ensembles

$$\mathrm{Hom}(Z,Y) \to \prod_K \mathrm{Hom}(Z_k,Y) \rightrightarrows \prod_{K\times K} \mathrm{Hom}(Z_k \times_Z Z_\ell, Y) \tag{7.1.5.1}$$

est exact. Comme le diagramme

$$\mathrm{Hom}(Z,X) \to \prod_K \mathrm{Hom}(Z_k,X) \rightrightarrows \prod_{K\times K} \mathrm{Hom}(Z_k \times_Z Z_\ell, X) \tag{7.1.5.2}$$

est exact et que f est un monomorphisme (7.1.3), la première application de (7.1.5.1) est injective. Soit $(u_k)_{k\in K}$ un élément du noyau de la double flèche de (7.1.5.1). Le diagramme exact (7.1.5.2) montre qu'il existe $v \in \mathrm{Hom}(Z,X)$ d'image $(f\circ u_k)_{k\in K}$. Montrons qu'il existe $u \in \mathrm{Hom}(Z,Y)$ tel que $v = f\circ u$ (ce qui prouvera l'exactitude de (7.1.5.1) au centre, car f est un monomorphisme). Il suffit de montrer que la projection canonique $p\colon Y \times_X Z \to Z$ est un isomorphisme. On notera que p est une immersion de $\mathbf{R}$. Il résulte de 7.1.3 et des hypothèses que la projection canonique $p_k\colon Y \times_X Z_k \to Z_k$ est un isomorphisme pour tout $k \in K$. Donc p est un épimorphisme de $\widetilde{\mathbf{R}}$. Comme p est un monomorphisme de $\widetilde{\mathbf{R}}$ (7.1.3), c'est un isomorphisme, d'où la première proposition. Pour la seconde proposition, le morphisme f est quasi-compact (4.3.8.1 et [1] VI 1.10) et quasi-séparé (7.1.3), donc cohérent.

Définition 7.1.6. Une famille $(X_i \to X)_{i\in I}$ d'immersions ouvertes quasi-compactes de $\widehat{\mathbf{R}}$ est un *recouvrement admissible* si pour tout $Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{R})$ et tout morphisme $u\colon Y \to X$, la famille des projections canoniques $(X_i \times_X Y \to Y)_{i\in I}$ est un recouvrement admissible.

On peut faire les remarques suivantes :

7.1.6.1. Soit $(f_i\colon Y_i \to X_i)_{i\in I}$ une famille d'immersions ouvertes de $\mathbf{R}$. Pour que $(\mathrm{h}_{\mathbf{R}}(f_i))_{i\in I}$ soit un recouvrement admissible, il faut et il suffit que $(f_i)_{i\in I}$ soit un recouvrement admissible.

7.1.6.2. Soit $(f_i\colon X_i \to X)_{i\in I}$ une famille d'immersions ouvertes quasi-compactes de $\widetilde{\mathbf{R}}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $(f_i)_{i\in I}$ est un recouvrement admissible.
(ii) $(f_i)_{i\in I}$ est une famille épimorphique.
(iii) $(f_i)_{i\in I}$ est une famille épimorphique effective universelle ([1] II 2.5).
(iv) Pour tout objet Y de $\mathbf{R}$ et tout morphisme $u\colon Y \to X$, la famille des projections canoniques $(X_i \times_X Y \to Y)_{i\in I}$ est épimorphique dans $\widetilde{\mathbf{R}}$.

En effet, il est clair que l'on a (iii)⇒(iv)⇒(ii)⇒(iii) ([1] II 4.3), et les conditions (i) et (iv) sont équivalentes en vertu de 4.3.8.5.

Définition 7.1.7. On appelle *espace rigide quasi-séparé* un objet X de $\widetilde{\mathbf{R}}$ qui admet un recouvrement admissible $(X_i \to X)_{i\in I}$, indexé par un $\mathbb{U}$-petit ensemble I, tel que chaque X_i soit un objet de $\mathbf{R}$. On appelle catégorie des espaces rigides quasi-séparés, et l'on note $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$, la sous-catégorie pleine de $\widetilde{\mathbf{R}}$ formée des espaces rigides quasi-séparés. Si X est un espace rigide quasi-séparé, on appelle *X-espace rigide quasi-séparé* un objet de la catégorie $(\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}})_{/X}$ (que l'on note aussi $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}/X}$).

On peut faire les remarques suivantes :

7.1.7.1. Soit $f\colon Y \to X$ une immersion quasi-compacte de $\widehat{\mathbf{R}}$. Si X est un espace rigide quasi-séparé, il en est de même de Y. En effet, Y est un objet de $\widetilde{\mathbf{R}}$ (7.1.5), et si $(X_i \to X)_{i\in I}$ est un recouvrement admissible tel que chaque X_i soit un objet de $\mathbf{R}$, $(X_i \times_X Y \to Y)_{i\in I}$ est un recouvrement admissible et chaque $X_i \times_X Y$ est un objet de $\mathbf{R}$ par définition.

7.1.7.2. Le foncteur canonique $\varepsilon\colon \mathbf{R} \to \widetilde{\mathbf{R}}$ (4.3.8.3) fournit un foncteur

$$\alpha\colon \mathbf{R} \to \mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}} \qquad (7.1.7.3)$$

qu'on appelle encore *foncteur canonique*. Ce foncteur étant pleinement fidèle, on l'utilisera souvent pour identifier un objet X de $\mathbf{R}$ avec son image $\alpha(X)$; ainsi, on notera $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}/X}$ au lieu de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}/\alpha(X)}$.

7.1.7.4. L'objet initial de $\widetilde{\mathbf{R}}$ est l'image par ε de l'objet initial de $\mathbf{R}$ (4.3.8.4). On dit qu'un espace rigide quasi-séparé est *vide* s'il est un objet initial de $\widetilde{\mathbf{R}}$.

7.1.8. Soient $(f_i\colon X_i \to X)_{i\in I}$ une famille d'immersions ouvertes quasi-compactes de $\widehat{\mathbf{R}}$, J une partie de I. Considérons, pour un objet Y de $\mathbf{R}_{/X}$, la condition suivante :

($\star$) La famille des projections canoniques $(X_i \times_X Y \to Y)_{i\in J}$ est un recouvrement admissible.

Elle définit un crible de $\mathbf{R}_{/X}$, et donc un sous-objet X_J de X dans $\widehat{\mathbf{R}}$; notons $f_J \colon X_J \to X$ le morphisme canonique. Si K est une partie de I contenant J, on a un X-morphisme canonique $f_{JK} \colon X_J \to X_K$. Il est clair que pour tout $i \in I$, $X_{\{i\}}$ s'identifie à X_i et $f_{\{i\}}$ à f_i (4.3.7 et 7.1.3). Pour que $(f_i)_{i\in I}$ soit un recouvrement admissible, il faut et il suffit que l'on ait $X_I = X$.

Proposition 7.1.9. *Les hypothèses étant celles de* (7.1.8).

(i) *Pour toute partie finie J de I, $f_J \colon X_J \to X$ est une immersion ouverte quasi-compacte.*

(ii) *Pour tout ensemble Φ de parties finies de I, si l'on pose $K = \cup_{J\in\Phi} J$, $(f_{JK})_{J\in\Phi}$ est un recouvrement admissible.*

(i) Considérons un objet Y de $\mathbf{R}$ et un morphisme $u \colon Y \to X$. En vertu de 4.3.6, il existe un modèle formel $\mathfrak{Y}$ de Y et des sous-schémas ouverts $(\mathfrak{Y}_j)_{j\in J}$ de $\mathfrak{Y}$ tels que, pour tout $j \in J$, $X_j \times_X Y$ soit Y-isomorphe à $\mathfrak{Y}_j^{\mathrm{rig}}$. Posons $\mathfrak{Z} = \cup_{j\in J}\mathfrak{Y}_j$. Il résulte alors de 4.1.13(ii) et 4.3.6 que $X_J \times_X Y$ est Y-isomorphe à $\mathfrak{Z}^{\mathrm{rig}}$.

(ii) Il résulte de (i) et 7.1.4(iii) que les f_{JK} sont des immersions ouvertes quasi-compactes. Considérons un objet Y de $\mathbf{R}$ et un morphisme $u \colon Y \to X_K$. D'une part $(X_k \times_X Y \to Y)_{k\in K}$ est un recouvrement admissible, et d'autre part, pour tout $J \in \Phi$, $(X_j \times_X Y \to X_J \times_X Y)_{j\in J}$ est un recouvrement admissible. Par suite, $(X_J \times_X Y \to Y)_{J\in\Phi}$ est un recouvrement admissible, d'où la proposition.

Proposition 7.1.10. *Soient X un espace rigide quasi-séparé, $(X_i \to X)_{i\in I}$ un recouvrement admissible tel que chaque X_i soit un objet de* $\mathbf{R}$. *Si I est fini, X est représentable par un objet de* $\mathbf{R}$.

On procède par récurrence sur le cardinal de I. L'assertion est évidente si I est un singleton (4.3.7). Supposons que I contienne au moins 2 éléments et posons $I = J \amalg \{i\}$; reprenons alors les notations de 7.1.8. Il résulte de 7.1.7.1 et 7.1.9(i) que X_J est un espace rigide quasi-séparé. D'après 7.1.9(ii) et l'hypothèse de récurrence, X_J est représentable par un objet de $\mathbf{R}$. Appliquant de nouveau 7.1.9(ii), on peut alors se réduire au cas où $I = \{1, 2\}$. Soient $\mathfrak{X}_1$ (resp. $\mathfrak{X}_2$) un objet rig-pur de $\mathbf{S}$, $\mathfrak{X}_{1,2}$ (resp. $\mathfrak{X}_{2,1}$) un ouvert de $\mathfrak{X}_1$ (resp. $\mathfrak{X}_2$) tels que l'injection canonique $\mathfrak{X}_{2,1} \to \mathfrak{X}_1$ (resp. $\mathfrak{X}_{1,2} \to \mathfrak{X}_2$) soit un modèle formel de la projection canonique $X_2 \times_X X_1 \to X_1$ (resp. $X_1 \times_X X_2 \to X_2$). L'isomorphisme canonique $X_2 \times_X X_1 \xrightarrow{\sim} X_1 \times_X X_2$ induit un isomorphisme $u \colon \mathfrak{X}_{2,1}^{\mathrm{rig}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}_{1,2}^{\mathrm{rig}}$. En vertu de 4.1.16 et 3.2.4(ii), on peut supposer que l'on a $u = v^{\mathrm{rig}}$, où $v \colon \mathfrak{X}_{2,1} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}_{1,2}$ est un isomorphisme de $\mathbf{S}$. Soit $\mathfrak{X}$ le schéma formel obtenu en recollant $\mathfrak{X}_1$ et $\mathfrak{X}_2$ le long de $\mathfrak{X}_{2,1}$ et $\mathfrak{X}_{1,2}$ au moyen de v ([28] 0.4.1.7). Il résulte de 7.1.6.2 que les diagrammes de $\widetilde{\mathbf{R}}$

$$\begin{tikzcd}
(\mathfrak{X}_1 \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}_2)^{\mathrm{rig}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{X}_2^{\mathrm{rig}} \arrow[d] \\
\mathfrak{X}_1^{\mathrm{rig}} \arrow[r] & \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}
\end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}
X_1 \times_X X_2 \arrow[r] \arrow[d] & X_2 \arrow[d] \\
X_1 \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

sont cocartésiens. On en déduit que X est isomorphe à $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$.

Corollaire 7.1.11. *Pour qu'un espace rigide quasi-séparé soit quasi-compact dans* $\widetilde{\mathbf{R}}$*, il faut et il suffit qu'il soit représentable par un objet de* $\mathbf{R}$*.*

On sait que la condition est suffisante (4.3.8.1). Considérons un espace rigide quasi-séparé X qui est quasi-compact dans $\widetilde{\mathbf{R}}$, et un recouvrement admissible $(X_i \to X)_{i\in I}$ tel que chaque X_i soit un objet de $\mathbf{R}$. En vertu de 7.1.6.2, il existe une partie finie J de I telle que la sous-famille $(X_j \to X)_{j\in J}$ soit un recouvrement admissible. Il résulte alors de 7.1.10 que X est représentable par un objet de $\mathbf{R}$.

Proposition 7.1.12. *Pour qu'un objet* X *de* $\widetilde{\mathbf{R}}$ *soit un espace rigide quasi-séparé, il faut et il suffit qu'il soit ind-représentable par un ind-objet essentiellement* $\mathbb{U}$*-petit* $(X_i)_{i\in I}$ *de* $\mathbf{R}$ *tel que les morphismes de transition soient des immersions ouvertes. La famille des morphismes canoniques* $(X_i \to X)_{i\in I}$ *est alors un recouvrement admissible.*

Rappelons que $\mathbf{R}$ est une $\mathbb{U}$-catégorie (4.1.11) et qu'un ind-objet $(X_i)_{i\in I}$ est essentiellement $\mathbb{U}$-petit si la catégorie filtrante I est essentiellement $\mathbb{U}$-petite ([1] I 8.1.8). Rappelons aussi que les limites inductives dans $\widehat{\mathbf{R}}$ se calculent terme à terme. Comme tout objet de $\mathbf{R}$ est quasi-compact, une limite inductive filtrante dans $\widehat{\mathbf{R}}$ dont tous les termes sont des faisceaux est un faisceau. Par suite, pour tout objet X de $\mathbf{R}$, le foncteur sur $\widetilde{\mathbf{R}}$ défini par $F \mapsto F(X)$, commute aux limites inductives filtrantes. En particulier, un préfaisceau ind-représentable est un faisceau.

Supposons d'abord X ind-représentable par un ind-objet essentiellement $\mathbb{U}$-petit $(X_i)_{i\in I}$ de $\mathbf{R}$ tel que les morphismes de transition soient des immersions ouvertes. Pour deux flèches composables $i \to j \to k$ de I, le morphisme canonique $X_i \to X_i \times_{X_k} X_j$ est un isomorphisme (7.1.3). On en déduit, compte tenu de ce qui a été rappelé au paragraphe précédent, que pour toute flèche $i \to j$ de I, le morphisme canonique $X_i \to X_i \times_X X_j$ est un isomorphisme. Considérons un objet Y de $\mathbf{R}$ et un morphisme $u\colon Y \to X$. Pour tout $i \in I$, il existe une flèche $i \to j$ de I telle que u se factorise en $Y \to X_j \to X$. On peut donc identifier les projections canoniques $X_i \times_X Y \to Y$ et $X_i \times_{X_j} Y \to Y$. On en déduit que les morphismes canoniques $X_i \to X$ sont des immersions ouvertes quasi-compactes. D'autre part, la famille des projections canoniques $(X_i \times_X Y \to Y)_{i\in I}$ est clairement un recouvrement admissible. On en déduit ([1] I 8.1.7) que X est un espace rigide quasi-séparé et la famille des morphismes canoniques $(X_i \to X)_{i\in I}$ est un recouvrement admissible.

Inversement, soient X un espace rigide quasi-séparé, $(X_i \to X)_{i\in I}$ un recouvrement admissible, indexé par un $\mathbb{U}$-petit ensemble I, tel que chaque X_i soit un objet de $\mathbf{R}$. Notons Φ l'ensemble ordonné par l'inclusion des parties finies de I (qui est évidemment un ensemble $\mathbb{U}$-petit). Reprenons les notations de 7.1.8. Pour tout $J \in \Phi$, X_J est un espace rigide quasi-séparé (7.1.7.1 et 7.1.9) ; il est donc représentable par un objet de $\mathbf{R}$ (7.1.10). D'autre part, les morphismes de transition de l'ind-objet $(X_J)_{J\in\Phi}$ sont des immersions ouvertes (7.1.9) et $(X_J \to X)_{J\in\Phi}$ est un recouvrement admissible. Pour tout $Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{R})$ et tout morphisme $u\colon Y \to X$, il existe $J \in \Phi$ tel que u se factorise à travers X_J (car Y est cohérent). Par suite, compte tenu de 7.1.3 et de ce qui a été rappelé au premier paragraphe, le morphisme canonique $\varinjlim_{\Phi} X_J \to X$ est un isomorphisme.

Remarque 7.1.13. Il résulte de 4.1.11, 7.1.12 et ([1] I 8.2.5) que $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ est une $\mathbb{U}$-catégorie.

Corollaire 7.1.14. *Soit $(f_i\colon Y_i \to X)_{i\in I}$ une famille finie de morphismes de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ telle que les Y_i soient des objets de $\mathbf{R}$. Alors, il existe un objet X' de $\mathbf{R}$, une immersion ouverte quasi-compacte $g\colon X' \to X$, et pour tout $i \in I$, un morphisme $f'_i\colon Y_i \to X'$ de $\mathbf{R}$ tel que $f_i = g \circ f'_i$.*

Soit $(X_j)_{j\in J}$ un ind-objet de $\mathbf{R}$ qui représente X tel que les morphismes de transition soient des immersions ouvertes (7.1.12). Comme $(X_j \times_X Y_i \to Y_i)_{j\in J}$ est un recouvrement admissible pour tout $i \in I$, il existe $j \in J$ tel que la projection canonique $X_j \times_X Y_i \to Y_i$ soit un isomorphisme pour tout $i \in I$, d'où la proposition.

Corollaire 7.1.15. *Tout morphisme $f\colon Y \to X$ de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ tel que Y soit un objet de $\mathbf{R}$ est représentable.*

Corollaire 7.1.16. *Tout espace rigide quasi-séparé est quasi-séparé en tant qu'objet de $\widetilde{\mathbf{R}}$.*

Cela résulte de 7.1.6.2, 7.1.15 et ([1] VI 1.17).

Corollaire 7.1.17. *Toute immersion quasi-compacte $f\colon Y \to X$ de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$, telle que Y soit un objet de $\mathbf{R}$, se factorise en une immersion fermée $i\colon Y \to Z$ de $\mathbf{R}$ suivie d'une immersion ouverte quasi-compacte $j\colon Z \to X$ de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$.*

En effet, f se factorise en un morphisme $f'\colon Y \to X'$ de $\mathbf{R}$ suivi d'une immersion ouverte quasi-compacte $g\colon X' \to X$ (7.1.14). Comme f' est une immersion en vertu de 7.1.4(iii), elle se factorise dans $\mathbf{R}$ en une immersion fermée $i\colon Y \to Z$ suivie d'une immersion ouverte $h\colon Z \to X'$; d'où la proposition.

Corollaire 7.1.18. *La catégorie $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ admet des produits fibrés et le foncteur α* (7.1.7.3) *commute aux produits fibrés.*

Comme le foncteur canonique $\varepsilon\colon \mathbf{R} \to \widetilde{\mathbf{R}}$ commute aux produits fibrés, il suffit de montrer qu'en tant que sous-catégorie pleine de $\widetilde{\mathbf{R}}$, $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ est stable par produits fibrés. Soient $f\colon X \to S$, $g\colon Y \to S$ deux morphismes d'espaces rigides quasi-séparés, $(X_i \to X)_{i\in I}$, $(Y_j \to Y)_{j\in J}$ deux recouvrements admissibles tels que les X_i et les Y_j soient des objets de $\mathbf{R}$. Il est clair que la famille $(X_i \times_S Y_j \to X \times_S Y)_{(i,j)\in I\times J}$ est un recouvrement admissible, et il résulte de 7.1.15 que les $X_i \times_S Y_j$ sont représentables par des objets de $\mathbf{R}$. Donc $X \times_S Y$ est un espace rigide quasi-séparé.

Corollaire 7.1.19. *Pour qu'un morphisme $f\colon Y \to X$ de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ soit représentable, il faut et il suffit qu'il soit quasi-compact en tant que morphisme de $\widetilde{\mathbf{R}}$.*

Si f est représentable, f est quasi-compact ([1] VI 1.10). Inversement, supposons f quasi-compact et montrons qu'il est représentable. Soient X' un objet de $\mathbf{R}$, $u\colon X' \to X$ un morphisme. Alors $Y \times_X X'$ est un espace rigide quasi-séparé (7.1.18), et il est quasi-compact par hypothèse. Il est donc représentable par un objet de $\mathbf{R}$ en vertu de 7.1.11.

Remarque 7.1.20. Soient $\mathscr{S}$ un schéma formel idyllique quasi-compact, ayant un idéal de définition inversible $\mathscr{I}$, $\mathscr{D}$ la droite affine formelle au-dessus de $\mathscr{S}$ de paramètre T (2.3.11). Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par $\mathscr{D}_{\mathscr{I},n}$ le disque formel de rayon $\mathscr{I}^{1/n}$ au-dessus de $\mathscr{S}$ (3.4.5). Pour tous entiers $n' \geq n \geq 1$, on a une immersion ouverte $\mathscr{D}^{\mathrm{rig}}_{\mathscr{I},n} \to \mathscr{D}^{\mathrm{rig}}_{\mathscr{I},n'}$ (4.3.12.3). D'après 7.1.12, la limite inductive

$$D^\circ = \varinjlim_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}} \mathscr{D}^{\mathrm{rig}}_{\mathscr{I},n} \tag{7.1.20.1}$$

est représentable dans $\widetilde{\mathbf{R}}$ par un $\mathscr{S}^{\mathrm{rig}}$-espace rigide quasi-séparé (qui n'est pas quasi-compact si $\mathscr{S}$ n'est pas vide). On l'appelle *disque unité ouvert* au-dessus de $\mathscr{S}^{\mathrm{rig}}$. Les morphismes $(\mathscr{D}^{\mathrm{rig}}_{\mathscr{I},n} \to D^\circ)_{n\geq 1}$ forment un recouvrement admissible. On laissera le soin au lecteur de vérifier que D° ne dépend que de $\mathscr{S}^{\mathrm{rig}}$, mais pas de $\mathscr{S}$ ni de $\mathscr{I}$.

7.1.21. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de $\mathbf{S}^+$, $\widetilde{f}\colon \widetilde{\mathbf{R}}_{/\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}} \to \widetilde{\mathbf{R}}_{/\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}}$ le morphisme de topos associé (4.3.14). Par définition, $\widetilde{f}^*$ prolonge le foncteur $f^\flat$ (4.1.22.1) et commute aux limites inductives. Comme $f^\flat$ transforme immersion ouverte en immersion ouverte, il résulte de 7.1.12 que $\widetilde{f}^*$ induit un foncteur que l'on note encore

$$f^\flat\colon \mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}/\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}} \to \mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}/\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}. \tag{7.1.21.1}$$

Cet abus de notation n'induit aucune confusion puisque ce nouveau foncteur prolonge le foncteur (4.1.22.1). On peut faire les remarques suivantes :

7.1.21.2. Si f est un morphisme de $\mathbf{S}$, le foncteur $f^\flat$ est le changement de base dans $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ par le morphisme f^{rig} (4.3.14.2 et [1] IV 5.3).

7.1.21.3. Soit $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ un second morphisme de $\mathbf{S}^+$. D'après (4.3.14.3), on a un isomorphisme canonique

$$f^\flat g^\flat \xrightarrow{\sim} (gf)^\flat$$

vérifiant une relation de cocycle du type (1.1.2.1).

7.1.21.4. Soient X un objet de $\mathbf{R}_{/\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$, Y un objet de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}/\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}}$, $u\colon X \to f^\flat(Y)$ un $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$-morphisme. Alors il existe $Y_0 \in \mathrm{Ob}(\mathbf{R})$ et une immersion ouverte quasi-compacte $v\colon Y_0 \to Y$ tels que $f^\flat(v)$ majore u, *i.e.*, u se factorise en

$$X \longrightarrow f^\flat(Y_0) \xrightarrow{f^\flat(v)} f^\flat(Y)\ .$$

En effet, d'après 7.1.12, Y est ind-représentable par un ind-objet $(Y_i)_{i\in I}$ de $\mathbf{R}$ tel que les morphismes canoniques $(Y_i \to Y)_{i\in I}$ forment un recouvrement admissible. Par suite, $f^\flat(Y)$ est la limite inductive des $(f^\flat(Y_i))_{i\in I}$. L'assertion s'ensuit car le foncteur sur $\widetilde{\mathbf{R}}_{/\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$ défini par $F \mapsto F(X)$, commute aux limites inductives filtrantes (cf. la preuve de 7.1.12).

7.1.21.5. Le foncteur $f^\flat$ transforme morphisme représentable de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}/\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}}$ en morphisme représentable de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}/\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$. En effet, les topos $\widetilde{\mathbf{R}}_{/\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$ et $\widetilde{\mathbf{R}}_{/\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}}$ sont cohérents (4.3.13.2), et le morphisme $\widetilde{f}\colon \widetilde{\mathbf{R}}_{/\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}} \to \widetilde{\mathbf{R}}_{/\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}}$ est cohérent ([1] VI 3.3). Par suite, le foncteur $\widetilde{f}^*$ transforme morphisme quasi-compact en morphisme quasi-compact ([1] VI 3.6), d'où l'assertion (7.1.19). On peut aussi la déduire de 7.1.21.4.

