Sciences de gestion

Synthèse de cours & exercices corrigés

Mathématiques appliquées à la gestion

- Cours et exercices adaptés aux besoins des gestionnaires et des économistes
- Approche progressive illustrée de nombreux exemples
- Corrigés détaillés de tous les problèmes et exercices

Collection synthex

PEARSON Education

Jeremy DUSSART, Natacha JOUKOFF, Ahmed LOULIT, Ariane SZAFARZ

Sciences de gestion

Synthèse de cours & Exercices corrigés

Mathématiques appliquées à la gestion

Jeremy DUSSART

Natacha JOUKOFF

Ahmed LOULIT

Ariane SZAFARZ

Direction de collection : Roland Gillet
professeur à l'université Paris 1 Panthéon-Sorbonne

Collection synthex

PEARSON Education France

ISBN : 978-2-7440-7374-8
ISSN : 1768-7616

Composition sous LaTeX : ScripTeX

À Cécile, Céline, Sylvain, Cédric, Yasmina et Clara, en espérant qu'un jour ils approfondiront cette matière fascinante qui leur a pris un peu du temps de leurs parents.

À Emerson, pour l'encourager à découvrir ce domaine que son grand frère a pris plaisir à investiguer.

Sommaire

Les auteurs

Jeremy Dussart est ingénieur de gestion de la Solvay Business School (SBS) de l'Université Libre de Bruxelles (ULB). Il est chercheur en stratégie au Centre Emile Bernheim (CEB) et enseigne les mathématiques en privilégiant les applications pratiques à ce domaine.

Natacha Joukoff est mathématicienne diplômée de l'ULB. Passionnée par la pédagogie, elle enseigne les mathématiques à la SBS, elle participe aussi activement aux cours préparatoires à destination des futurs étudiants et aux cours de soutien organisés pour ceux qui, en première année de sciences de gestion, ont des difficultés à s'adapter au rythme de l'enseignement des mathématiques.

Ahmed Loulit est titulaire d'un DEA de sciences de gestion (SBS) et d'un doctorat de mathématiques (ULB), obtenu sous la direction du professeur Jean-Pierre Gossez. Il est enseignant en mathématiques (SBS) et chercheur au CEB. Il prépare actuellement une thèse en modélisation financière sous la direction du professeur André Farber.

Ariane Szafarz est professeur de mathématiques et de finance à l'ULB. Elle y dirige le Centre Emile Bernheim (CEB) et est membre du Département d'économie appliquée (DULBEA). Diplômée en philosophie des sciences, elle a rédigé une thèse de doctorat de mathématiques sous la supervision du professeur Christian Gouriéroux (CREST, Paris), avec qui elle a régulièrement collaboré. Présidente de l'École doctorale en gestion de l'ULB (SBS), elle participe à divers projets scientifiques, nationaux et internationaux, et encadre plusieurs doctorants du département de finance dont elle assume la responsabilité avec les professeurs Ariane Chapelle et André Farber. Enfin, elle est l'auteur de nombreux livres et d'articles scientifiques en économétrie financière.

Introduction

L'objectif principal de cet ouvrage est d'apporter aux étudiants en sciences de gestion les bases mathématiques nécessaires pour aborder les diverses branches de leur discipline. À cette fin, il propose un compromis entre une vision mathématique abstraite qui ignorerait les aspects pratiques et une démarche strictement utilitariste qui masquerait la fécondité et l'esthétique du raisonnement mathématique.

Selon le principe de la collection, chaque chapitre commence par une synthèse de cours illustrée de nombreux exemples, remarques pratiques et commentaires. Ceci exclut les démonstrations (qui peuvent être trouvées dans les ouvrages de référence) au profit d'explications mettant en évidence la logique de la succession des matières. Ce sacrifice, difficile à consentir pour un mathématicien, est compensé par des définitions précises, des hypothèses explicites et des résultats rigoureux.

Les exercices et problèmes, qui occupent la seconde et majeure partie de chaque chapitre, se répartissent entre applications directes des résultats théoriques et formalisation des questions posées par les sciences de gestion. Tous sont accompagnés des solutions détaillées qui mentionnent, le cas échéant, l'existence d'autres approches possibles.

Les sciences de gestion sont jeunes et dynamiques et leurs contours théoriques fluctuent. Dresser l'inventaire détaillé des outils mathématiques qu'elles emploient constitue une mission périlleuse. Nous avons choisi la voie, plus commode, de la cohérence mathématique thématique, quitte à délaisser certaines matières, qui, comme les intégrales ou les applications linéaires, apparaissent moins souvent dans les applications, mais sont tout aussi passionnantes. Il reste donc matière à un second volume.

Ce livre est organisé de la manière suivante. Le premier chapitre introduit les notions de base et les notations qui seront utilisées tout au long des pages qui suivent. Il va cependant au-delà des simples rappels en présentant notamment la résolution d'équations dans l'ensemble des nombres complexes. Le chapitre 2 étudie les suites réelles qui permettent de caractériser l'évolution et la convergence de processus déterministes en temps discret. Le chapitre 3 développe la théorie des fonctions d'une variable tandis que le chapitre 4 est dédié à la détermination des extrema de ces fonctions. Le chapitre 5 est consacré aux notions fondamentales relatives aux matrices et à la résolution de plusieurs problèmes d'algèbre linéaire. Le chapitre 6 présente les fonctions de plusieurs variables dont les applications pratiques à la gestion sont multiples. Logiquement, le chapitre 7 approfondit la recherche des extrema de telles fonctions.

**
*

Il y a près d'un an, le professeur Roland Gillet nous a proposé de rédiger cet ouvrage. Nous avons saisi avec enthousiasme cette opportunité de transmettre notre expérience de l'enseignement des mathématiques aux gestionnaires. En effet, notre équipe dispense depuis plusieurs années ce type de cours à la Solvay Business School de l'Université Libre de Bruxelles. Arrivés au terme de la rédaction, nous lui sommes très reconnaissants de la confiance qu'il nous a témoignée et des bons moments passés en sa compagnie qui nous ont permis d'apprécier sa rigueur intellectuelle, son sens de l'organisation et son humour communicatif.

Il convient de souligner le soutien efficace et les encouragements répétés que nous a prodigués Pearson Education France, et tout spécialement Pascale Pernet et Antoine Chéret, avec qui nous avons pris un grand plaisir à travailler. Ils conserveront probablement le souvenir que les matheux sont des gens certes pointilleux, mais respectant les délais.

Nous remercions également Martine Anciaux-Mundeleer pour sa patiente relecture et ses commentaires judicieux, sans oublier les générations d'étudiants et d'élèves-assistants qui nous ont aidés à ajuster le contenu de notre enseignement et à affiner l'approche pédagogique d'une discipline qui suscite parfois une certaine appréhension.

Enfin, nous formulons l'espoir que les lecteurs découvriront au fil de cet ouvrage que les mathématiques constituent non seulement un outil précieux pour les sciences de gestion, mais aussi un savoir fascinant dont l'apprentissage procure des joies insoupçonnées...

Jeremy Dussart
Natacha Joukoff
Ahmed Loulit
Ariane Szafarz

Bruxelles, juin 2004

Chapitre 1

Rappels et définitions

Rappels et définitions

Ce chapitre présente les notions de base et les notations utilisées dans la suite du livre[1], en commençant par les ensembles de nombres. Il évolue ensuite vers la structure ordonnée de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

De là, les intervalles et autres ensembles convexes de $\mathbb{R}$ sont introduits. Les fonctions réelles dont l'étude détaillée apparaît dans les chapitres 3 et 4 sont brièvement présentées. La généralisation de l'ensemble $\mathbb{R}$ est abordée selon deux directions. D'une part, au plan algébrique, les nombres complexes permettent la résolution d'équations polynomiales sans solution réelle. D'autre part, les ensembles de n-uples réels constituent la base indispensable à l'examen des fonctions de plusieurs variables qui font l'objet des chapitres 6 et 7.

1. Nous supposerons néanmoins acquises les notions de base et les notations de la théorie des ensembles et de l'algèbre élémentaire.

1 Ensembles de nombres

Les ensembles de nombres sont présentés du plus petit au plus grand, partant de celui des nombres naturels, utilisés communément pour dénombrer des objets. Les nombres entiers sont obtenus en ajoutant aux nombres naturels leurs opposés, qui sont munis d'un signe négatif. Les nombres rationnels permettent d'introduire toutes les fractions (division de deux nombres entiers) à dénominateur non nul. Enfin, l'ensemble des nombres réels qui n'est pas dénombrable, est déterminé par analogie avec les points d'une droite, appelée la *droite réelle*.

Notations

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres naturels $\{0, 1, 2, \ldots\}$.
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres entiers $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels $\left\{\dfrac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$.
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels, représenté par l'ensemble des points d'une droite orientée munie d'une origine et d'une unité.
- Pour chacun des ensembles cités, on indique l'exclusion du nombre 0 par un indice inférieur nul ou un astérisque. La restriction aux nombres positifs ou nuls, ou négatifs ou nuls, s'effectue à l'aide du signe qui convient placé en indice supérieur. ❑

Exemples

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\} = \{1,2,\ldots\}$, $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$, $\mathbb{R}_0^- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$.

L'équation $x^2 = -1$ n'admet pas de solution réelle. Afin de résoudre cette difficulté, on définit un ensemble plus vaste que $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres complexes.

Définition $\mathbb{C} = \left\{a + bi : a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\right\}$. ❑

Les définitions et propriétés relatives à l'ensemble $\mathbb{C}$ seront présentées dans la section 5 du présent chapitre. Remarquons que les inclusions successives $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ sont strictes puisque :

- $-1 \in \mathbb{Z}$ et $-1 \notin \mathbb{N}$.
- $\dfrac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ et $\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$.
- $\pi \in \mathbb{R}$ et $\pi \notin \mathbb{Q}$.
- $3 + 2i \in \mathbb{C}$ et $3 + 2i \notin \mathbb{R}$.

L'ensemble $\mathbb{R}$ occupe sans conteste une place prépondérante dans les applications pratiques. En effet, les multiples éléments quantitatifs qui émaillent les problèmes de la gestion s'expriment le plus souvent à l'aide des nombres réels.

Dans le domaine des processus évolutifs, deux approches du temps coexistent. D'une part, le temps vu comme une succession d'instants dissociés (approche dite discrète) conduit à une représentation mathématique de dates appartenant à $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}_0$ et l'évolution des variables d'intérêt sera exprimée à l'aide de suites (chapitre 2). D'autre part, le temps considéré comme un continuum (approche dite continue), en référence à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_0^+$, requiert la théorie des fonctions (chapitre 3). En fait, ces deux visions du temps sont complémentaires : l'observation statistique s'effectue à des dates discrètes, tandis que l'analyse théorique repose plus volontiers sur la théorie des fonctions, plus performante à cet égard.

2 Relation $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$

L'ensemble des nombres réels est naturellement ordonné selon la position des points sur la droite réelle de gauche à droite. Cette relation d'ordre, notée $\leqslant$, jouit de diverses propriétés qui enrichissent la droite réelle et permettent de définir des notions qui s'avèreront fort utiles dans l'étude des fonctions.

Propriétés

- La relation $\leqslant$ est un ordre total sur $\mathbb{R}$ car :
  - $\forall x \in \mathbb{R} : x \leqslant x$ (réflexivité),
  - $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x \Rightarrow x = y$ (antisymétrie),
  - $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$ (transitivité),
  - $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leqslant y \text{ ou } y \leqslant x$ (l'ordre est total).
- L'ordre $\leqslant$ est compatible avec l'addition et avec la multiplication par un nombre positif ou nul car :
  - $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z.$
  - $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ \forall z \in \mathbb{R}^+ : \ x \leqslant y \Rightarrow x.z \leqslant y.z.$ ❑

Attention

$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ \forall z \in \mathbb{R}^- : \ x \leqslant y \Rightarrow x.z \geqslant y.z.$

Propriété $\mathbb{R}$ est un ensemble dense car :

$\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R} : x < z < y.$ ❑

Remarque

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas des ensembles denses, tandis que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ le sont. En outre, ces deux derniers ensembles sont denses dans $\mathbb{R}$. En effet :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} : x < z < y.$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{Q} : x < z < y.$$

Considérons un ensemble $A \subset \mathbb{R}$. Les définitions suivantes utilisent la relation d'ordre $\leqslant$ afin de situer un point quelconque $b \in \mathbb{R}$ par rapport à cet ensemble.

Définitions

- b est un *majorant* de A si $\forall x \in A : x \leqslant b$. L'ensemble des majorants de A est noté $\bar{A}$.
- b est un *minorant* de A si $\forall x \in A : b \leqslant x$. L'ensemble des minorants de A est noté $\underline{A}$.
- A est *borné* si A admet au moins un minorant (A est *minoré*) et un majorant (A est *majoré*).
- Le plus petit majorant de A est appelé *supremum* ou *borne supérieure* de A. Il est noté $\sup A$. Si $\exists \sup A \in A$, alors $\sup A$ est appelé *maximum* de A. Il est noté $\max A$.
- Le plus grand minorant de A est appelé *infimum* ou *borne inférieure* de A. Il est noté $\inf A$. Si $\exists \inf A \in A$, alors $\inf A$ est appelé *minimum* de A. Il est noté $\min A$. ❑

Propriété Dans $\mathbb{R}$, tout ensemble non vide majoré admet un supremum et tout ensemble non vide minoré admet un infimum. ❑

Néanmoins, certains ensembles majorés (resp. minorés) n'admettent pas de maximum (resp. minimum). Voir les exercices.

3 Sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}$

Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est dit *convexe* si tout segment qui joint deux de ses points est contenu dans l'ensemble. La formalisation mathématique de cette définition s'énonce comme suit.

Définition A est un sous-ensemble *convexe* de $\mathbb{R}$ si :
$\forall x, y \in A\,,\ \forall z \in \mathbb{R} : x \leqslant z \leqslant y \Rightarrow z \in A$. ❑

Les sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}$ sont les *intervalles*, les *demi-droites* et les sous-ensembles triviaux : Ø (ensemble vide) et $\mathbb{R}$. Voici tous les intervalles et demi-droites possibles :

- Intervalle fermé : $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$.
- Intervalle ouvert : $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.
- Intervalles ni ouverts, ni fermés : $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$ et $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$.
- Demi-droites fermées : $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}$ et $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\}$.
- Demi-droites ouvertes : $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ et $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$.

4 Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Considérons deux sous-ensembles A et B de $\mathbb{R}$. Par définition, une fonction de A dans B envoie chaque élément de A sur un élément de B, son image par la fonction, notée $f(x)$.

Définitions

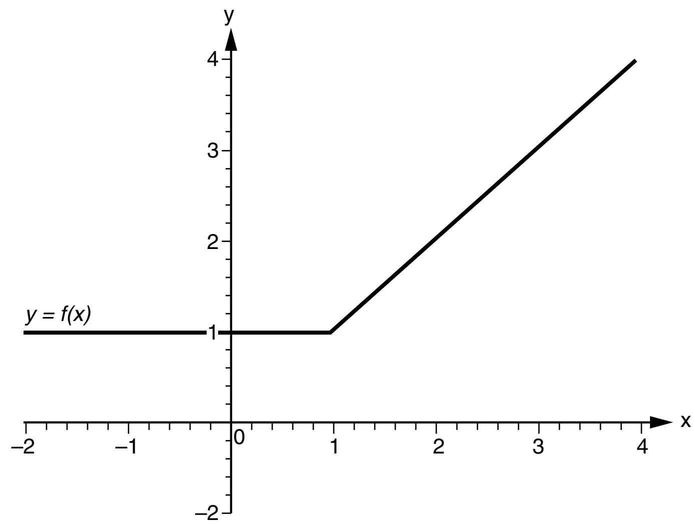
- f est une *fonction* de A dans B si à tout élément $x \in A$ correspond un et un seul élément $f(x) \in B$. On écrit : $f : A \to B : x \to f(x)$.
- L'ensemble A est appelé le *domaine de définition* de f, et noté $\operatorname{dom} f$.
- Le *graphe* de f est la courbe plane d'équation $y = f(x)\,,\ x \in A$. ❑

Les rôles des ensembles A et B sont fort différents. En effet, tout élément de A est obligatoirement envoyé par f sur un élément de B, tandis que chaque élément de B peut être l'image d'un, de plusieurs ou d'aucun élément de A.

Exemple

Prenons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \to \max\{x, 1\}$. Tous les nombres du sous-ensemble $(-\infty, 1]$ de $\mathbb{R}$ ont pour image 1, tandis que les autres points de $\mathbb{R}$ sont envoyés sur eux-mêmes. Il s'ensuit, entre autres, que : 1/2 n'est l'image d'aucun point de $\mathbb{R}$, 1 est l'image d'une infinité de points de $\mathbb{R}$, 3 est l'image d'un seul point de $\mathbb{R}$. Notons aussi que les nombres négatifs ne font pas partie de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}^+$. Le graphe de f est donné par la figure 1.1.