7.2 Morphismes d'espaces rigides quasi-séparés

Définition 7.2.1. On dit qu'un morphisme d'espaces rigides quasi-séparés $f\colon Y \to X$ est une *immersion* (resp. une *immersion ouverte*) si pour tout objet Y' de $\mathbf{R}$ et toute immersion ouverte quasi-compacte $g\colon Y' \to Y$, $f \circ g$ est une immersion quasi-compacte (resp. une immersion ouverte quasi-compacte).

On peut faire les remarques suivantes :

7.2.1.1. Pour que f soit une immersion, il faut et il suffit que, pour tout objet Y' de $\mathbf{R}$ et pour toute immersion quasi-compacte $g\colon Y' \to Y$, $f\circ g$ soit une immersion quasi-compacte (7.1.17).

7.2.1.2. Une immersion quasi-compacte (resp. immersion ouverte quasi-compacte) de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ est une immersion (resp. immersion ouverte) (7.1.4).

7.2.1.3. Une immersion ouverte d'espaces rigides quasi-séparés $f\colon Y \to X$ tel que Y soit un objet de $\mathbf{R}$, est une immersion ouverte quasi-compacte.

7.2.1.4. Si f est un morphisme de $\mathbf{R}$, la définition (7.2.1) est compatible avec la notion introduite dans (4.2.1).

Remarque 7.2.2. Sous les hypothèses de 7.1.20, le morphisme canonique $D^\circ \to \mathscr{D}^{\mathrm{rig}}$ est une immersion ouverte (qui n'est pas quasi-compacte si $\mathscr{S}$ n'est pas vide).

Proposition 7.2.3. *Soit $f\colon Y \to X$ une immersion d'espaces rigides quasi-séparés. Alors f est un monomorphisme de $\widehat{\mathbf{R}}$; autrement dit, le morphisme diagonal $\Delta_f\colon Y \to Y \times_X Y$ est un isomorphisme.*

Il suffit de montrer que si u et v sont deux morphismes d'un objet Z de $\mathbf{R}$ dans Y tels que $f\circ u = f\circ v$, alors $u = v$. D'après 7.1.14, il existe deux morphismes $u'\colon Z \to Y'$ et $v'\colon Z \to Y'$ de $\mathbf{R}$ et une immersion ouverte $i\colon Y' \to Y$ tels que $u = i \circ u'$ et $v = i \circ v'$. Par définition, $f \circ i$ est une immersion quasi-compacte ; donc c'est un monomorphisme (7.1.3). On en déduit que $u' = v'$ et $u = v$.

Proposition 7.2.4. *La catégorie $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ vérifie les propriétés suivantes :*

(i) *Le composé de deux immersions (resp. deux immersions ouvertes) est une immersion (resp. une immersion ouverte).*

(ii) *Soient $f\colon X \to Y$, $g\colon Y' \to Y$ deux morphismes. Si f est une immersion (resp. une immersion ouverte), il en est de même du morphisme $X \times_Y Y' \to Y'$.*

(iii) *Soient $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ deux morphismes. Si $g \circ f$ est une immersion, il en est de même de f.*

(i) Cela résulte immédiatement des définitions et de 7.2.1.1.

(ii) Soient Z un objet de $\mathbf{R}$, $h\colon Z \to X \times_Y Y'$ une immersion ouverte quasi-compacte. D'après 7.1.14, le morphisme $Z \to X$ déduit de h se factorise en un morphisme $Z \to X'$ de $\mathbf{R}$ suivi d'une immersion ouverte quasi-compacte $X' \to X$. Comme le morphisme composé $X' \to Y$ est une immersion quasi-compacte (resp. une immersion ouverte quasi-compacte), il en est de même de $X' \times_Y Y' \to Y'$ (7.1.4). De même, $X' \times_Y Y' \to X \times_Y Y'$ est une immersion ouverte quasi-compacte. Donc d'apès 7.1.4(iii), le morphisme canonique $Z \to X' \times_Y Y'$ est une immersion ouverte quasi-compacte. On en déduit que le morphisme composé $Z \to Y'$ est une immersion quasi-compacte (resp. une immersion ouverte quasi-compacte), d'où la proposition.

(iii) On peut clairement se réduire au cas où X est un objet de $\mathbf{R}$, de sorte que $g \circ f$ est une immersion quasi-compacte. D'après 7.1.14, f se factorise en un morphisme $X \to Y'$ de $\mathbf{R}$ suivi d'une immersion ouverte quasi-compacte $Y' \to Y$. On se réduit ainsi au cas où Y est un objet de $\mathbf{R}$. De même, g se factorise en un morphisme $Y \to Z'$ de $\mathbf{R}$ suivi d'une immersion ouverte quasi-compacte $Z' \to Z$. Comme l'assertion est connue pour le composé de deux morphismes de $\mathbf{R}$ (4.2.5(iii)), on peut se borner au cas où g est une immersion ouverte quasi-compacte. La proposition résulte alors de 7.1.4(iii).

Corollaire 7.2.5. *Si $f\colon X \to Y$ est un morphisme d'espaces rigides quasi-séparés, le morphisme diagonal $\Delta_f\colon X \to X \times_Y X$ est une immersion.*

Corollaire 7.2.6. *Soit $f\colon Y \to X$ un morphisme d'espaces rigides quasi-séparés. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est une immersion (resp. une immersion ouverte) et f est quasi-compact en tant que morphisme de $\widetilde{\mathbf{R}}$.*

(ii) *f est une immersion quasi-compacte (resp. une immersion ouverte quasi-compacte).*

En effet, (ii) entraîne clairement (i). Inversement, si la condition (i) est remplie, f est représentable (7.1.19). Il résulte alors de 7.2.4(ii) et 7.2.1.4 que f est une immersion quasi-compacte (resp. une immersion ouverte quasi-compacte).

Définition 7.2.7. On dit qu'un morphisme d'espaces rigides quasi-séparés $f\colon X \to Y$ est *séparé* si le morphisme diagonal $\Delta_f\colon X \to X \times_Y X$ est une immersion fermée. On dit encore alors que X est un Y-espace rigide *séparé*, ou *séparé* sur Y.

Proposition 7.2.8. *La catégorie $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ vérifie les propriétés suivantes :*

(i) *Toute immersion est un morphisme séparé.*

(ii) *Le composé de deux morphismes séparés est séparé.*

(iii) *Soient $f\colon X \to Y$, $g\colon Y' \to Y$ deux morphismes. Si f est séparé, il en est de même du morphisme $X \times_Y Y' \to Y'$.*

(iv) *Soient $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ deux morphismes tels que $g \circ f$ soit une immersion fermée et g soit séparé. Alors f est une immersion fermée.*

(v) *Soient $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ deux morphismes. Si $g \circ f$ est séparé, f est séparé.*

La proposition (i) résulte de 7.2.3. Les propositions (ii) et (iii) sont formelles à partir de 7.1.4. Montrons la proposition (iv). Le morphisme $\Gamma_f = (\mathrm{id}_X, f)\colon X \to X \times_Z Y$ est le changement de base du morphisme diagonal $\Delta_g\colon Y \to Y \times_Z Y$ par le morphisme $X \times_Z Y \to Y \times_Z Y$, et f se factorise en $p_2 \circ \Gamma_f$, où $p_2\colon X \times_Z Y \to Y$ est la projection canonique. Compte tenu des hypothèses et 7.1.4(ii), Γ_f et p_2 sont des immersions fermées. Donc f est une immersion fermé en vertu de 7.1.4(i). Montrons enfin la proposition (v). Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\Delta_f"] & X \times_Y X \arrow[r, "u"] \arrow[d] & X \times_Z X \arrow[d] \\
 & Y \arrow[r, "\Delta_g"] & Y \times_Z Y
\end{tikzcd}$$

Comme le carré est cartésien et que Δ_g est une immersion (7.2.5), u est une immersion (7.2.4). Donc u est séparé d'après (i), et la proposition résulte de (iv).

Définition 7.2.9. On dit qu'un morphisme $f\colon Y \to X$ de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ est *fini* (resp. *propre*) s'il est représentable et si pour tout objet X' de $\mathbf{R}$ et tout morphisme $u\colon X' \to X$, la projection canonique $X' \times_X Y \to X'$, qui est de la forme $\mathrm{h}_{\mathbf{R}}(f')$, où $f'\colon Y' \to X'$ est un morphisme de $\mathbf{R}$, est telle que f' soit fini (resp. propre).

On dit encore alors que X est un Y-espace rigide *fini* (resp. *propre*), ou *fini* sur Y (resp. *propre* sur Y), ou un *revêtement fini* de Y.

Si f est un morphisme de $\mathbf{R}$, ces notions sont compatibles avec celles introduites dans le §4.2.

Proposition 7.2.10. *La catégorie* $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ *vérifie les propriétés suivantes :*

(i) *Toute immersion fermée est un morphisme fini ; tout morphisme fini est un morphisme propre.*

(ii) *Le composé de deux morphismes finis* (*resp. propres*) *est un morphisme fini* (*resp. propre*)*.*

(iii) *Soient* $f\colon X \to Y$, $g\colon Y' \to Y$ *deux morphismes. Si* f *est un morphisme fini* (*resp. propre*), *il en est de même du morphisme* $X \times_Y Y' \to Y'$*.*

(iv) *Si* $f\colon X \to Y$ *et* $g\colon Y \to Z$ *sont deux morphismes tels que* $g \circ f$ *soit fini* (*resp. propre*) *et que* g *soit séparé, alors* f *est fini* (*resp. propre*)*.*

Les propositions (i) et (ii) résultent des assertions correspondantes pour $\mathbf{R}$ (4.2.14, 4.2.18 et 5.9.19). La proposition (iii) est évidente à partir des définitions. Pour démontrer la proposition (iv), il suffit de calquer la preuve de 7.2.8(iv). Avec les notations de *loc. cit.* et compte tenu des hypothèses, (iii) et 7.1.4(ii), Γ_f est une immersion fermée et p_2 est fini (resp. propre). Donc f est un fini (resp. propre) en vertu de (i) et (ii).

Proposition 7.2.11. *Soient* $f\colon Y \to X$ *un morphisme d'espaces rigides quasi-séparés,* $(X_i \to X)_{i\in I}$ *un recouvrement admissible. Considérons pour un morphisme d'espaces rigides quasi-séparés, la propriété d'être*

(i) *une immersion ;*

(i′) *une immersion quasi-compacte ;*

(ii) *une immersion ouverte ;*

(ii′) *une immersion ouverte quasi-compacte ;*

(iii) *une immersion fermée ;*

(iv) *fini ;*

(v) *séparé ;*

(vi) *propre.*

Alors, si $\mathscr{P}$ *désigne l'une des propriétés précédentes, pour que* f *vérifie la propriété* $\mathscr{P}$*, il faut et il suffit qu'il en soit de même de chacune des projections canoniques* $f_i\colon X_i \times_X Y \to X_i$ $(i \in I)$*.*

Il n'y a évidemment que la suffisance de la condition à prouver (7.1.4, 7.2.4, 7.2.8 et 7.2.10). Supposons que pour tout $i \in I$, f_i vérifie $\mathscr{P}$ et montrons que f vérifie $\mathscr{P}$. Pour chacune des propriétés (i′), (ii′), (iii), (iv) et (vi), f est quasi-compact ([1] VI 1.10), et donc représentable (7.1.19). On se réduit ainsi au cas où f est un morphisme de $\mathbf{R}$, et donc à la proposition 4.8.42.

Considérons ensuite les propriétés (i) et (ii). Compte tenu des définitions et de 7.2.4, on peut se réduire au cas où Y est un espace rigide cohérent. Donc f est représentable (7.1.15), et il en est alors de même de chacun des f_i. On se ramène ainsi aux propositions (i′) et (ii′).

Considérons enfin la propriété (v). Posons $Y_i = X_i \times_X Y$ $(i \in I)$. Compte tenu de (iii) et de l'identité des produits $Y_i \times_X Y_i$ et $Y_i \times_{X_i} Y_i$ (7.1.3), tout revient à montrer que $(Y_i \times_X Y_i \to Y \times_X Y)_{i\in I}$ est un recouvrement admissible. Or pour tout $(i,j) \in I^2$, si l'on pose $X_{ij} = X_i \times_X X_j$ et $Y_{ij} = Y_i \times_Y Y_j$, $Y_i \times_X Y_j$ s'identifie au produit $Y_{ij} \times_{X_{ij}} Y_{ij}$; donc le morphisme $Y_i \times_X Y_j \to Y \times_X Y$ se factorise à travers $Y_i \times_X Y_i$, d'où l'assertion.

Définition 7.2.12. On dit qu'un morphisme d'espaces rigides quasi-séparés $f\colon X \to Y$ est *lisse* (resp. *non ramifié*, resp. *étale*) s'il est formellement lisse (resp. formellement non ramifié, resp. formellement étale) (6.4.1). On dit encore alors que X est *lisse* (resp. *non ramifié*, resp. *étale*) sur Y.

On notera que ces notions satisfont aux propriétés (6.4.3).

Définition 7.2.13. On dit qu'un morphisme d'espaces rigides quasi-séparés $f\colon X \to Y$ est un *revêtement étale* s'il est étale et fini. On dit encore alors que X est un *revêtement étale* de Y.

Proposition 7.2.14. *Une immersion d'espaces rigides quasi-séparés* (*resp. une immersion ouverte*) *est non ramifiée* (*resp. étale*).

La première proposition résulte de 7.2.3 et 6.4.3(i). Soit $f\colon X \to Y$ une immersion ouverte d'espaces rigides quasi-séparés. On sait déjà que f est non ramifié ; montrons qu'elle est lisse. Considérons un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X'_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "j"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ X' \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

où X' est un objet de $\mathbf{R}$ et X'_0 est un sous-espace fermé de X' défini par un idéal nilpotent de $\mathscr{O}_{X'}$. Montrons qu'il existe un X-morphisme $u\colon X' \to Y$ tel que $u_0 = u \circ j$. On peut clairement se réduire au cas où $X = X'$ (7.2.4), donc au cas où X est un objet de $\mathbf{R}$. On sait (7.1.14) que u_0 se factorise en un morphisme $u'_0\colon X'_0 \to Y'$ de $\mathbf{R}$ suivi d'une immersion ouverte quasi-compacte $g\colon Y' \to Y$. Quitte à remplacer f par $f \circ g$, on se réduit au cas où f est une immersion ouverte de $\mathbf{R}$, donc à la proposition 6.4.3(ii).

Proposition 7.2.15. *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme d'espaces rigides quasi-séparés.*

(i) *Soit $(\alpha_i\colon X_i \to X)_{i\in I}$ un recouvrement admissible. Pour que f soit lisse* (*resp. non ramifié, resp. étale*)*, il faut et il suffit que chacun des morphismes $f \circ \alpha_i$ le soit.*

(ii) *Soit* $(\beta_j\colon Y_j \to Y)_{j\in J}$ *un recouvrement admissible. Pour que* f *soit lisse* (*resp. non ramifié, resp. étale*), *il faut et il suffit que chacune des projections canoniques* $f_j\colon X\times_Y Y_j \to Y_j$ *le soit.*

Notons d'abord que (ii) est une conséquence de (i) et de 6.4.3 et 7.2.14. Comme les α_i sont étales, tout revient donc à montrer que si les $f\circ\alpha_i$ sont lisses (resp. non ramifiés), il en est de même de f. Soient Y' un affinoïde, Y'_0 un sous-espace fermé défini par un idéal nilpotent, $g\colon Y'\to Y$ un morphisme. Supposons donné un Y-morphisme $u_0\colon Y'_0\to X$ et posons $V_i = X_i\times_X Y'_0$. Soit J un sous-ensemble fini de I tel que $(V_j\to Y'_0)_{j\in J}$ soit encore un recouvrement admissible. En vertu de 4.8.38, il existe un recouvrement admissible $(W_j\to Y')_{j\in J}$ tel que, pour tout $j\in J$, V_j soit Y'_0-isomorphe à $W_j\times_{Y'} Y'_0$.

Supposons d'abord que les $f\circ\alpha_i$ soient non ramifiés et montrons que, si u' et u'' sont deux Y-morphismes de Y' dans X dont les restrictions à Y'_0 coïncident et sont égaux à u_0, alors on a $u'=u''$. Il résulte de 4.8.38 que $u'|W_j$ (resp. $u''|W_j$) se factorise en $W_j \xrightarrow{u'_j} X_j \xrightarrow{\alpha_j} X$ (resp. $W_j \xrightarrow{u''_j} X_j \xrightarrow{\alpha_j} X$). Donc compte tenu de 6.4.2(ii), on a $u'_j = u''_j$ pour tout $j\in J$; d'où la conclusion dans ce cas.

Supposons maintenant que tous les $f\circ\alpha_i$ soient lisses et prouvons qu'il existe un Y-morphisme $u\colon Y'\to X$ dont u_0 est la restriction à Y'_0. Quitte à faire un changement de base par g (6.4.3), on se réduit au cas où Y est un objet de $\mathbf{R}$. On sait (7.1.14) que u_0 se factorise en un morphisme $u'_0\colon Y'_0\to X'$ de $\mathbf{R}$ suivi d'une immersion ouverte quasi-compacte $h\colon X'\to X$. Posons $X'_i = X_i\times_X X'$ et soit $\alpha'_i\colon X'_i\to X'$ la projection canonique ($i\in I$). Les hypothèses entraînent que les morphismes $f\circ h\circ\alpha'_i$ ($i\in I$) sont lisses. Quitte à remplacer f par $f\circ h$, on peut se borner au cas où X est un objet de $\mathbf{R}$. Comme Y' est affinoïde, on peut appliquer 6.3.11 dont les hypothèses sont satisfaites (pour un recouvrement admissible de Y' plus fin que $(W_j\to Y')_{j\in J}$), et dont la conclusion démontre précisément l'existence de u.

Proposition 7.2.16. *Soient* $g\colon S'\to S$ *un morphisme fidèlement plat d'espaces rigides cohérents,* $f\colon X\to S$ *un morphisme d'espaces rigides quasi-séparés,* $X' = X\times_S S'$, $f'\colon X'\to S'$ *la projection canonique. Alors pour que* f *soit étale, il faut et il suffit que* f' *le soit.*

Cela résulte immédiatement de 6.4.26(ii) et 7.2.15(i).

Proposition 7.2.17. *Soient* $f\colon \mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$ *un morphisme de* $\mathbf{S}^+$, $f^\flat\colon \mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}/\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}} \to \mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}/\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$ *le foncteur associé à* f (7.1.21.1), $u\colon F\to G$ *un morphisme de* $\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}$*-espaces rigides quasi-séparés. Considérons pour un morphisme d'espaces rigides quasi-séparés la propriété d'être :*

(i) *une immersion ;*

(i′) *une immersion quasi-compacte ;*

(ii) *une immersion ouverte ;*

(ii′) *une immersion ouverte quasi-compacte ;*

(iii) *une immersion fermée ;*
(iv) *fini ;*
(v) *séparé ;*
(vi) *propre ;*
(vii) *étale ;*
(viii) *lisse.*

Alors, si u vérifie l'une de ces propriétés, il en est de même de $f^\flat(u)$.

De plus, on a le complément suivant à l'énoncé précédent :

Corollaire 7.2.18. *Si $(Y_i \to Y)_{i\in I}$ est un recouvrement admissible de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}/\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}}$, alors $(f^\flat(Y_i) \to f^\flat(Y))_{i\in I}$ est un recouvrement admissible.*

Pour chacune des propriétés (i′), (ii′), (iii), (iv) et (vi), le morphisme $f^\flat(u)$ est représentable (7.1.21.5), et on peut se réduire au cas où u est un morphisme de $\mathbf{R}_{/\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}}$ (7.1.21.4), et donc à la proposition 4.2.19.

La propriété (v) résulte de (iii) et du fait que le foncteur $f^\flat$ est exact à gauche.

Le corollaire 7.2.18 résulte de (ii′) et 7.1.6.2. En effet, si $\widetilde{f}\colon \widetilde{\mathbf{R}}_{/\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}} \to \widetilde{\mathbf{R}}_{/\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}}$ est le morphisme de topos associé à f (4.3.14), alors $\widetilde{f}^*$ transforme famille épimorphique en famille épimorphique.

Considérons ensuite la propriété (i) (resp. (ii)). Soient $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{R})$, $a\colon X \to f^\flat(F)$ une immersion ouverte quasi-compacte. D'après 7.1.21.4, il existe $Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{R})$ et une immersion ouverte quasi-compacte $b\colon Y \to F$ tels que a se factorise en

$$X \xrightarrow{c} f^\flat(Y) \xrightarrow{f^\flat(b)} f^\flat(F)\ .$$

Il résulte alors de (i′), (ii′) et 7.1.4(iii) que c est une immersion ouverte quasi-compacte et que $f^\flat(u\circ b)$ est une immersion quasi-compacte (resp. une immersion ouverte quasi-compacte). Donc $f^\flat(u)\circ a$ est une immersion quasi-compacte (resp. une immersion ouverte quasi-compacte), ce qui démontre la proposition.

Considérons enfin les propriétés (vii) et (viii). Compte tenu de 7.2.15 et 7.2.18, on peut se réduire au cas où u est un morphisme de $\mathbf{R}$ (en remplaçant d'abord G par un recouvrement admissible, puis F par un recouvrement admissible). La proposition résulte alors de 6.4.14.

7.3 Site et topos admissibles d'un espace rigide quasi-séparé

Définition 7.3.1. On appelle *topologie admissible* sur $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ la topologie induite par la topologie canonique de $\widetilde{\mathbf{R}}$.

On peut faire les remarques suivantes :

7.3.1.1. Soit $(f_i\colon X_i \to X)_{i\in I}$ une famille de morphismes de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $(f_i)_{i\in I}$ est couvrante pour la topologie admissible.

(ii) $(f_i)_{i\in I}$ est une famille épimorphique de $\widetilde{\mathbf{R}}$.

(iii) $(f_i)_{i\in I}$ est une famille épimorphique effective universelle de $\widetilde{\mathbf{R}}$.

En effet, l'équivalence de (i) et (ii) résulte de 7.1.18 et ([1] III 3.3), et celle de (ii) et (iii) est une propriété générale des topos ([1] II 4.3).

7.3.1.2. Pour qu'une famille d'immersions ouvertes quasi-compactes de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ soit un recouvrement admissible, il faut et il suffit qu'elle soit couvrante pour la topologie admissible de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ (7.1.6.2 et 7.3.1.1).

7.3.1.3. La topologie admissible de $\mathbf{R}$ est induite par la topologie admissible de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ au moyen du foncteur canonique α (7.1.7.3). En effet, il suffit de montrer que ces deux topologies de $\mathbf{R}$ ont mêmes familles couvrantes (1.1.4), ce qui résulte de 7.1.18 et ([1] II 4.4 et III 3.3).

7.3.1.4. Le foncteur $F \mapsto F\circ\alpha$ induit une équivalence de catégories de la catégorie des faisceaux admissibles sur $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ dans $\widetilde{\mathbf{R}}$ ([1] III 4.1). Le foncteur canonique de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ dans $\widetilde{\mathbf{R}}$ s'identifie à l'injection canonique.

7.3.1.5. La topologie admissible sur $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ est moins fine que la topologie canonique. En effet, pour qu'un préfaisceau sur $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ soit un faisceau pour la topologie admissible, il faut et il suffit que sa restriction à $\mathbf{R}$ soit un faisceau pour la topologie admissible (7.3.1.4).

7.3.1.6. Soit X un espace rigide quasi-séparé. On munit $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}/X}$ de la topologie induite par la topologie admissible de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ au moyen du foncteur “source” $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}/X} \to \mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$. Le topos des faisceaux de $\mathbb{V}$-ensembles sur $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}/X}$ est canoniquement équivalent à $\widetilde{\mathbf{R}}_{/X}$ (1.1.5). Il résulte aussitôt de 7.3.1.5 que la topologie admissible de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}/X}$ est moins fine que la topologie canonique (cf. 4.3.13.1).