Figure 1.1



Afin de caractériser les diverses situations possibles, on adopte les définitions suivantes.

Définitions

- L'*image* par f de A est l'ensemble : $\mathrm{Im}_f(A)$ $\left[\text{ou } f(A)\right] = \{f(x) : x \in A\}$.
- L'*image inverse* de $B' \subset B$ par f est l'ensemble :$f^{-1}(B') = \{x \in A : f(x) \in B'\}$. ❑

Exemple

Si l'on considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \to \max\{x, 1\}$, on a : $Im_f(A) = [1, +\infty)$ et, pour $B' = [1, 2] \subset \mathbb{R}^+$, on a : $f^{-1}(B') = (-\infty, 2]$.

Dans les problèmes pratiques, on est souvent amené à appliquer plusieurs fonctions successivement. Par exemple, une usine peut, dans un premier temps, transformer une quantité de facteur de production de base en un produit semi-fini, lui-même appelé à servir de matériau pour le produit final. Les quantités successives en jeu dans ce processus peuvent être représentées par l'application en chaîne de fonctions de production selon le schéma suivant :

$$\text{Facteur brut } (x) \xrightarrow{f} \text{produit semi-fini } (y) \xrightarrow{g} \text{produit final } (z)$$

Le passage direct de l'*input* initial x à l'*output* final z est donné par la fonction composée définie comme suit :

Définition Si $f : A \to B : x \to f(x)$ et $g : B \to C : x \to g(x)$, la *composée* de f et g est la fonction de $A \to C$, notée $g \circ f$, définie par : $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$. ❑

Parmi les fonctions $f : A \to B : x \to f(x)$, on distingue trois grandes classes : les fonctions injectives, surjectives et bijectives.

Définitions Soit $f : A \to B : x \to f(x)$.

- f est *injective* si $\forall x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$;
- f est *surjective* si $\forall y \in B,\ \exists x \in A : y = f(x)$;
- f est *bijective* si f est injective et surjective, c'est-à-dire si $\forall y \in B,\ \exists$ un et un seul $x \in A : y = f(x)$. ❑

Remarque

Les ensembles A et B jouent un rôle crucial dans la détermination du caractère injectif et/ou surjectif d'une fonction.

Enfin, seules les fonctions bijectives permettent de donner un sens à une fonction réciproque (ou inverse) selon le schéma suivant :

$$x = f^{-1}(y) \quad \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \quad y = f(x)$$

Définition Si la fonction $f : A \to B : x \to f(x)$ est bijective, alors sa *fonction réciproque*, notée f^{-1}, de $B \to A$, est définie par :

$$\forall y \in B : f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x).$$ ❑

Ainsi, parmi les fonctions usuelles, on dénombre plusieurs couples de fonctions réciproques telles que l'exponentielle et le logarithme (dans la même base), les fonctions sinus et arcsinus (moyennant une restriction de domaine qui garantisse la bijectivité), etc. Plus simplement encore, la fonction identité $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x$ est sa propre réciproque tandis que la fonction « carré » $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \to x^2$ (domaine restreint pour bijectivité) a pour réciproque la fonction « racine carrée » $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \to \sqrt{x}$.

5 Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Après avoir brièvement rappelé les définitions de base des nombres complexes, nous donnons ici les propriétés relatives aux solutions d'équations polynomiales.

5.1 Nombres complexes

Dans la section 1, l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes a été défini par :

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}.$$

On introduit également les notions suivantes :

Définitions

- Le nombre réel a est la *partie réelle* de $a+bi$.
- Le nombre réel b est la *partie imaginaire* de $a+bi$.
- Le nombre complexe $\bar{z}=a-bi$ est appelé *conjugué* de $z=a+bi$.
- $|z|=\sqrt{z.\bar{z}}$ est appelé le *module* de z.
- Les nombres complexes $a+bi$ et $c+di$ sont *égaux* $\Leftrightarrow$ $a=c$ et $b=d$. ❑

L'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ sont définies par la généralisation des opérations correspondantes dans $\mathbb{R}$. Ainsi, si $z_1=a+bi$ et $z_2=c+di$, on a :

$$z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i \quad \text{et} \quad z_1.z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Remarque

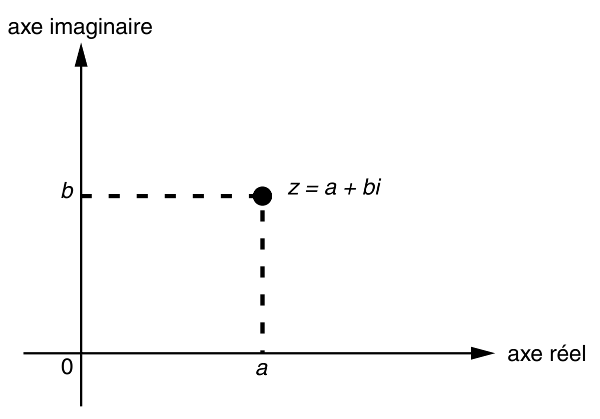
L'inverse du nombre complexe $a+bi\neq 0$ est obtenu comme suit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+bi}&=\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}\\&=\frac{a-bi}{a^2+b^2}\\&=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i.\end{aligned}$$

5.2 Plan complexe et forme trigonométrique

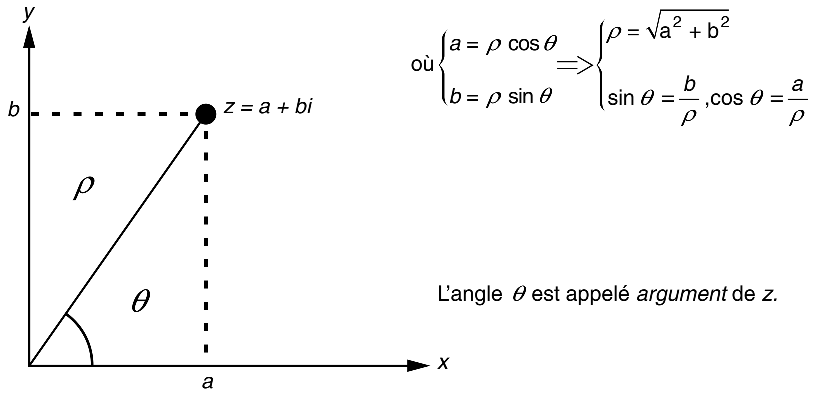
On représente volontiers les nombres complexes dans un plan, dit *plan complexe* ou *plan de Gauss*, muni en abscisse de « l'axe réel » et en ordonnée de « l'axe imaginaire » (figure 1.2).

Figure 1.2



Les nombres complexes non nuls peuvent aussi être représentés sous forme trigonométrique (figure 1.3, page suivante) : $z=a+bi=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$,

Figure 1.3



Exemple

$z = 1 - \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ puisque :

$$\begin{cases} 1 = \rho\cos\theta \\ -\sqrt{3} = \rho\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{1+3} \\ \sin\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = 2 \\ \theta = \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi, \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

On peut aussi opter pour la représentation plus générale :

$$z = 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right)\right], \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}.$$

La forme trigonométrique est commode pour effectuer les produits et les quotients de nombres complexes.

Propriétés Si $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ et $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, alors :

- $z_1.z_2 = \rho_1.\rho_2\big(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\big)$;
- si $z_2 \neq 0$: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}\big(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\big)$. ❑

Exemple

$z_1 = 1 - \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ et $z_2 = -4\sqrt{3} - 4i = 8\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$.

On a : $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2}{8}\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{3} - \dfrac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{3} - \dfrac{7\pi}{6}\right)\right) = \dfrac{1}{4}\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{4}(0 + i.1) = \dfrac{1}{4}i.$

La forme trigonométrique est particulièrement appropriée au calcul des puissances. À cet égard, le résultat suivant est fondamental.

Propriété (formule de De Moivre) Si $n \in \mathbb{N}_0$ et $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, alors $z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$. ❑

L'exponentielle des nombres complexes est définie de manière à généraliser l'exponentielle dans $\mathbb{R}$.

Définition Soit $z = a + bi$: $e^z = e^a(\cos b + i\sin b)$. ❑

Propriétés

- $e^{i\pi} = -1$
- $\cos b = \dfrac{e^{ib} + e^{-ib}}{2}$, $\sin b = \dfrac{e^{ib} - e^{-ib}}{2i}$ (formules d'Euler). ❑

5.3 Polynômes à coefficients complexes

Le théorème de D'Alembert est fondamental pour la résolution des équations polynomiales.

Théorème de D'Alembert Tout polynôme de degré $n \in \mathbb{N}_0$ à coefficients complexes admet exactement n racines complexes, distinctes ou non. ❑

En particulier, l'équation $x^n = z$, où z est un nombre complexe donné, a pour solutions les n racines n-ièmes de z. Dans la pratique, pour déterminer ces racines n-ièmes, il convient d'exprimer d'abord le nombre z sous sa forme trigonométrique générale.

Propriété Si $z = \rho\,(\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi))$, où $k \in \mathbb{Z}$, alors les n solutions de l'équation $x^n = z$, notées $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$, sont données par :

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right], \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$ ❑

Il n'existe malheureusement pas de formule qui fournisse de manière similaire les solutions d'une équation polynomiale de degré quelconque. Cependant, une méthode simple existe pour résoudre les équations du second degré. Elle généralise la méthode classique utilisée dans $\mathbb{R}$.

Propriété Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, où $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$, sont obtenues en fonction du nombre complexe $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta \in \mathbb{R}^+$, les solutions sont données par $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$,
- Si $\Delta \in \mathbb{R}_0^-$, les solutions sont données par $x = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$,
- Si $\Delta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, les solutions sont données par $x = \dfrac{-b \pm R}{2a}$, où R représente l'une des deux racines carrées du complexe Δ. ❑

Comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, le théorème de D'Alembert entraîne que tout polynôme de degré n à coefficients réels admet n racines complexes. En outre, on peut établir que les racines complexes non réelles d'un polynôme à coefficients réels sont conjuguées 2 à 2. Ainsi, les équations $x^2 + 1 = 0$ et $2x^2 + 3x + 10 = 0$ qui n'admettent pas de solution réelle possèdent deux solutions complexes conjuguées.

6 Topologie et dépendance linéaire dans $\mathbb{R}^n$

La structure topologique des ensembles $\mathbb{R}^n$ est importante pour caractériser avec précision les domaines dans lesquels seront définies les fonctions d'une variable ($n = 1$), puis de plusieurs variables ($n > 1$). L'ensemble $\mathbb{R}^n$ est composé de tous les n-uples de nombres réels.

Définitions

- $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\} = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ fois}}$.
- La *distance euclidienne* entre les points $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ et $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est définie par :

$$d(p,q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + \cdots + (p_n - q_n)^2}.$$

- Si $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}_0^+$, la *boule ouverte* de rayon r centrée en p est composée de tous les points de $\mathbb{R}^n$ situés à une distance de p inférieure à r :

$$B(p, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, p) < r\}.$$ ❑

La notion de boule ouverte dans $\mathbb{R}^n$ généralise celle d'intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$. Elle permet de définir diverses caractéristiques topologiques des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$. Considérons à cet effet un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ et un point $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$.

Définitions

- Le point p est un *point intérieur* de A (ou A est un *voisinage* de p) si $\exists r > 0 : B(p, r) \subset A$.
- L'*intérieur* de A, noté $\operatorname{Int} A$, est l'ensemble des points intérieurs de A.
- L'ensemble A est *ouvert* si $\operatorname{Int} A = A$.
- Le point p est un *point adhérent* de A si $\forall r > 0 : B(p, r) \cap A \neq \emptyset$.
- L'*adhérence* de A, notée $\operatorname{Adh} A$, est l'ensemble des points adhérents de A.
- L'ensemble A est *fermé* si $\operatorname{Adh} A = A$.
- La *frontière* de l'ensemble A, notée $\operatorname{Fr} A$, est égale à $\operatorname{Adh} A \setminus \operatorname{Int} A$.
- Le point p est un *point d'accumulation* de A si $\forall r > 0 : [B(p, r) \cap A] \setminus \{p\} \neq \emptyset$. ❑

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ et $\emptyset$ sont les seuls ensembles à être ouverts et fermés.

2. Dans $\mathbb{R}$, les intervalles ouverts sont des ensembles ouverts. Les intervalles fermés sont des ensembles fermés. L'intervalle $(a, b]$ n'est ni ouvert, ni fermé. En effet, il n'est pas ouvert car $\operatorname{Int}(a, b] = (a, b) \neq (a, b]$ et n'est pas fermé car $\operatorname{Adh}(a, b] = [a,b] \neq (a, b]$. Par ailleurs, comme $\operatorname{Int}\mathbb{Q} = \emptyset$ et $\operatorname{Adh}\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ (en vertu de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$), l'ensemble $\mathbb{Q}$ n'est ni ouvert, ni fermé. Tous les éléments de $\mathbb{R}$ sont des points d'accumulation de $\mathbb{Q}$.

3. Dans $\mathbb{R}^2$, la boule ouverte centrée en l'origine et de rayon 2 est donnée par $B((0,0),2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$. L'ensemble $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ est ouvert, $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4 \text{ et } x \leqslant 1\}$ n'est ni ouvert, ni fermé et $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 4\}$ est un ensemble fermé.

4. Un singleton (ensemble constitué d'un seul élément) est égal à son adhérence et constitue donc un ensemble fermé. Son intérieur est vide et il n'admet pas de point d'accumulation.

La notion d'ensemble convexe peut être étendue à $\mathbb{R}^n$ de la manière suivante :

Définition L'ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ est *convexe* si tous les segments liant deux points de A sont constitués exclusivement d'éléments de A : $\forall p, q \in A$, $\forall \lambda \in [0, 1]$: $\lambda p + (1 - \lambda)q \in A$. ❑

Exemples dans $\mathbb{R}^2$

$B\big((0,0),2\big) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 4\}$, $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqslant 4\}$ et $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 4 \text{ et } x \leqslant 1\}$ sont convexes tandis que $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2+y^2 < 4\}$ ne l'est pas puisque $(2,0)$ et $(-2,0) \in D$ mais $(0,0) = \frac{1}{2}(2,0) + \frac{1}{2}(-2,0) \notin D$.

Les ensembles $\mathbb{R}^n$ peuvent aussi être vus comme des ensembles de vecteurs (ou espaces vectoriels), munis de l'addition vectorielle et de la multiplication scalaire, définies comme suit.

Définitions Si $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

- $p + q = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, \ldots, p_n + q_n) \in \mathbb{R}^n$;
- $\lambda p = (\lambda p_1, \lambda p_2, \ldots, \lambda p_n) \in \mathbb{R}^n$. ❑

L'approche vectorielle est souvent utilisée dans $\mathbb{R}^3$, qui offre une représentation naturelle de l'espace physique à trois dimensions. Au plan mathématique, les opérations d'addition vectorielle et de multiplication scalaire conduisent aux notions de combinaison linéaire et de dépendance ou d'indépendance linéaire entre vecteurs, qui jouent un rôle crucial en algèbre linéaire.

Définitions

- Le vecteur $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n$ est une *combinaison linéaire* des $k(\in \mathbb{N}_0)$ vecteurs $p^1 = (p_1^1, p_2^1, \ldots, p_n^1), \ldots, p^k = (p_1^k, p_2^k, \ldots, p_n^k) \in \mathbb{R}^n$ si $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R} : q = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j p^j$.
- Les vecteurs $p^1, \ldots, p^k \in \mathbb{R}^n$ sont *linéairement indépendants* si $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j p^j = \bar{0} \Rightarrow \forall j \in \{1, \ldots, k\} : \lambda_j = 0$, où $\bar{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

  Dans le cas contraire, les vecteurs sont dits *linéairement dépendants*. ❑

Ces concepts ouvrent la voie vers des développements extrêmement féconds en algèbre linéaire, un domaine que cet ouvrage ne fera cependant qu'effleurer dans le chapitre 5 consacré aux matrices.

Problèmes et exercices

Les exercices suivent globalement le schéma de la présentation théorique. Au passage, sont expliquées des méthodes pratiques relatives, notamment, à la division de polynômes et à l'étude des signes. Des fonctions élémentaires, telles que le logarithme népérien (ln) et le sinus (sin), sont présentées à l'occasion d'exercices sur la théorie de la section 4. Les équations résolues dans $\mathbb{C}$ restent relativement simples. Les exercices portant sur la structure vectorielle ou topologique de $\mathbb{R}^n$ permettent d'introduire des éléments qui serviront soit dans le chapitre 5 (matrices), soit dans les chapitres 6 et 7 (fonctions de plusieurs variables).

Relation $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$ et les sous-ensembles convexes de $\mathbb{R}$

EXERCICE 1

Énoncé

Considérons dans $\mathbb{R}$, les ensembles $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$.

a A ={ - 4,3,8,2,- 9,20}.

b $B = \left\{ \dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_0 \right\}$.

c $C = [-5, 4]$.

d $D = [-2, 7) \cap \mathbb{N}$.

e $E = [-\pi, e] \cap \mathbb{Q}$.

f $F = \mathbb{Z}$.

g $G = \mathbb{R}_0^+$.

h $H = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leqslant 4\right\}$.

i $I = \left\{x \in \mathbb{R} : x^3 > 27\right\}$.

j $J = (-\infty, -10] \cup \{-3\}$.