Proposition 7.3.2. *Les recouvrements admissibles de* $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ *forment une prétopologie qui engendre la topologie admissible.*

Il est clair que les recouvrements admissibles de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ forment une prétopologie (7.1.4). Pour montrer qu'elle engendre la topologie admissible, il suffit de montrer que, pour tout espace rigide quasi-séparé X, tout crible couvrant G de X pour la topologie admissible de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ contient un recouvrement admissible $(f_i\colon X_i \to X)_{i\in I}$ (7.3.1.2). Il est clair que G contient une famille $(g_j\colon Y_j \to X)_{j\in J}$ couvrante pour la topologie admissible de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ telle que les Y_j soient des objets de $\mathbf{R}$ (7.3.1.2). Chaque morphisme g_j se factorise en un morphisme $Y_j \to Y'_j$ de $\mathbf{R}$ suivi d'une immersion ouverte quasi-compacte $Y'_j \to X$ (7.1.14). La famille $(Y'_j \to X)_{j\in J}$ est clairement couvrante pour la topologie admissible de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$; elle est donc un recouvrement admissible (7.3.1.2). Les morphismes g_j sont représentables (7.1.15). Il résulte alors de 7.3.1.1 et ([1] II 4.4) que, pour tout $k \in J$, la famille $(Y_j \times_X Y'_k \to Y'_k)_{j\in J}$ est couvrante pour la topologie admissible de $\mathbf{R}$; par suite, le crible engendré contient un recouvrement admissible $(X_{ik} \to Y'_k)_{i\in I_k}$. Si on pose $I = \amalg_{k\in J} I_k$ et pour $i \in I_k \subset I$, on note $X_i \to X$ le morphisme composé $X_{ik} \to Y'_k \to X$, la famille $(X_i \to X)_{i\in I}$ est un recouvrement admissible contenu dans G.

Proposition 7.3.3. *Soient $\mathscr{F}$ la catégorie fibrée des flèches de* $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ ([26] VI 11.a), *$(f_i\colon S_i \to S)_{i\in I}$ un recouvrement admissible de* $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$. *Alors $(f_i)_{i\in I}$ est une famille de $\mathscr{F}$-descente effective universelle.*

On notera que la proposition équivaut à l'énoncé d'apparence plus faible que $(f_i)_{i\in I}$ est une famille de $\mathscr{F}$-descente effective. Notons $\mathscr{G}$ la catégorie scindée des faisceaux d'ensembles sur le site admissible de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ ([25] II 3.4.1), c'est à dire, la catégorie fibrée sur $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ obtenue en associant à tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}})$ le topos $\widetilde{R}_{/X}$ (7.3.1.4), et à tout morphisme $h\colon X \to Y$ le foncteur $h^*\colon \widetilde{\mathbf{R}}_{/Y} \to \widetilde{\mathbf{R}}_{/X}$ image inverse par le morphisme de localisation associé à h ([1] IV 5.5). Comme $\mathscr{G}$ est un champ ([25] II 3.4.4), $(f_i)_{i\in I}$ est une famille de $\mathscr{G}$-descente effective, et comme $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ est une sous-catégorie pleine de $\widetilde{\mathbf{R}}$, $(f_i)_{i\in I}$ est une famille de $\mathscr{F}$-descente. Pour voir qu'elle est effective, il suffit de montrer que si $h\colon X \to S$ est un morphisme de $\widetilde{\mathbf{R}}$ tel que $X \times_S S_i$ soit un espace rigide quasi-séparé pour tout $i \in I$, alors X est un espace rigide quasi-séparé. Cela résulte aussitôt de la définition (7.1.7) et du fait que les projections canoniques $(X \times_S S_i \to X)$ forment un recouvrement admissible.

7.3.4. Soit X un espace rigide quasi-séparé. On désigne par $\mathbf{Ouv}_{/X}$ (resp. $\mathbf{Ad}_{/X}$) la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}/X}$ formée des immersions ouvertes (resp. des immersions ouvertes quasi-compactes). Il résulte de 7.1.4(iii) et 7.2.3 que tout morphisme de $\mathbf{Ouv}_{/X}$ (resp. $\mathbf{Ad}_{/X}$) est une immersion ouverte (resp. une immersion ouverte quasi-compacte). On appelle *topologie admissible* de X la topologie sur $\mathbf{Ouv}_{/X}$ induite par la topologie admissible sur $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ au moyen du foncteur "source" $\mathbf{Ouv}_{/X} \to \mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$. Il est clair que $\mathbf{Ouv}_{/X}$ est un $\mathbb{U}$-site. On appelle *topos admissible* de X, et l'on note X_{ad}, le topos des faisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur $\mathbf{Ouv}_{/X}$.

On peut faire les remarques suivantes :

7.3.4.1. La topologie admissible sur $\mathbf{Ouv}_{/X}$ est moins fine que la topologie canonique. Cela résulte du fait que la topologie admissible sur $\mathbf{Ouv}_{/X}$ est induite par la topologie admissible sur $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}/X}$ et que cette dernière est moins fine que la topologie canonique (7.3.1.6). Par suite, le foncteur canonique $\varepsilon_X\colon \mathbf{Ouv}_{/X} \to X_{\mathrm{ad}}$ est pleinement fidèle.

7.3.4.2. Pour tout objet Y de $\mathbf{Ouv}_{/X}$, il existe un famille couvrante $(Y_i \to Y)_{i\in I}$ de $\mathbf{Ouv}_{/X}$ telle que les Y_i soient représentables par des objets de $\mathbf{R}_{/X}$ (7.3.1.2).

En particulier, les morphismes structuraux $Y_i \to X$ sont des immersions ouvertes quasi-compactes (7.1.15).

7.3.4.3. Les trois topologies suivantes sur $\mathbf{Ad}_{/X}$ coïncident :

(a) La topologie induite par la topologie admissible sur $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ au moyen du foncteur “source” $\mathbf{Ad}_{/X} \to \mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$.

(b) La topologie induite par la topologie admissible sur $\mathbf{Ouv}_{/X}$ au moyen du foncteur canonique $i\colon \mathbf{Ad}_{/X} \to \mathbf{Ouv}_{/X}$.

(c) La topologie engendrée par la prétopologie pour laquelle les recouvrements sont les familles de morphismes de $\mathbf{Ad}_{/X}$ qui sont des recouvrements admissibles.

Cela résulte de 1.1.4, 7.3.1.2 et ([1] III 3.3). De plus, le foncteur $F \mapsto F \circ i$ induit une équivalence de catégories de X_{ad} dans la catégorie des faisceaux admissibles sur $\mathbf{Ad}_{/X}$ (7.3.4.2 et [1] III 4.1). En particulier, lorsque X est un espace rigide cohérent, on retrouve le site et le topos admissibles définis dans (4.4.1).

7.3.5. Tout morphisme $f\colon X \to Y$ de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ induit par changement de base un morphisme de sites $\mathbf{Ouv}_{/Y} \to \mathbf{Ouv}_{/X}$, et par suite un morphisme de topos que l'on note encore $f\colon X_{\mathrm{ad}} \to Y_{\mathrm{ad}}$. Pour tout couple de morphismes composables $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to Z$ de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$, on a un isomorphisme canonique

$$g_*f_* \xrightarrow{\sim} (gf)_* \tag{7.3.5.1}$$

vérifiant une relation de cocycle du type (1.1.2.1). Il définit par adjonction un isomorphisme

$$f^*g^* \xrightarrow{\sim} (gf)^*, \tag{7.3.5.2}$$

qui vérifie une relation de cocycle analogue.

On obtient ainsi un pseudo-foncteur (1.1.2) de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}^{\circ}$ dans $\mathbf{Cat}$ associant à tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}})$ le topos X_{ad}, et à tout morphisme $f\colon X \to Y$ de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ le foncteur image inverse $f^*\colon Y_{\mathrm{ad}} \to X_{\mathrm{ad}}$ par le morphisme de topos associé à f. De façon équivalente, on obtient un $\mathbb{U}$-topos fibré ([1] VI 7.1.1) que l'on note

$$\mathrm{Fais}(\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}, \mathrm{ad}) \to \mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}. \tag{7.3.5.3}$$

On obtient aussi un pseudo-foncteur de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ dans $\mathbf{Cat}$ associant à tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}})$ le topos X_{ad}, et à tout morphisme $f\colon X \to Y$ de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ le foncteur image *directe* $f_*\colon Y_{\mathrm{ad}} \to X_{\mathrm{ad}}$ par le morphisme de topos associé à f. De façon équivalente, on obtient une catégorie fibrée que l'on note

$$\mathrm{Fais}'(\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}, \mathrm{ad}) \to \mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}^{\circ}. \tag{7.3.5.4}$$

7.3.6. Soient $f\colon X \to Y$ une immersion ouverte de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$, $\tau_f\colon \mathbf{Ouv}_{/X} \to \mathbf{Ouv}_{/Y}$ le foncteur défini par composition à gauche avec f. Alors τ_f induit une équivalence de catégories $\mathbf{Ouv}_{/X} \xrightarrow{\sim} (\mathbf{Ouv}_{/Y})_{/(X,f)}$ (7.1.4(iii), 7.2.3 et 7.2.4). La topologie admissible sur X est induite par celle sur Y au moyen du foncteur τ_f. Donc en vertu de 1.1.5, on a une suite de trois foncteurs adjoints :

$$\tau_{f!}\colon X_{\mathrm{ad}} \to Y_{\mathrm{ad}}, \quad \tau_f^*\colon Y_{\mathrm{ad}} \to X_{\mathrm{ad}}, \quad \tau_{f*}\colon X_{\mathrm{ad}} \to Y_{\mathrm{ad}}. \tag{7.3.6.1}$$

Le foncteur τ_f^* est adjoint à gauche du foncteur image directe f_* par le morphisme de topos $f\colon X_{\mathrm{ad}} \to Y_{\mathrm{ad}}$ (7.3.5). Donc ce dernier s'identifie canoniquement au morphisme de localisation associé à f (1.1.5).

7.3.7. Nous munirons le topos fibré $\mathrm{Fais}(\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}, \mathrm{ad})$ (7.3.5.3) d'une structure annelée canonique ([1] VI 8.6.1), c'est à dire, d'une section en anneaux de la catégorie fibrée $\mathrm{Fais}'(\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}, \mathrm{ad})$ (7.3.5.4). Cela revient à associer à tout objet X de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ un anneau $\mathscr{O}_X$ de X_{ad} et à tout morphisme $f\colon X \to Y$ de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ un homomorphisme d'anneaux $\theta_f\colon \mathscr{O}_Y \to f_*(\mathscr{O}_X)$ vérifiant des relations de compatibilité. Notons que le changement de base de la catégorie fibrée $\mathrm{Fais}'(\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}, \mathrm{ad})$ par le foncteur canonique $\alpha\colon \mathbf{R} \to \mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ s'identifie à $\mathrm{Fais}'(\mathbf{R}, \mathrm{ad})$ (4.4.2.4). On établit la proposition suivante :

Proposition 7.3.8. *Les notations étant celles de* (7.3.7)*, il existe une section en anneaux de* $\mathrm{Fais}'(\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}, \mathrm{ad})$*, unique à isomorphisme unique près, telle que les conditions suivantes soient remplies :*

(i) *La section de* $\mathrm{Fais}'(\mathbf{R}, \mathrm{ad})$ *déduite par changement de base par le foncteur* $\alpha\colon \mathbf{R} \to \mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ *est la section en anneaux canonique* (4.8.2)*.*

(ii) *Pour toute immersion ouverte* $f\colon X \to Y$ *de* $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$*, l'homomorphisme* $\theta_f^\sharp\colon f^*(\mathscr{O}_Y) \to \mathscr{O}_X$ *déduit par adjonction de* θ_f*, est un isomorphisme.*

Soit $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}})$. On note $\mathrm{FAISCIN}(\mathbf{Ouv}_{/X})$ la catégorie scindée des faisceaux d'ensembles sur le site admissible de X ([25] II 3.4.1), qui s'identifie canoniquement au changement de base de la catégorie fibrée $\mathrm{Fais}(\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}, \mathrm{ad})$ par le foncteur "source" $\mathbf{Ouv}_{/X} \to \mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ (7.3.6). La famille $\mathscr{X} = (X_i \to X)_{i \in I}$ de toutes les immersions ouvertes telles que X_i soit un objet de $\mathbf{R}$, est clairement couvrante pour la topologie admissible de X. D'autre part, la famille $(\mathscr{O}_{X_i})_{i \in I}$ est une donnée de descente pour $\mathrm{FAISCIN}(\mathbf{Ouv}_{/X})$ relativement à $\mathscr{X}$ (4.8.4). Comme $\mathrm{FAISCIN}(\mathbf{Ouv}_{/X})$ est un champ ([25] II 3.4.4), elle définit un anneau $\mathscr{O}_X$ de X_{ad}.

Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$, $u_i\colon X_i \to X$ une immersion ouverte telle que X_i soit un objet de $\mathbf{R}$. D'après 7.1.14, il existe $Y_i \in \mathrm{Ob}(\mathbf{R})$, une immersion ouverte $v_i\colon Y_i \to Y$ et un morphisme $f_i\colon X_i \to Y_i$ de $\mathbf{R}$ tels que $f \circ u_i = v_i \circ f_i$. On en déduit par descente un homomorphisme canonique $\theta_f^\sharp\colon f^*(\mathscr{O}_Y) \to \mathscr{O}_X$. On note $\theta_f\colon \mathscr{O}_Y \to f_*(\mathscr{O}_X)$ l'homomorphisme adjoint de $\theta_f^\sharp$. Il est immédiat de vérifier que l'on obtient ainsi une section de $\mathrm{Fais}'(\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}, \mathrm{ad})$ remplissant les conditions requises.

7.3.9. Si $f\colon X \to Y$ est un morphisme d'espaces rigides quasi-séparé, nous notons encore

$$f\colon (X_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_X) \to (Y_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_Y) \tag{7.3.9.1}$$

le morphisme de topos annelés déduit de l'homomorphisme $\theta_f \colon \mathscr{O}_Y \to f_*(\mathscr{O}_X)$. Suivant la convention (1.1.11), nous utilisons pour les modules la notation f^{-1} pour désigner l'image réciproque au sens des faisceaux abéliens en réservant la notation f^* pour l'image réciproque au sens des modules. Nous désignons par $\mathrm{R}^q f_*$, $q \in \mathbb{N}$, les foncteurs dérivés du foncteur $f_* \colon \mathbf{Mod}(X_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_X) \to \mathbf{Mod}(Y_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_Y)$ pour les modules.

Définition 7.3.10. Soit X un espace rigide quasi-séparé. On dit qu'un $\mathscr{O}_X$-module est *de type fini* (resp. *de présentation finie*, resp. *cohérent*) s'il est de $(\mathbf{Ouv}_{/X})$-type fini (resp. de $(\mathbf{Ouv}_{/X})$-présentation finie, resp. $(\mathbf{Ouv}_{/X})$-cohérent) (1.3).

Proposition 7.3.11. *Si X est un espace rigide quasi-séparé, alors $\mathscr{O}_X$ est un anneau cohérent.*

Cela résulte de 4.8.19 et des définitions.

Théorème 7.3.12. *Soient $f \colon X \to Y$ un morphisme propre d'espaces rigides quasi-séparés, F un $\mathscr{O}_X$-module cohérent. Alors pour tout entier $q \geq 0$, $\mathrm{R}^q f_*(F)$ est un $\mathscr{O}_Y$-module cohérent.*

Cela résulte de 4.8.22 et des définitions.

Proposition 7.3.13. *Soit X un espace rigide quasi-séparé.*

(i) *Tout objet de $\mathbf{Ouv}_{/X}$ est quasi-séparé dans X_{ad}.*

(ii) *Pour qu'un objet Y de $\mathbf{Ouv}_{/X}$ soit quasi-compact* (*resp. cohérent*) *dans X_{ad}, il faut et il suffit qu'il soit représentable par un objet de $\mathbf{R}_{/X}$.*

(iii) *Pour qu'un morphisme $f \colon Z \to Y$ de $\mathbf{Ouv}_{/X}$ soit quasi-compact dans X_{ad}, il faut et il suffit qu'il soit représentable* (7.1.1)*. En particulier, pour qu'un objet Y de $\mathbf{Ouv}_{/X}$ soit un objet de $\mathbf{Ad}_{/X}$, il faut et il suffit que le morphisme structural $Y \to X$ soit quasi-compact dans X_{ad}.*

(iv) *Le topos X_{ad} est quasi-séparé. Si de plus X est cohérent, X_{ad} est cohérent.*

Soit C la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Ouv}_{/X}$ formée d'objets de $\mathbf{R}_{/X}$. C'est une famille génératrice de X_{ad}, formée d'objets quasi-compacts (7.3.1.1 et 4.3.8.1).

(i) Cela résulte de 7.1.15, ([1] VI 1.18 et 1.10).

(ii) Il n'y a évidemment à montrer que la nécessité de la condition. Considérons une famille épimorphique $(Y_i \to Y)_{i\in I}$ de X_{ad} telle que chaque Y_i soit un objet de C ; on peut supposer I fini. Il résulte de 7.1.15 et 7.3.1.2 que $(Y_i \to Y)_{i\in I}$ est un recouvrement admissible. Par suite, Y est représentable par un objet de $\mathbf{R}_{/X}$, en vertu de 7.1.10.

(iii) Si f est représentable, il est quasi-compact dans X_{ad} en vertu de ([1] VI 1.10). Inversement, supposons f quasi-compact et montrons qu'il est représentable. D'après 7.1.14, il suffit de montrer que, pour tout objet Y' de $\mathbf{R}$ et toute immersion ouverte quasi-compacte $Y' \to Y$, $Z \times_Y Y'$ est représentable par un objet de $\mathbf{R}$. Or il résulte de l'hypothèse que $Z \times_Y Y'$ est quasi-compact dans X_{ad} ; d'où l'assertion en vertu de (ii).

(iv) Cela résulte de ([1] VI 2.4.5) et du fait que C est stable par produits fibrés et par produits de deux objets (7.1.15). Si X est cohérent, C est stable par limites projectives finies quelconques ; donc $X_{\text{ét}}$ est cohérent en vertu de *loc. cit.*

Corollaire 7.3.14. *Pour tout espace rigide quasi-séparé X, X_{ad} a suffisamment de points.*

Cela résulte de 7.3.13(iv) et ([1] VI §9).

Proposition 7.3.15. *Soit X un espace rigide quasi-séparé. Le foncteur canonique*

$$\varepsilon_X \colon \mathbf{Ouv}_{/X} \to X_{\text{ad}}$$

induit une équivalence de catégories entre la catégorie $\mathbf{Ouv}_{/X}$ et la catégorie des ouverts de X_{ad} (i.e., la sous-catégorie pleine de X_{ad} formée des sous-objets de l'objet final).

On rappelle que ε_X est pleinement fidèle (7.3.4.1). D'après 7.2.3 et ([1] II 4.4.0), pour tout objet U de $\mathbf{Ouv}_{/X}$, $\varepsilon_X(U)$ est un ouvert de X_{ad}. Il reste donc à montrer que tout ouvert de X_{ad} est dans l'image essentielle de ε_X. Si U est vide, $\varepsilon_X(U)$ est vide (4.3.8.4). Soit F un ouvert non vide de X_{ad}. On notera que si $(Y_\alpha \to Y)_{\alpha\in\phi}$ est une famille couvrante de $\mathbf{Ouv}_{/X}$ telle que, pour tout $\alpha \in \phi$, $F(Y_\alpha) \neq \emptyset$, alors $F(Y) \neq \emptyset$. Soit I la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Ouv}_{/X}$ formée des objets quasi-compacts X' tels que $F(X') \neq \emptyset$. D'après 7.3.13(ii), tout objet de I est représentable par un objet de $\mathbf{R}_{/X}$; en particulier, I est une sous-catégorie pleine de $\mathbf{Ad}_{/X}$ (7.1.15). Pour tous $X_1, X_2 \in \mathrm{Ob}(I)$, il existe $Y \in \mathrm{Ob}(I)$ et deux morphismes $X_1 \to Y$ et $X_2 \to Y$. Cela résulte de 7.1.9 et 7.1.10 appliqués aux morphismes structuraux $X_1 \to X$ et $X_2 \to X$. Par suite, I est filtrante. De plus, on voit facilement que I est essentiellement $\mathbb{U}$-petite ([1] I 8.1.7). Il résulte alors de 7.1.12 que la limite inductive U du foncteur "source" $I \to \mathbf{R}$ est un espace rigide quasi-séparé, et les morphismes canoniques $(X' \to U)_{X'\in I}$ forment un recouvrement admissible. Montrons que le morphisme canonique $f \colon U \to X$ est une immersion ouverte. Soient Y un objet de $\mathbf{R}$, $g \colon Y \to U$ une immersion ouverte quasi-compacte. Comme Y est quasi-compact et que I est filtrante, il existe un objet X' de I tel que la projection canonique $X' \times_U Y \to Y$ soit un isomorphisme. Donc g se factorise en un morphisme $g' \colon Y \to X'$ de $\mathbf{R}$ suivi du morphisme canonique $X' \to U$. En vertu de 7.1.4(iii), g' est une immersion ouverte quasi-compacte. Comme $X' \to X$ est une immersion ouverte quasi-compacte, $f\circ g \colon Y \to X$ est une immersion ouverte quasi-compacte. Donc f est une immersion ouverte ; en particulier, $\varepsilon_X(U)$ est un ouvert de X_{ad}. Montrons que $F = \varepsilon_X(U)$. Il suffit de prouver que pour tout objet quasi-compact Y de $\mathbf{Ad}_{/X}$, $F(Y) \neq \emptyset$ si et seulement si $\varepsilon_X(U)(Y) \neq \emptyset$. Si $F(Y) \neq \emptyset$, Y est un objet de I ; donc $\varepsilon_X(U)(Y) \neq \emptyset$. Inversement, supposons $\varepsilon_X(U)(Y) \neq \emptyset$. Comme Y est quasi-compact et que I est filtrante, le morphisme canonique $Y \to U$ se factorise à travers un objet de I ; donc $F(Y) \neq \emptyset$.

Proposition 7.3.16. *Soit $(X_i \to X)_{i\in I}$ une famille d'immersions ouvertes d'espaces rigides quasi-séparés. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *X est somme des $(X_i)_{i\in I}$ dans $\widetilde{\mathbf{R}}$.*

(ii) *X est somme des $(X_i)_{i\in I}$ dans X_{ad}.*

(iii) *$(X_i \to X)_{i\in I}$ est un recouvrement admissible et pour tout couple (i,j), $i \neq j$, d'éléments de I, $X_i \times_X X_j$ est vide.*

La condition (i) revient à dire que le morphisme canonique $f\colon \amalg_{i\in I} X_i \to X$ est un isomorphisme, *i.e.*, f est un épimorphisme et un monomorphisme de $\widetilde{\mathbf{R}}$. Le morphisme diagonal

$$\Delta\colon\ \amalg_{i\in I} X_i \to (\amalg_{i\in I} X_i) \times_X (\amalg_{i\in I} X_i)$$

est somme de morphismes $\Delta_{i,j}$, $(i,j) \in I^2$, définis de la façon suivante. Lorsque $i = j$, $\Delta_{i,i}$ est le morphisme diagonal $X_i \to X_i \times_X X_i$, qui est un isomorphisme en vertu de 7.2.3. Lorsque $i \neq j$, $\Delta_{i,j}$ est le morphisme de l'objet initial de $\widetilde{\mathbf{R}}$ dans $X_i \times_X X_j$. Pour que f soit un monomorphisme, il faut et il suffit que Δ soit un isomorphisme, ou encore que les $\Delta_{i,j}$ soient des isomorphismes, *i.e.*, pour tout couple (i,j), $i \neq j$, d'éléments de I, $X_i \times_X X_j$ soit vide.

De même, compte tenu de 7.3.15 et du fait que le foncteur canonique $\varepsilon_X\colon \mathbf{Ouv}_{/X} \to X_{\mathrm{ad}}$ commute aux produits fibrés, la condition (ii) revient à dire que la famille $(X_i \to X)_{i\in I}$ est épimorphique dans X_{ad} et pour tout couple (i,j), $i \neq j$, d'éléments de I, $X_i \times_X X_j$ est vide.

Il est clair que (iii) entraîne (i) et (ii) (7.1.6.2). Montrons ensuite que (i) implique (iii). Compte tenu de 7.1.6.2, il suffit de montrer que, pour tout $i \in I$, $X_i \to X$ est une immersion ouverte quasi-compacte. On peut se réduire au cas où X est un espace rigide cohérent ([1] II 4.3(1)) ; il s'agit alors de montrer que les X_i sont des espaces rigides cohérents, ce qui résulte de 7.1.11 et ([1] VI 1.4). Montrons enfin que (ii) implique (iii). Il suffit de montrer que, pour tout $i \in I$, $X_i \to X$ est une immersion ouverte quasi-compacte (7.3.1.2), ou encore d'après 7.3.13(iii), que le morphisme $X_i \to X$ est quasi-compact dans X_{ad}, ce qui résulte de ([1] VI 1.4 et 1.10).

Définition 7.3.17. Lorsque les conditions équivalentes de (7.3.16) sont vérifiées, on dit que X est *somme admissible* des $(X_i)_{i\in I}$. On dit alors aussi que la somme $X = \amalg_{i\in I} X_i$ est *admissible.*

Proposition 7.3.18. *Soient X un espace rigide cohérent, $(X_i)_{i\in I}$ une famille finie de sous-objets de X dans $\mathbf{R}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *X est somme des $(X_i)_{i\in I}$ dans $\mathbf{R}$.*

(ii) *X est somme admissible des $(X_i)_{i\in I}$.*

On sait que les sommes finies dans $\mathbf{R}$ sont représentables et disjointes (4.1.14). De plus, il résulte de *loc.cit.* que si $X = \amalg_{i\in I} X_i$, la famille $(X_i \to X)_{i\in I}$ est un recouvrement admissible, d'où (i)$\Rightarrow$(ii). Supposons ensuite la condition (ii) satisfaite ; posons $Y = \amalg_{i \in I} X_i$ et soit $f \colon Y \to X$ le morphisme canonique. Notons $\varepsilon \colon \mathbf{R} \to \widetilde{\mathbf{R}}$ le foncteur canonique (4.3.8.3). Il résulte de l'implication déjà établie (i)$\Rightarrow$(ii) que $\varepsilon(f)$ est un isomorphisme de $\widetilde{\mathbf{R}}$. Par suite f est un isomorphisme, d'où la condition (i).

Remarques 7.3.19.

(a) Les sommes dans $\widetilde{\mathbf{R}}$ sont disjointes et universelles ([1] II 4.5.1).

(b) Soient $X = \amalg_{i \in I} X_i$ une somme de $\widetilde{\mathbf{R}}$, $f \colon Y \to X$ un morphisme de $\widetilde{\mathbf{R}}$, $j \in I$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

  (i) f se factorise à travers X_j.

  (ii) La projection canonique $Y \times_X X_j \to Y$ est un isomorphisme.

  (iii) Pour tout $i \in I$, $i \neq j$, $Y \times_X X_i$ est vide.

  En effet, l'équivalence de (i) et (ii) résulte du fait que $X_j \to X$ est un monomorphisme, et l'équivalence de (ii) et (iii) du fait que $Y = \amalg_{i \in I}(Y \times_X X_i)$ (qui implique que pour pour tout $i \in I$, $i \neq j$, $(Y \times_X X_i) \times_Y (Y \times_X X_j)$ est vide).

Proposition 7.3.20. *Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'objets de $\mathbf{R}$, indexées par un ensemble $I \in \mathbb{U}$. Alors $X = \amalg_{i \in I} X_i$ est représentable par un espace rigide quasi-séparé et la somme est admissible.*

Comme la somme $X = \amalg_{i \in I} X_i$ est représentable dans $\widetilde{\mathbf{R}}$ ([1] II 4.1), il suffit de montrer que pour tout $i \in I$, le morphisme canonique $X_i \to X$ est une immersion ouverte quasi-compacte de $\widetilde{\mathbf{R}}$. Soient Y un objet de $\mathbf{R}$, $u \colon Y \to X$ un morphisme. Comme on a $Y = \amalg_{i \in I} X_i \times_X Y$ et que Y est quasi-compact dans $\widetilde{\mathbf{R}}$, il existe une partie finie J de I telle que $Y = \amalg_{j \in J} X_j \times_X Y$. Alors $X_J = \amalg_{j \in J} X_j$ est représentable dans $\mathbf{R}$ (4.1.14) ; le morphisme canonique $X_J \to X$ est un monomorphisme (7.3.19(a)) ; et on a $X = (\amalg_{i \in I - J} X_i) \amalg X_J$. En vertu de 7.3.19(b), u se factorise uniquement à travers X_J, et pour tout $i \in I - J$, $Y \times_X X_i$ est vide. Pour tout $j \in J$, le morphisme canonique $X_j \to X_J$ est une immersion ouverte de $\mathbf{R}$ (7.3.18), et on peut identifier $X_j \times_X Y$ et $X_j \times_{X_J} Y$ au-dessus de Y, d'où l'assertion.

Définition 7.3.21. On dit qu'un espace rigide quasi-séparé est *connexe* s'il n'est pas somme admissible de deux sous-objets non vides.

Proposition 7.3.22. *Pour qu'un espace rigide quasi-séparé X soit connexe, il faut et il suffit que le topos X_{ad} soit connexe* (*i.e., son objet final ne soit pas somme de deux sous-objets non vides*).

Cela résulte de 7.3.15 et 7.3.16.

Proposition 7.3.23. *Soit X un espace rigide cohérent. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *X est connexe.*

(ii) *X n'est pas somme dans $\mathbf{R}$ de deux sous-objets non vides.*

(iii) *Tout modèle formel rig-pur de X est connexe.*

En effet, l'équivalence (i)$\Leftrightarrow$(ii) résulte de 7.3.18 et du fait que ε transforme l'objet initial de $\mathbf{R}$ en l'objet intial de $\widetilde{\mathbf{R}}$ (4.3.8.4). L'implication (ii)$\Rightarrow$(iii) est une conséquence de 4.1.8 et 4.1.14. Montrons enfin l'implication (iii)$\Rightarrow$(ii). Soit $X = X_1 \amalg X_2$ une somme de $\mathbf{R}$. D'après 4.3.6, il existe un modèle formel rig-pur $\mathfrak{X}$ de X et deux sous-schémas ouverts $\mathfrak{X}_1$ et $\mathfrak{X}_2$ de $\mathfrak{X}$ tels que $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \cup \mathfrak{X}_2$ et que $\mathfrak{X}_i^{\mathrm{rig}}$ soit X-isomorphe à X_i $(i = 1, 2)$. Comme on a $(\mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2)^{\mathrm{rig}} \simeq X_1 \times_X X_2$ (4.1.13), $\mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{X}_2$ est vide (4.1.8). Mais $\mathfrak{X}$ est connexe par hypothèse, donc $\mathfrak{X}_1$ ou $\mathfrak{X}_2$ est vide.

Proposition 7.3.24. *Soient X un espace rigide quasi-séparé, $(f_i \colon X_i \to X)_{i\in I}$ une famille finie d'immersions ouvertes quasi-compactes. Supposons que X soit somme des $(X_i)_{i\in I}$. Alors pour tout $i \in I$, f_i est une immersion fermée, et le morphisme canonique*

$$\mathscr{O}_X \to \prod_{i\in I} f_{i*}(\mathscr{O}_{X_i}) \tag{7.3.24.1}$$

est un isomorphisme.

La question étant locale pour la topologie admissible de X (7.2.11), on peut se borner au cas où X est cohérent. Pour tout $i \in I$, soient $\theta_i \colon \mathscr{O}_X \to f_{i*}(\mathscr{O}_{X_i})$ le morphisme canonique, J_i le noyau de θ_i. Montrons d'abord que les $\mathscr{O}_X$-algèbres $f_{i*}(\mathscr{O}_{X_i})$ sont cohérentes et que le morphisme (7.3.24.1) est un isomorphisme. Ces assertions étant locales, il suffit de les vérifier après restriction à chacun des X_j $(j \in I)$. Or $\theta_i|X_j$ s'identifie à l'homomorphisme associé à la projection canonique $p_{i,j} \colon X_i \times_X X_j \to X_j$. Nos assertions résultent alors du fait que $p_{i,j}$ est un isomorphisme si $i = j$, et $X_i \times_X X_j$ est vide si $i \neq j$. Compte tenu de la définition (4.8.32), f_i se factorise uniquement à travers $\mathrm{Sp}(\mathscr{O}_X/J_i)$. D'autre part, pour tout $j \in I$, $j \neq i$, $\mathrm{Sp}(\mathscr{O}_X/J_i) \times_X X_j$ est vide en vertu de 4.8.35. Donc le morphisme structural $\mathrm{Sp}(\mathscr{O}_X/J_i) \to X$ se factorise à travers X_i (7.3.19). On en déduit que X_i est X-isomorphe à $\mathrm{Sp}(\mathscr{O}_X/J_i)$ (4.2.7), d'où la proposition.

Corollaire 7.3.25. *Tout espace rigide cohérent est somme finie de sous-objets connexes de* $\mathbf{R}$.

Supposons qu'il existe un espace rigide cohérent X qui ne vérifie pas la proposition. On en déduit par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, X est somme de n sous-objets non vides de $\mathbf{R}$. Soit $(U_i \to X)_{i\in I}$ un recouvrement admissible fini de X tel que, pour tout $i \in I$, U_i admette un modèle formel affine globalement idyllique et ayant un idéal de définition monogène. Pour tout entier $n \geq 1$, il existe $i \in I$ tel que U_i soit somme de n sous-objets non vides de $\mathbf{R}$; donc en vertu de 7.3.24, l'anneau $\Gamma(U_i, \mathscr{O}_X)$ a n idempotents distincts. Or les anneaux $\Gamma(U_i, \mathscr{O}_X)$ sont noethériens ((4.7.8.2), (2.10.5.1) et 1.10.2), et n'ont donc qu'un nombre fini d'idempotents, ce qui fournit une contradiction.

Proposition 7.3.26. *Soient X un espace rigide cohérent, e un idempotent de $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$, X_1 et X_2 les sous-espaces fermés de X définis respectivement par les* *idéaux cohérents $I_1 = e\mathscr{O}_X$ et $I_2 = (1-e)\mathscr{O}_X$ de $\mathscr{O}_X$. Alors X est somme de X_1 et X_2 dans* $\mathbf{R}$.

Soit $\mathfrak{X}$ un modèle formel de X ayant un idéal de définition inversible. Compte tenu de (4.7.8.2), on peut considérer e comme un idempotent de $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_\mathfrak{X}))$. Soit $\mathscr{B}$ la sous-$\mathscr{O}_\mathfrak{X}$-algèbre de $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_\mathfrak{X})$ engendrée par e, *i.e.*, l'image de l'homomorphisme de $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$-algèbres

$$\mathscr{O}_\mathfrak{X}[T]/(T^2-T) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_\mathfrak{X}), \quad T \mapsto e.$$

D'après 2.10.9(ii), $\mathscr{B}$ est une $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$-algèbre cohérente. On peut donc lui appliquer 3.1.12 ; on obtient un éclatement admissible $\varphi\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ qui se factorise à travers $\mathrm{Sp}(\mathscr{B})$. Par suite, e est un idempotent de $\Gamma(\mathfrak{X}', \mathscr{O}_{\mathfrak{X}'})$. Il lui correspond une décomposition de $\mathfrak{X}'$ en somme $\mathfrak{X}'_1 \amalg \mathfrak{X}'_2$ de deux sous-schémas ouverts et fermés de $\mathfrak{X}'$, définis par les idéaux $\mathscr{I}'_1 = e\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$ et $\mathscr{I}'_2 = (1-e)\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$. On a $I_1 = \mathscr{I}_1'^{\mathrm{rig}}$ et $I_2 = \mathscr{I}_2'^{\mathrm{rig}}$ (4.7.11). Donc X_1 et X_2 sont X-isomorphismes à $\mathfrak{X}_1^{\mathrm{rig}}$ et $\mathfrak{X}_2^{\mathrm{rig}}$, et la proposition résulte de 4.1.14.

Corollaire 7.3.27. *Soit X un espace rigide cohérent. Il y a une correspondance biunivoque entre les classes d'isomorphismes de décompositions de X en somme $X_1 \amalg X_2$ dans* $\mathbf{R}$ *et l'ensemble des idempotents de l'anneau* $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$.

Cela résulte de 7.3.24 et 7.3.26.

Corollaire 7.3.28. *Soient (A, J) un couple hensélien idyllique* (1.15.17)*, $\widehat{A}$ le séparé complété de A pour la topologie J-préadique, $X = \mathrm{Spec}(A)$, U l'ouvert $X - \mathrm{V}(J)$ de X, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(\widehat{A})$. Pour que U soit connexe, il faut et il suffit que $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ soit connexe.*

Posons $X' = \mathrm{Spec}(\widehat{A})$ et soit U' l'image réciproque de U dans X'. D'une part, on a un isomorphisme canonique $\Gamma(\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}) \simeq \Gamma(U', \mathscr{O}_{X'})$ ((4.7.8.2) et (2.10.5.1)), et d'autre part, U est connexe si et seulement si U' est connexe (1.15.16). La proposition s'ensuit compte tenu de 7.3.27.

7.4 Géométrie algébrique et géométrie rigide

7.4.1. Dans cette section, S désigne un schéma cohérent (élément de l'univers fixé $\mathbb{U}$), T un sous-schéma fermé de S, U l'ouvert $S - T$ de S, $j\colon U \to S$ l'injection canonique et $\mathscr{S} = S_{/T}$ le schéma formel complété de S le long de T. Supposons la paire (S, T) idyllique (2.6.17), de sorte que $\mathscr{S}$ est un objet de $\mathbf{S}$, et posons $\Theta = \mathscr{S}^{\mathrm{rig}}$. On notera que le schéma U est noethérien et l'immersion j est quasi-compacte.

7.4.2. On désigne par

$$j^\bullet\colon \mathbf{Sch}_{\mathrm{pf}/S} \to \mathbf{Sch}_{\mathrm{pf}/U}, \quad X \mapsto X_U = X \times_S U \tag{7.4.2.1}$$

le foncteur de changement de base par j, par

$$j^{\mathsf{s}} \colon \widehat{\mathbf{Sch}}_{\mathrm{pf}/U} \to \widehat{\mathbf{Sch}}_{\mathrm{pf}/S}, \quad F \mapsto F \circ j^{\bullet} \tag{7.4.2.2}$$

le foncteur obtenu en composant avec $j^{\bullet}$, et par $j_!$ un adjoint à gauche de j^{s} choisi de sorte que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Sch}_{\mathrm{pf}/S} \arrow[r, "j^{\bullet}"] \arrow[d, "\mathrm{h}_S"'] & \mathbf{Sch}_{\mathrm{pf}/U} \arrow[d, "\mathrm{h}_U"] \\ \widehat{\mathbf{Sch}}_{\mathrm{pf}/S} \arrow[r, "j_!"] & \widehat{\mathbf{Sch}}_{\mathrm{pf}/U} \end{tikzcd} \tag{7.4.2.3}$$

où h_{-} est le foncteur canonique (1.1.3.1) est commutatif ([1] I 5.4).

7.4.3. La complétion le long de l'image réciproque de T définit un foncteur

$$\mathfrak{f} \colon \mathbf{Sch}_{\mathrm{pf}/S} \to \mathbf{S}_{/\mathscr{S}}, \tag{7.4.3.1}$$

que l'on note aussi $X \mapsto \widehat{X}$. On désigne par

$$\mathfrak{f}^{\mathsf{s}} \colon \widehat{\mathbf{S}}_{/\mathscr{S}} \to \widehat{\mathbf{Sch}}_{\mathrm{pf}/S}, \quad F \mapsto F \circ \mathfrak{f} \tag{7.4.3.2}$$

le foncteur obtenu en composant avec $\mathfrak{f}$, et par $\mathfrak{f}_!$ un adjoint à gauche de $\mathfrak{f}^{\mathsf{s}}$, choisi de sorte que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Sch}_{\mathrm{pf}/S} \arrow[r, "\mathfrak{f}"] \arrow[d, "\mathrm{h}_S"'] & \mathbf{S}_{/\mathscr{S}} \arrow[d, "\mathrm{h}_{\mathscr{S}}"] \\ \widehat{\mathbf{Sch}}_{\mathrm{pf}/S} \arrow[r, "\mathfrak{f}_!"] & \widehat{\mathbf{S}}_{/\mathscr{S}} \end{tikzcd} \tag{7.4.3.3}$$

est commutatif. En vertu de ([1] I 5.4), pour tout préfaisceau F sur $\mathbf{Sch}_{\mathrm{pf}/S}$, on a

$$\mathfrak{f}_!(F) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{(\mathbf{Sch}_{\mathrm{pf}/S})_{/F}} \mathrm{h}_{\mathscr{S}} \circ \mathfrak{f}. \tag{7.4.3.4}$$

7.4.4. On désigne par $\mathfrak{q} \colon \mathbf{S}_{/\mathscr{S}} \to \mathbf{R}_{/\Theta}$ le foncteur de localisation (4.1.21.1), par

$$\mathfrak{q}^{\mathsf{s}} \colon \widehat{\mathbf{R}}_{/\Theta} \to \widehat{\mathbf{S}}_{\mathscr{S}}, \quad F \mapsto F \circ \mathfrak{q} \tag{7.4.4.1}$$

le foncteur obtenu en composant avec $\mathfrak{q}$, et par

$$\mathfrak{q}_! \colon \widehat{\mathbf{S}}_{/\mathscr{S}} \to \widehat{\mathbf{R}}_{/\Theta} \tag{7.4.4.2}$$

un adjoint à gauche de $\mathfrak{q}^{\mathsf{s}}$ choisi de sorte que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbf{S}_{/\mathscr{S}} \arrow[r, "\mathfrak{q}"] \arrow[d, "\mathrm{h}_{\mathscr{S}}"'] & \mathbf{R}_{/\Theta} \arrow[d, "\mathrm{h}_{\Theta}"] \\ \widehat{\mathbf{S}}_{/\mathscr{S}} \arrow[r, "\mathfrak{q}_!"] & \widehat{\mathbf{R}}_{/\Theta} \end{tikzcd} \tag{7.4.4.3}$$

est commutatif. On note $\mathfrak{A}$ le foncteur composé

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{q}_! \circ \mathfrak{f}_! \circ j^{\mathsf{s}} \circ \mathrm{h}_U \colon \mathbf{Sch}_{\mathrm{pf}/U} \to \widehat{\mathbf{R}}_{/\Theta}. \tag{7.4.4.4}$$

Il est clair que $\mathfrak{A}(U)$ s'identifie à $\mathrm{h}_\Theta(\Theta)$.

Proposition 7.4.5. *Le foncteur* $\mathfrak{A}$ *est exact à gauche.*

En effet, h_U est exact à gauche ([1] I 3.3), j^{s} est exact à gauche car il admet un adjoint à gauche, $\mathfrak{f}_!$ est exact à gauche ([1] I 5.2) et $\mathfrak{q}_!$ est exact à gauche (4.1.13).

7.4.6. Soient Y un S-schéma, $W = Y_U$, V un W-schéma de présentation finie. On désigne par $\mathscr{M}_{V/Y}$ la catégorie suivante. Les objets de $\mathscr{M}_{V/Y}$ sont les couples (X, u) où X est un Y-schéma de présentation finie et u est un W-morphisme $X_U \to V$. Soient (X, u), (X', u') deux objets de $\mathscr{M}_{V/Y}$. Un morphisme de (X, u) dans (X', u') est un Y-morphisme $v\colon X \to X'$ tel que $u = u' \circ v_U$.

Supposons d'abord $Y = S$ et posons $F = j^{\mathsf{s}} \circ \mathrm{h}_U(V)$. Pour un objet X de $\mathbf{Sch}_{\mathrm{pf}/S}$, la donnée d'un morphisme $\mathrm{h}_S(X) \to F$ correspond par adjonction à la donnée d'un morphisme $j_! \circ \mathrm{h}_S(X) \to \mathrm{h}_U(V)$, et donc à la donnée d'un U-morphisme $u\colon X_U \to V$ (7.4.2.3). On définit ainsi une équivalence de catégories

$$(\mathbf{Sch}_{\mathrm{pf}/S})_{/F} \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}_{V/S}. \tag{7.4.6.1}$$

Compte tenu de (7.4.3.4), (7.4.4.3) et du fait que le foncteur $\mathfrak{q}_!$ commute aux limites inductives, on en déduit un isomorphisme canonique fonctoriel

$$\mathfrak{A}(V) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{(X,u)\in\mathscr{M}_{V/S}} \mathrm{h}_\Theta(\widehat{X}^{\mathrm{rig}}). \tag{7.4.6.2}$$

Supposons ensuite Y de présentation finie sur S et posons $F = j^{\mathsf{s}} \circ \mathrm{h}_U(V)$ et $G = j^{\mathsf{s}} \circ \mathrm{h}_U(W)$. On a un morphisme canonique $\mathrm{h}_S(Y) \to G$ (qui correspond par adjonction à l'identité de W). Comme les foncteurs $\mathfrak{q}_!$ et $\mathfrak{f}_!$ sont exacts à gauche (4.1.13 et [1] I 5.2), on a un isomorphisme canonique fonctoriel

$$\mathfrak{A}(V) \times_{\mathfrak{A}(W)} \mathrm{h}_\Theta(\widehat{Y}^{\mathrm{rig}}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{q}_!\mathfrak{f}_!(F \times_G \mathrm{h}_S(Y)). \tag{7.4.6.3}$$

Pour un objet X de $\mathbf{Sch}_{\mathrm{pf}/S}$, la donnée d'un morphisme $\mathrm{h}_S(X) \to F \times_G \mathrm{h}_S(Y)$ correspond à la donnée de deux S-morphismes $X \to Y$ et $\mathrm{h}_S(X) \to F$ tels que les morphismes induits $\mathrm{h}_S(X) \to G$ coïncident. Cela revient à se donner un S-morphisme $X \to Y$ et un W-morphisme $u\colon X_U \to V$. On définit ainsi une équivalence de catégories

$$(\mathbf{Sch}_{\mathrm{pf}/S})_{/(F\times_G \mathrm{h}_S(Y))} \xrightarrow{\sim} \mathscr{M}_{V/Y}. \tag{7.4.6.4}$$

On en déduit comme plus haut un isomorphisme canonique fonctoriel

$$\mathfrak{A}(V) \times_{\mathfrak{A}(W)} \mathrm{h}_\Theta(\widehat{Y}^{\mathrm{rig}}) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{(X,u)\in\mathscr{M}_{V/Y}} \mathrm{h}_\Theta(\widehat{X}^{\mathrm{rig}}). \tag{7.4.6.5}$$

Les isomorphismes (7.4.6.2) et (7.4.6.5) sont clairement compatibles. Dans la suite, nous omettrons le foncteur canonique h_Θ des notations, ce qui n'entraîne aucune ambiguïté (1.1.3).

7.4.7. Soient $f\colon S' \to S$ un morphisme de présentation finie, T' (resp. U') l'image réciproque de T (resp. U) par f, $\mathscr{S}' = S'_{/T'}$ le schéma formel complété de S' le long de T', $\Theta' = \mathscr{S}'^{\mathrm{rig}}$,

$$\mathfrak{A}'\colon \mathbf{Sch}_{\mathrm{pf}/U'} \to \widehat{\mathbf{R}}_{/\Theta'} \tag{7.4.7.1}$$

le foncteur (7.4.4.4) relatif à (S',T'). Rappelons qu'on a un Θ-morphisme canonique $\Theta' \to \mathfrak{A}(U')$. D'après (7.4.6.5), pour tout U'-schéma de présentation finie V', on a un isomorphisme canonique fonctoriel

$$\mathfrak{A}'(V') \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}(V') \times_{\mathfrak{A}(U')} \Theta'. \tag{7.4.7.2}$$

On en déduit, compte tenu de 7.4.5, que pour tout U-schéma de présentation finie V, on a un isomorphisme canonique fonctoriel

$$\mathfrak{A}'(V \times_U U') \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}(V) \times_\Theta \Theta'. \tag{7.4.7.3}$$

Lemme 7.4.8. *Soient $\theta\colon \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ un foncteur, A un ensemble de flèches de I, B un ensemble de flèches de J, satisfaisant aux conditions suivantes :*

(i) *$\theta(A) \subset B$, et pour tous objets a, b de I, il existe deux flèches $a' \to a$, $b' \to b$ de A et un objet i de I tels que i majore a' et b' (i.e., tel que $\mathrm{Hom}(a', i) \neq \emptyset$ et $\mathrm{Hom}(b', i) \neq \emptyset$).*

(ii) *B est stable par composition, et pour toutes flèches $u\colon j \to k$ de J et $s\colon k' \to k$ de B, il existe deux flèches $u'\colon j' \to k'$ de J et $t\colon j' \to j$ de B telles que $su' = ut$.*

(iii) *Pour tout objet j de J, il existe une flèche $j' \to j$ de B et un objet i de I tel que $\theta(i)$ majore j' (i.e., tel que $\mathrm{Hom}(j', \theta(i)) \neq \emptyset$).*

(iv) *Pour tout objet i de I et toute double flèche $u, v\colon j \rightrightarrows \theta(i)$ dans J, il existe une flèche $w\colon j' \to j$ de B telle que $u \circ w = v \circ w$.*

Alors, pour tout foncteur $F\colon \mathrm{J} \to \mathscr{C}$ transformant les flèches de B en isomorphismes, le morphisme canonique

$$\varinjlim_{\mathrm{I}} F \circ \theta \to \varinjlim_{\mathrm{J}} F \tag{7.4.8.1}$$

est un isomorphisme.

Cela revient à dire que pour tout objet E de $\mathscr{C}$, l'application qui à un morphisme u du foncteur F dans le foncteur constant de valeur E sur J associe le morphisme $u \circ \theta$ du foncteur $F \circ \theta$ dans le foncteur constant de valeur E sur I, est bijective. La condition (iii) implique qu'elle est injective. Montrons que tout morphisme v du foncteur $F \circ \theta$ dans le foncteur constant de valeur E sur I est de la forme $u \circ \theta$, où u est un morphisme du foncteur F dans le foncteur constant de valeur E sur J. Soit j un objet de J. D'après la condition (iii), il existe un objet i de I et deux flèches $s\colon j' \to j$ de B et $h\colon j' \to \theta(i)$ de J. Notons $u(j)$ le morphisme composé $v(i) \circ F(h) \circ F(s)^{-1}\colon F(j) \to E$. Les conditions (i), (ii) et (iv) entraînent que $u(j)$ ne dépend pas du choix de (i, h, s). La condition (ii) implique alors que u est un morphisme du foncteur F dans le foncteur constant de valeur E sur J.