Déterminez pour chacun, les ensembles de minorants et majorants, l'infimum et le supremum, le minimum et le maximum (s'ils existent). Ces ensembles sont-ils bornés, convexes ?

Solution

a $\underline{A} = (-\infty, -9]$. En effet, on a, d'une part, $\underline{A} \subset (-\infty, -9]$ puisque : $-9 \in A \Rightarrow \forall x \in \underline{A} : x \leqslant -9$ et, d'autre part, $(-\infty, -9] \subset \underline{A}$ car $\forall b \in (-\infty, -9]$, $\forall x \in A = \{-9, -4, 2, 3, 8, 20\} : x \geqslant -9 \geqslant b$.

Par un raisonnement similaire, on établit que $\bar{A} = [20, +\infty)$.

De façon évidente, $\inf A = \min A = -9$ et $\sup A = \max A = 20$.

A est borné car minoré et majoré.

A est non convexe. Par exemple, 2 et $3 \in A$ mais $2,5 \notin A$.

b $\underline{B} = \mathbb{R}^-$. On a en effet $\underline{B} \supset \mathbb{R}^-$ car $\forall b \in \mathbb{R}^-, \forall x \in B : b \leqslant 0 \leqslant x$. Pour montrer que $\underline{B} \subset \mathbb{R}^-$, procédons par l'absurde. S'il existe un minorant de B strictement positif, disons $b > 0$, comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe un nombre $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ (où $r, s \in \mathbb{N}_0$) tel que : $0 < \frac{r}{s} < b$. Comme $r \geqslant 1$, on aura alors $0 < \frac{1}{s} \leqslant \frac{r}{s} < b$ et l'élément $\frac{1}{s}$ $(\in B)$ sera inférieur au prétendu minorant b, ce qui est impossible par définition ;

$\bar{B} = [1, +\infty)$;

$\inf B = 0 \notin B \Rightarrow \nexists \min B$;

$\sup B = \max B = 1$;

B est borné car minoré et majoré.

B est non convexe. Prenons par exemple, $\frac{1}{16}$ et $\frac{1}{4} \in B$. En outre : $\frac{1}{16} < \frac{3}{16} < \frac{1}{4} = \frac{4}{16}$. Or, $\frac{3}{16} \notin B$.

c $\underline{C} = (-\infty, -5]$; $\bar{C} = [4, +\infty)$; $\inf C = \min C = -5$; $\sup C = \max C = 4$; C est borné et convexe.

d $\underline{D} = \mathbb{R}^-$; $\bar{D} = [6, +\infty)$; $\inf D = \min D = 0$; $\sup D = \max D = 6$; D est borné et non convexe.

e $\underline{E} = (-\infty, -\pi]$ et $\bar{E} = [e, +\infty)$ par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$; $\inf E = -\pi$; $\sup E = e$; $\nexists \min E$ car $-\pi \notin \mathbb{Q} \Rightarrow -\pi \notin E$; $\nexists \max E$ car $e \notin \mathbb{Q} \Rightarrow e \notin E$; E est borné ; E est non convexe parce que, par exemple, 1 et $2 \in E$ mais $1 < \sqrt{2} < 2$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \notin E$.

f $\underline{F} = \emptyset$. En effet, si $\mathbb{Z}$ possédait un minorant b, on aurait $\forall x \in \mathbb{Z} : b \leqslant x$, or $\exists z \in \mathbb{Z} : z < b$ (il suffit de prendre $z =$ le plus grand entier $< b$), ce qui est en contradiction avec la définition d'un minorant de $\mathbb{Z}$.

$\bar{F} = \emptyset$ s'établit de façon similaire.

$\nexists \inf F$ puisque $\mathbb{Z}$ ne possède pas de minorant ; $\nexists \sup F$ puisque $\mathbb{Z}$ ne possède pas de majorant ; $\nexists \min F$ car $\nexists \inf F$; $\nexists \max F$ car $\nexists \sup F$; F est non borné (ni majoré, ni minoré) ; F est non convexe.

g $\underline{G} = \mathbb{R}^-$; $\bar{G} = \emptyset$; $\inf G = 0$; $\nexists \sup G$; $\nexists \min G$; $\nexists \max G$; G est non borné et convexe.

h $H = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leqslant 4\} = [-2, 2]$. En effet, un polynôme du second degré qui admet deux racines distinctes change de signe de part et d'autre de ses racines. Le signe du polynôme dans chaque région de $\mathbb{R}$ est le suivant : signe du coefficient de x^2 à l'extérieur des racines, signe opposé entre les deux racines. Ici, nous avons :

$$x^2 \leqslant 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 \leqslant 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 2 \quad \text{et} \quad x \geqslant -2$$

Il s'ensuit que :

$\underline{H} = (-\infty, -2]$; $\bar{H} = [2, +\infty)$; $\inf H = \min H = -2$; $\sup H = \max H = 2$; H est borné et convexe.

i $I = \{x \in \mathbb{R} : x^3 > 27\} = (3, +\infty)$. En effet, $x^3 > 27 \Leftrightarrow x^3 - 27 > 0$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x^2 + 3x + 9) > 0.$$

Pour trouver les valeurs de x vérifiant cette condition, on dresse un tableau des signes basé sur les racines de $x^3 - 27$. Comme le polynôme du second degré $x^2 + 3x + 9$ ne possède pas de racine réelle ($3^2 - 4.9 = -27 < 0$) et reste toujours positif, la seule racine de $x^3 - 27$ est 3 et le tableau des signes ci-dessous montre que $x^3 > 27 \Leftrightarrow x > 3$.

x		3	
$x-3$	$-$	0	$+$
x^2+3x+9	$+$	$+$	$+$
x^3-27	$-$	0	$+$

Remarque

Ce résultat découle aussi, et plus rapidement, de la croissance de la fonction cubique, mais cette notion ne sera vue qu'au chapitre 3.

$\underline{I} = (-\infty, 3]$; $\bar{I} = \emptyset$; $\inf I = 3$; $\nexists \sup I$; $\nexists \min I$; $\nexists \max I$. I est non borné et convexe.

j $\underline{J} = \emptyset$ de façon évidente.

$\bar{J} = [-3, +\infty)$. En effet, d'une part, on a $[-3, +\infty) \supset \bar{J}$ puisque $-3 \in J$ et $\forall b \in \bar{J} : x \in J \Rightarrow b \geqslant x$. D'autre part, $[-3, +\infty) \subset \bar{J}$. En effet, $\forall x \in J : -3 \geqslant x$. Si $b \geqslant -3$, on a $\forall x \in J : b \geqslant -3 \geqslant x$, ce qui implique que $b \in \bar{J}$.

$\nexists \inf J$ car J ne possède pas de minorant ; $\sup J = -3$ car -3 est le plus petit des majorants ; $\nexists \min J$ car J ne possède pas d'infimum ; $\max J = -3$ car $\sup J = -3 \in J$; J est non borné car J n'est pas minoré ; J n'est pas convexe car, par exemple, -10 et $-3 \in J$ mais $-7 \notin J$.

Fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

EXERCICE 2

Énoncé

Déterminez le domaine de définition des fonctions suivantes :

a $f(x) = \ln(x+4)$.

b $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$.

c $h(x) = \dfrac{2x+5}{\sqrt{x^3-8}}$.

d $i(x) = \dfrac{\sqrt{x+3} - 7}{x^3 - 3x + 2}$.

e $j(x) = \dfrac{\ln(\sqrt{x^3 - 2x^2 + x})}{\ln(3-4x)}$.

f $k(x) = \sqrt{\dfrac{2x-1}{x+1}}$.

g $l(x) = x \to e^{2x-7}$.

Solution

a $\operatorname{Dom} f = (-4, +\infty)$. En effet, la fonction $\ln x$ étant définie uniquement dans $\mathbb{R}_0^+$, la condition d'existence de $f(x)$ est $x + 4 > 0$.

b $\operatorname{Dom} g = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$. En effet, la fonction $\sqrt{x}$ étant définie uniquement dans $\mathbb{R}^+$, la condition d'existence de $g(x)$ est $x^2 - 9 \geqslant 0$. Le tableau de signes ci-dessous indique la zone admissible :

x		-3		3	
x^2-9	$+$	0	$-$	0	$+$

c Dom $h = (2, +\infty)$. En effet, la fonction $\sqrt{x}$ est définie dans $\mathbb{R}^+$, mais comme la racine carrée apparaît au dénominateur, la condition d'existence de $h(x)$ est $x^3 - 8 > 0$. Pour trouver les x vérifiant cette condition, on dresse le tableau des signes suivant :

x		2	
$x-2$	$-$	0	$+$
x^2+2x+4	$+$	$+$	$+$
x^3-8	$-$	0	$+$

d Dom $i = [-3, +\infty) \setminus \{-2, 1\}$. En effet, les conditions d'existence sont, d'une part, $x + 3 \geqslant 0$ pour la racine carrée et, d'autre part, $x^3 - 3x + 2 \neq 0$ pour le dénominateur.

Astuce pratique

À défaut d'utiliser une méthode générale de résolution des équations de degré 3, on peut tenter d'identifier une racine entière parmi les diviseurs du terme indépendant. Si cet essai est fructueux, les autres racines sont obtenues grâce à la *règle de Horner* qui permet de diviser un polynôme de degré quelconque par un binôme $(x - m)$. Ainsi, pour factoriser le polynôme $ax^3 + bx^2 + cx + d$ qui s'annule en $x = m$, on dresse un tableau (voir ci-dessous) qui comporte :

- en première ligne, tous les coefficients (y compris les nuls) du polynôme à factoriser par ordre de puissances décroissantes (à partir de la deuxième colonne),
- en deuxième ligne et première colonne, la racine connue, m,
- en troisième ligne et deuxième colonne, l'élément de la première ligne, deuxième colonne, a.
- ailleurs, les opérations indiquées dans le tableau :

	a	b	c	d
m		ma	mb'	mc'
	a	$b' = b + ma$	$c' = c + mb'$	$d' = d + mc' = 0$

Finalement, on en déduit que $ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - m)\left(ax^2 + b'x + c'\right)$.

Dans le cas présent, les diviseurs du terme indépendant de $x^3 - 3x + 2$ sont 1, -1, 2 et -2. Par substitution, il apparaît que le nombre 1 est racine du polynôme. La règle de Horner (tableau ci-dessous) établit que : $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2)$.

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0

Les autres racines du polynôme $x^3 - 3x + 2$, sont obtenues en résolvant l'équation du second degré $x^2 + x - 2 = 0$ dont les solutions sont $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$.

Finalement : $x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1, -2\}$. Ces valeurs doivent être exclues du domaine recherché.

e Dom $j = A = \left(0, \frac{3}{4}\right) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$. En effet, les conditions d'existence sont :

- $x^3 - 2x^2 + x \geqslant 0$ (pour la racine carrée)
- $\sqrt{x^3 - 2x^2 + x} > 0$ (pour le logarithme)
- $3 - 4x > 0$ (pour le logarithme)
- $\ln(3 - 4x) \neq 0$ (pour le dénominateur)

Considérons successivement ces différentes conditions.

- $x^3 - 2x^2 + x \geqslant 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x + 1) \geqslant 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2 \geqslant 0$.

  Le tableau des signes ci-dessous indique que : $x^3 - 2x^2 + x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in D_1 = [0, +\infty)$.

x		0		1	
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$x^3 - 2x^2 + x$	$-$	0	$+$	0	$+$

- $\sqrt{x^3 - 2x^2 + x} > 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x > 0 \Leftrightarrow x \in D_2 = (0, +\infty) \setminus \{1\}$ (voir tableau précédent).
- $3 - 4x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{4} \Leftrightarrow x \in D_3 = \left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$.
- $\ln(3 - 4x) \neq 0 \Leftrightarrow 3 - 4x \neq 1 \Leftrightarrow -4x \neq -2 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in D_4 = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Comme les 4 conditions doivent être vérifiées simultanément, le domaine est donné par l'intersection :

$$D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4 = \left(0, \frac{3}{4}\right) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

f Dom $k = A = (-\infty, -1) \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Les conditions d'existence sont $x + 1 \neq 0$, pour le dénominateur, et $\frac{2x-1}{x+1} \geqslant 0$, pour la racine carrée. Un tableau de signes conduit au résultat.

x		-1		$\frac{1}{2}$	
$2x - 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{2x-1}{x+1}$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

g Dom $l = \mathbb{R}$. Les fonctions exponentielles et polynômes sont définies dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 3

Énoncé

À l'aide de quelques points, ébauchez le graphe des fonctions suivantes :

a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^2$.

b $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \sin x$.

c $h : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \to \ln x$.

d $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to [x]$ ($j(x)$ est la partie entière de x).

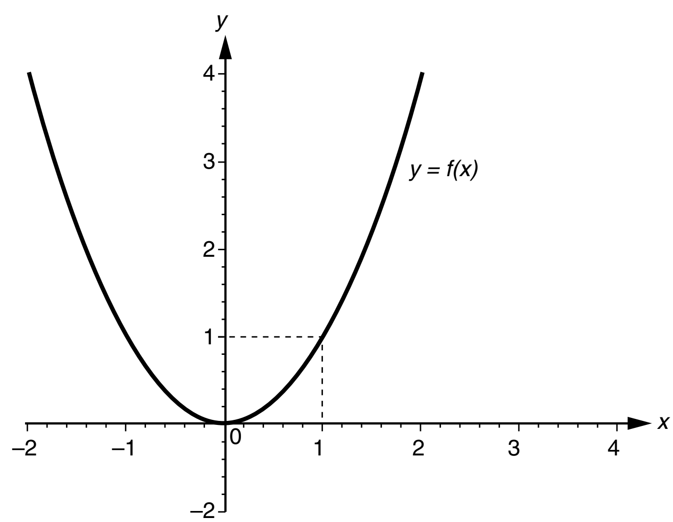
e $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

f $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Solution

a Le graphe de f est une parabole (figure 1.4) avec : $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} = 0{,}25$, $f(1) = f(-1) = 1$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} = 2{,}25$, $f(2) = f(-2) = 4$, $f\left(\frac{5}{2}\right) = f\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4} = 6{,}25$, $f(3) = f(-3) = 9$, etc.

Figure 1.4



b Le graphe de g est une sinusoïde (figure 1.5, page suivante) avec :

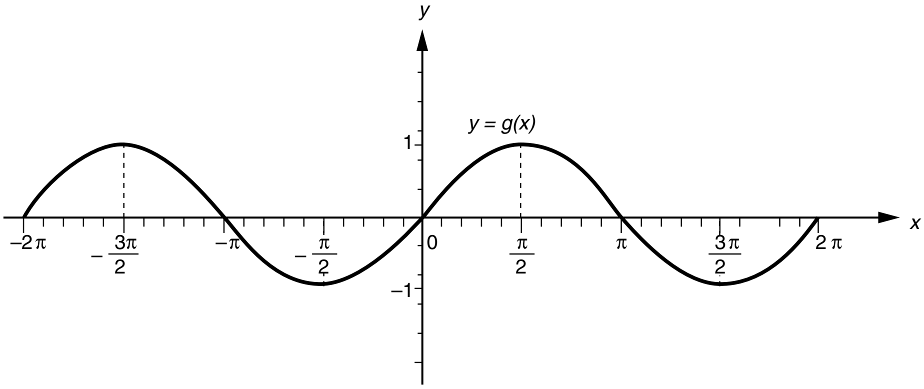
$$\forall x \in \mathbb{R} : \begin{cases} g(x) = \sin x = -\sin(-x) = -g(-x) \\ g(\pi - x) = \sin(\pi - x) = \sin x = g(x) \\ g(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin x = g(x) \end{cases}$$

La troisième ligne indique que la fonction est périodique, de période 2π.

N.B : $\pi \approx 3{,}1416$

x	$y = \pi - x$	$z = x + 2\pi$	$\begin{cases} g(x) \\ g(y) \\ g(z) \end{cases}$	$-x$	$t = \pi - (-x)$	$u = -x + 2\pi$	$-y$	$\begin{cases} g(-x) \\ g(t) \\ g(u) \\ g(-y) \end{cases}$
0	π	2π	0	0	π	2π	$-\pi$	0
$\frac{\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{8}$	$\frac{17\pi}{8}$	$0{,}38$	$\frac{-\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{15\pi}{8}$	$\frac{-7\pi}{8}$	$-0{,}38$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$	$0{,}70$	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{-3\pi}{4}$	$-0{,}70$
$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{19\pi}{8}$	$0{,}92$	$\frac{-3\pi}{8}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{-5\pi}{8}$	$-0{,}92$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	1	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{2}$	-1

Figure 1.5

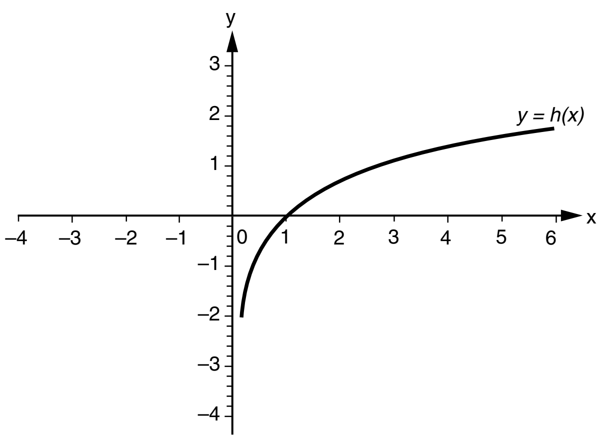


c Quelques points du graphe de h sont obtenus comme suit : $\ln 0{,}125 = -2{,}079$, $\ln 0{,}25 = -1{,}386$, $\ln \dfrac{1}{e} = -1$, $\ln 0{,}5 = -0{,}693$, $\ln e = 1$, $\ln e^2 = 2$...

N.B. : $e \approx 2{,}718$, $e^2 \approx 7{,}389$, $\dfrac{1}{e} \approx 0{,}368$.

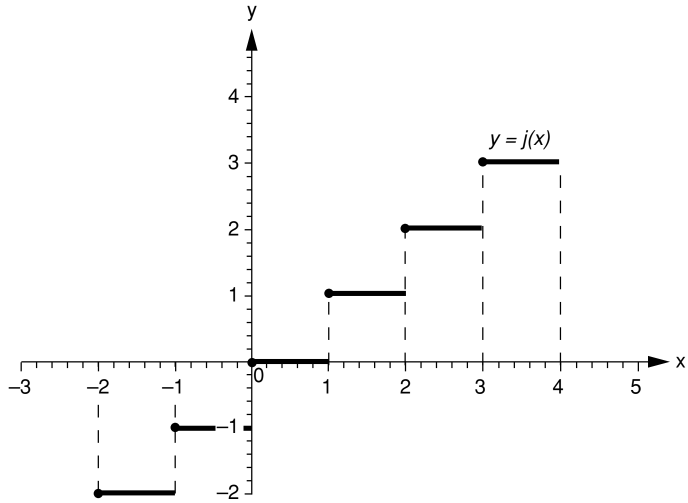
Le graphe de la fonction logarithme népérien est donné dans la figure 1.6.

Figure 1.6



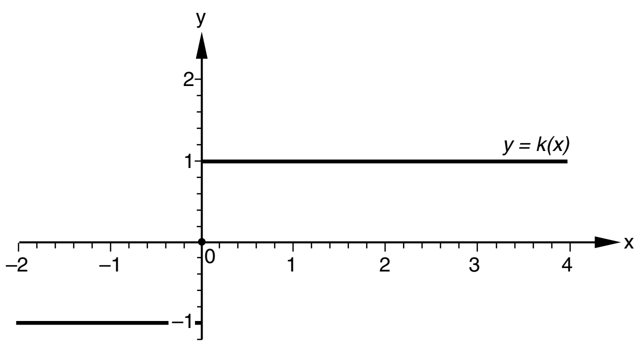
d $j(x)$ est la partie entière de x, ou encore le plus grand nombre entier $\leqslant x$. Son graphe se présente sous la forme d'un escalier (figure 1.7) puisque : $\forall x \in [0, 1) : [x] = 0$, $\forall x \in [1, 2) : [x] = 1$, $\forall x \in [2, 3) : [x] = 2$, $\forall x \in [-1, 0) : [x] = -1$, $\forall x \in [-2, -1) : [x] = -2$, etc.

Figure 1.7



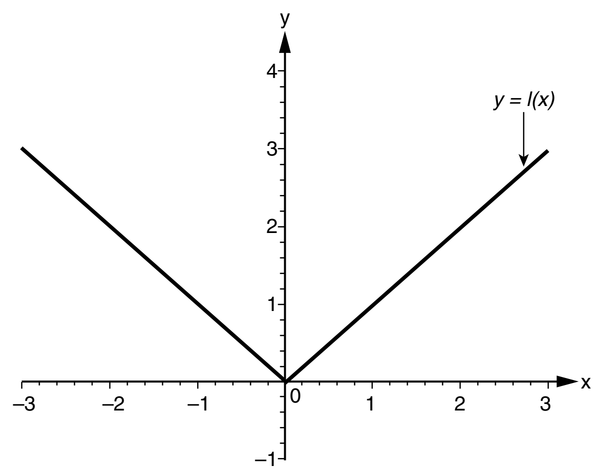
e $k(x)$ est le signe de $x(-1, 0$ ou $1)$.

Figure 1.8



f $l(x)$ est la valeur absolue de x.

Figure 1.9



EXERCICE 4

Énoncé

On reprend les fonctions définies à l'exercice 3. Dans chaque cas, déterminez les ensembles précisés :

a $f(\{-1, 2, 3\}), f((-2, 1]), f^{-1}(\{25\}), f^{-1}(\{-2\}), f^{-1}([0, 5))$ et $f^{-1}([1, 4])$.

b $g^{-1}\left(\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}\right)$ et $g^{-1}\left(\left[\dfrac{-1}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]\right)$.

c $h\left((1, e^3)\right)$ et $h^{-1}([-1, 0])$.

d $j(\mathbb{R})$ et $j^{-1}([-1,0])$.

e $k\left(\left\{-\sqrt{2}, -1, 5\right\}\right)$, $k(\mathbb{R})$ et $k^{-1}(\{-1\})$.

Solution

a $f(\{-1, 2, 3\}) = \left\{f(x) : x \in \{-1, 2, 3\}\right\} = \left\{f(-1), f(2), f(3)\right\} = \left\{(-1)^2, 2^2, 3^2\right\}$
$= \{1, 4, 9\}$.

$f((-2, 1]) = \left\{f(x) : x \in (-2, 1]\right\} = [0, 4)$.

Notez que : $f((-2, 1]) \neq \left[f(1), f(-2)\right) = [1, 4)$.

$f^{-1}(\{25\}) = \left\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 25\right\} = \{-5, 5\}$ puisque $f(x) = 25 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm 5$.

$f^{-1}(\{-2\}) = \emptyset$, car $f(x) = -2 \Leftrightarrow x^2 = -2$ ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$.

$f^{-1}([0, 5)) = \left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right)$. En effet, on a : $f(x) = x^2 \in [0, 5) \Leftrightarrow 0 \leqslant x^2 < 5 \Leftrightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$, grâce au tableau des signes ci-dessous :

x		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$	
$x^2 - 5$	$+$	0	$-$	0	$+$

$f^{-1}([1, 4]) = [-2, -1] \cup [1, 2]$. En effet : $f(x) = x^2 \in [1, 4] \Leftrightarrow 1 \leqslant x^2 \leqslant 4 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geqslant 0$ et $x^2 - 4 \leqslant 0$.

Pour résoudre les inéquations, on dresse les deux tableaux de signes suivants :

x		-1		1	
$x^2 - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$

x		-2		2	
$x^2 - 4$	$+$	0	$-$	0	$+$

L'ensemble des solutions de $x^2 - 1 \geqslant 0$ est $S_1 = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ et l'ensemble des solutions de $x^2 - 4 \leqslant 0$ est $S_2 = [-2, 2]$. Les solutions du système d'inéquations appartiennent donc à l'intersection $S_1 \cap S_2 = [-2, -1] \cup [1, 2]$.

b $g^{-1}\left(\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\right) = \left\{x \in \mathbb{R} : \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}\right\} = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$

$$g^{-1}\left(\left[\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right) = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{-1}{2} \leqslant \sin x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$
$$= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\left[\frac{-\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right]\right).$$

c $h\left((1, e^3)\right) = \left\{h(x) : x \in \left(1, e^3\right)\right\} = (0, 3).$
$h^{-1}([-1, 0]) = \left\{x \in \mathbb{R}_0^+ : h(x) = \ln x \in [-1, 0]\right\} = \left[e^{-1}, 1\right]$. En effet :

$$\ln x \in [-1, 0] \Leftrightarrow -1 \leqslant \ln x \leqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x \geqslant -1 \\ \ln x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant e^{-1} \\ x \leqslant e^0 = 1 \end{cases}.$$

La dernière transformation fait intervenir la fonction exponentielle e^x qui, comme réciproque de la fonction logarithme, est telle que : $e^{\ln x} = x$. La conservation des inégalités résulte de ce que la fonction exponentielle est croissante (voir le chapitre 3).

d $j(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$ puisque, d'une part, $j(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Z}$ (les images des nombres réels sont toutes des nombres entiers) et d'autre part, $\mathbb{Z} \subset j(\mathbb{R})$, car $z \in \mathbb{Z} \Rightarrow [z] = z \in j(\mathbb{R})$.
$j^{-1}([-1, 0]) = \left\{x \in \mathbb{R} : j(x) = [x] \in [-1, 0]\right\} = [-1, 1)$. En effet :

$$[x] \in [-1, 0] \Leftrightarrow [x] = -1 \text{ ou } [x] = 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 0) \text{ ou } x \in [0, 1)$$
$$\Leftrightarrow x \in [-1, 0) \cup [0, 1) \Leftrightarrow x \in [-1, 1).$$

e $k\left(\left\{-\sqrt{2}, -1, 5\right\}\right) = \left\{k(x) : x \in \left\{-\sqrt{2}, -1, 5\right\}\right\}$

$$= \left\{\underbrace{k(-\sqrt{2})}_{=-1}, \underbrace{k(-1)}_{=-1}, \underbrace{k(5)}_{=1}\right\} = \{-1, 1\}.$$

$k(\mathbb{R}) = \{k(x) : x \in \mathbb{R}\} = \{-1, 0, 1\}$.
$k^{-1}(\{-1\}) = \{x \in \mathbb{R} : k(x) = -1\} = \mathbb{R}_0^-$ car tous les nombres négatifs, et seulement ceux-là, ont pour image (-1).

Exercice 5

Énoncé

Soit les fonctions f, g, h, i, j, k, l.

a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^2$.

b $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \to x^2$.

c $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \to x^2$.

d $i : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \to \frac{1}{x}$.

e $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to |x|$.

f $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to [x]$.

g $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to ax + b$, où $a, b \in \mathbb{R}$.

Ces fonctions sont-elles injectives, surjectives, bijectives ? Déterminez, si possible, leur application réciproque.

Solution

a f n'est pas injective. En effet, $f(-1) = f(1)$ alors que $-1 \neq 1$. Elle n'est donc pas bijective. Elle n'est pas surjective car (-1) n'est l'image d'aucun réel : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = x^2 \neq -1$. La fonction réciproque de f n'existe pas puisque f n'est pas bijective.

b g est injective. En effet, $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, puisque :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ : x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0$$
$$\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ ou } x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

($x_1 = -x_2$ est impossible dans $\mathbb{R}^+$). La fonction g n'est pas surjective (même justification que pour la fonction f). Elle n'est donc pas bijective. La réciproque de g n'existe pas puisque g n'est pas bijective.

c h est injective (même justification que pour la fonction g). Elle est aussi surjective. En effet, $\forall y \in \mathbb{R}^+ \exists x \in \mathbb{R}^+ : y = h(x)$, puisque $y = x^2$ et $x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x = \sqrt{y}$. Elle est donc bijective et possède une réciproque. Pour déterminer sa fonction réciproque h^{-1}, on inverse la relation $y = h(x)$ en exprimant x en fonction de y. Dans le cas présent, $h(x) = x^2$ et $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$ puisque $x, y \in \mathbb{R}^+$. Finalement, $h^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : y \to \sqrt{y}$.

d i est injective. En effet, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0 : \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$. Elle n'est pas surjective car 0 n'est l'image d'aucun réel : $\forall x \in \mathbb{R}_0 : i(x) = \dfrac{1}{x} \neq 0$. Elle n'est donc pas bijective. La réciproque de i n'existe pas puisque i n'est pas bijective.

e j n'est ni injective, ni surjective, ni bijective. Elle n'admet pas de réciproque.

f k n'est ni injective ($1,5 \neq 1$ mais $[1,5] = [1]$), ni surjective ($\forall x \in \mathbb{R} : k(x) = [x] \neq 0{,}5$), ni bijective. Elle n'admet donc pas de réciproque.

g En ce qui concerne la fonction l, on a, si $a \neq 0$:

$$l(x_1) = l(x_2) \Leftrightarrow ax_1 + b = ax_2 + b \Rightarrow ax_1 = ax_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

et : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x = \dfrac{y-b}{a} \in \mathbb{R} : y = ax + b$.

Donc, si $a \neq 0$, l est injective, surjective et bijective, et $l^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y \to \dfrac{y-b}{a}$.

Si $a = 0$, la fonction $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to b$ est constante, donc ni injective ($l(1) = l(0) = b$), ni surjective ($\forall x \in \mathbb{R} : l(x) \neq b + 1$), ni bijective et sa réciproque n'existe pas.

EXERCICE 6

Énoncé

Soit une fonction surjective $f : A \to B : x \to f(x)$. Caractérisez l'image $f(A)$.

Solution

$f(A) = B$. En effet, f est surjective si $\forall y \in B, \exists x \in A : y = f(x)$, condition qui équivaut à $B \subset f(A)$.

Or, par définition, $f(A) \subset B$. D'où le résultat.

Exercice 7

Énoncé

Dans chaque cas, donnez, si possible, un exemple de fonction $f : A \to B : x \to f(x)$ qui vérifie les conditions imposées.

a $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}_0$ et f est surjective et non injective.

b $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}_0$ et f est injective et non surjective.

c $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}_0$ et f est bijective.

d $A = [2, 3]$, $B = [-1, 4]$ et f est injective.

e $A = \mathbb{R}$, $B = [-1, 1]$ et f est surjective.

f $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$ et f est injective.

Solution

Les exemples proposés ne sont que des suggestions. D'autres peuvent aussi convenir.

a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0 : x \to \begin{cases} x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

En effet, par construction, tous les réels ont une image et les images sont toutes non nulles, donc $A = \mathbb{R}$ et $B = \mathbb{R}_0$. En outre, f est surjective car $\forall y \in \mathbb{R}_0, \exists x (= y) \in \mathbb{R} : y = f(x)$ et f est non injective car $f(0) = f(1) = 1$.

b $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0 : x \to \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

c $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0 : x \to \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N} \\ x+1 & \text{si } x \in \mathbb{N} \end{cases}$.

d $f : [2, 3] \to [-1, 4] : x \to 5x - 11$, dont le graphe est le segment de droite qui joint les points $(2, -1)$ et $(3, 4)$.

Remarque

De façon générale, l'équation de la droite D passant par les points de coordonnées (x_1, y_1) et (x_2, y_2) où $x_1 \neq x_2$, est donnée par $D \equiv y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.

e $f : \mathbb{R} \to [-1, 1] : x \to \sin x$.

f Une telle fonction f n'existe pas. En effet, les nombres 1 et 2 doivent avoir des images distinctes, donc : $\{f(1), f(2)\} = \{4, 5\}$. Or, pour que f soit injective, il faut aussi que $f(3) \notin \{4, 5\} = B$, ce qui est impossible.

Exercice 8

Énoncé

Soit deux fonctions f et g. Déterminez dans chaque cas, si c'est possible, les fonctions composées $g \circ f$ et $f \circ g$.

a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 49 - x^2$ et $g : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R} : x \to \dfrac{1}{x-1}$.

b $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 3x^2 - 4$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 2x$.

c $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \to \ln\left(x^2\right)$ et $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \to \sqrt{x}$.

d $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to |x|$ et $g : \left[\dfrac{-3}{2}, +\infty\right) \to \mathbb{R} : x \to \sqrt{2x+3}$.

Solution

a $g \circ f$ n'existe pas. En effet, $f(\sqrt{48}) = 1 \notin \operatorname{Dom} g = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$f \circ g : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R} : x \to f\big(g(x)\big) = f\left(\dfrac{1}{x-1}\right) = 49 - \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

b $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to g\big(f(x)\big) = 2(3x^2-4) = 6x^2 - 8$.

$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f\big(g(x)\big) = 3(2x)^2 - 4 = 12x^2 - 4$.

c $g \circ f$ n'existe pas. En effet, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$.

$f \circ g$ n'existe pas. En effet, $g\,(0) = 0$.

d $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \sqrt{2|x|+3}$.

$f \circ g : \left[\frac{-3}{2}, +\infty\right) \to \mathbb{R} : x \to \left|\sqrt{2x+3}\right| = \sqrt{2x+3} = g(x)$.

Nombres complexes

Notation

Dans les exercices de cette section, on adopte la notation abrégée $\operatorname{cis}\theta$ pour désigner $\cos\theta + i\sin\theta$.