7.4.9. Soient X un S-schéma de présentation finie, V un ouvert de X_U (qui est nécessairement quasi-compact et donc de présentation finie sur U). On désigne par $\mathfrak{S}_{V,X}$ la catégorie suivante. Les objets de $\mathfrak{S}_{V,X}$ sont les triplets (X', φ, P) où $\varphi\colon X' \to X$ est un éclatement X_U-admissible de présentation finie (1.13.2) et P est un ouvert quasi-compact de X' tel que φ induise un isomorphisme $u_P\colon P_U \xrightarrow{\sim} V$. Soient (X', φ, P), (X'', ψ, Q) deux objets de $\mathfrak{S}_{V,X}$. Un morphisme de (X'', ψ, Q) dans (X', φ, P) est un X-morphisme $h\colon X'' \to X'$ tel que $h(Q) \subset P$.

On notera que la catégorie $\mathfrak{S}_{V,X}$ est non vide et contient un objet de la forme (X, id_X, P), où P est l'ouvert $X - \mathrm{V}(\mathscr{I})$ de X et $\mathscr{I}$ est un idéal de type fini de $\mathscr{O}_X$ défini comme suit. Comme X_U est noethérien, il existe un idéal de type fini $\mathscr{I}_U$ de $\mathscr{O}_{X_U}$ tel que $V = X_U - \mathrm{V}(\mathscr{I}_U)$. En vertu de ([28] 6.9.7), il existe alors un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{I}$ de $\mathscr{O}_X$ tel que $\mathscr{I}|X_U = \mathscr{I}_U$.

Soit $\mathbf{B}_X$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Sch}_{\mathrm{pf}/X}$ formée des éclatements X_U-admissibles de X. La catégorie $\mathfrak{S}_{V,X}$ est fibrée au-dessus de $\mathbf{B}_X$. Soit A l'ensemble des morphismes cartésiens de $\mathfrak{S}_{V,X}$, c'est à dire, l'ensemble des morphismes $h\colon (X'', \psi, Q) \to (X', \varphi, P)$ tels que $h^{-1}(P) = Q$. On sait que A permet un calcul de fractions à droite dans $\mathfrak{S}_{V,X}$ ([1] VI 6.4). La catégorie $\mathfrak{S}_{V,X}(A^{-1})$ est notée $\varinjlim \mathfrak{S}_{V,X}$ et appelée la catégorie limite inductive de $\mathfrak{S}_{V,X}$ au-dessus de $\mathbf{B}_X^\circ$ ([31] VI 6.3 et 6.5). Il est clair que $\varinjlim \mathfrak{S}_{V,X}$ est filtrante.

7.4.10. Soient Y un S-schéma de présentation finie, $W = Y_U$, $f\colon X \to Y$ un morphisme de présentation finie, V un ouvert de X tel que $f(V) \subset W$ (qui est nécessairement quasi-compact et donc de présentation finie sur W). Le foncteur $\theta\colon \mathfrak{S}_{V,X} \to \mathscr{M}_{V/Y}$ défini par $\theta((X', \varphi, P)) = (P, u_P)$, induit un morphisme

$$\varinjlim_{(X',\varphi,P) \in \mathfrak{S}_{V,X}} \widehat{P}^{\mathrm{rig}} \to \varinjlim_{(Z,u) \in \mathscr{M}_{V/Y}} \widehat{Z}^{\mathrm{rig}}. \tag{7.4.10.1}$$

Lemme 7.4.10.2. *Si f est propre, le morphisme* (7.4.10.1) *est un isomorphisme.*

Notons A l'ensemble des morphismes cartésiens de $\mathfrak{S}_{V,X}$ et B l'ensemble des morphismes $(Z', u') \to (Z, u)$ de $\mathscr{M}_{V/Y}$ tels qu'il existe un éclatement Z'_U-admissible de présentations finie $Z'' \to Z'$ tel que le composé $Z'' \to Z$ soit un éclatement Z_U-admissible. Il suffit de montrer que le triplet (θ, A, B) remplie les conditions de 7.4.8. Les conditions (i) et (ii) sont clairement satisfaites (1.13.3 et 1.13.5). La condition (iv) résulte immédiatement de 1.12.22 ; en effet, si $v, w\colon Z \rightrightarrows P$ sont deux morphismes de Y-schémas tels que Z_U soit schématiquement dense dans Z, P soit séparé sur Y et $v|Z_U = w|Z_U$, alors $v = w$ ([28] 5.4.1). La condition (iii) résulte de 1.13.4, 1.13.18 et 1.13.19 (on notera, pour appliquer 1.13.19, qu'il existe un sous-schéma fermé de présentation finie H de X tel que V soit égal à $X_U - H_U$ (7.4.9)).

7.4.10.3. Il résulte de (7.4.6.5) et 7.4.10.2 que si f est propre, on a un isomorphisme canonique

$$\mathfrak{A}(V) \times_{\mathfrak{A}(W)} \widehat{Y}^{\mathrm{rig}} \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{(X',\varphi,P)\in \varinjlim \mathfrak{S}_{V,X}} \widehat{P}^{\mathrm{rig}}. \tag{7.4.10.4}$$

En particulier, si X est propre sur S, on a un isomorphisme canonique

$$\mathfrak{A}(V) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{(X',\varphi,P)\in \varinjlim \mathfrak{S}_{V,X}} \widehat{P}^{\mathrm{rig}}. \tag{7.4.10.5}$$

On notera que pour tout morphisme $(X'', \psi, Q) \to (X', \varphi, P)$ de $\mathfrak{S}_{V,X}$, le morphisme $\widehat{Q}^{\mathrm{rig}} \to \widehat{P}^{\mathrm{rig}}$ est une immersion ouverte.

Théorème 7.4.11. *Si V est un U-schéma séparé de type fini, le préfaisceau $\mathfrak{A}(V)$ est un Θ-espace rigide quasi-séparé.*

D'après 1.12.23, il existe un morphisme propre de présentation finie $f\colon X \to S$ et une immersion ouverte $\iota\colon V \to X$ au-dessus de S. Il résulte alors de 7.1.12, (7.4.10.5) et du fait que la catégorie $\varinjlim \mathfrak{S}_{V,X}$ est filtrante, que $\mathfrak{A}(V)$ est un espace rigide quasi-séparé et que les morphismes canoniques $\widehat{P}^{\mathrm{rig}} \to \mathfrak{A}(V)$, lorsque (X', φ, P) parcourt l'ensemble des objets de $\mathfrak{S}_{V,X}$, forment un recouvrement admissible.

7.4.12. Il résulte de 7.4.11 que le foncteur (7.4.4.4) induit par restriction un foncteur de la catégorie $\mathbf{Sch}_{\mathrm{spf}/U}$ dans la catégorie $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}/\Theta}$, que l'on appelle *foncteur GAGA* relatif à (S, T) et que l'on note encore

$$\mathfrak{A}\colon \mathbf{Sch}_{\mathrm{spf}/U} \to \mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}/\Theta}. \tag{7.4.12.1}$$

Si V (resp. f) est un objet (resp. un morphisme) de $\mathbf{Sch}_{\mathrm{spf}/U}$, on note aussi V^{an} (resp. f^{an}) son image par ce foncteur. On peut faire les remarques suivantes :

7.4.12.2. Soit V un U-schéma séparé de type fini. Pour tout $(X, u) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{M}_{V/S})$, on a un Θ-morphisme canonique $\widehat{X}^{\mathrm{rig}} \to V^{\mathrm{an}}$ (7.4.6.2).

7.4.12.3. Soient V un U-schéma séparé de type fini, $H \in \mathrm{Ob}(\mathbf{R})$, $p\colon H \to V^{\mathrm{an}}$ un morphisme. Alors, il existe un S-schéma séparé de présentation finie X et un U-isomorphisme $u\colon X_U \xrightarrow{\sim} V$ tels que p se factorise en un morphisme $q\colon H \to \widehat{X}^{\mathrm{rig}}$ suivi du morphisme canonique $\widehat{X}^{\mathrm{rig}} \to V^{\mathrm{an}}$ (7.4.10.5).

7.4.12.4. Il résulte facilement de (7.4.6.2) que l'on a $\emptyset^{\mathrm{an}} = \emptyset$ (7.1.7.4).

7.4.12.5. Le diagramme de foncteurs

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Sch}_{\mathrm{spf}/S} \arrow[rr, "j^{\bullet}"] \arrow[d, "\mathfrak{f}"'] & & \mathbf{Sch}_{\mathrm{spf}/U} \arrow[d, "\mathfrak{A}"] \\ \mathbf{S}_{/\mathscr{S}} \arrow[r, "\mathrm{Q}_{/\mathscr{S}}"] & \mathbf{R}_{/\Theta} \arrow[r, "\alpha_{/\Theta}"] & \mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}/\Theta} \end{tikzcd} \tag{7.4.12.5}$$

où $\alpha_{/\Theta}$ est le foncteur canonique (7.1.7.3), n'est pas commutatif, même pas à isomorphisme près. Mais compte tenu de 7.4.12.2, on a un morphisme canonique de foncteurs

$$\alpha_{/\Theta} \circ \mathrm{Q}_{/\mathscr{S}} \circ \mathfrak{f} \to \mathfrak{A} \circ j^{\bullet}. \tag{7.4.12.6}$$

Les énoncés qui suivent sont des corollaires du théorème 7.4.11 :

Corollaire 7.4.13. *Soient $f\colon X \to S$ un morphisme propre de présentation finie, V un ouvert de X tel que $f(V) \subset U$, $\varphi\colon X' \to X$ un éclatement X_U-admissible de présentation finie, P un ouvert quasi-compact de X' tel que φ induise un isomorphisme $P_U \xrightarrow{\sim} V$. Alors le morphisme canonique $\widehat{P}^{\mathrm{rig}} \to V^{\mathrm{an}}$ est une immersion ouverte, et la famille de ces immersions ouvertes, lorsque X' et P varient, forme un recouvrement admissible.*

Corollaire 7.4.14. *Sous les hypothèses de* (7.4.13)*, si de plus $V = X_U$, le morphisme canonique $\widehat{X}^{\mathrm{rig}} \to V^{\mathrm{an}}$ est un isomorphisme.*

Cela résulte de (7.4.10.5) et du fait que (X, id_X, X) est un objet final de $\mathfrak{S}_{V,X}$.

Corollaire 7.4.15. *Si V est un U-schéma propre, V^{an} est cohérent.*

Cela résulte de 1.12.24 et 7.4.14.

Corollaire 7.4.16. *Soient X un S-schéma séparé de présentation finie, $V = X_U$. Alors le morphisme canonique $\widehat{X}^{\mathrm{rig}} \to V^{\mathrm{an}}$ est une immersion ouverte* (*quasi-compacte*)*. De plus, lorsque X parcourt la collection des S-schémas séparés de présentation finie tels que V soit U-isomorphe à X_U, les morphismes canoniques $\widehat{X}^{\mathrm{rig}} \to V^{\mathrm{an}}$ forment un recouvrement admissible.*

Soit X' l'adhérence schématique de V dans X, qui existe en vertu de ([28] 6.10.6). Il résulte de 1.12.22 que X' est un sous-schéma fermé de présentation finie de X ; en particulier, X' est séparé de présentation finie sur X et on a un Θ-isomorphe $\widehat{X}'^{\mathrm{rig}} \simeq \widehat{X}^{\mathrm{rig}}$. Quitte à remplacer X par X', on peut supposer V schématiquement dense dans X. Par le théorème de plongement de Nagata [14, 16], il existe un morphisme propre $f\colon Y \to S$ et une immersion ouverte $\iota\colon X \to Y$ au-dessus de S. Comme ι est quasi-compacte ([28] 6.1.10), quitte à remplacer Y par l'adhérence schématique de X dans Y (qui existe), on peut supposer X schématiquement dense dans Y ; il en est alors de même de V et de Y_U. Par suite, f est de présentation finie (1.12.22) et la proposition résulte de 7.4.13.

7.4.17. Soient $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_S$-module cohérent, $\widehat{\mathscr{F}}$ son complété $\mathscr{F}_{/T}$ le long de T, V un U-schéma séparé de type fini. Pour tout $(Y,u) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{M}_{V/S})$ (7.4.6), le morphisme canonique $\widehat{Y}^{\mathrm{rig}} \to V^{\mathrm{an}}$ induit un morphisme fonctoriel (4.7.23 et 4.7.8)

$$\Gamma(V^{\mathrm{an}}, \widehat{\mathscr{F}}^{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathscr{O}_\Theta} \mathscr{O}_{V^{\mathrm{an}}}) \to \Gamma(\widehat{Y}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\widehat{\mathscr{F}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{S}}} \mathscr{O}_{\widehat{Y}})), \tag{7.4.17.1}$$

où $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(-)$ est la clôture rigide (2.10.1.1). En particulier, on a un morphisme

$$\Gamma(V^{\mathrm{an}}, \mathscr{O}_{V^{\mathrm{an}}}) \to \Gamma(\widehat{Y}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\widehat{Y}})). \tag{7.4.17.2}$$

Il est clair que (7.4.17.2) est un homomorphisme d'anneaux et (7.4.17.1) est un di-homomorphisme.

Proposition 7.4.18. *Sous les hypothèses de* (7.4.17)*, le morphisme*

$$\Gamma(V^{\mathrm{an}}, \widehat{\mathscr{F}}^{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathscr{O}_\Theta} \mathscr{O}_{V^{\mathrm{an}}}) \to \varprojlim_{(Y,u)\in \mathscr{M}^\circ_{V/S}} \Gamma(\widehat{Y}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\widehat{\mathscr{F}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{S}}} \mathscr{O}_{\widehat{Y}})) \tag{7.4.18.1}$$

déduit de (7.4.17.1) *est un isomorphisme.*

D'après 1.12.23, il existe un S-schéma propre de présentation finie X et une immersion ouverte $\iota\colon V \to X$ au-dessus de S. Reprenons les notations de 7.4.9 et considérons le foncteur $\theta\colon \mathfrak{S}_{V,X} \to \mathscr{M}_{V/S}$ défini par $\theta((X',\varphi,P)) = (P,u_P)$. Il résulte de 7.4.8 (cf. la preuve de 7.4.10.2) que θ induit un isomorphisme

$$\varprojlim_{(Y,u)\in \mathscr{M}^\circ_{V/S}} \Gamma(\widehat{Y}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\widehat{\mathscr{F}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{S}}} \mathscr{O}_{\widehat{Y}})) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{(X',\varphi,P)\in \mathfrak{S}^\circ_{V,X}} \Gamma(\widehat{P}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\widehat{\mathscr{F}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{S}}} \mathscr{O}_{\widehat{P}})). \tag{7.4.18.2}$$

De plus, on peut remplacer ci-dessus $\mathfrak{S}_{V,X}$ par la catégorie $\varinjlim \mathfrak{S}_{V,X}$, limite inductive de $\mathfrak{S}_{V,X}$ au-dessus de $\mathbf{B}^\circ_X$ (7.4.9). Les morphismes canoniques $\widehat{P}^{\mathrm{rig}} \to V^{\mathrm{an}}$, pour $(X',\varphi,P) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{S}_{V,X})$, forment un recouvrement admissible (7.4.13). D'autre part, le produit de deux objets est représentable dans $\varinjlim \mathfrak{S}_{V,X}$. On en déduit ([1] I 2.12) que le morphisme canonique

$$\Gamma(V^{\mathrm{an}}, \widehat{\mathscr{F}}^{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathscr{O}_\Theta} \mathscr{O}_{V^{\mathrm{an}}}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{(X',\varphi,P)\in \mathfrak{S}^\circ_{V,X}} \Gamma(\widehat{P}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\widehat{\mathscr{F}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{S}}} \mathscr{O}_{\widehat{P}})) \tag{7.4.18.3}$$

est un isomorphisme, d'où la proposition.

Corollaire 7.4.19. *Sous les hypothèses de* (7.4.17)*, il existe un morphisme bi-fonctoriel en $\mathscr{F}$ et V*

$$\Gamma(V, \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_V) \to \Gamma(V^{\mathrm{an}}, \widehat{\mathscr{F}}^{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathscr{O}_\Theta} \mathscr{O}_{V^{\mathrm{an}}}). \tag{7.4.19.1}$$

En particulier, on a un morphisme fonctoriel en V

$$\Gamma(V, \mathscr{O}_V) \to \Gamma(V^{\mathrm{an}}, \mathscr{O}_{V^{\mathrm{an}}}). \tag{7.4.19.2}$$

De plus, (7.4.19.2) *est un homomorphisme d'anneaux et* (7.4.19.1) *est un di-homomorphisme.*

Il résulte de 2.10.4 que pour tout S-schéma séparé de présentation finie Y, on a un morphisme canonique bi-fonctoriel

$$\Gamma(Y_U, \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_Y) \to \Gamma(\widehat{Y}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\widehat{\mathscr{F}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{S}}} \mathscr{O}_{\widehat{Y}})). \tag{7.4.19.3}$$

D'autre part, pour tout $(Y, u) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{M}_{V/S})$, on a un morphisme canonique bi-fonctoriel

$$\Gamma(V, \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_V) \to \Gamma(Y_U, \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_Y). \tag{7.4.19.4}$$

Compte tenu de (7.4.18.1), on définit alors le morphisme (7.4.19.1) comme la limite projective sur la catégorie $\mathscr{M}^\circ_{V/S}$ des morphismes composés de (7.4.19.3) et (7.4.19.4). Ce morphisme vérifie clairement les propriétés requises.

7.4.20. Soient Y un S-schéma séparé de présentation finie, $W = Y_U$, V un W-schéma séparé de type fini. Pour tout objet (X, u) de $\mathscr{M}_{V/Y}$ (7.4.6), le diagramme canonique

$$\begin{tikzcd} \widehat{X}^{\mathrm{rig}} \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{Y}^{\mathrm{rig}} \arrow[d] \\ V^{\mathrm{an}} \arrow[r] & W^{\mathrm{an}} \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Proposition 7.4.21. *Soient Y un S-schéma séparé de présentation finie, $f\colon X \to Y$ un morphisme propre de présentation finie, $W = Y_U$, V un ouvert de X tel que $f(V) \subset W$, $\varphi\colon X' \to X$ un éclatement X_U-admissible de présentation finie, P un ouvert quasi-compact de X' tel que φ induise un isomorphisme $P_U \xrightarrow{\sim} V$. Alors la famille des morphismes $\widehat{P}^{\mathrm{rig}} \to V^{\mathrm{an}} \times_{W^{\mathrm{an}}} \widehat{Y}^{\mathrm{rig}}$, lorsque X' et P varient, forme un recouvrement admissible.*

Cela résulte de 7.1.12 et (7.4.10.4).

Corollaire 7.4.22. *Sous les hypothèses de* (7.4.21)*, si de plus $V = X_U$, le morphisme canonique $\widehat{X}^{\mathrm{rig}} \to V^{\mathrm{an}} \times_{W^{\mathrm{an}}} \widehat{Y}^{\mathrm{rig}}$ est un isomorphisme.*

En effet, (X, id_X, X) est un objet final de $\mathfrak{S}_{V,X}$.

Proposition 7.4.23. *Si $f\colon V \to W$ est un morphisme propre* (*resp. fini*) *de U-schémas séparés de type fini, alors f^{an} est propre* (*resp. fini*).

Compte tenu de 7.2.11 et 7.4.16, il suffit de montrer que si Y est un S-schéma séparé de présentation finie tel que Y_U soit U-isomorphe à W, la projection canonique $V^{\mathrm{an}} \times_{W^{\mathrm{an}}} \widehat{Y}^{\mathrm{rig}} \to \widehat{Y}^{\mathrm{rig}}$ est propre (resp. fini), ce qui résulte de 1.12.24 (resp. 1.13.14 ou 2.6.23) et 7.4.22.

Proposition 7.4.24. *Si $f\colon V \to W$ est un morphisme propre et surjectif de U-schémas séparés de type fini, alors f^{an} est propre et couvrant pour les points rigides.*

Compte tenu de 7.4.16 et 7.4.23, il suffit de montrer que si Y est un S-schéma séparé de présentation finie tel que Y_U soit U-isomorphe à W, la projection canonique $V^{\mathrm{an}} \times_{W^{\mathrm{an}}} \widehat{Y}^{\mathrm{rig}} \to \widehat{Y}^{\mathrm{rig}}$ est couvrante pour les points rigides. On peut se borner au cas où W est schématiquement dense dans Y. D'après 1.12.24, il existe un morphisme propre de présentation finie $f\colon X \to Y$ tel que X_U soit W-isomorphe à V. Les hypothèses impliquent que f est surjectif. On en déduit par 3.3.14 que l'application $\hat{f}\colon \langle\widehat{X}\rangle \to \langle\widehat{Y}\rangle$ est surjective. L'assertion recherchée résulte alors 4.3.5 et 7.4.22.

Proposition 7.4.25. *Soit $f\colon V \to W$ un morphisme de U-schémas séparés de type fini. Si f est une immersion* (*resp. une immersion fermée, resp. une immersion ouverte*), *$f^{\mathrm{an}}\colon V^{\mathrm{an}} \to W^{\mathrm{an}}$ est une immersion* (*resp. une immersion fermée, resp. une immersion ouverte*).

Supposons d'abord f une immersion ouverte. Pour montrer que f^{an} est une immersion ouverte, il suffit de montrer que si H est un objet de $\mathbf{R}$ et $p\colon H \to V^{\mathrm{an}}$ est une immersion ouverte, $f^{\mathrm{an}} \circ p$ est une immersion ouverte. Considérons un S-schéma propre de présentation finie X et une immersion ouverte $\iota\colon W \to X$ au-dessus de S (1.12.23) ; donc V est aussi un ouvert de X. Il existe un objet (X', φ, P) de $\mathfrak{S}_{V,X}$ (7.4.9) tel que p se factorise à travers un morphisme $q\colon H \to \widehat{P}^{\mathrm{rig}}$. Comme q est une immersion ouverte (7.1.4, (iii)), on peut se réduire au cas où $H = \widehat{P}^{\mathrm{rig}}$, p étant le morphisme canonique. On sait (7.4.9) qu'il existe un sous-schéma fermé de présentation finie D de X' tel que W soit égal à $X'_U - D_U$. Par suite, en vertu de 1.13.19, il existe un éclatement X'_U-admissible de présentation finie $\rho\colon X'' \to X'$ et un ouvert quasi-compact Q de X'' tels que $Q_U \simeq W$ et $P_1 = \rho^{-1}(P) \subset Q$. Le diagramme commutatif canonique

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{P}_1^{\mathrm{rig}} \arrow[rr, "j"] \arrow[d, "i"'] & & \widehat{Q}^{\mathrm{rig}} \arrow[d, "t"] \\
\widehat{P}^{\mathrm{rig}} \arrow[r, "p"] & V^{\mathrm{an}} \arrow[r, "f^{\mathrm{an}}"] & W^{\mathrm{an}}
\end{tikzcd}
$$

montre alors que $f^{\mathrm{an}} \circ p$ est une immersion puisque i est un isomorphisme et que j et t sont des immersions ouvertes ; d'où la proposition dans ce cas.

Supposons ensuite f une immersion fermée. Compte tenu de 7.2.11(iii) et 7.4.16, il suffit de montrer que si Y est un S-schéma séparé de présentation finie tel que Y_U soit U-isomorphe à W, la projection canonique $V^{\mathrm{an}} \times_{W^{\mathrm{an}}} \widehat{Y}^{\mathrm{rig}} \to \widehat{Y}^{\mathrm{rig}}$ est une immersion fermée. L'immersion $V \to Y$ déduite de f est quasi-compacte. Soit X l'adhérence schématique de V dans Y (qui existe en vertu de [28] 6.10.6). On sait que X est de présentation finie sur Y (1.12.22). Comme f est une immersion fermée, on a $V = X_U$ ([28] 6.10.7). Il résulte alors de 7.4.22 que le morphisme canonique $\widehat{X}^{\mathrm{rig}} \to V^{\mathrm{an}} \times_{W^{\mathrm{an}}} \widehat{Y}^{\mathrm{rig}}$ est un isomorphisme ; d'où la proposition dans ce cas.

Enfin, le cas où f est une immersion générale se déduit des deux cas précédents.