EXERCICE 9

Énoncé

Dans chaque cas, calculez les nombres complexes donnés.

a $(-2+5i) + (1-4i)$.

b $(4+3i)\,(-3+2i)$.

c $(2-3i)\,(4+6i)$.

d $|4-i|$.

e $\dfrac{1}{8+7i}$.

f i^{4n+3}, où $n \in \mathbb{N}$.

g $3i\left(\sqrt{2} - 5i\right)$.

h $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-i}$.

Solution

a $(-2+5i)+(1-4i)=-1+i.$

b $(4+3i)(-3+2i)=(-12-6)+(8-9)\,i=-18-i.$

c $(2-3i)(4+6i)=(2-3i)\,2\,(2+3i)=2\left(4-9i^2\right)=2\,(4+9)=26.$

d $|4-i|=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}.$

e $\dfrac{1}{8+7i}=\dfrac{8-7i}{(8+7i)(8-7i)}=\dfrac{8-7i}{64+49}=\dfrac{8-7i}{113}=\dfrac{8}{113}-\dfrac{7}{113}i.$

f $i^{4n+3}=\left(i^2\right)^{2n}i^2 i=(-1)^{2n}(-1)i=-i.$

g $3i\left(\overline{\sqrt{2}-5i}\right)=3i\left(\sqrt{2}+5i\right)=-15+3\sqrt{2}i.$

h $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-i}=\dfrac{\left(1+\sqrt{3}i\right)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{(1-\sqrt{3})+(\sqrt{3}+1)i}{2}=\dfrac{(1-\sqrt{3})}{2}+\dfrac{(\sqrt{3}+1)}{2}i.$

EXERCICE 10

Énoncé

Écrivez les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique.

a $1-i.$

b $4i.$

c $-64.$

Solution

a $\rho=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$ et $\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ d'où : $1-i=\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,\dfrac{-\pi}{4}\cdot$

b $4i=4\,\mathrm{cis}\,\dfrac{\pi}{2}\cdot$

c $-64=64\,\mathrm{cis}\,\pi.$

EXERCICE 11

Énoncé

a Calculez les racines carrées de $1-i$.

b Calculez les racines sixièmes de -64.

Solution

a $1-i=\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,\dfrac{-\pi}{4}$ (exercice 10) $\Rightarrow$ les racines carrées de $1-i$ sont données par :

$z_k=\sqrt{\sqrt{2}}\,\mathrm{cis}\,\dfrac{\dfrac{-\pi}{4}+2k\pi}{2}$, $k=0,1$, ou encore : $z_0=\sqrt[4]{2}\,\mathrm{cis}\,\dfrac{-\pi}{8}$ et $z_1=\sqrt[4]{2}\,\mathrm{cis}\,\dfrac{7\pi}{8}\cdot$

b $-64=64\,\mathrm{cis}\,\pi$ (exercice 10) $\Rightarrow$ les racines sixièmes de -64 sont données par :

$z_k=\sqrt[6]{64}\,\mathrm{cis}\,\dfrac{\pi+2k\pi}{6}$, $k=0,1,2,3,4,5$, ou encore : $z_0=\sqrt[6]{64}\,\mathrm{cis}\,\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}+i$, $z_1=\sqrt[6]{64}\,\mathrm{cis}\,\dfrac{\pi+2\pi}{6}=2i$, $z_2=-\sqrt{3}+i$, $z_3=-\sqrt{3}-i$, $z_4=-2i$ et $z_5=\sqrt{3}-i.$

EXERCICE 12

Énoncé

Dans chaque cas, résolvez, dans $\mathbb{C}$, l'équation donnée.

a $x^2 + 13 = 4$,

b $2x^2 + a = 1$ ($a \in \mathbb{R}$),

c $x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$,

d $x^2 + 4x + 8 = 0$,

e $x^2 - 5x + 6 = 0$,

f $x^5 - x^3 + x^2 - 1 = 0$,

g $2x^4 + 3x^2 + 1 = 0$,

h $(1 + i)^2x^2 - (1 - i)x + i = 0$.

Solution

a $x^2 + 13 = 4 \Leftrightarrow x^2 = -9 = 9i^2 \Leftrightarrow x = \pm 3i$.

b $2x^2 + a = 1 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1-a}{2}$. Trois cas sont possibles :

- Si $a < 1$: $x = \pm\sqrt{\dfrac{1-a}{2}}$;
- si $a = 1$: $x = 0$;
- si $a > 1$: $x = \pm\sqrt{\dfrac{a-1}{2}}i$.

c $x^3+2x^2+x+2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x+2)+x+2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = \pm i$.

d $x^2 + 4x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-32}}{2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{-16}}{2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16i^2}}{2} = -2 \pm 2i$.

e $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 3$.

f $x^5 - x^3 + x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3(x^2 - 1) + x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - 1\right)\left(x^3 + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)^2(x^2 - x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ ou $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

g $2x^4 + 3x^2 + 1 = 0$.

Astuce

Pour résoudre une équation du 4^e degré du type $ax^4 + bx^2 + c = 0$, dite équation bicarrée, on pose $t = x^2$ pour se ramener à une équation du second degré : $at^2 + bt + c = 0$.

Dans le cas présent, en posant $t = x^2$, on obtient :

$$2t^2 + 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \Leftrightarrow x^2 = -1 \text{ ou } x^2 = \frac{-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm i \text{ ou } x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

h $(1 + i)x^2 - (1 - i)x - 2 = 0$.

$\Delta = (1 - i)^2 + 8(1 + i) = 1 + i^2 - 2i + 8 + 8i = 8 + 6i$

Astuce

Pour trouver les racines carrées d'un nombre complexe $a + bi$ sans passer par la forme trigonométrique, on peut utiliser le raisonnement suivant : $u + vi$ est racine carrée de $a + bi$ si

$$(u+vi)^2 = a+bi \Leftrightarrow u^2 + 2uvi - v^2 = a+bi \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - v^2 = a \\ 2uv = b \end{cases}.$$

On établit ainsi que les racines carrées complexes de $8 + 6i$ sont $\pm(3 + i)$. Il s'ensuit que :

$$x = \frac{1-i \pm (3+i)}{2(1+i)} \Leftrightarrow x = \frac{4}{2(1+i)} = \frac{2(1-i)}{2} = 1-i$$
$$\text{ou } x = \frac{-2-2i}{2(1+i)} = \frac{-2(1+i)}{2(1+i)} = -1.$$

Topologie et dépendance linéaire dans $\mathbb{R}^n$

EXERCICE 13

Énoncé

Soit deux nombres réels a et b. Exprimez la distance euclidienne entre a et b.

Solution

En prenant $n = 1$ dans la définition générale, on obtient : $d(a, b) = \sqrt{(a-b)^2} = |a-b|$.

EXERCICE 14

Énoncé

a Dans $\mathbb{R}$, déterminez les boules ouvertes $B(0, 3)$ et $B(-1, 2)$.

b Dans $\mathbb{R}^2$, déterminez les boules ouvertes $B\big((0,0), 1\big)$ et $B\big((1, -3), 4\big)$.

Solution

a $B(0, 3) = \{x \in \mathbb{R} : d(x, 0) < 3\} = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 3\} = (-3, 3)$.

$$B(-1, 2) = \{x \in \mathbb{R} : d(x, -1) < 2\} = \{x \in \mathbb{R} : |x+1| < 2\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : -2 < x+1 < 2\} = (-3, 1).$$

Ce sont des intervalles ouverts.

b $B\big((0, 0), 1\big) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d\big((x, y), (0, 0)\big) < 1\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} < 1\right\}$.

$$B\big((1, -3), 4\big) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d\big((x, y), (1, -3)\big) < 4\right\}$$
$$= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-1)^2 + \big(y+3\big)^2} < 4\right\}.$$

Ce sont des disques ouverts.

EXERCICE 15

Énoncé

Dans chaque cas, déterminez l'intérieur, l'adhérence, la frontière et les points d'accumulation du sous-ensemble de $\mathbb{R}$ donné. L'ensemble est-il ouvert, fermé?

a $\emptyset$,

b $\mathbb{Z}$,

c $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$,

d $\mathbb{R}_0$,

e $A = [-2, 3) \cup \{5\}$,

f $C = [8, +\infty)$.

Solution

a $\operatorname{Int}\emptyset = \emptyset$. Donc $\emptyset$ est ouvert. $\operatorname{Adh}\emptyset = \emptyset$. Donc $\emptyset$ est fermé.

$\operatorname{Fr}\emptyset = \operatorname{Adh}\emptyset\backslash \operatorname{Int}\emptyset = \emptyset$. L'ensemble vide $\emptyset$ ne possède pas de point d'accumulation.

b $\operatorname{Int}\mathbb{Z} = \emptyset$ (sinon $\exists p \in \operatorname{Int}\mathbb{Z} \Rightarrow \exists r > 0 : B(p, r) = (p - r, p + r) \subset \mathbb{Z}$, ce qui est impossible par densité de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$). $\operatorname{Adh}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. En effet, d'une part $\forall A : A \subset \operatorname{Adh} A$ par définition de l'adhérence, et d'autre part, $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z} \Rightarrow x \notin \operatorname{Adh}\mathbb{Z}$ car $\exists r \in \mathbb{R}_0^+$: $B(x, r) = (x - r, x + r) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ (il suffit de prendre $r = \dfrac{1}{2}\min\{x - [x], [x] + 1 - x\}$). $\operatorname{Fr}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}\backslash\emptyset = \mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}$ ne possède pas de point d'accumulation . $\mathbb{Z}$ n'est pas ouvert mais il est fermé.

c $\operatorname{Int}\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = \emptyset$ (par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$), donc $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ n'est pas ouvert. $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \subset \operatorname{Adh}(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ par définition, et $\mathbb{Q} \subset \operatorname{Adh}(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ puisque : $\forall x \in \mathbb{Q}, \forall r > 0 : (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cap (x - r, x + r) \neq \emptyset$ (par densité de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$). Donc :

$(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}(= \mathbb{R}) \subset \operatorname{Adh}(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{Adh}(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = \mathbb{R} \neq \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ n'est pas fermé. $\operatorname{Fr}(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Tous les nombres réels sont des points d'accumulation de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ car

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall r > 0, \exists y \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cap (x - r, x + r)$ avec $y \neq x$.

d $\operatorname{Int}\mathbb{R}_0 = \mathbb{R}_0 \Rightarrow \mathbb{R}_0$ est un ouvert. $\operatorname{Adh}\mathbb{R}_0 = \mathbb{R}$ ($0 \in \operatorname{Adh}\mathbb{R}_0$ car $\forall r > 0 : \dfrac{r}{2} \in (-r, r) \cap \mathbb{R}_0$) $\Rightarrow \mathbb{R}_0$ n'est pas fermé. $\operatorname{Fr}\mathbb{R}_0 = \mathbb{R}\backslash\mathbb{R}_0 = \{0\}$. L'ensemble des points d'accumulation de $\mathbb{R}_0$ est $\mathbb{R}$.

e $\operatorname{Int} A = (-2, 3)$. $\operatorname{Adh} A = [-2, 3] \cup \{5\}$. A n'est ni ouvert, ni fermé. $\operatorname{Fr} A = \{-2, 3, 5\}$. L'ensemble des points d'accumulation de A est donné par $[-2, 3]$. En effet, d'une part, on a : $\forall x \in [-2, 3]\,, \forall r > 0, \exists y \in [(x - r, x + r) \cap A] \setminus \{x\}$. D'autre part, par définition, les points d'accumulation de A sont à chercher parmi les points adhérents de A, mais 5 n'est pas un point d'accumulation de A car $\exists r = \dfrac{1}{2} > 0 : [(5 - r, 5 + r)] \cap A \setminus \{5\} = \emptyset$.

f $\operatorname{Int} C = (8, +\infty)$ et C n'est pas ouvert. $\operatorname{Adh} C = [8, +\infty)$ et C est fermé. $\operatorname{Fr} C = \{8\}$. L'ensemble des points d'accumulation de C est égal à $[8, +\infty)$.

EXERCICE 16

Énoncé

Dans chaque cas, déterminez si le vecteur (3, 5) est une combinaison linéaire (C.L.) des vecteurs donnés.

a (1, 2) et (3, 4),

b (1, 2) et (−2, −4).

Solution

a Par définition, (3, 5) est une C.L. de (1, 2) et (3, 4) si $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$(3,5) = \alpha\,(1,2) + \beta(3,4) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta = 3 \\ 2\alpha + 4\beta = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\beta = -1 \\ -2\alpha = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{1}{2} \\ \alpha = \dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

L'existence de α et β est assurée et la réponse est positive.

b (3, 5) est une C.L. de (1, 2) et (−2, −4) si $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$(3,5) = \alpha\,(1,2) + \beta(-2,-4) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta = 3 \\ 2\alpha - 4\beta = 5 \end{cases} \Rightarrow 0 = -1$$

ce qui est impossible et la réponse est négative.

EXERCICE 17

Énoncé

Dans chaque cas, déterminez si, dans $\mathbb{R}^2$, les vecteurs donnés sont linéairement indépendants (L.I.).

a (1, 2) et (−1, 3),

b (2, −4) et (1, −2).

Solution

a Les vecteurs (1, 2) et (−1, 3) sont L.I. si : $\underbrace{\alpha(1,2) + \beta(-1,3) = (0,0)}_{(1)} \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$

Comme $(1) \Leftrightarrow (\alpha - \beta, 2\alpha + 3\beta) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$, les vecteurs sont effectivement L.I.

b Il existe une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls des deux vecteurs : $1\,(2,-4) - 2\,(1,-2) = (0,0)$. Les vecteurs ne sont donc pas L.I.

EXERCICE 18

Énoncé

Dans chaque cas, déterminez si, dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs donnés sont linéairement indépendants (L.I.).

a $(-3, 1, 4)$, $(1, 2, 3)$ et $(-9, -4, -1)$,

b $(1, 2, -1)$, $(1, 0, 1)$ et $(-2, 1, 0)$.

Solution

a $\alpha(-3, 1, 4) + \beta(1, 2, 3) + \gamma(-9, -4, -1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} -3\alpha + \beta - 9\gamma = 0 & (1) \\ \alpha + 2\beta - 4\gamma = 0 & (2) \\ 4\alpha + 3\beta - \gamma = 0 & (3) \end{cases}.$

Comme (2) $\Leftrightarrow \alpha = -2\beta + 4\gamma$, le système devient $\begin{cases} 7\beta - 21\gamma = 0 \\ \alpha = -2\beta + 4\gamma \\ -5\beta + 15\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 3\gamma \\ \alpha = -2\gamma \end{cases}$

avec $\gamma \in \mathbb{R}$.

Il admet d'autres solutions que la solution triviale. Donc, les vecteurs ne sont pas L.I.

b $\alpha(1, 2, -1) + \beta(1, 0, 1) + \gamma(-2, 1, 0) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta - 2\gamma = 0 & (1) \\ 2\alpha + \gamma = 0 & (2) \\ -\alpha + \beta = 0 & (3) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta - 2\gamma = 0 \\ \gamma = -2\alpha \\ \beta = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha = 0 \\ \gamma = -2\alpha \\ \beta = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$ et les vecteurs sont L.I.

Chapitre 2

Suites réelles

Suites réelles

La modélisation de phénomènes dynamiques ou évolutifs renvoie d'emblée au choix d'une représentation de la variable « temps ». En effet, si les philosophes continuent de s'interroger sur la nature discrète (succession d'instants précis) ou continue (le long d'un axe) de cette variable, les mathématiciens, pour leur part, offrent les deux représentations possibles.

Dans le premier cas, l'écoulement du temps est supposé correspondre à une suite de dates repérées par un indice prenant des valeurs entières positives (1, 2, 3,...) et la dynamique discrète est prise en compte par l'intermédiaire des suites dont l'étude est abordée dans le présent chapitre. Dans le second, toute valeur réelle (ou uniquement positive, pour traduire la présence d'une date initiale) est admissible en tant que date de réalisation du phénomène étudié et c'est la théorie des fonctions qui est mise à contribution. Cette approche sera développée dans les chapitres 3 et 4.

La modélisation des suites réelles dépasse cependant le cadre des phénomènes dynamiques. En effet, toute énumération infinie de nombres réels ressortit à cette théorie. Il n'en demeure pas moins que les applications pertinentes en économie et en gestion restent essentiellement cantonnées à ce domaine privilégié d'application. Par exemple, la convergence des taux d'intérêt suite à l'intégration européenne et l'évolution de la volatilité des marchés financiers résultant de la globalisation de l'économie constituent deux domaines dans lesquels les outils d'analyse proposés ici s'avèrent utiles.

1 Définitions

Une suite de nombres réels est généralement représentée sous la forme d'une succession infinie de nombres $(u_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$. On peut, au choix et sans perte de généralité, faire varier t dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}_0$. Dans la présentation théorique, nous optons pour la seconde possibilité de sorte que le premier terme soit affecté de l'indice 1, le deuxième de l'indice 2, etc. Les exercices feront cependant apparaître les deux cas.

Dans le cadre de l'étude de la dynamique d'un système, les éléments de $\mathbb{N}_0$ représentent des dates, tandis que u_t représente la valeur réelle prise à la date t par la variable (un différentiel de taux d'intérêt, une volatilité, etc.) dont on souhaite étudier l'évolution. Formellement, une *suite réelle* se définit comme une application.

Définitions

- La suite réelle $(u_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ est définie par l'application : $u : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R} : t \to u_t$.
- Le nombre réel u_k ($k \in \mathbb{N}_0$) est appelé *terme de rang k* de la suite. ❑

Exemples

1. L'application $u : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R} : t \to t$ définit la suite notée $(1, 2, 3, ...t, ...)$, ou de manière condensée $(t)_{t\in\mathbb{N}_0}$.
2. L'application $u : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R} : t \to \dfrac{1}{t}$ sera notée $\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, ..., \dfrac{1}{t}...\right)$, ou de manière condensée $\left(\dfrac{1}{t}\right)_{t\in\mathbb{N}_0}$.

La principale caractéristique recherchée pour les suites concerne la convergence.

Définitions

- La suite $(u_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ *converge vers le nombre réel a* si :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists T \in \mathbb{N}_0 : t \geqslant T \Rightarrow |u_t - a| < \varepsilon.$$

- Dans ce cas, la suite est dite *convergente* et le réel a est appelé *limite* de la suite $(u_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$. On note $\lim\limits_{t\to\infty} u_t = \lim u_t = a$. ❑

Exemple

La suite $\left(\dfrac{1}{t}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ converge vers 0. En effet, $\forall\varepsilon > 0, \exists T \in \mathbb{N}_0 : t \geqslant T \Rightarrow \left|\dfrac{1}{t} - 0\right| = \dfrac{1}{t} < \varepsilon$, puisque, en prenant $T = \min\left\{t \in \mathbb{N}_0 : t > \dfrac{1}{\varepsilon}\right\}$, on obtient : $t \geqslant T \Rightarrow \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{T} < \varepsilon$.

Définitions

- Toute suite qui n'admet pas de limite réelle est dite *divergente*.
- En outre, la suite divergente $(u_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) si

$$\forall K > 0, \exists T \in \mathbb{N}_0 : t \geqslant T \Rightarrow u_t > K \quad (\text{resp. } < -K).$$ ❑

2 Propriétés des limites de suites

Nous présentons uniquement les propriétés qui ont un usage direct dans l'étude des limites qui seront abordées dans les exercices.

Propriétés

- L'ensemble des termes d'une suite convergente est borné : si $(u_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ est convergente, alors l'ensemble $\{u_t : t \in \mathbb{N}_0\}$ est borné.
- Un nombre fini de termes n'affecte pas la convergence d'une suite. ❏

La seconde propriété concerne tant le caractère de convergence que la valeur de la limite. En pratique dans l'étude de la convergence d'une suite, on peut « oublier » un nombre fini de termes.

Exemple

$(u_t) = \left(5, 4, 3, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$ converge vers 0 puisque, en « oubliant » les quatre premiers termes, on obtient la suite $(u'_t) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right) = \left(\frac{1}{t}\right)$ qui converge vers 0.

Dans cet exemple, les suites (u_t) et (u'_t) ont la même limite mais ne sont pas égales. Par contre, la propriété ne s'applique pas à la suite $\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \frac{1}{5}, 5, \ldots\right)$ pour laquelle on ne peut pas « oublier » les termes de rangs pairs qui sont en nombre infini.

Le principe du « pincement » Si $(u_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$, $(v_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ et $(w_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ sont telles que : $\lim\limits_{t \to \infty} u_t = \lim\limits_{t \to \infty} w_t = a \in \mathbb{R}$ et $\exists T \in \mathbb{N}_0 : \forall t \geqslant T : u_t \leqslant v_t \leqslant w_t$, alors $\lim\limits_{t \to \infty} v_t = a$. ❏

Exemple

$\lim\limits_{t \to \infty} 0 = \lim\limits_{t \to \infty} \frac{1}{t} = 0$ et $\forall t \geqslant 1 : 0 \leqslant \frac{1}{t^2} \leqslant \frac{1}{t} \Rightarrow \lim\limits_{t \to \infty} \frac{1}{t^2} = 0.$

Règles de calcul pour les limites réelles Si : $\lim\limits_{t \to \infty} u_t = a \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{t \to \infty} v_t = b \in \mathbb{R}$, alors :

- $\lim\limits_{t \to \infty} (u_t + v_t) = a + b.$
- $\lim\limits_{t \to \infty} (u_t . v_t) = a.b.$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \lim\limits_{t \to \infty} (\lambda u_t) = \lambda a.$
- si $\forall t \in \mathbb{N}_0 : u_t \neq 0$ et $a \neq 0$: alors $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{1}{u_t} = \frac{1}{a}\cdot$ ❏

Il s'ensuit que toute combinaison linéaire de suites convergentes est convergente.

Cette propriété concerne exclusivement les suites convergentes. Lorsque (u_t) est convergente et (v_t) divergente (ou l'inverse), les suites $(u_t + v_t)$ et $(u_t \cdot v_t)$ peuvent être aussi bien convergentes que divergentes. Il en est de même lorsque les deux suites divergent.

La propriété suivante généralise les règles de calcul aux limites infinies. Étant donné le grand nombre de situations à envisager, elle est synthétisée sous forme de tableau. Toutefois, dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, toutes les opérations ne sont pas possibles. Certaines conduisent à une forme indéterminée (F.I.). Dans ce cas, il n'existe pas de règle applicable directement. Si elle existe, la limite doit alors être calculée au cas par cas, et toutes les possibilités en matière de limite peuvent se présenter.

Règles de calcul pour limites dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

$\lim\limits_{t\to\infty} u_t$	$\lim\limits_{t\to\infty} v_t$	$\lim\limits_{t\to\infty} (u_t + v_t)$	$\lim\limits_{t\to\infty} (u_t.v_t)$	$\lim\limits_{t\to\infty} \frac{u_t}{v_t}$
$a \in \mathbb{R}_0$	$+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$ (selon signe de a)	0
$a \in \mathbb{R}_0$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$ (selon signe de a)	0
$a \in \mathbb{R}_0$	0	a	0	$\pm\infty$ ou $\nexists$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ (voir ci-dessous)
0	$+\infty$	$+\infty$	F.I.	0
0	$-\infty$	$-\infty$	F.I.	0
0	0	0	0	F.I.
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$	F.I.
$+\infty$	0	$+\infty$	F.I.	$\pm\infty$ ou $\nexists$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ (voir ci-dessous)
$-\infty$	$+\infty$	F. I.	$-\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	0	$-\infty$	F.I.	$\pm\infty$ ou $\nexists$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ (voir ci-dessous)

Dans $\overline{\mathbb{R}}$, diviser un nombre non nul par zéro est possible et donne une valeur infinie pour autant que le dénominateur converge vers zéro en conservant un signe constant, du moins au-delà d'un certain rang. C'est d'ailleurs ce signe qui intervient dans la règle des signes pour le quotient. Néanmoins, si au-delà de tout rang, des termes positifs et négatifs apparaissent au dénominateur, alors la suite quotient n'admet pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$. Traduisons cela en formules mathématiques.

Propriétés

- Si $\lim\limits_{t\to\infty} v_t = 0$ et $\exists T \in \mathbb{N}_0 : \forall t > T : v_t > 0$, alors $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{v_t} = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{t\to\infty} v_t = 0$ et $\exists T \in \mathbb{N}_0 : \forall t > T : v_t < 0$, alors $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{v_t} = -\infty$.
- Si $\lim\limits_{t\to\infty} v_t = 0$ et si $\forall T \in \mathbb{N}_0, \exists t, t' > T : v_t > 0$ et $v_{t'} < 0$, alors $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{v_t} \nexists$ dans $\overline{\mathbb{R}}$. ❑

Exemple

On a : $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{(-1)^t}{t} = 0$, mais $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{\frac{(-1)^t}{t}} = \lim\limits_{t\to\infty} (-1)^t t$ n'existe pas dans $\overline{\mathbb{R}}$ puisque :

$$\frac{(-1)^t}{t} \begin{cases} < 0 & \text{pour } t \text{ impair} \\ > 0 & \text{pour } t \text{ pair} \end{cases}.$$

3 Suites remarquables

Les résultats relatifs aux limites de suites dites *remarquables ou élémentaires* seront supposés connus lors de la résolution des exercices. Joints aux propriétés figurant ci-dessus, ils permettent d'étudier la convergence de suites plus compliquées.

Suites constantes

$\lim\limits_{t\to\infty} a = a.$

Suites de puissances

$$\lim_{t\to\infty} t^a = \begin{cases} 0 & \text{si } a < 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \\ +\infty & \text{si } a > 0 \end{cases}.$$

Suites exponentielles

$$\lim_{t\to\infty} a^t = \begin{cases} 0 & \text{si } |a| < 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \\ +\infty & \text{si } a > 1 \\ \nexists \text{ dans } \overline{\mathbb{R}} & \text{si } a \leqslant -1 \end{cases}.$$

Suites produits d'une exponentielle et d'une puissance

$u_t = a^t t^b$, où $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$, $b \neq 0$.

$\lim\limits_{t\to\infty} \left(a^t t^b\right)$	$b < 0$	$b > 0$
$\lvert a\rvert < 1$	0	0
$a = -1$	0	n'existe pas dans $\overline{\mathbb{R}}$
$a > 1$	$+\infty$	$+\infty$
$a < -1$	n'existe pas dans $\overline{\mathbb{R}}$	n'existe pas dans $\overline{\mathbb{R}}$

Le tableau précédent indique que c'est l'exponentielle « qui l'emporte », sauf dans le cas des suites alternées pour lesquelles $a = -1$.

Exemples

1. $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^t = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} 2^t = +\infty$, $\lim\limits_{t\to\infty} \sqrt[3]{t} = \lim\limits_{t\to\infty} t^{1/3} = +\infty$, $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{t}} = \lim\limits_{t\to\infty} t^{-1/2} = 0$.

2. $\lim\limits_{t\to\infty}(t+t^2) = +\infty + (+\infty) = +\infty$, $\lim\limits_{t\to\infty}(3-t^2) = 3-(+\infty) = -\infty$, d'après les règles de calcul précédentes.

3. Pour $\lim\limits_{t\to\infty}(t-t^2)$, on obtient *a priori* une F.I. La limite doit être obtenue autrement, en l'occurrence en remarquant que : $\lim\limits_{t\to\infty}(t-t^2) = \lim\limits_{t\to\infty} t^2\left(\dfrac{1}{t}-1\right) = +\infty(0-1) = -\infty$.

4 Sous-suites

Parmi les suites n'admettant pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, certaines, comme $\left((-1)^t\right)_{t\in\mathbb{N}_0}$, sont bornées tandis que d'autres, comme $\left((-1)^t t^3\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$, ne le sont pas. La notion de sous-suite ou de suite extraite constitue un outil précieux pour dégager ces différences.

Définition Soit une fonction $p : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 : t \to p(t)$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{N}_0 : p(t) < p(t+1).$$

La suite $\left(u_{p(t)}\right)_{t\in\mathbb{N}_0}$ est dite *sous-suite* de la suite $(u_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$. ❏

En pratique, une sous-suite est obtenue en retranchant des termes (en nombre fini ou infini) à la suite initiale, pour autant que, d'une part, l'ordre des termes restants ne soit pas modifié et que, d'autre part, ces termes continuent de former une suite.

Exemple

La sous-suite des termes de rangs pairs de la suite $(u_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ est $(u_2, u_4, u_6, u_8, \ldots)$. Si on la désigne par $(v_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$, elle se définit par $v_t = u_{2t}$. Dans ce cas, l'application p de la définition est telle que : $p(t) = 2t$.

La propriété suivante justifie l'intérêt des sous-suites dans l'étude des limites.

Propriété Si la suite $(v_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ est une sous-suite de $(u_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ et si $\lim\limits_{t\to\infty} u_t = a (\in \overline{\mathbb{R}})$, alors $\lim\limits_{t\to\infty} v_t = a$. ❏

Le résultat de cette propriété peut être appliqué de diverses manières :

- pour établir la valeur dans $\overline{\mathbb{R}}$ de la limite d'une suite dont on sait qu'elle est sous-suite d'une suite de limite connue ;
- pour démontrer la non-existence d'une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, en exhibant une de ses sous-suites qui n'a pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$;
- pour démontrer la non-existence d'une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, en exhibant deux de ses sous-suites qui n'ont pas la même limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

La dernière utilisation est la plus fréquente. Elle permet notamment de montrer la non-convergence des suites alternées (changement de signe à chaque terme) dont les sous-suites formées des termes de rangs pairs et impairs ont des limites distinctes.

Exemples

1. $\left(\dfrac{1}{2+4t}\right)_{t\in\mathbb{N}_0} = \left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{14}, \dots\right)$ converge vers 0 en tant que sous-suite de $\left(\dfrac{1}{t}\right)_{t\in\mathbb{N}_0}$.

2. Par contre, la suite définie par $\left((-1)^t\right)_{t\in\mathbb{N}_0} = (-1, +1, -1, +1, \dots)$ est une suite divergente, puisque sa sous-suite des termes de rangs pairs est la suite constante $(1)_{t\in\mathbb{N}_0}$ qui converge vers 1 et sa sous-suite des termes de rangs impairs est la suite constante $(-1)_{t\in\mathbb{N}_0}$ qui converge vers -1.

5 Suites monotones

La connaissance préalable de la croissance ou décroissance d'une suite facilite considérablement la recherche de sa limite. En effet, ce type de régularité exclut d'emblée des situations telles que l'alternance de termes positifs et négatifs.

Définitions

- La suite $(u_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ est *croissante* (resp. *décroissante*) si :

$$\forall t \in \mathbb{N}_0 : u_{t+1} \geqslant u_t \quad (\text{resp. } u_{t+1} \leqslant u_t).$$

- La suite $(u_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ est *strictement croissante* (resp. *décroissante*) si :

$$\forall t \in \mathbb{N}_0 : u_{t+1} > u_t \quad (\text{resp. } u_{t+1} < u_t).$$

- La suite $(u_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ est *monotone* si elle est croissante ou décroissante. ❑

Exemples

1. La suite définie par $(1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots)$ est croissante (mais pas strictement croissante).

2. La suite $\left(\dfrac{1}{t}\right)_{t\in\mathbb{N}_0}$ est strictement décroissante.

Les suites monotones jouissent des propriétés suivantes.

Propriétés

- Toute suite croissante majorée (resp. décroissante minorée) est convergente et a pour limite le supremum (resp. l'infinum) de l'ensemble de ses termes.
- Toute suite croissante non majorée (resp. décroissante non minorée) tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$). ❑

Exemples

1. Définissons : $\forall t \in \mathbb{N}_0 : u_t = 1 + \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{1}{2}\right)^t = \displaystyle\sum_{k=0}^{t}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$. La suite $(u_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ est croissante. En effet, $u_{t+1} = u_t + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{t+1} \geqslant u_t$.

Elle est également majorée car $\forall t \in \mathbb{N}_0 : u_t \leqslant 2$, puisque, partant de 1, chaque terme ajoute au précédent la moitié de la distance qui le séparait de 2. Elle est donc convergente.

2. Définissons $\forall t \in \mathbb{N}_0 : u_t = 1 + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{2}\right)^t = \sum_{k=0}^{t} \left(\frac{3}{2}\right)^k$. La suite $(u_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ est croissante. En effet, $u_{t+1} = u_t + \left(\frac{3}{2}\right)^{t+1} \geqslant u_t$.

Elle n'est pas majorée car $\forall K \in \mathbb{R}_0, \exists T \in \mathbb{N}_0 : u_T > K$. En effet, il suffit de choisir : $T =$ le plus petit élément de $\mathbb{N}_0$ strictement supérieur à K pour obtenir :

$$u_T = 1 + \underbrace{\frac{3}{2}}_{>1} + \underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^2}_{>1} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^T}_{>1} > T + 1 > T > K.$$

La suite a donc pour limite $+\infty$.

Le calcul de la limite dans l'exemple 1 sera effectué lors de l'étude des séries géométriques.

6 Séries

Toute somme d'un nombre **fini** de nombres réels est également un nombre réel. Toutefois, lorsqu'on considère une somme dont le nombre de termes tend vers l'infini, l'existence d'une valeur réelle n'est plus garantie. Les séries ou « sommes infinies » peuvent donc converger (leur somme est réelle) ou diverger. La définition de la convergence des séries se déduit de celle des suites convergentes.

Définition La série $\sum_{t=0}^{\infty} u_t$ est dite *convergente* (de somme réelle s) si la suite $(s_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ des sommes partielles de cette série, définie par : $s_t = u_0+u_1+u_2+\cdots+u_t = \sum_{k=0}^{t} u_k$, converge vers s. ❏

Dans le cas des séries, on parle indifféremment de « somme », de « limite » ou de « valeur ».