Corollaire 7.4.26. *Pour tout morphisme $f\colon V \to W$ de U-schémas séparés de type fini, f^{an} est séparé.*

On notera que f étant séparé, le morphisme diagonal $\Delta_f\colon V \to V \times_W V$ est une immersion fermé. Le morphisme diagonal $\Delta_{f^{\mathrm{an}}}\colon V^{\mathrm{an}} \to V^{\mathrm{an}} \times_{W^{\mathrm{an}}} V^{\mathrm{an}}$ s'identifie à $(\Delta_f)^{\mathrm{an}}$ (7.4.5). Il est donc une immersion fermée en vertu de 7.4.25.

Corollaire 7.4.27. *Pour tout U-schéma séparé de type fini V, V^{an} est un Θ-espace rigide séparé.*

Proposition 7.4.28. *Soient V un U-schéma séparé de type fini, $(V_i)_{i\in I}$ des ouverts de V tels que $V = \cup_{i\in I} V_i$. Alors $(V_i^{\mathrm{an}} \to V^{\mathrm{an}})_{i\in I}$ est une famille couvrante pour la topologie admissible de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ (7.3.1).*

La proposition revient à dire que $(V_i^{\mathrm{an}} \to V^{\mathrm{an}})_{i\in I}$ est une famille épimorphique dans $\widetilde{\mathbf{R}}$ (7.3.1.1). On peut évidemment supposer I fini. Il suffit de montrer que pour tout $H \in \mathrm{Ob}(\mathbf{R})$ et tout $p\colon H \to V^{\mathrm{an}}$, il existe un recouvrement admissible $(H_j \to H)_{j\in J}$ tel que pour tout $j \in J$, $p|H_j$ soit induit par un morphisme $H_j \to V_{i_j}^{\mathrm{an}}$ pour un indice $i_j \in I$. On sait (7.4.12.3) qu'il existe un S-schéma séparé de présentation finie X tel qu'on ait un U-isomorphisme $X_U \simeq V$ et que p soit induit par un morphisme $H \to \widehat{X}^{\mathrm{rig}}$. On peut donc se réduire au cas où $H = \widehat{X}^{\mathrm{rig}}$, p étant le morphisme canonique. Il résulte de ([28] 6.9.7) et du fait que X_U est noethérien que pour tout $i \in I$, il existe un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{I}_i$ de $\mathscr{O}_X$ tel que le sous-schéma fermé de V défini par $\mathscr{I}_i|V$ soit le complémentaire de V_i dans V. Soient $\varphi\colon X' \to X$ l'éclatement de $\mathscr{I} = \sum_{i\in I} \mathscr{I}_i$ dans X, $\mathscr{I}' = \mathscr{I}\mathscr{O}_{X'}$. Pour tout $i \in I$, soit X'_i l'ouvert maximal de X' où $\mathscr{I}_i\mathscr{O}_{X'_i} = \mathscr{I}'|X'_i$ (c'est à dire, le complémentaire dans X' du sous-schéma fermé défini par l'idéal $\mathscr{I}_i\mathscr{I}'^{-1}$ de $\mathscr{O}_{X'}$). Il est clair que φ est un éclatement V-admissible, $X' = \cup_{i\in I} X'_i$ et $X'_i \times_S U \simeq V_i$ pour tout $i \in I$. Quitte à remplacer φ par un éclatement V-admissible de X qu'il majore, on peut le supposer de présentation finie (1.13.4). Pour tout $i \in I$, on a un morphisme canonique $\widehat{X}'_i \to V_i^{\mathrm{an}}$ au-dessus de $p\colon \widehat{X}^{\mathrm{rig}} \to V^{\mathrm{an}}$ (7.4.20). Donc le recouvrement admissible $(\widehat{X}_i'^{\mathrm{rig}} \to \widehat{X}^{\mathrm{rig}})_{i\in I}$ répond à la question.

Corollaire 7.4.29. *Soient V un U-schéma séparé de type fini, $V = \amalg_{i\in I} V_i$ une décomposition de V en somme de sous-schémas induits sur des ouverts $(V_i)_{i\in I}$ de V. Alors V^{an} est somme admissible des $(V_i^{\mathrm{an}})_{i\in I}$ (7.3.17).*

En effet, il résulte de 7.4.25 que les morphismes $V_i^{\mathrm{an}} \to V^{\mathrm{an}}$ sont des immersions ouvertes et fermées. Ce sont donc des immersions ouvertes quasi-compactes (7.2.6). La proposition résulte alors de 7.4.5, 7.4.12.4, 7.4.28 et 7.3.1.2.

7.4.30. Soient X un S-schéma propre de présentation finie, Y un sous-schéma fermé de présentation finie de X, V l'ouvert $X_U - Y_U$ de X_U. Pour tout éclatement X_U-admissible de présentation finie $\varphi\colon X' \to X$, on note Y_φ le transformé strict de

Y par φ et P_φ l'ouvert $X' - Y_\varphi$ de X'. Alors, pour tout morphisme $f\colon (X'', \psi) \to (X', \varphi)$ de $\mathbf{B}_X$, on a $f^{-1}(P_\varphi) \subset P_\psi$; et la famille $(\widehat{P}_\varphi^{\mathrm{rig}} \to V^{\mathrm{an}})$, pour $(X', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_X)$, est un recouvrement admissible. En effet, pour la seconde assertion, on peut se réduire au cas où Y_U est schématiquement dense dans Y. Pour tout objet (X', φ, P) de $\mathfrak{S}_{V,X}$, on a $\varphi^{-1}(Y_U) \subset X' - P$. Comme $\varphi^{-1}(Y_U)$ est schématiquement dense dans Y_φ (1.13.3), on en déduit que l'on a $P \subset P_\varphi$. L'assertion résulte alors de 7.4.13.

Proposition 7.4.31. *Soient C un sous-schéma fermé de U, V l'ouvert $U - C$ de U. Alors V^{an} est un ouvert de Θ_{ad} et $C_{\mathrm{ad}}^{\mathrm{an}}$ est canoniquement équivalent au sous-topos fermé de Θ_{ad} complémentaire de l'ouvert V^{an}* ([1] IV 9.3.5).

Notons $i\colon C \to U$ et $j\colon V \to U$ les injections canoniques. On sait (7.4.25) que j^{an} est une immersion ouverte et que i^{an} est une immersion fermée. Par suite, V^{an} définit un ouvert de Θ_{ad} (7.3.15) et $i^{\mathrm{an}}\colon C_{\mathrm{ad}}^{\mathrm{an}} \to \Theta_{\mathrm{ad}}$ est un plongement (4.6.14). En vertu de 7.4.5, $V^{\mathrm{an}} \times_\Theta C^{\mathrm{an}}$ est vide. On en déduit, compte tenu de 7.3.6, que pour tout faisceau F de $C_{\mathrm{ad}}^{\mathrm{an}}$, $j^{\mathrm{an}*}(i_*^{\mathrm{an}}(F))$ est l'objet final de $V_{\mathrm{ad}}^{\mathrm{an}}$. Il reste à montrer que tout faisceau G de Θ_{ad} tel que $j^{\mathrm{an}*}(G)$ soit l'objet final de $V_{\mathrm{ad}}^{\mathrm{an}}$, est de la forme $i_*^{\mathrm{an}}(F)$ pour un objet F de $C_{\mathrm{ad}}^{\mathrm{an}}$. Nous établirons d'abord quelques résultats préliminaires. Soit Y l'adhérence schématique de C dans S, de sorte que $C^{\mathrm{an}} = \widehat{Y}^{\mathrm{rig}}$ (7.4.14). On désigne par $\mathbf{B}_S$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Sch}_{\mathrm{pf}/S}$ formée des éclatements U-admissibles de S. Pour tout objet (S', φ) de $\mathbf{B}_S$, on note Y_φ le transformé strict de Y par φ, $\iota_\varphi\colon Y_\varphi \to S'$ l'injection canonique, P_φ l'ouvert $S' - Y_\varphi$ de S' et

$$\mu_\varphi\colon \Theta_{\mathrm{ad}} \to \widehat{S}'_{\mathrm{zar}}$$

le morphisme canonique de topos (4.5.10.2). Par transitivité des images schématiques, tout morphisme $f\colon (S'', \psi) \to (S', \varphi)$ de $\mathbf{B}_S$ induit un morphisme $f_Y\colon Y_\psi \to Y_\varphi$. En particulier, pour tout objet (Y', φ) de $\mathbf{B}_S$, φ induit un morphisme $\varphi_Y\colon Y_\varphi \to Y$, qui est un éclatement C-admissible. On note

$$\mu_{\varphi_Y}\colon C_{\mathrm{ad}}^{\mathrm{an}} \to (\widehat{Y}_\varphi)_{\mathrm{zar}}$$

le morphisme canonique de topos.

Lemme 7.4.31.1. *Pour tout $(S', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_S)$, on a $\mu_{\varphi*}(V^{\mathrm{an}}) = \widehat{P}_\varphi$.*

Comme $\mu_{\varphi*}(\Theta) = \widehat{S}'$ et que V^{an} est un ouvert de Θ_{ad}, $\mu_{\varphi*}(V^{\mathrm{an}})$ est un ouvert de $\widehat{S}'_{\mathrm{zar}}$. Il suffit de montrer que, pour tout ouvert $\mathscr{P}$ de $\widehat{S}'$, pour que $V^{\mathrm{an}}(\mathscr{P}^{\mathrm{rig}}) \neq \emptyset$, il faut et il suffit que l'on ait $\mathscr{P} \subset \widehat{P}_\varphi$. Si $\mathscr{P} \subset \widehat{P}_\varphi$, alors $V^{\mathrm{an}}(\mathscr{P}^{\mathrm{rig}}) \neq \emptyset$ (7.4.30). Inversement, supposons $V^{\mathrm{an}}(\mathscr{P}^{\mathrm{rig}}) \neq \emptyset$ et montrons que $\mathscr{P} \subset \widehat{P}_\varphi$. D'après 7.4.30, il existe un morphisme $f\colon (S'', \psi) \to (S', \varphi)$ de $\mathbf{B}_{S'}$ tel que l'on ait un Θ-morphisme $\mathscr{P}^{\mathrm{rig}} \to \widehat{P}_\psi^{\mathrm{rig}}$. On peut supposer S''_U schématiquement dense dans S'', ce qui entraîne que $\widehat{S}''$ est rig-pur. Par suite, on a $\hat{f}^{-1}(\mathscr{P}) \subset \widehat{P}_\psi$ en vertu de 3.1.4(iii). Comme on a de même $\hat{f}(\widehat{Y}_\psi) = \widehat{Y}_\varphi$, on en déduit que $\mathscr{P} \subset \widehat{P}_\varphi$.

Lemme 7.4.31.2. *Soient G un faisceau de Θ_{ad} tel que $j^{\mathrm{an}*}(G)$ soit l'objet final de $V^{\mathrm{an}}_{\mathrm{ad}}$, (S',φ) un objet de $\mathbf{B}_S$. Alors $\mu_{\varphi*}(G)$ est de la forme $\widehat{\iota}_{\varphi*}(F_\varphi)$, où F_φ est un faisceau de $(\widehat{Y}_\varphi)_{\mathrm{zar}}$.*

Il suffit de montrer que la restriction de $\mu_{\varphi*}(G)$ à l'ouvert $\widehat{P}_\varphi$ est égale à $\widehat{P}_\varphi$. Par hypothèse, la projection canonique $G\times V^{\mathrm{an}}\to V^{\mathrm{an}}$ est un isomorphisme ([1] IV 5.2). On en déduit, compte tenu de 7.4.31.1, que la projection canonique $\mu_{\varphi*}(G)\times\widehat{P}_\varphi\to\widehat{P}_\varphi$ est un isomorphisme. En effet, le foncteur $\mu_{\varphi*}$ commute aux limites projectives. Le lemme s'ensuit car $(\widehat{Y}_\varphi)_{\mathrm{zar}}$ est le sous-topos fermé de $\widehat{S}'_{\mathrm{zar}}$ complémentaire de l'ouvert $\widehat{P}_\varphi$.

7.4.31.3. On peut maintenant achever la preuve de 7.4.31. Considérons les foncteurs

$$\begin{aligned}\theta\colon \mathbf{B}_S &\to \mathbf{B}_{\mathscr{S}}, \quad (S',\varphi)\mapsto(\widehat{S}',\widehat{\varphi}),\\ \theta_Y\colon \mathbf{B}_S &\to \mathbf{B}_{\widehat{Y}}, \quad (S',\varphi)\mapsto(\widehat{Y}_\varphi,\widehat{\varphi}_Y).\end{aligned}$$

La catégorie $\mathbf{B}_S$ est cofiltrante, et il résulte de 2.5.7 et 2.9.13 que les foncteurs θ° et θ°_Y sont cofinaux ([26] I 8.1.3). Donc d'après 4.5.34, on peut décrire les topos Θ_{ad} et $C^{\mathrm{an}}_{\mathrm{ad}}$ comme des limites projectives de topos fibrés au-dessus $\mathbf{B}_S$. Soit G un faisceau de Θ_{ad} tel que $j^{\mathrm{an}*}(G)$ soit l'objet final de $V^{\mathrm{an}}_{\mathrm{ad}}$. Pour tout $(S',\varphi)\in\mathrm{Ob}(\mathbf{B}_S)$, posons $G_\varphi=\mu_{\varphi*}(G)$, et considérons un isomorphisme $G_\varphi\simeq\widehat{\iota}_{\varphi*}(F_\varphi)$, où F_φ est un faisceau de $(\widehat{Y}_\varphi)_{\mathrm{zar}}$ (7.4.31.2). En vertu de 4.5.22, pour tout morphisme $f\colon(S'',\psi)\to(S',\varphi)$ de $\mathbf{B}_S$, on a un isomorphisme canonique

$$\gamma_f(G)\colon G_\varphi\xrightarrow{\sim}\hat{f}_*(G_\psi). \tag{7.4.31.4}$$

Considérons le digramme commutatif

$$\begin{tikzcd} S'' \arrow[r, "f"] & S' \\ Y_\psi \arrow[u, "\iota_\psi"] \arrow[r, "f_Y"] & Y_\varphi \arrow[u, "\iota_\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Comme le foncteur $\widehat{\iota}_\varphi$ est pleinement fidèle, l'isomorphisme (7.4.31.4) induit un isomorphisme canonique

$$\gamma_{f_Y}(F)\colon F_\varphi\xrightarrow{\sim}\hat{f}_{Y*}(F_\psi). \tag{7.4.31.5}$$

Ces isomorphismes satisfont à des relations de compatibilités, déduites de celles remplies par les isomorphismes $\gamma_f(G)$ (4.5.18.3). Donc en vertu de 4.5.22 et 4.5.34, la donnée $\{(S',\varphi)\mapsto F_\varphi\}$ détermine essentiellement un seul faisceau F de $C^{\mathrm{an}}_{\mathrm{ad}}$ tel que $\mu_{\varphi_Y*}(F)=F_\varphi$. Compte tenu de 4.6.9 et 4.6.10(i), les isomorphismes $G_\varphi\simeq\widehat{\iota}_{\varphi*}(F_\varphi)$ induisent un isomorphisme $G\simeq i^{\mathrm{an}}_*(F)$.

Lemme 7.4.32. *Soient X un S-schéma de présentation finie, $V = X_U$, W un U-schéma séparé de type fini, $f\colon V \to W$ un U-morphisme. Alors, il existe un éclatement V-admissible de présentation finie $\varphi\colon X' \to X$, un S-schéma séparé de présentation finie Y et un S-morphisme $h\colon X' \to Y$ tel que h_U soit U-isomorphe à f.*

En vertu de 1.12.23, il existe un S-schéma propre de présentation finie Z et une immersion ouverte $W \to Z$ au-dessus de S. L'assertion résulte alors de 1.13.4, 1.13.18 et 1.13.19 (on notera, pour appliquer 1.13.19, qu'il existe un sous-schéma fermé de présentation finie H de Z tel que W soit égal à $Z_U - H_U$ (7.4.9)).

Proposition 7.4.33. *Si $f\colon V \to W$ est un U-morphisme lisse* (*resp. étale*) *de U-schémas séparés de type fini, alors f^{an} est lisse* (*resp. étale*).

Compte tenu de 7.2.15 et 7.4.16, on se réduit à montrer que si X est un S-schéma séparé de présentation finie tel que X_U soit U-isomorphe à V, le morphisme $\widehat{X}^{\mathrm{rig}} \to W^{\mathrm{an}}$ composé du morphisme canonique $\widehat{X}^{\mathrm{rig}} \to V^{\mathrm{an}}$ et de f^{an}, est lisse (resp. étale). D'après 7.4.32, il existe un éclatement V-admissible de présentation finie $\varphi\colon X' \to X$, un S-schéma séparé de présentation finie Y et un S-morphisme $h\colon X' \to Y$ tels que h_U soit U-isomorphe à f. Le morphisme $(\hat{h})^{\mathrm{rig}}$ est lisse (resp. étale) en vertu de 6.4.15. L'assertion s'ensuit compte tenu de 7.4.20 et 7.2.14.

Lemme 7.4.34. *Soient Z un S-schéma de présentation finie, V un ouvert schématiquement dense de Z contenu dans Z_U. Supposons Z affine et $Z_T = Z \times_S T$ non vide. Alors il existe un objet (Z', φ, P) de $\mathfrak{S}_{V,Z}$* (7.4.9) *tel que $P \times_S T$ soit non vide.*

Soient A l'anneau de Z, J l'idéal de A correspondant au fermé $Z_T = Z \times_S T$, $\widehat{A}$ le séparé complété de A pour la topologie J-préadique. On sait (7.4.9) qu'il existe un sous-schéma fermé H de Z défini par un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{I}$ de $\mathscr{O}_Z$ tel que V soit égal à l'ouvert $Z_U - H_U$ de Z_U ; donc V est aussi égal à l'ouvert $Z - \mathrm{V}(J\mathscr{I})$ de Z. Comme $\widehat{A}$ est A-plat (1.12.17), l'ouvert $V \otimes_A \widehat{A}$ est schématiquement dense dans $\mathrm{Spec}(\widehat{A})$ (1.8.30.2) et en particulier non vide. Soit x un point fermé de $V \otimes_A \widehat{A}$. Comme $\mathrm{Spec}(\widehat{A}) - \mathrm{V}(J\widehat{A})$ est un schéma de Jacobson (1.11.9), x est fermé dans $\mathrm{Spec}(\widehat{A}) - \mathrm{V}(J\widehat{A})$. Il lui correspond donc un point rigide fermé $\mathscr{Q} = \mathrm{Spf}(B)$ de $\mathrm{Spf}(\widehat{A})$ (3.3.2). Notons $Y = \mathrm{Spec}(B)$ et $f\colon Y \to Z$ le morphisme canonique. On a alors $f(Y_U) \subset V$. En vertu de 1.13.19, il existe un éclatement Z_U-admissible $\varphi\colon Z' \to Z$ et un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{I}'$ de $\mathscr{O}_{Z'}$ tels que l'on ait $\mathscr{I}\mathscr{O}_{Z'} \subset \mathscr{I}'$, $\mathscr{I}'|Z'_U = \mathscr{I}|Z_U$ et si Y' désigne le transformé strict de Y par φ, $\mathscr{I}'\mathscr{O}_{Y'} = \mathscr{O}_{Y'}$. Comme Z_U est schématiquement dense dans Z, φ est de présentation finie (1.13.3). Posons $P = Z' - \mathrm{V}(\mathscr{I}')$, de sorte que φ induit un isomorphisme $P_U \simeq V$ et le morphisme canonique $Y' \to Z'$ se factorise à travers P. Il résulte de la preuve de 3.3.12 que Y' est le spectre d'un ordre 1-valuatif. Par suite, Y'_T est non vide, et donc P_T est non vide.

Proposition 7.4.35. *Soit V un U-schéma séparé de type fini. Pour que V^{an} soit vide, il faut et il suffit que l'image schématique de V dans S soit contenue dans U.*

On notera que l'image schématique de V dans S existe ([28] 6.10.5). En vertu de 1.12.23, il existe un morphisme propre de présentation finie $f\colon X \to S$ et une immersion ouverte schématiquement dominante $\iota\colon V \to X$ au-dessus de S. Les images schématiques de V et de X dans S sont égales ([28] 6.10.3), et sont donc de support $f(X)$. Si $f(X) \subset U$, $\widehat{X}$ est vide et donc $(X_U)^{\rm an} = \widehat{X}^{\rm rig}$ est vide (7.4.14) ; par suite $V^{\rm an}$ est vide. Inversement, supposons $f(X) \not\subset U$ et montrons que $V^{\rm an}$ est non vide. Soient Z un ouvert affine de X tel que $Z \times_S T$ soit non vide, $W = V \cap Z$ qui est schématiquement dense dans Z. En vertu de 7.4.34, il existe un objet (Z', φ, P) de $\mathfrak{S}_{W,Z}$ tel que P_T soit non vide. Comme Z_U est schématiquement dense dans Z, Z'_U est schématiquement dense dans Z' (1.13.3). Par suite, $\widehat{P}$ est rig-pur (2.6.18), $\widehat{P}^{\rm rig}$ est non vide (4.1.8), et donc $W^{\rm an}$ et $V^{\rm an}$ sont non vide.

7.5 Hensélisation et géométrie rigide

7.5.1. Les hypothèses et notations du §7.4 sont en vigueur dans cette section. De plus, soient $X = \operatorname{Spec}(A)$ un schéma affine qui est un S-schéma de présentation finie, Y (resp. V) l'image réciproque de T (resp. U) dans X, $X^{\rm h}$ le hensélisé de X le long de Y (1.15.6), $V^{\rm h}$ (resp. $Y^{\rm h}$) l'image réciproque de V (resp. Y) dans $X^{\rm h}$. On notera que $V^{\rm h}$ est un schéma noethérien (1.15.12). On désigne par $\mathscr{C}_X$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Sch}_{{\rm pf}/X}$ formée des voisinages étales élémentaires affines de Y dans X. On rappelle que $\mathscr{C}_X$ est une catégorie cofiltrante et $X^{\rm h}$ (resp. $V^{\rm h}$) s'identifie à la limite projective suivante dans la catégorie des schémas (1.15.5.2 et [31] 8.2.3)

$$X^{\rm h} = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ X' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}_X)}} X' \quad (\text{resp. } V^{\rm h} = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ X' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}_X)}} X' \times_X V). \tag{7.5.1.1}$$

7.5.2. Suivant ([1] VII 5.3), considérons la catégorie $\mathfrak{F}_{\rm pf}$ des morphismes de présentation finie de $\mathbf{Sch}$, et le "foncteur but"

$$\mathfrak{F}_{\rm pf} \to \mathbf{Sch}, \tag{7.5.2.1}$$

qui est un foncteur fibrant. On désigne par

$$\mathfrak{F}_{{\rm pf}/V} \to \mathscr{C}_X \tag{7.5.2.2}$$

l'image inverse de (7.5.2.1) par le foncteur

$$\mathscr{C}_X \to \mathbf{Sch}, \quad X' \mapsto X'_V = X' \times_X V. \tag{7.5.2.3}$$

La fibre de (7.5.2.2) au-dessus de $X' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}_X)$ est canoniquement équivalente à la catégorie $\mathbf{Sch}_{{\rm pf}/X'_V}$. On a un foncteur naturel

$$\mathfrak{F}_{{\rm pf}/V} \to \mathbf{Sch}_{{\rm pf}/V^{\rm h}} \tag{7.5.2.4}$$

dont la restriction à la fibre au-dessus de $X' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}_X)$ est donnée par le foncteur de changement de base par le morphisme canonique $V^{\mathrm{h}} \to X'_V$

$$\mathbf{Sch}_{\mathrm{pf}/X'_V} \to \mathbf{Sch}_{\mathrm{pf}/V^{\mathrm{h}}}, \quad W \mapsto W \times_{X'_V} V^{\mathrm{h}}.$$

Ce foncteur transforme morphisme cartésien en isomorphisme. Donc compte tenu de ([1] VI 6.3), il définit un foncteur

$$\varinjlim_{\mathscr{C}_X^\circ} \mathfrak{F}_{\mathrm{pf}/V} \to \mathbf{Sch}_{\mathrm{pf}/V^{\mathrm{h}}}. \tag{7.5.2.5}$$

Il résulte de ([31] 8.8.2) que le foncteur (7.5.2.5) est une équivalence de catégories. Cet énoncé peut se préciser en introduisant quelques ensembles $(\mathscr{M})$ de morphismes de schémas, stables par changement de base. L'énoncé obtenu ainsi est vrai par exemple lorsque $(\mathscr{M})$ est l'un des ensembles suivants : morphismes séparés (resp. propres, resp. finis, resp. lisses, resp. étales, resp. non ramifiés, resp. immersions, resp. immersions ouvertes, resp. immersions fermées) ([31] 8.10.5 et 17.7.8).