Parmi toutes les séries mathématiques, une catégorie joue un rôle essentiel en gestion : la série géométrique qui est abondamment utilisée dans les calculs d'actualisation de flux financiers. Seule cette série sera abordée ici.

Définition La série $\sum_{t=0}^{\infty} a^t = 1 + a + a^2 + \cdots$, où $a \in \mathbb{R}$, est dite *géométrique* de raison a. ❏

Les propriétés suivantes fournissent, d'une part, l'expression générale de la suite des sommes partielles de la série géométrique et, d'autre part, la condition de convergence de cette série. Ces formulations sont utilisées en mathématique financière dans le calcul de valeurs actuelles d'annuités et de mensualités constantes.

Propriétés

- Les sommes partielles de la série géométrique $\sum_{t=0}^{\infty} a^t$ sont données par :

$$s_t = \begin{cases} \dfrac{1-a^{t+1}}{1-a} & \text{si } \; a \neq 1 \\ t+1 & \text{si } \; a = 1 \end{cases}.$$

- La série géométrique $\sum_{t=0}^{\infty} a^t$ est convergente si et seulement si $|a| < 1$. Dans ce cas, la somme vaut $\sum_{t=0}^{\infty} a^t = \dfrac{1}{1-a}$. ❑

Problèmes et exercices

Les premiers exercices conduisent à appliquer directement les définitions, puis les propriétés, présentées dans la synthèse théorique. Au passage certains résultats relatifs aux suites remarquables seront démontrés. Progressivement, les énoncés évoluent vers des problèmes relatifs à des situations pratiques rencontrées en gestion.

Définition de suites, suites convergentes

Exercice 1

Énoncé

Écrivez les suites données sous forme condensée.

a $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$.

b $(1, 3, 5, 7, \ldots)$.

c $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots\right)$.

d $(1, 0, 1, 0, \ldots)$.

Solution

a $\left(\cos(t\pi)\right)_{t\in\mathbb{N}}$ ou $\left((-1)^t\right)_{t\in\mathbb{N}}$.

Notez que la première valeur de l'indice est ici 0 et pas 1 pour des raisons évidentes. La numération des termes d'une suite peut en fait commencer en n'importe quel nombre naturel.

b $(1+2t)_{t\in\mathbb{N}}$.

c $\left(\frac{t+1}{t+2}\right)_{t\in\mathbb{N}}$.

d $\left(\frac{1+(-1)^t}{2}\right)_{t\in\mathbb{N}}$.

EXERCICE 2

Énoncé

Déterminez les limites dans $\overline{\mathbb{R}}$ des suites données en utilisant exclusivement les définitions.

a $(c)_{t\in\mathbb{N}_0}$ où $c \in \mathbb{R}$.

b $\left(\dfrac{1-2t}{t}\right)_{t\in\mathbb{N}_0}$.

c $\left(2+\sqrt{t}\right)_{t\in\mathbb{N}_0}$.

d $(-t)_{t\in\mathbb{N}_0}$.

Solution

a La suite $(c)_{t\in\mathbb{N}_0}$ converge vers c. Pour le montrer, il suffit de trouver une valeur de T qui permette d'établir que : $\forall\varepsilon > 0, \exists T \in \mathbb{N}_0 : t \geqslant T \Rightarrow |c-c| < \varepsilon$. Or, $|c-c| = 0 < \varepsilon$ est vrai quel que soit T. On peut prendre $T = 1$, par exemple.

b La suite $\left(\dfrac{1-2t}{t}\right)_{t\in\mathbb{N}_0} = \left(\dfrac{1}{t}-2\right)_{t\in\mathbb{N}_0}$ converge vers (-2). Pour le montrer, il convient de trouver une valeur de T qui permette d'établir que :

$$\forall\varepsilon > 0\,,\quad \exists T \in \mathbb{N}_0 : t \geqslant T \Rightarrow \left|\frac{1}{t} - 2 - (-2)\right| < \varepsilon.$$

Or : $\left|\dfrac{1}{t} - 2 - (-2)\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{t}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{1}{t} < \varepsilon \Leftrightarrow t > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Une valeur de $T \in \mathbb{N}_0$ telle que $t \geqslant T \Rightarrow t > \dfrac{1}{\varepsilon}$, est fournie, par exemple, par $T = \min\left\{t \in \mathbb{N}_0 : t > \dfrac{1}{\varepsilon}\right\}$.

c $\left(2+\sqrt{t}\right)_{t\in\mathbb{N}_0}$ a pour limite $+\infty$. En effet, $\forall K > 0, \exists T \in \mathbb{N}_0 : t \geqslant T \Rightarrow 2+\sqrt{t} > K$, puisque l'inégalité $2+\sqrt{t} > K \Leftrightarrow \sqrt{t} > K-2$ est toujours vérifiée si $K < 2$ (prendre $T = 1$) et pour $T = \min\left\{t \in \mathbb{N}_0 : t > (K-2)^2\right\}$ si $K \geqslant 2$, puisque alors :

$$t \geqslant T > (K-2)^2 \Rightarrow \sqrt{t} > K-2.$$

d $(-t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ a pour limite $-\infty$. En effet, en choisissant $T = \min\{t \in \mathbb{N}_0 : t > K\}$, on a :

$$\forall K > 0 : \exists T \in \mathbb{N}_0 : t \geqslant T \Rightarrow t > K \Rightarrow -t < -K.$$

Application des propriétés

EXERCICE 3

Énoncé

On se donne deux suites (u_t) et (v_t) telles que $\lim\limits_{t\to\infty} u_t = a \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{t\to\infty} v_t = b \in \mathbb{R}_0$. On suppose de plus que $\forall t \in \mathbb{N}_0 : v_t \neq 0$.

Que vaut $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{u_t}{v_t}$? Démontrez votre affirmation à l'aide des propriétés relatives aux limites des produits de suites.

Solution $\lim_{t\to\infty} \frac{u_t}{v_t} = \frac{a}{b}$. En effet, $\forall t \in \mathbb{N}_0 : \frac{u_t}{v_t} = u_t . \frac{1}{v_t}$ et par les règles de calcul relatives à l'inverse et au produit de suites convergentes on obtient successivement $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{v_t} = \frac{1}{b}$ et $\lim_{t\to\infty} \left(u_t \frac{1}{v_t}\right) = a\frac{1}{b} = \frac{a}{b}$.

EXERCICE 4

Énoncé

On se donne r et $s \in \mathbb{N}$, $a_r \neq 0$ et $b_s \neq 0$. Calculez dans $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{a_r t^r + a_{r-1} t^{r-1} + \cdots + a_1 t + a_0}{b_s t^s + b_{s-1} t^{s-1} + \cdots + b_1 t + b_0}.$$

Solution

$$\lim_{t\to\infty} \frac{a_r t^r + a_{r-1} t^{r-1} + \cdots + a_1 t + a_0}{b_s t^s + b_{s-1} t^{s-1} + \cdots + b_1 t + b_0}$$
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{t^r (a_r + a_{r-1} t^{-1} + \cdots + a_1 t^{-(r-1)} + a_0 t^{-r})}{t^s (b_s + b_{s-1} t^{-1} + \cdots + b_1 t^{-(s-1)} + b_0 t^{-s})}$$
$$= \lim_{t\to\infty} \left(t^{r-s} . \frac{a_r + a_{r-1} t^{-1} + \cdots + a_1 t^{-(r-1)} + a_0 t^{-r}}{b_s + b_{s-1} t^{-1} + \cdots + b_1 t^{-(s-1)} + b_0 t^{-s}} \right).$$

$\left(t^{r-s}\right)$ est une suite de puissances, donc :

$$\lim_{t\to\infty} t^{r-s} = \begin{cases} 0 & \text{si } r-s<0 \\ 1 & \text{si } r-s=0 \\ +\infty & \text{si } r-s>0 \end{cases}. \tag{2.1}$$

$\left(\frac{a_r + a_{r-1} t^{-1} + \cdots + a_1 t^{-(r-1)} + a_0 t^{-r}}{b_s + b_{s-1} t^{-1} + \cdots + b_1 t^{-(s-1)} + b_0 t^{-s}} \right)$ est le quotient de deux suites qui ont la même structure. Ainsi, le numérateur converge vers a_r, puisqu'il est la somme d'une suite constante $(a_r) \to a_r$ et de suites de puissances (affectées de coefficients réels) qui tendent vers 0. Par le même raisonnement, le dénominateur converge vers b_s. Il s'ensuit, grâce au résultat de l'exercice 3, que :

$$\frac{a_r + a_{r-1} t^{-1} + \cdots + a_1 t^{-(r-1)} + a_0 t^{-r}}{b_s + b_{s-1} t^{-1} + \cdots + b_1 t^{-(s-1)} + b_0 t^{-s}} \to \frac{a_r}{b_s}. \tag{2.2}$$

Combinant (2.1) et (2.2) avec les règles de calcul adéquates, on obtient finalement :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{a_r t^r + a_{r-1} t^{r-1} + \cdots + a_1 t + a_0}{b_s t^s + b_{s-1} t^{s-1} + \cdots + b_1 t + b_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } s>r \\ \frac{a_r}{b_s} & \text{si } s=r \\ +\infty & \text{si } r>s \text{ et } \frac{a_r}{b_s}>0 \\ -\infty & \text{si } r>s \text{ et } \frac{a_r}{b_s}<0 \end{cases}.$$

Exercice 5

Énoncé

Calculez, si possible, les limites dans $\overline{\mathbb{R}}$ des suites dont le terme général est donné ci-dessous, à l'aide des propriétés et des résultats relatifs aux suites remarquables.

a $(-2)^t$

b $\dfrac{-5t^5+t}{t^2+t-3t^5}$.

c $\sqrt{t}-\dfrac{t^2}{3}$.

d -3.6^t.

e $\dfrac{1}{\sqrt[3]{t}}+\left(\dfrac{-1}{3}\right)^t$.

f $\dfrac{1}{t}\sin t$.

g $\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^t}{\left(\dfrac{1}{4}\right)^t-5}+\sqrt{t}$.

h $3.\dfrac{e^{2t}}{t}-1$.

i $\dfrac{-9t^4+t^2-1}{t^3+1}$.

j $\left(\dfrac{1}{2}\right)^t\left(\dfrac{e}{2}\right)^t$.

k $\dfrac{t^3+3}{5t^6-t}$.

l $\dfrac{e^{-t}t^2+3t^2-e^{-t}+3}{t^2-1}$.

Solution

a $\big((-2)^t\big)$ n'admet pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, c'est une suite exponentielle de base < -1.

b $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{-5t^5+t}{t^2+t-3t^5}=\dfrac{5}{3}$ car c'est un quotient de polynômes de même degré, voir l'exercice 4.

c $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\sqrt{t}-\dfrac{t^2}{3}\right)=-\infty$. En effet, pour lever l'indétermination $(\infty-\infty)$, on écrit : $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\sqrt{t}-\dfrac{t^2}{3}\right)=\lim\limits_{t\to\infty}\sqrt{t}\left(1-\dfrac{t^{\frac{3}{2}}}{3}\right)$. Or, $\lim\limits_{t\to\infty}\left(t^{\frac{3}{2}}\right)=+\infty$ car c'est une suite de puissances et $\lim\limits_{t\to\infty}(1)=1$ car c'est une suite constante. Donc $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\sqrt{t}-\dfrac{t^2}{3}\right)=+\infty\left(1-\dfrac{1}{3}(+\infty)\right)=-\infty$.

d $\lim\limits_{t\to\infty}(-3.6^t)=-\infty$. Cette suite est un multiple d'une suite exponentielle (base > 1).

e $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{t}}+\left(\dfrac{-1}{3}\right)^t\right)=\lim\limits_{t\to\infty}\left(t^{\frac{-1}{3}}+\left(\dfrac{-1}{3}\right)^t\right)=0+0=0$. En effet, c'est une somme d'une suite de puissances et d'une suite exponentielle (base $\in(-1,1)$).

f Remarquons d'abord qu'on ne peut pas appliquer la propriété relative à un produit de suites, étant donné que la suite $(\sin t)$ n'admet pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ (à montrer en utilisant des sous-suites).

Pour montrer que $\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{1}{t}\sin t\right)=0$, on applique le principe du pincement :

$$\forall t\in\mathbb{N}_0 : -1\leqslant \sin t\leqslant 1 \Rightarrow \forall t\in\mathbb{N}_0 : -\frac{1}{t}\leqslant\frac{1}{t}\sin t\leqslant\frac{1}{t},$$

$$\text{avec}\quad \lim_{t\to\infty}\frac{-1}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}=0.$$

g $\lim_{t\to\infty}\left(\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^t}{\left(\frac{1}{4}\right)^t-5}+\sqrt{t}\right)=+\infty.$

h $\lim_{t\to\infty}\left(3\dfrac{e^{2t}}{t}-1\right)=+\infty$, puisque $\dfrac{e^{2t}}{t}=\left(e^2\right)^t.t^{-1}$ est le produit d'une exponentielle en base $e^2>1$ et d'une puissance négative, et que, dans ce cas, l'exponentielle « l'emporte ».

i $\lim_{t\to\infty}\dfrac{-9t^4+t^2-1}{t^3+1}=-\infty$. En effet, cette suite est le quotient de polynômes et le degré du numérateur est supérieur à celui du dénominateur, voir l'exercice 4.

j Pour lever l'indétermination $(0.(+\infty))$, on écrit :

$$\lim_{t\to\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^t\left(\frac{e}{2}\right)^t\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{e}{4}\right)^t=0\quad\text{(suite exponentielle en base }\frac{e}{4}\in(-1,1)).$$

k $\lim_{t\to\infty}\dfrac{t^3+3}{5t^6-t}=0$. En effet, cette suite est un quotient de polynômes, le degré du numérateur est inférieur au degré du dénominateur.

l $\lim_{t\to\infty}\dfrac{e^{-t}t^2+3t^2-e^{-t}+3}{t^2-1}=\lim_{t\to\infty}\dfrac{e^{-t}(t^2-1)+3(t^2+1)}{t^2-1}=\lim_{t\to\infty}\left(e^{-t}+\dfrac{3(t^2+1)}{t^2-1}\right).$

$e^{-t}=\left(e^{-1}\right)^t\to 0$ (exponentielle en base $\dfrac{1}{e}\in(-1,1)$) et $\left(\dfrac{3(t^2+1)}{t^2-1}\right)\to 3$ (quotient de polynômes de même degré). Donc $\lim_{t\to\infty}\left(e^{-t}+\dfrac{3(t^2+1)}{t^2-1}\right)=0+3=3.$

Exercice 6

Énoncé

a On se donne deux suites $(u_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ et $(v_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ telles que $\lim_{t\to\infty}u_t=+\infty$ et $\exists T\in\mathbb{N}_0,\forall t\geqslant T:u_t\leqslant v_t$. Que peut-on affirmer concernant la $\lim_{t\to\infty}v_t$?

b On se donne deux suites $(u_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$et $(v_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ telles que $\lim_{t\to\infty}u_t=a\in\mathbb{R}$, $\lim_{t\to\infty}v_t=b\in\mathbb{R}$ et $\exists T\in\mathbb{N}_0:\forall t\geqslant T:u_t<v_t$. Peut-on en conclure que $a<b$?

Solution

a On peut affirmer que : $\lim_{t\to\infty}v_t=+\infty$.

En effet, $\lim_{t\to\infty}u_t=+\infty\Rightarrow\forall K>0,\exists T'\in\mathbb{N}_0:t\geqslant T'\Rightarrow u_t>K$ et, par hypothèse, $\exists T\in\mathbb{N}_0,\forall t\geqslant T:u_t\leqslant v_t$. En fixant $S=\max\left\{T,T'\right\}$, on obtient alors : $\forall K>0,\exists S\in\mathbb{N}_0:t\geqslant S\Rightarrow v_t>K$, ce qui signifie que (v_t) tend vers $+\infty$.

b Non. Contre-exemple : $u_t=\dfrac{1}{t}$, $v_t=\dfrac{2}{t}$ et $\exists T=1\in\mathbb{N}_0:\forall t\geqslant T:\dfrac{1}{t}<\dfrac{2}{t}$ alors que : $\lim_{t\to\infty}\dfrac{1}{t}=\lim_{t\to\infty}\dfrac{2}{t}=0.$

EXERCICE 7

Énoncé

Dans chaque cas, montrez que les suites données sont divergentes. Admettent-elles une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$?

a $u_t = \begin{cases} 1 & \text{si } t \text{ est pair} \\ 2 & \text{si } t \text{ est impair} \end{cases}.$

b $u_t = \begin{cases} t^2 & \text{si } t \text{ est impair} \\ \dfrac{1}{t} & \text{si } t \text{ est pair} \end{cases}.$

Solution

a La suite (u_t) diverge puisqu'elle admet deux sous-suites constantes distinctes : $u_{2t} = 1 \to 1$ et $u_{2t+1} = 2 \to 2$. Il s'ensuit aussi que $\lim\limits_{t\to\infty} u_t$ n'existe pas dans $\overline{\mathbb{R}}$ (propriété relative aux sous-suites).

b La suite (u_t) diverge puisqu'elle admet une sous-suite qui tend vers $+\infty$: $u_{2t+1} = (2t+1)^2 \to +\infty$. Elle n'admet cependant pas de limite infinie parce que la sous-suite $u_{2t} = \dfrac{1}{2t} = \dfrac{1}{2}t^{-1} \to 0 \neq +\infty$.