Remplaçons alors (7.5.2.1) par la sous-catégorie fibrée

$$\mathfrak{F}_{\mathrm{spf}} \to \mathbf{Sch} \tag{7.5.2.6}$$

formée des morphismes séparés de présentation finie, et formons de même la catégorie fibrée

$$\mathfrak{F}_{\mathrm{spf}/V} \to \mathscr{C}_X, \tag{7.5.2.7}$$

dont la fibre au-dessus de $X' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}_X)$ est la catégorie $\mathbf{Sch}_{\mathrm{spf}/X'_V}$. Alors le foncteur canonique

$$\varinjlim_{\mathscr{C}_X^\circ} \mathfrak{F}_{\mathrm{spf}/V} \to \mathbf{Sch}_{\mathrm{spf}/V^{\mathrm{h}}} \tag{7.5.2.8}$$

est une équivalence de catégories. On identifiera dans la suite la catégorie limite inductive de $\mathfrak{F}_{\mathrm{spf}/V}$ au-dessus de $\mathscr{C}_X^\circ$ avec la catégorie $\mathbf{Sch}_{\mathrm{spf}/V^{\mathrm{h}}}$ au moyen de ce foncteur.

7.5.3. Soient $X' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}_X)$, Y' l'image réciproque de Y dans X'. Comme le hensélisé de X' le long de Y' est canoniquement isomorphe à X^{h}, le schéma formel $\widehat{X}'$ complété de X' le long de Y' s'identifie à $\widehat{X}$. Donc en vertu de 7.4.16, on a une immersion ouverte canonique

$$j_{X'} \colon \widehat{X}^{\mathrm{rig}} \to (X'_V)^{\mathrm{an}}. \tag{7.5.3.1}$$

D'après 7.4.20, pour tout morphisme $f \colon X'' \to X'$ de $\mathscr{C}_X$, on a

$$j_{X'} = (f_V)^{\mathrm{an}} \circ j_{X''}. \tag{7.5.3.2}$$

7.5.4. Le foncteur GAGA relatif à (S, T) (7.4.12.1), noté $\mathfrak{A}$, induit un foncteur

$$\mathfrak{F}_{\mathrm{spf}/V} \to \mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}/\widehat{X}^{\mathrm{rig}}} \tag{7.5.4.1}$$

dont la restriction à la fibre au-dessus de $X' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}_X)$ est donnée par le foncteur

$$\mathbf{Sch}_{\mathrm{spf}/X'_V} \to \mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}/\widehat{X}^{\mathrm{rig}}}, \quad W \mapsto W^{\mathrm{an}} \times_{(X'_V)^{\mathrm{an}}} \widehat{X}^{\mathrm{rig}}. \tag{7.5.4.2}$$

Comme $\mathfrak{A}$ est exact à gauche (7.4.5), le foncteur (7.5.4.1) transforme morphisme cartésien en isomorphisme. Donc compte tenu de (7.5.2.8), il définit un foncteur

$$\mathfrak{B}\colon \mathbf{Sch}_{\mathrm{spf}/V^{\mathrm{h}}} \to \mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}/\widehat{X}^{\mathrm{rig}}}, \tag{7.5.4.3}$$

qu'on appelle *foncteur GAGA hensélien* relatif à (X, Y). L'omission de la paire (S, T) de la terminologie sera justifiée dans (7.5.5). Si W (resp. f) est un objet (resp. un morphisme) de $\mathbf{Sch}_{\mathrm{spf}/V^{\mathrm{h}}}$, on note aussi W^{an} (resp. f^{an}) son image par le foncteur $\mathfrak{B}$. On montrera (7.5.7) que cette notation n'entraîne aucune confusion avec celle introduite dans (7.4.12).

7.5.5. Considérons le foncteur GAGA relatif à (X, Y)

$$\mathfrak{A}'\colon \mathbf{Sch}_{\mathrm{spf}/V} \to \mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}/\widehat{X}^{\mathrm{rig}}}, \tag{7.5.5.1}$$

et formons à partir de ce dernier le foncteur analogue à (7.5.4.3)

$$\mathfrak{B}'\colon \mathbf{Sch}_{\mathrm{spf}/V^{\mathrm{h}}} \to \mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}/\widehat{X}^{\mathrm{rig}}}. \tag{7.5.5.2}$$

Alors les foncteurs $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}'$ sont canoniquement isomorphes. En effet, pour tout V-schéma séparé de type fini W, on a un isomorphisme canonique fonctoriel (7.4.7.2)

$$\mathfrak{A}'(W) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}(W) \times_{\mathfrak{A}(V)} \widehat{X}^{\mathrm{rig}}. \tag{7.5.5.3}$$

Pour tout $X' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}_X)$, le diagramme de morphismes canoniques

$$\begin{array}{ccc} \widehat{X}'^{\mathrm{rig}} & \longrightarrow & \mathfrak{A}(X'_V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{X}^{\mathrm{rig}} & \longrightarrow & \mathfrak{A}(V) \end{array}$$

est commutatif (7.4.20). De plus, le morphisme $\widehat{X}'^{\mathrm{rig}} \to \mathfrak{A}(X'_V) \times_{\mathfrak{A}(V)} \widehat{X}^{\mathrm{rig}}$ défini par ce diagramme s'identifie au morphisme canonique $\widehat{X}'^{\mathrm{rig}} \to \mathfrak{A}'(X'_V)$ (7.4.6.5). On en déduit que le foncteur (7.5.4.1) et son analogue relatif à (X, Y) sont canoniquement isomorphes, d'où notre assertion.

Remarque 7.5.6. Soient $X' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}_X)$, Y' l'image réciproque de Y dans X', W un X'_V-schéma séparé de type fini. Les propriétés suivantes résultent aussitôt de la définition (7.5.4) :

(i) Les foncteurs GAGA henséliens relatifs à (X, Y) et à (X', Y') sont canoniquement isomorphes.

(ii) On a un isomorphisme canonique (fonctoriel en W)

$$\mathfrak{B}(W \times_{X'_V} V^{\mathrm{h}}) \simeq \mathfrak{A}(W) \times_{\mathfrak{A}(X'_V)} \widehat{X}^{\mathrm{rig}}, \tag{7.5.6.1}$$

qu'on pourrait aussi écrire sous la forme $(W \times_{X'_V} V^{\mathrm{h}})^{\mathrm{an}} \simeq W^{\mathrm{an}} \times_{(X'_V)^{\mathrm{an}}} (V^{\mathrm{h}})^{\mathrm{an}}$.

Proposition 7.5.7. *Si la paire $(X^{\mathrm{h}}, Y^{\mathrm{h}})$ est idyllique, alors le foncteur GAGA hensélien relatif à (X, Y) est canoniquement isomorphe au foncteur GAGA relatif à $(X^{\mathrm{h}}, Y^{\mathrm{h}})$.*

Notons $\mathfrak{A}^{\mathrm{h}}$ le foncteur GAGA relatif à $(X^{\mathrm{h}}, Y^{\mathrm{h}})$. Soient W un V-schéma séparé de type fini, $\mathscr{M}_{W/X}$ et $\mathscr{M}_{W\times_V V^{\mathrm{h}}/X^{\mathrm{h}}}$ les catégories définies dans (7.4.6). Si (Z, u) est un objet de $\mathscr{M}_{W/X}$, les schémas formels complétés respectivement de Z et $Z \times_X X^{\mathrm{h}}$ le long des images réciproques de Y sont canoniquement isomorphes. Donc compte tenu de (7.4.6.5), le foncteur

$$\mathscr{M}_{W/X} \to \mathscr{M}_{W\times_V V^{\mathrm{h}}/X^{\mathrm{h}}}, \quad (Z, u) \mapsto (Z \times_X X^{\mathrm{h}}, u \times_V V^{\mathrm{h}}) \tag{7.5.7.1}$$

induit un $\widehat{X}^{\mathrm{rig}}$-morphisme (fonctoriel en W)

$$j_W : \mathfrak{A}(W) \times_{\mathfrak{A}(V)} \widehat{X}^{\mathrm{rig}} \to \mathfrak{A}^{\mathrm{h}}(W \times_V V^{\mathrm{h}}). \tag{7.5.7.2}$$

Pour prouver la proposition, il suffit de montrer que j_W est un isomorphisme, *i.e.*, est un épimorphisme et un monomorphisme de $\widetilde{\mathbf{R}}$. On peut se réduire au cas où $(S, T) = (X, Y)$ (7.4.7.2), de sorte que $\mathfrak{A}(V) = \widehat{X}^{\mathrm{rig}}$. Il résulte de 7.4.12.3, 7.1.4(iii) et 7.4.16 que j_W est une immersion ouverte, et donc un monomorphisme (7.2.3). Soient Z_1 un X^{h}-schéma séparé de présentation finie tel que $Z_1 \times_{X^{\mathrm{h}}} V^{\mathrm{h}}$ soit V^{h}-isomorphe à $W \times_V V^{\mathrm{h}}$, $\widehat{Z}_1$ le schéma formel complété de Z_1 le long de l'image réciproque de Y^{h}, $u\colon \widehat{Z}_1^{\mathrm{rig}} \to \mathfrak{A}^{\mathrm{h}}(W \times_V V^{\mathrm{h}})$ le morphisme canonique, qui est une immersion ouverte (7.4.16). Par descente ([31] 8.8.2 et 8.10.5), il existe $X' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}_X)$ et un X'-schéma séparé de présentation finie Z' tels que $Z' \times_{X'} X^{\mathrm{h}}$ soit X^{h}-isomorphe à Z_1 et que $Z' \times_X V$ soit X'-isomorphe à $W \times_X X'$. Le schéma formel complété de Z' le long de l'image réciproque de Y s'identifie à $\widehat{Z}_1$, et on a un $\widehat{X}^{\mathrm{rig}}$-isomorphe canonique $\mathfrak{A}(W \times_X X') \times_{\mathfrak{A}(X'_V)} \widehat{X}^{\mathrm{rig}} \simeq \mathfrak{A}(W)$ (7.4.5). Par suite, le X'-schéma Z' définit un morphisme $v\colon \widehat{Z}_1^{\mathrm{rig}} \to \mathfrak{A}(W)$ (7.4.20) tel que $j_W \circ v = u$. On en déduit par 7.4.16 que j_W est un épimorphisme de $\widetilde{R}$.

7.5.8. Soient W un V^{h}-schéma séparé de type fini, Z un X^{h}-schéma de présentation finie, $u\colon Z_V \to W$ un V^{h}-morphisme, $\widehat{Z}$ le schéma formel complété de Z le long de l'image réciproque de Y. On a un morphisme canonique (fonctoriel en (Z, u))

$$\widehat{Z}^{\mathrm{rig}} \to W^{\mathrm{an}} \tag{7.5.8.1}$$

défini de la façon suivante. Par descente ([31] 8.8.2 et 8.10.5), il existe $X' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}_X)$, un X'_V-schéma séparé de type fini W', un X'-schéma de présentation finie Z' et un X'_V-morphisme $u'\colon Z'_V \to W'$ tels que W, Z et u s'identifient aux objets déduits respectivement de W', Z' et u' par changement de base par le morphisme $X^{\mathtt{h}} \to X'$. On peut alors identifier canoniquement $\widehat{Z}$ avec le schéma formel complété de Z' le long de l'image réciproque de Y. Compte tenu de (7.5.6.1), on prend pour (7.5.8.1) le morphisme induit par le diagramme commutatif canonique (7.4.20)

$$\begin{tikzcd} \widehat{Z}^{\mathrm{rig}} \arrow[r] \arrow[d] & W'^{\mathrm{an}} \arrow[d] \\ \widehat{X}^{\mathrm{rig}} \arrow[r] & (X'_V)^{\mathrm{an}} \end{tikzcd} \tag{7.5.8.2}$$

Il est clair que cette définition ne dépend pas du choix de X'.

Proposition 7.5.9. *Soient W un $V^{\mathtt{h}}$-schéma séparé de type fini, Z un $X^{\mathtt{h}}$-schéma séparé de présentation finie tels que W soit $V^{\mathtt{h}}$-isomorphe à Z_V, $\widehat{Z}$ le schéma formel complété de Z le long de l'image réciproque de Y. Alors le morphisme canonique $\widehat{Z}^{\mathrm{rig}} \to W^{\mathrm{an}}$* (7.5.8.1) *est une immersion ouverte* (*quasi-compacte*)*. De plus, lorsque Z parcourt la collection des $X^{\mathtt{h}}$-schémas séparés de présentation finie tels que W soit $V^{\mathtt{h}}$-isomorphe à Z_V, les morphismes canoniques $\widehat{Z}^{\mathrm{rig}} \to W^{\mathrm{an}}$ forment un recouvrement admissible.*

Compte tenu de la définition (7.5.8), la première assertion résulte de 7.4.16 et 7.1.4(iii), et la seconde assertion de 7.4.21.

Proposition 7.5.10. *Soient Z un $X^{\mathtt{h}}$-schéma propre de présentation finie, $W = Z_V$, $\widehat{Z}$ le schéma formel complété de Z le long de l'image réciproque de Y. Alors le morphisme canonique $\widehat{Z}^{\mathrm{rig}} \to W^{\mathrm{an}}$* (7.5.8.1) *est un isomorphisme.*

En effet, avec les notations de (7.5.8), on peut supposer Z' propre de présentation finie sur X' ([31] 8.10.5) et $W' = Z'_V$. La proposition résulte alors de 7.4.22.

Proposition 7.5.11. *Le foncteur $\mathfrak{B}$ est exact à gauche.*

En effet, on a $\mathfrak{B}(V^{\mathtt{h}}) = \widehat{X}^{\mathrm{rig}}$, et il résulte par descente ([31] 8.8.2 et 8.10.5) de 7.4.5 et (7.5.6.1) que $\mathfrak{B}$ transforme les produits fibrés en produits fibrés, d'où la proposition ([1] I 2.4.2).

Proposition 7.5.12. *Pour tout morphisme $f\colon W' \to W$ de $V^{\mathtt{h}}$-schémas séparés de type fini, le morphisme $f^{\mathrm{an}}\colon W'^{\mathrm{an}} \to W^{\mathrm{an}}$ est séparé.*

Cela résulte par descente ([31] 8.8.2 et 8.10.5) de (7.5.6.1) et de l'assertion analogue pour les morphismes de U-schémas séparés de type fini (7.4.26).

Proposition 7.5.13. *Soit $f\colon W' \to W$ un morphisme de $V^{\mathtt{h}}$-schémas séparés de type fini. Considérons pour un morphisme de schémas* (*resp. d'espaces rigides quasi-séparés*) *la propriété d'être*

(i) *une immersion ;*
(ii) *une immersion fermée ;*

(iii) *une immersion ouverte ;*
(iv) *propre ;*
(v) *fini ;*
(vi) *étale.*
(vii) *lisse.*

Alors, si f vérifie l'une des propriétés précédentes, il en est de même de f^{an}.

Cela résulte par descente ([31] 8.8.2, 8.10.5 et 17.7.8) de (7.5.6.1) et de la proposition analogue pour les morphismes de U-schémas séparés de type fini (7.4.23, 7.4.25 et 7.4.33)

Proposition 7.5.14. *Soient W un V^{h}-schéma séparé de type fini, $(W_i)_{i\in I}$ des ouverts de W tels que $W = \cup_{i\in I} W_i$. Alors $(W_i^{\mathrm{an}} \to W^{\mathrm{an}})_{i\in I}$ est une famille couvrante pour la topologie admissible de $\mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}}$ (7.3.1).*

Comme W est quasi-compact, on peut supposer I fini, auquel cas, la proposition résulte par descente ([31] 8.8.2 et 8.10.5) de (7.5.6.1) et de l'assertion analogue pour les U-schémas séparés de type fini (7.4.28).

Corollaire 7.5.15. *Soient W un V^{h}-schéma séparé de type fini, $W = \amalg_{i\in I} W_i$ une décomposition de W en somme de sous-schémas induits sur des ouverts $(W_i)_{i\in I}$ de W. Alors W^{an} est somme admissible des $(W_i^{\mathrm{an}})_{i\in I}$ (7.3.17).*

En effet, il résulte de 7.5.13 que les morphismes $W_i^{\mathrm{an}} \to W^{\mathrm{an}}$ sont des immersions ouvertes et fermées. Ce sont donc des immersions ouvertes quasi-compactes (7.2.6). La proposition résulte alors de 7.5.11, 7.5.14 et 7.3.1.2.

Proposition 7.5.16. *Soit W un V^{h}-schéma séparé de type fini. Pour que W soit vide, il faut et il suffit de W^{an} soit vide.*

Si W est vide, W^{an} est vide. Montrons que si W^{an} est vide, W est vide. Il existe $X' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, un X'_V-schéma séparé de type fini W' et un V^{h}-isomorphisme $W \simeq W' \times_{X'_V} V^{\mathrm{h}}$ ([31] 8.8.2 et 8.10.5). Par suite, $W'^{\mathrm{an}} \times_{(X'_V)^{\mathrm{an}}} \widehat{X}^{\mathrm{rig}}$ est vide (7.5.6.1). Donc en vertu de (7.4.7.2) et 7.4.35, l'image schématique de W' dans X' est contenue dans X'_V. On en déduit par ([31] 11.10.5) que l'image schématique de W dans X^{h} (qui existe en vertu de [28] 6.10.5) est contenue dans V^{h}. Or tout point fermé de X^{h} est contenu dans Y^{h} ; donc W est vide.

Proposition 7.5.17. *Soient X_1 un X-schéma fini de présentation finie, Y_1 (resp. V_1) l'image réciproque de Y (resp. V) dans X_1, X_1^{h} le hensélisé de X_1 le long de Y_1, V_1^{h} l'image réciproque de V_1 dans X_1^{h}. Notons*

$$\mathfrak{B}_1 \colon \mathbf{Sch}_{\mathrm{spf}/V_1^{\mathrm{h}}} \to \mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}/\widehat{X}_1^{\mathrm{rig}}} \tag{7.5.17.1}$$

le foncteur GAGA hensélien relatif à (X_1, Y_1). Alors pour tout V_1^{h}-schéma séparé de type fini W, on a un isomorphisme canonique fonctoriel

$$\mathfrak{B}_1(W) \simeq \mathfrak{B}(W). \tag{7.5.17.2}$$

Notons d'abord qu'on a des isomorphismes canoniques $X_1^{\mathtt{h}} \xrightarrow{\sim} X_1 \times_X X^{\mathtt{h}}$ et

$$\widehat{X}_1^{\mathrm{rig}} \xrightarrow{\sim} V_1^{\mathrm{an}} \times_{V^{\mathrm{an}}} \widehat{X}^{\mathrm{rig}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{B}(V_1^{\mathtt{h}})$$

d'après 7.4.22 et (7.5.6.1). Considérons le foncteur $\theta\colon \mathscr{C}_X \to \mathscr{C}_{X_1}$ défini par $X' \mapsto X_1 \times_X X'$. Montrons que θ° est cofinal. Soient $X_1' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}_{X_1})$, $u\colon X_1' \to X_1$ le morphisme structural. Le morphisme $u \times_X X^{\mathtt{h}}\colon X_1' \times_X X^{\mathtt{h}} \to X_1 \times_X X^{\mathtt{h}}$ étant un voisinage étale élémentaire de $Y_1 \times_X X^{\mathtt{h}}$, admet une section $v^{\mathtt{h}}$. De plus, cette section est unique d'après ([31] 17.4.9). En vertu de ([31] 8.8.2), il existe $X' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}_X)$ et une section v' du morphisme $u \times_X X'\colon X_1' \times_X X' \to X_1 \times_X X'$ qui induit la section $v^{\mathtt{h}}$ par le changement de base $X^{\mathtt{h}} \to X'$. En fait toute section w' de $u \times_X X'$ induit la section $v^{\mathtt{h}}$ par le même changement de base. Il existe donc un morphisme $X'' \to X'$ de $\mathscr{C}_X$ tel que $w' \times_{X'} X'' = v' \times_{X'} X''$. On en déduit par ([1] I 8.1.3) que le foncteur θ° est cofinal.

Pour tout $X' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}_X)$, si l'on pose $X_1' = X_1 \times_X X'$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\widehat{X}_1^{\mathrm{rig}} \arrow[r, "j_{X_1'}"] \arrow[d] & (X_1' \times_X V)^{\mathrm{an}} \arrow[d] \\
\widehat{X}^{\mathrm{rig}} \arrow[r, "j_{X'}"] & (X' \times_X V)^{\mathrm{an}}
\end{tikzcd}$$

où $j_{X'}$ et $j_{X_1'}$ sont les immersions ouvertes définies dans (7.5.3.1), est cartésien en vertu de 7.4.22. La proposition s'ensuit compte tenu de la définition (7.5.4).

7.6 Topos de Zariski et topos admissible

7.6.1. Dans cette section, S désigne un schéma cohérent et T un sous-schéma fermé de S tels que la paire (S,T) soit idyllique (2.6.17). On note U l'ouvert $S-T$ de S, $\mathscr{S} = S_{/T}$ le schéma formel complété de S le long de T et $\Theta = \mathscr{S}^{\mathrm{rig}}$. On désigne respectivement par

$$\mathbf{Sch}_{\mathrm{pf}/S} \to \mathbf{S}_{/\mathscr{S}}, \qquad X \mapsto \widehat{X}, \tag{7.6.1.1}$$

$$\mathbf{Sch}_{\mathrm{spf}/U} \to \mathbf{Rig}_{\mathrm{qs}/\Theta}, \qquad V \mapsto V^{\mathrm{an}}, \tag{7.6.1.2}$$

le foncteur de complétion le long de l'image réciproque de T et le foncteur GAGA relatif à (S,T) (7.4.12.1).

7.6.2. Soit V un U-schéma séparé de type fini. On désigne par $\mathbf{Zar}_{/V}$ le site de Zariski de V ; c'est un $\mathbb{U}$-site dont chaque objet est quasi-compact, et donc séparé de type fini sur U. On note V_{zar} le topos des faisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur $\mathbf{Zar}_{/V}$. En vertu de 7.4.25, le foncteur GAGA relatif à (S,T) induit un foncteur

$$\varphi_V\colon \mathbf{Zar}_{/V} \to \mathbf{Ouv}_{/V^{\mathrm{an}}}. \tag{7.6.2.1}$$

Celui-ci est exact à gauche (7.4.5) et transforme famille couvrante en famille couvrante (7.4.28), où $\mathbf{Ouv}_{/V^{\mathrm{an}}}$ est muni de la topologie admissible (7.3.4). Par suite, il définit un morphisme de sites, et donc un morphisme de topos

$$\Phi_V\colon V^{\mathrm{an}}_{\mathrm{ad}} \to V_{\mathrm{zar}}, \tag{7.6.2.2}$$

caractérisé par $\Phi_{V*}(F) = F \circ \varphi_V$ et Φ_V^* prolonge φ_V ([1] IV 4.9.4). Il résulte de (7.4.19.2) qu'on a un homomorphisme canonique

$$\mathscr{O}_V \to \Phi_{V*}(\mathscr{O}_{V^{\mathrm{an}}}). \tag{7.6.2.3}$$

On obtient un morphisme de topos annelés que l'on note encore

$$\Phi_V\colon (V^{\mathrm{an}}_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_{V^{\mathrm{an}}}) \to (V_{\mathrm{zar}}, \mathscr{O}_V). \tag{7.6.2.4}$$

On appelle Φ_V le *morphisme GAGA admissible* relatif à (S, T), ou simplement le *morphisme GAGA* relatif à (S, T) lorsqu'aucune ambiguïté sur la topologie n'est à craindre.

Suivant la convention (1.1.11), nous utilisons pour les modules la notation Φ_V^{-1} pour désigner l'image réciproque au sens des faisceaux abéliens en réservant la notation Φ_V^* pour l'image réciproque au sens des modules. Si F est un $\mathscr{O}_V$-module, on pose

$$F^{\mathrm{an}} = \Phi_V^*(F) = \Phi_V^{-1}(F) \otimes_{\Phi_V^{-1}(\mathscr{O}_V)} \mathscr{O}_{V^{\mathrm{an}}}. \tag{7.6.2.5}$$

7.6.3. Soit $f\colon V' \to V$ un morphisme de U-schémas séparés de type fini. Il résulte aisément de 7.4.5 et des définitions que le diagramme de morphismes de topos annelés

$$\begin{tikzcd} (V'^{\mathrm{an}}_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_{V'^{\mathrm{an}}}) \arrow[r, "\Phi_{V'}"] \arrow[d, "f^{\mathrm{an}}"'] & (V'_{\mathrm{zar}}, \mathscr{O}_{V'}) \arrow[d, "f"] \\ (V^{\mathrm{an}}_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_{V^{\mathrm{an}}}) \arrow[r, "\Phi_V"] & (V_{\mathrm{zar}}, \mathscr{O}_V) \end{tikzcd} \tag{7.6.3.1}$$

est commutatif à isomorphisme canonique près. Par conséquent, si F' est un $\mathscr{O}_{V'}$-module, on a, pour tout $q \geq 0$, un morphisme de changement de base (1.2.3.3)

$$\mathsf{c}^q\colon (\mathrm{R}^q f_* F')^{\mathrm{an}} \to \mathrm{R}^q f^{\mathrm{an}}_*(F'^{\mathrm{an}}), \tag{7.6.3.2}$$

appelé aussi *morphisme de comparaison.*

7.6.4. Soient $S' \to S$ un morphisme séparé de présentation finie, T' (resp. U') l'image réciproque de T (resp. U) dans S', $\mathscr{S}' = S'_{/T'}$ le schéma formel complété de S' le long de T', $\Theta' = \mathscr{S}'^{\mathrm{rig}}$. Si V est un U'-schéma séparé de type fini, on note $V^{\mathrm{an}'}$ son image par le foncteur GAGA relatif à (S', T') et $\Phi'_V\colon (V^{\mathrm{an}'}_{\mathrm{zar}}, \mathscr{O}_{V^{\mathrm{an}'}}) \to (V_{\mathrm{zar}}, \mathscr{O}_V)$ le morphisme GAGA relatif à (S', T'). Si F est un $\mathscr{O}_V$-module, on pose $F^{\mathrm{an}'} = \Phi'^*_V(F)$.

Soit V un U'-schéma séparé de type fini. On a une immersion ouverte canonique $j_{U'}\colon \Theta' \to U'^{\mathrm{an}}$ (7.4.16) et un isomorphisme fonctoriel (7.4.7.2)

$$V^{\mathrm{an}'} \simeq V^{\mathrm{an}} \times_{U'^{\mathrm{an}}} \Theta'. \tag{7.6.4.1}$$

Soit $j_V\colon V^{\mathrm{an}'} \to V^{\mathrm{an}}$ la projection canonique. Il résulte de (7.6.4.1) (appliqué aux objets de $\mathbf{Zar}_{/V}$) et de 7.4.18 qu'on a un isomorphisme canonique de morphismes de topos annelés

$$\Phi'_V \xrightarrow{\sim} \Phi_V j_V. \tag{7.6.4.2}$$

On en déduit que pour tout $\mathscr{O}_V$-module F, on a un isomorphisme canonique

$$F^{\mathrm{an}'} \xrightarrow{\sim} F^{\mathrm{an}}|V^{\mathrm{an}'}. \tag{7.6.4.3}$$

Soient $f\colon V' \to V$ un morphisme séparé de type fini, F' un $\mathscr{O}_{V'}$-module, q un entier ≥ 0,

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{c}^q\colon (\mathrm{R}^q f_* F')^{\mathrm{an}} & \to & \mathrm{R}^q f^{\mathrm{an}}_*(F'^{\mathrm{an}}), \\ \mathsf{c}'^q\colon (\mathrm{R}^q f_* F')^{\mathrm{an}'} & \to & \mathrm{R}^q f^{\mathrm{an}'}_*(F'^{\mathrm{an}'}), \end{array}$$

les morphismes de comparaison relatifs respectivement à (S,T) et (S',T') (7.6.3.2). On peut identifier $f^{\mathrm{an}'}$ au changement de base de f^{an} par l'immersion ouverte j_V (7.6.4.1). On vérifie aussitôt que c'^q est la restriction de c^q à $V^{\mathrm{an}'}$.

7.6.5. Le diagramme de morphismes de topos

$$\begin{tikzcd} \Theta_{\mathrm{ad}} \arrow[r, "\Phi_U"] \arrow[d, "\rho_{\mathscr{S}}"'] & U_{\mathrm{zar}} \arrow[d, "j"] \\ \mathscr{S}_{\mathrm{zar}} \arrow[r, "i"] & S_{\mathrm{zar}} \end{tikzcd} \tag{7.6.5.1}$$

où $\rho_{\mathscr{S}}$ est le morphisme (4.5.2.1) et i et j sont les morphismes canoniques, n'est pas commutatif, même pas à isomorphisme près. Mais le morphisme de foncteurs (7.4.12.6) induit un morphisme de $j\Phi_U$ dans $i\rho_{\mathscr{S}}$; en d'autres termes, on a un morphisme de foncteurs

$$j_*\Phi_{U*} \quad \to \quad i_*\rho_{\mathscr{S}*}. \tag{7.6.5.2}$$

De plus, il résulte de 7.4.18 que le diagramme

$$\begin{tikzcd} j_*\mathscr{O}_U \arrow[d] & \mathscr{O}_S \arrow[l] \arrow[r] & i_*\mathscr{O}_{\mathscr{S}} \arrow[d] \\ j_*(\Phi_{U*}\mathscr{O}_\Theta) \arrow[rr, "(7.6.5.2)"] & & i_*(\rho_{\mathscr{S}*}\mathscr{O}_\Theta) \end{tikzcd}$$

est commutatif. Par suite, pour tout $\mathscr{O}_S$-module $\mathscr{F}$, on a un morphisme $\mathscr{O}_\Theta$-linéaire fonctoriel

$$\rho^*_{\mathscr{S}}(i^*\mathscr{F}) \to \Phi^*_U(\mathscr{F}|U), \tag{7.6.5.3}$$

où toutes les images réciproques sont prises au sens des modules.

Soient $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_S$-module cohérent, $\widehat{\mathscr{F}}$ son complété $\mathscr{F}_{/T}$ le long de T. Compte tenu de 2.5.5(ii) et 4.7.25, le morphisme (7.6.5.3) s'écrit aussi sous la forme

$$\widehat{\mathscr{F}}^{\mathrm{rig}} \to (\mathscr{F}|U)^{\mathrm{an}}. \tag{7.6.5.4}$$

D'autre part, on définit un morphisme $\mathscr{O}_\Theta$-linéaire fonctoriel

$$(\mathscr{F}|U)^{\mathrm{an}} \longrightarrow \widehat{\mathscr{F}}^{\mathrm{rig}} \tag{7.6.5.5}$$

de la façon suivante : se donner un tel morphisme revient à se donner un morphisme $\mathscr{O}_U$-linéaire

$$\mathscr{F}|U \to \Phi_{U*}(\widehat{\mathscr{F}}^{\mathrm{rig}}).$$

On prend pour ce morphisme celui donné, pour tout ouvert W de U, par le morphisme canonique $\Gamma(W,\mathscr{F}) \to \Gamma(W^{\mathrm{an}},\widehat{\mathscr{F}}^{\mathrm{rig}})$ (7.4.19).

Proposition 7.6.6. *Soient $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_S$-module cohérent, $\widehat{\mathscr{F}}$ son complété $\mathscr{F}_{/T}$ le long de T. Alors les morphismes $\widehat{\mathscr{F}}^{\mathrm{rig}} \to (\mathscr{F}|U)^{\mathrm{an}}$* (7.6.5.4) *et $(\mathscr{F}|U)^{\mathrm{an}} \to \widehat{\mathscr{F}}^{\mathrm{rig}}$* (7.6.5.5) *sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.*

On peut remplacer S par un recouvrement ouvert (7.6.4). Par suite, on peut supposer que l'on a une suite exacte $\mathscr{O}_S^m \to \mathscr{O}_S^n \to \mathscr{F} \to 0$. Il résulte de 2.5.5(i) et 4.7.11 qu'on a un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
(\mathscr{O}^m_{\mathscr{S}})^{\mathrm{rig}} \arrow[r] \arrow[d, "u_1"] & (\mathscr{O}^n_{\mathscr{S}})^{\mathrm{rig}} \arrow[r] \arrow[d, "u_2"] & \widehat{\mathscr{F}}^{\mathrm{rig}} \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \\
(\mathscr{O}^m_U)^{\mathrm{an}} \arrow[r] \arrow[d, "v_1"] & (\mathscr{O}^n_U)^{\mathrm{an}} \arrow[r] \arrow[d, "v_2"] & (\mathscr{F}|U)^{\mathrm{an}} \arrow[r] \arrow[d, "v"] & 0 \\
(\mathscr{O}^m_{\mathscr{S}})^{\mathrm{rig}} \arrow[r] & (\mathscr{O}^n_{\mathscr{S}})^{\mathrm{rig}} \arrow[r] & \widehat{\mathscr{F}}^{\mathrm{rig}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où u, u_1 et u_2 sont les morphismes (7.6.5.4) et v, v_1 et v_2 sont les morphismes (7.6.5.5). Comme u_1, u_2, v_1 et v_2 sont clairement les identités, u et v sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

Corollaire 7.6.7. *Soient X un S-schéma séparé de présentation finie, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module cohérent, $\widehat{\mathscr{F}}$ son complété $\mathscr{F}_{/X_T}$ le long de X_T, $V = X_U$. Alors on a un isomorphisme fonctoriel*

$$\widehat{\mathscr{F}}^{\mathrm{rig}} \xrightarrow{\sim} (\mathscr{F}|V)^{\mathrm{an}}|\widehat{X}^{\mathrm{rig}}. \tag{7.6.7.1}$$

Cela résulte de 7.6.4 et 7.6.6.

Proposition 7.6.8. *Soit V un U-schéma séparé de type fini. Alors le morphisme de topos annelés* (7.6.2.4)

$$\Phi_V\colon (V^{\mathrm{an}}_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_{V^{\mathrm{an}}}) \to (V_{\mathrm{zar}}, \mathscr{O}_V)$$

est plat.

Comme $V^{\mathrm{an}}_{\mathrm{ad}}$ admet suffisamment de points (7.3.14) et que $\mathscr{O}_V$ est cohérent, on se ramène à vérifier la condition 1.3.17(ii) pour tout ouvert de V. Il suffit alors de montrer que le foncteur $F \mapsto F^{\mathrm{an}} = \Phi_V^*(F)$ est exact sur la catégorie des $\mathscr{O}_V$-modules cohérents. Soit $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ une suite exacte de $\mathscr{O}_V$-modules cohérents. D'après 7.4.16, il suffit de montrer que pour tout S-schéma séparé de présentation finie tel que X_U soit U-isomorphe à V, la suite

$$0 \to F'^{\mathrm{an}}|\widehat{X}^{\mathrm{rig}} \to F^{\mathrm{an}}|\widehat{X}^{\mathrm{rig}} \to F''^{\mathrm{an}}|\widehat{X}^{\mathrm{rig}} \to 0 \tag{7.6.8.1}$$

est exacte. Il existe un $\mathscr{O}_X$-module cohérent $\mathscr{F}$ tel que $\mathscr{F}|V \simeq F$ (2.6.23). En vertu de ([28] 6.9.7), il existe un sous-$\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent de type fini $\mathscr{F}'$ de $\mathscr{F}$ tel que $\mathscr{F}'|V \simeq F'$. Comme $\mathscr{F}$ est cohérent, $\mathscr{F}'$ est cohérent. Posons $\mathscr{F}'' = \mathscr{F}/\mathscr{F}'$ de sorte que l'on a $\mathscr{F}''|V \simeq F''$. Il résulte alors de 2.5.5(i), 4.7.11 et 7.6.7 que la suite (7.6.8.1) est exacte.

7.6.9. Soient $f\colon X \to S$ un morphisme propre de présentation finie, $V = X_U$, $h = f_U$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module cohérent, $\widehat{\mathscr{F}}$ son complété $\mathscr{F}_{/X_T}$ le long de X_T, q un entier ≥ 0. On sait que $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})$ est un $\mathscr{O}_S$-module cohérent (1.4.8 et 2.6.18). On note $(\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}))^\wedge$ son complété $(\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}))_{/T}$ le long de T. On a un morphisme canonique (2.12.1.7)

$$\theta_q\colon (\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}))^\wedge \quad\to\quad \mathrm{R}^q \hat{f}_*(\widehat{\mathscr{F}}). \tag{7.6.9.1}$$

On notera que l'on a $\widehat{X}^{\mathrm{rig}} = V^{\mathrm{an}}$ (7.4.14) et par suite $\hat{f}^{\mathrm{rig}} = h^{\mathrm{an}}$.

Proposition 7.6.10. *Sous les hypothèses de* (7.6.9), *le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
((\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}))^\wedge)^{\mathrm{rig}} \arrow[r, "\theta_q^{\mathrm{rig}}"] \arrow[d, "u"'] & (\mathrm{R}^q \hat{f}_*(\widehat{\mathscr{F}}))^{\mathrm{rig}} \arrow[r, "\kappa^q"] & \mathrm{R}^q \hat{f}^{\mathrm{rig}}_*(\widehat{\mathscr{F}}^{\mathrm{rig}}) \arrow[d, "v"] \\
(\mathrm{R}^q h_*(\mathscr{F}|V))^{\mathrm{an}} \arrow[rr, "\mathsf{c}^q"] & & \mathrm{R}^q h^{\mathrm{an}}_*((\mathscr{F}|V)^{\mathrm{an}})
\end{tikzcd} \tag{7.6.10.1}$$

où u est le morphisme (7.6.5.4), *v provient du morphisme* (7.6.7.1), *κ^q est le morphisme* (4.7.35.2) *et c^q est le morphisme de comparaison* (7.6.3.2), *est commutatif.*

Considérons le digramme (en forme de cube) de morphismes de topos

$$\begin{tikzcd}
V^{\mathrm{an}}_{\mathrm{ad}} \arrow[rrrrrr, "\Phi_V"] \arrow[ddrr, "\rho_{\widehat{X}}"'] \arrow[dddddd, "h^{\mathrm{an}}"'] & & & & & & V_{\mathrm{zar}} \arrow[ddll, "j_X"] \arrow[dddddd, "h"] \\
& & & \textcircled{2} & & & \\
& & \widehat{X}_{\mathrm{zar}} \arrow[rr, "i_X"] \arrow[dd, "\hat{f}"'] & & X_{\mathrm{zar}} \arrow[dd, "f"] & & \\
& \textcircled{1} & & \textcircled{5} & & \textcircled{3} & \\
& & \mathscr{S}_{\mathrm{zar}} \arrow[rr, "i"] & & S_{\mathrm{zar}} & & \\
& & & \textcircled{4} & & & \\
\Theta_{\mathrm{ad}} \arrow[rrrrrr, "\Phi_U"'] \arrow[uurr, "\rho_{\mathscr{S}}"] & & & & & & U_{\mathrm{zar}} \arrow[uull, "j"']
\end{tikzcd}$$

où les faces (2) et (4) correspondent au diagramme (7.6.5.1) pour respectivement X et S ; notons (6) la face représentée par le grand carré extérieur. Seules les faces (1), (3), (5) et (6) sont commutatives à isomorphisme canonique près. Il résulte essentiellement de 7.4.22 que le diagramme de morphismes de foncteurs

$$\begin{tikzcd}
j_*\Phi_{U*}h^{\mathrm{an}}_* \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & j_*h_*\Phi_{V*} \arrow[r, "\sim"] & f_*j_{X*}\Phi_{V*} \arrow[d] \\
i_*\rho_{\mathscr{S}*}h^{\mathrm{an}}_* \arrow[r, "\sim"] & i_*\hat{f}_*\rho_{\widehat{X}*} \arrow[r, "\sim"] & f_*i_{X*}\rho_{\widehat{X}*}
\end{tikzcd}$$

où les isomorphismes horizontaux correspondent aux faces commutatives et les morphismes verticaux proviennent du morphisme (7.6.5.2) pour les faces (2) et (4), est commutatif. On sait que i, i_X, $\rho_{\mathscr{S}}$, $\rho_{\widehat{X}}$, Φ_U et Φ_V sont plats (2.6.19, 4.7.27 et 7.6.8). On en déduit par 1.2.4(ii) et 1.2.5(ii) que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\rho^*_{\mathscr{S}}(i^*(\mathrm{R}^q f_*\mathscr{F}) \arrow[r, "w_5"] \arrow[d, "w_4"'] & \rho^*_{\mathscr{S}}(\mathrm{R}^q\hat{f}_*(i^*_X\mathscr{F})) \arrow[r, "w_1"] & \mathrm{R}^q\hat{f}^{\mathrm{rig}}_*(\rho^*_{\widehat{X}}(i^*_X\mathscr{F})) \arrow[d, "w_2"] \\
\Phi^*_U(j^*(\mathrm{R}^q f_*\mathscr{F})) \arrow[r, "w_3"] & \Phi^*_U(\mathrm{R}^q h_*(j^*_X\mathscr{F})) \arrow[r, "w_6"] & \mathrm{R}^q h^{\mathrm{an}}_*(\Phi^*_V(j^*_X\mathscr{F}))
\end{tikzcd}$$

où w_n, $n \in \{1, 3, 5, 6\}$, est le morphisme de changement de base relativement à la face (n), et w_n, $n \in \{2, 4\}$, est le morphisme (7.6.5.3) relativement à la face (n), est commutatif. Comme on a par définition $w_1 = \kappa^q$, $w_2 = v$, $w_3w_4 = u$, $w_5 = \theta^{\mathrm{rig}}_q$ et $w_6 = \mathsf{c}^q$, le diagramme (7.6.10.1) est commutatif.

Théorème 7.6.11. *Soient V un U-schéma séparé de type fini, $f\colon W \to V$ un morphisme propre, F un $\mathscr{O}_W$-module cohérent. Alors, pour tout entier $q \geq 0$, le morphisme* (7.6.3.2)

$$\mathsf{c}^q\colon (\mathrm{R}^q f_*F)^{\mathrm{an}} \to \mathrm{R}^q f^{\mathrm{an}}_*(F^{\mathrm{an}})$$

est un isomorphisme.

L'éclatement S' de T dans S est de présentation finie sur S (1.13.3). Quitte à remplacer S par S' (7.6.4 et 7.4.14), on peut supposer que $\mathscr{S}$ admet localement un idéal de définition monogène. On peut se borner au cas où $V = U$ (7.4.16 et 7.6.4). Il existe un morphisme propre de présentation finie $g\colon X \to S$ tel que X_U soit U-isomorphe à W (1.12.24). De plus, d'après 2.6.23(i), il existe un $\mathscr{O}_X$-module cohérent $\mathscr{F}$ tel que $\mathscr{F}|W \simeq F$. Appliquons (7.6.10) à g et $\mathscr{F}$. Avec les notations de *loc. cit.*, on sait que θ_q, u et v sont des isomorphismes (2.12.2 et 7.6.7). De plus, compte tenu des hypothèses, κ^q est un isomorphisme (4.7.36). Donc c^q est un isomorphisme (7.6.10.1).

(*A suivre.*)

Bibliographie

[1] M. Artin, A. Grothendieck, J.L. Verdier, Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, SGA 4, *Lecture Notes in Mathematics*, Tome 1 : **269** (1972) ; Tome 2 : **270** (1972) ; Tome 3 : **305**, Springer-Verlag (1973).

[2] V. Berkovich, Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields, *Math. Surveys Monogr.* **33**, American Mathematical Society (1990).

[3] V. Berkovich, Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces. *Pub. Math. IHES* **78** (1993), 5–161.

[4] V. Berkovich, Vanishing cycles for formal schemes. *Invent. Math.* **115** (1994), 539–571.

[5] P. Berthelot, A. Grothendieck, L. Illusie, Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch, SGA 6, *Lecture Notes in Mathematics* **225**, Springer-Verlag (1971).

[6] S. Bosch, U. Görtz, Coherent modules and their descent on relative rigid spaces, *J. reine angew. Math.* **495** (1998), 119–134.

[7] S. Bosch, U. Güntzer, R. Remmert, Non-Archimedean Analysis, *A Series of Comprehensive Studies in Mathematics* **261**, Springer-Verlag (1984).

[8] S. Bosch, W. Lütkebohmert, Formal and rigid geometry, I. Rigid spaces, *Math. Ann.* **295** (1993), 291–317.

[9] S. Bosch, W. Lütkebohmert, Formal and rigid geometry, II. Flattening techniques, *Math. Ann.* **296** (1993), 403–429.

[10] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud, Formal and rigid geometry, III. The relative maximum principle, *Math. Ann.* **302** (1995), 1–29.

[11] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud, Formal and rigid geometry, IV. The reduced fibre theorem. *Invent. Math.* **119** (1995), 361–398.

[12] N. Bourbaki, Algèbre commutative, Chapitres 1–9, Hermann (1985).

[13] N. Bourbaki, Topologie générale, Chapitres 1–4, Hermann (1971).

[14] B. Conrad, Deligne's notes on Nagata compactifications, *J. Ramanujan Math. Soc.* **22** (2007), 205–257.

A. Abbes, *Éléments de Géométrie Rigide*, Progress in Mathematics 286,
DOI 10.1007/978-3-0348-0012-9,

[15] P. Deligne, Cohomologie Étale, SGA $4\frac{1}{2}$, *Lecture Notes in Mathematics* **569**, Springer-Verlag (1977).

[16] P. Deligne, Le théorème de plongement de Nagata, notes non publiées.

[17] R. Elkik, Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **6** (1973), 553–604.

[18] D. Ferrand, M. Raynaud, Fibres formelles d'un anneau local noethérien, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **3** (1970), 295–311.

[19] K. Fujiwara, Theory of tubular neighborhood in étale topology, *Duke Math. J.* **80** (1995), 15–57.

[20] K. Fujiwara, F. Kato, Rigid Geometry and Applications, dans Moduli spaces and arithmetic geometry, *Adv. Stud. Pure Math.* **45**, Math. Soc. Japan, Tokyo, (2006) 327–386.

[21] O. Gabber, Affine analog of the proper base change theorem, *Israel J. Math.* **87** (1994), 325–335.

[22] P. Gabriel, Des catégories abéliennes, *Bull. Soc. Math. France* **90** (1962), 323–448.

[23] P. Gabriel, M. Zisman, Calculus of fractions and homotopy theory, *Ergebnisse der Mathematik*, Bd. **35**, Springer-Verlag (1967).

[24] J. Giraud, Méthode de la descente, *Bull. Soc. Math. Fr. Mém.* **2** (1964).

[25] J. Giraud, Cohomologie non abélienne, Springer-Verlag (1971).

[26] A. Grothendieck, Revêtements étales et groupe fondamental, SGA 1, *Lecture Notes in Mathematics* **224**, Springer-Verlag (1971).

[27] A. Grothendieck, Cohomologie ℓ-adique et Fonctions L, SGA 5, *Lecture Notes in Mathematics* **589**, Springer-Verlag (1977).

[28] A. Grothendieck, J.A. Dieudonné, Éléments de Géométrie Algébrique I, Seconde édition, Springer-Verlag (1971).

[29] A. Grothendieck, J.A. Dieudonné, Éléments de Géométrie Algébrique, II Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes, *Pub. Math. IHES* **8** (1961).

[30] A. Grothendieck, J.A. Dieudonné, Éléments de Géométrie Algébrique, III Étude cohomologique des faisceaux cohérents, *Pub. Math. IHES* **11** (1961), **17** (1963).

[31] A. Grothendieck, J.A. Dieudonné, Éléments de Géométrie Algébrique, IV Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, *Pub. Math. IHES* **20** (1964), **24** (1965), **28** (1966), **32** (1967).

[32] L. Illusie, Complexe cotangent et déformations I, *Lecture Notes in Mathematics* **239**, Springer-Verlag (1971).

[33] L. Illusie, Grothendieck's existence theorem in formal geometry, dans Fundamental algebraic geometry, *Math. Surveys Monogr.* **123**, American Mathematical Society (2005), 179–233.

[34] R. Kiehl, Der Endlichkeitssatz für eigentliche Abbildungen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, *Invent. Math.* **2** (1967) 191–214.

[35] R. Kiehl, Theorem A und Theorem B in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, *Invent. Math.* **2** (1967) 256–273.

[36] R. Kiehl, Ein "Descente"-Lemma und Grotendiecks Projektionssatz für nichtnoethersche Schemata, *Math. Ann.* **198** (1972), 287–316.

[37] D. Lazard, Autour de la platitude, *Bull. Soc. Math. France* **97** (1969), 81–128.

[38] W. Lütkebohmert, Formal-algebraic and rigid-analytic geometry, *Math. Ann.* **286** (1990), 341–371.

[39] F. Mehlmann, Ein Beweis für einen Satz von Raynaud über flache Homomorphismen affinoider Algebren, *Schriftenr. Math. Inst. Univ. Münster*, 2. Ser. **19** (1981).

[40] M. Raynaud, Anneaux locaux henséliens, *Lecture Notes in Mathematics* **169**, Springer-Verlag (1970).

[41] M. Raynaud, Géométrie analytique rigide d'après Tate, Kiehl, ... Table ronde d'analyse non archimidienne, *Bull. Soc. Math. Fr. Mém.* **39**/**40** (1974), 319–327.

[42] M. Raynaud, L. Gruson, Critères de platitude et de projectivité. Première partie : Platitude en géométrie algébrique, *Invent. Math.* **13** (1971), 1–89.

[43] J. Tate, Rigid analytic spaces, *Invent. Math.* **12** (1971), 257–289.

[44] P. Ullrich, The direct image theorem in formal and rigid geometry, *Math. Ann.* **301** (1995), 69–104.

Index