EXERCICE 8

Énoncé

Donnez un exemple de suite croissante non convergente.

Solution

Remarquons d'abord que la suite recherchée doit nécessairement tendre vers $+\infty$ (propriété des suites monotones).

La suite $(t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ répond à la question. En effet, on a $\lim\limits_{t\to\infty} t = +\infty$ (non convergente) et $\forall t \in \mathbb{N}_0 : u_{t+1} = t + 1 > u_t = t$ (suite croissante).

EXERCICE 9

Énoncé

On considère la proposition suivante : « Si $(u_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ et $(v_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ sont deux suites réelles monotones, alors la suite $(u_t + v_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ est une suite monotone. »

Cette proposition est-elle vraie ou fausse?

Solution

La proposition est fausse. En effet, soit $u_t = 2^t + (-1)^t$ et $v_t = -2^t$. D'une part, la suite (u_t) est monotone croissante : $\forall t \in \mathbb{N}_0 : u_{t+1} = 2^{t+1} + (-1)^{t+1} \geqslant u_t = 2^t + (-1)^t$ parce que : $2^{t+1} - 2^t = 2^t\,(2-1) = 2^t \geqslant 2(-1)^t = (-1)^t - (-1)^{t+1}$.

D'autre part, (v_t) est monotone décroissante : $\forall t \in \mathbb{N}_0 : v_{t+1} = -2^{t+1} = -2.2^t \leqslant v_t = -2^t$.

Mais la suite de terme général $u_t + v_t = (-1)^t$ n'est pas monotone. En effet :

$$u_1 + v_1 = -1 < u_2 + v_2 = 1 \Rightarrow (u_t + v_t) \quad \text{n'est pas décroissante}$$
$$u_2 + v_2 = 1 > u_3 + v_3 = -1 \Rightarrow (u_t + v_t) \quad \text{n'est pas croissante.}$$

EXERCICE 10

Énoncé

Déterminez la $\lim\limits_{t\to\infty}(2t)$ de quatre façons différentes.

Solution

$\lim\limits_{t\to\infty}(2t) = +\infty$. On peut la déterminer :

1) Par les règles de calcul de limites : $\lim\limits_{t\to\infty}(2t) = 2\lim\limits_{t\to\infty} t = 2(+\infty) = +\infty$.
2) Par la définition : $\forall K > 0, \exists T \in \mathbb{N}_0 : t \geqslant T \Rightarrow 2t > K$. Il suffit de prendre
$$T = \min\left\{t \in \mathbb{N}_0 : t > \frac{K}{2}\right\}.$$
3) Par les résultats sur les suites monotones : $(2t)$ est une suite monotone croissante non majorée, elle diverge donc vers $+\infty$.
4) Par la propriété des sous-suites : $(2t)$ est une sous-suite de (t) qui diverge vers $+\infty$, elle diverge donc aussi vers $+\infty$.

EXERCICE 11

Énoncé

On considère la proposition suivante : « Si les suites réelles $(u_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ et $(v_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ sont telles que $(u_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ est convergente et $\forall t \in \mathbb{N}_0 : u_t = v_{3t+1}$, alors $(v_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ est convergente ».

Cette proposition est-elle vraie ou fausse? Justifiez votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

Solution

La proposition est fausse. Un contre-exemple est fourni par :
$$\forall t \in \mathbb{N}_0 : u_t = 0 \quad \text{et} \quad v_t = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 3k+1 \\ 1 & \text{si } t \neq 3k+1 \end{cases} \quad (\text{où } k \in \mathbb{N}_0)\,.$$

En effet, la suite $(u_t)_{t\in\mathbb{N}_0} = (v_{3t+1})_{t\in\mathbb{N}_0} = (0)_{t\in\mathbb{N}_0}$ converge vers 0 (suite constante). Par contre $(v_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ diverge puisqu'elle possède une autre sous-suite, par exemple $(v_{3t+2})_{t\in\mathbb{N}_0} = (1)_{t\in\mathbb{N}_0}$, qui converge vers le nombre 1 (suite constante), différent de 0.

EXERCICE 12

Énoncé

La suite $(u_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ est définie par : $u_t = \sin t + 4^t.\dfrac{3}{t^2}.\dfrac{t+1}{t^2+4}$.

Déterminez, si possible, sa limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Solution

Considérons d'abord le second terme de u_t, que nous notons v_t :

Comme : $v_t = 4^t.\dfrac{3}{t^2}.\dfrac{t+1}{t^2+4} = 3.4^t t^{-3}.\dfrac{1+\dfrac{1}{t}}{1+\dfrac{4}{t^2}}$ et $\lim\limits_{t\to\infty} 4^t t^{-3} = +\infty$, on établit que : $\lim\limits_{t\to\infty} v_t = +\infty$.

Ensuite, les inégalités : $\forall t \in \mathbb{N}_0 : -1 + v_t \leqslant u_t \leqslant 1 + v_t$ (car $-1 \leqslant \sin t \leqslant 1$) et les égalités : $\lim\limits_{t\to\infty} (1 + v_t) = \lim\limits_{t\to\infty} (-1 + v_t) = +\infty$ (règles de calcul dans $\overline{\mathbb{R}}$) permettent de conclure, par le principe du pincement, que $\lim\limits_{t\to\infty} u_t = +\infty$.

Applications à la gestion

EXERCICE 13

Énoncé

a En supposant le taux d'actualisation r constant, quelle est la valeur actuelle (à la date 0) d'une rente constante C qui sera versée annuellement pendant 10 ans (dates 1 à 10) ?

b Appliquez la formule trouvée au cas particulier où $r = 5\,\%$ et $C = 10\,000$ €.

Solution

a Notons P la valeur cherchée qui représente la somme des valeurs actuelles des montants qui constituent la rente :

$$P = \underbrace{\frac{C}{1+r}}_{\text{année 1}} + \underbrace{\frac{C}{(1+r)^2}}_{\text{année 2}} + \cdots + \underbrace{\frac{C}{(1+r)^{10}}}_{\text{année 10}} = C\sum_{t=1}^{10} \frac{1}{(1+r)^t}\,.$$

Pour calculer P, on utilise la propriété des sommes partielles de la série géométrique de raison $\dfrac{1}{1+r}$, en observant que la somme dans P commence en $t = 1$ (et pas 0).

$$P = C\left(\frac{1-\left(\dfrac{1}{1+r}\right)^{11}}{1-\dfrac{1}{1+r}} - 1\right) = C\left(\frac{1+r-\left(\dfrac{1}{1+r}\right)^{10}}{r} - 1\right)$$

$$= C\frac{1-\left(\dfrac{1}{1+r}\right)^{10}}{r}\,.$$

b Si $r = 5\,\%$ et $C = 10\,000$ €, on obtient : $P = \dfrac{1-\left(\dfrac{1}{1,05}\right)^{10}}{0,05}10\,000 = 77\,217,35$ €.

EXERCICE 14

Énoncé

La firme JEJOUE achète et vend des jetons. Le nombre s_t représente la quantité de pièces en stock le dernier jour du mois t. La firme JEJOUE alimente son stock en commandant chaque mois 30 pièces (livrées le premier du mois), et la vente de pièces s'effectue exactement à raison de 1 par jour (par exemple, 31 pièces vendues en janvier 2004).

a Sachant que le 31/12/2003 ($t = 0$) la firme JEJOUE possédait N pièces ($N \geqslant 5$), déterminez l'évolution du stock mensuel (à la fin de mois).

b La firme JEJOUE verra-t-elle un jour son stock de pièces s'épuiser ? Si oui, comment peut-on caractériser le jour où cela arrivera ?

Solution **a** Le nombre s_1 représente la quantité de pièces en stock le 31/01/2004. Il est donné par : $s_1 = N + 30 - 31 = N - 1$. Ensuite, le stock évolue selon :

$s_2 = s_1 + 30 - 29 = s_1 + 1$ (car 2004 est une année bissextile),

$s_3 = s_2 + 30 - 31 = s_2 - 1$,

$s_4 = s_3 + 30 - 30 = s_3$, etc.

De façon générale :

$$s_t = \begin{cases} s_{t-1} - 1 & \text{si } t \text{ est un mois de 31 jours,} \\ s_{t-1} + 1 & \text{si } t \text{ est le mois de février d'une année bissextile,} \\ s_{t-1} + 2 & \text{si } t \text{ est le mois de février d'une année non bissextile,} \\ s_{t-1} & \text{dans les autres cas,} \end{cases}$$

pour autant que ces nombres restent positifs ou nuls.

Au bout d'un an, le stock aura diminué de 6 pièces puisque partant de N, on aura ajouté 7 termes (-1) correspondant aux mois de 31 jours, 4 termes nuls correspondant aux mois de 30 jours et 1 terme $(+1)$ puisque 2004 est une année bissextile. Les années non bissextiles, le stock décroît de 5 pièces.

b Même s'il croît en février, le stock subit une tendance globale à la baisse et finira par s'annuler. Le jour où cela se produira sera obligatoirement le dernier jour d'un mois de 31 jours, qui ne sera ni mars (puisque le mois de février aura fourni une pièce « en réserve »), ni le mois de mai d'une année non bissextile (le mois de février aura fourni deux pièces « en réserve » pour mars et mai).

Par exemple, pour $N = 20$, on a :

$$s_1 = N - 1 = 19,\ s_{12} = 14 \text{ (déc. 04)},\ s_{24} = 9 \text{ (déc. 05)},\ s_{36} = 4 \text{ (déc. 06)},$$
$$s_{37} = 3,\ s_{38} = 5,\ s_{39} = 4,\ s_{40} = 4,\ s_{41} = 3,$$
$$s_{42} = 3,\ s_{43} = 2,\ s_{44} = 1,\ s_{45} = 1,\ s_{46} = 0 \text{ (oct. 07)}.$$

EXERCICE 15

Énoncé

Selon la formule de Gordon-Shapiro, la valeur à la date t, notée P_t, d'une action dont les dividendes (D_t, à la date t) croissent au taux constant g, est donnée par $P_t = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1+a)^i} D_{t+i}$, où $D_t = (1+g)D_{t-1}$ et a représente le taux d'actualisation prenant en compte la prime de risque associée au titre considéré.

a Montrez que $P_t = \dfrac{D_{t+1}}{1+a} \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1+g}{1+a}\right)^i$.

b Dans quel cas la série $(P_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ est-elle convergente? Donnez alors la valeur de P_t.

Solution **a** $D_t = (1+g)D_{t-1} \Rightarrow D_{t+i} = (1+g)^{i-1} D_{t+1}$. Il s'ensuit que :

$$P_t = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1+a)^i} D_{t+i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1+a)^i} \left(1+g\right)^{i-1} D_{t+1}$$
$$= \frac{D_{t+1}}{(1+a)} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1+g}{1+a}\right)^{i-1} = \frac{D_{t+1}}{(1+a)} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1+g}{1+a}\right)^{i}.$$

b Comme $a > 0$ et $g > 0$ (ce sont des taux de croissance), la série géométrique $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1+g}{1+a}\right)^i$ converge si et seulement si $\frac{1+g}{1+a} < 1 \Leftrightarrow 1+g < 1+a \Leftrightarrow g < a$.

Dans ce cas, $P_t = \frac{D_{t+1}}{1+a}.\frac{1}{1-\frac{1+g}{1+a}} = \frac{D_{t+1}}{1+a}.\frac{1+a}{a-g} = \frac{D_{t+1}}{a-g}$.

EXERCICE 16

Énoncé

a Montrez que si la suite $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ converge, alors la suite retardée $(Y_t)_{t\geqslant 2}$, où $\forall t : Y_t = X_{t-1}$, converge également.

b Montrez que si la suite $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ converge, alors la suite lissée $(Z_t)_{t\geqslant 2}$, où $\forall t : Z_t = \frac{X_{t-1}+X_t}{2}$, converge également.

c Montrez que la réciproque du **b** est fausse.

Solution

a C'est évident puisque les deux suites ne diffèrent que par un seul terme, en l'occurrence le premier de la suite $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$, et que la convergence n'est pas affectée par un nombre fini de termes.

b Comme $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ converge par hypothèse, $(X_{t-1})_{t\geqslant 2}$ converge grâce au résultat du **a**, on en déduit que $Z_t = \frac{X_{t-1}+X_t}{2}$ converge comme combinaison linéaire de suites convergentes.

Remarquons que ce résultat s'applique plus généralement à tous les lissages par filtres moyennes mobiles du type $Z_t = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{t-k+1}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.

c Contre-exemple : $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0} = \left((-1)^t\right)_{t\in\mathbb{N}_0}$.

En effet, dans ce cas, $\forall t : Z_t = \frac{(-1)^{t-1}+(-1)^t}{2} = 0$ et la suite $(Z_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ converge vers 0 alors que la suite $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ diverge.

Chapitre 3

Les fonctions d'une seule variable

Les fonctions d'une seule variable

Les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies dans le chapitre 1, constituent la manière naturelle d'exprimer la dépendance d'une grandeur par rapport à une autre. Les modèles de la gestion quantitative sont évidemment basés sur des fonctions, puisque les variables aussi diverses que le chiffre d'affaire, le bénéfice, le coût des infrastructures, etc., dépendent, entre autres, de facteurs tels que les prix des inputs, le niveau des ventes, le taux d'intérêt du marché, etc.

En gestion, comme ailleurs, toute formalisation repose sur une réduction de la complexité inhérente au phénomène étudié. Afin de mettre en exergue l'essentiel, la représentation sous forme de modèle mathématique néglige immanquablement certains aspects périphériques. La difficulté réside donc dans le choix des facteurs pertinents, c'est-à-dire ceux qui doivent absolument figurer dans la spécification. Ce choix varie d'un modèle à l'autre, comme varient les hypothèses relatives aux fonctions qui en constituent le cadre formel.

Dans la réalité, les éléments chiffrés qui interviennent dans la prise de décision des gestionnaires sont très souvent simultanément liés à de nombreux facteurs. Par exemple, le coût de production dépend du prix de tous les *inputs* nécessaires à l'entreprise, l'utilité du consommateur varie selon les quantités des divers biens accessibles. Naturellement, pour traiter ces questions, les mathématiques offrent le cadre de la théorie des fonctions de plusieurs variables, abordée dans les deux derniers chapitres de cet ouvrage. Néanmoins, cette théorie a pour préalable indispensable celle, plus simple, des fonctions d'une variable, présentée ici, qui offre une première approche de la notion de dépendance.

Dans le domaine de la dynamique en temps continu, la représentation en fonction d'une seule variable développée dans ce chapitre s'impose. En effet, lorsque l'unique variable réelle prise en compte représente la date, toute fonction correspondante décrit une évolution. Ainsi, les trajectoires de taux de change ou d'indices boursiers s'expriment volontiers sans référence à une autre variable dépendante. Toutefois, il nous faut bien reconnaître que la modélisation financière dont relèvent ces deux exemples, fait le plus souvent appel au cadre, lui aussi plus complexe, des processus stochastiques traitant de l'évolution de variables aléatoires.

En résumé, la théorie des fonctions d'une variable offre une première entrée dans le monde de la dépendance entre variables quantitatives. De par sa grande simplicité, l'utilisation en gestion de cette théorie reste limitée à quelques exemples élémentaires, mais l'assimilation des notions de ce chapitre conditionne la compréhension de la plupart des concepts plus sophistiqués des chapitres 7 et 8 qui font la richesse des modèles rencontrés dans la pratique. Qu'on ne s'y trompe pas, la matière présentée dans ce qui suit constitue un véritable sésame dans la voie du calcul différentiel et de son corollaire, l'optimisation.

1 Limites de fonctions

1.1 Domaines d'examen des limites : D', D'_G et D'_D

Dans le chapitre 1, la notion de fonction de A dans B (où $A, B \subset \mathbb{R}$) a été définie et l'écriture suivante a été adoptée : $f : A \to B : x \to f(x)$.

Par définition, chaque élément de A possède une image dans B. En pratique, l'ensemble B ne doit pas forcément être minimal, c'est-à-dire coïncider avec l'image de A par f. Dans plusieurs applications, seul le fait que la fonction est à valeurs réelles constitue une information pertinente (Une exception notable concerne la détermination du caractère injectif et/ou surjectif d'une fonction, qui a été abordée dans le chapitre 1). Dès lors, par souci de simplicité, nous indiquerons généralement l'ensemble $\mathbb{R}$ en lieu et place de B.

À l'inverse, le contenu précis de l'ensemble A est crucial pour la suite de l'analyse. En effet, A ne peut pas contenir de points où la fonction ne serait pas définie. Par exemple, la fonction qui associe à la variable x sa racine carrée $\sqrt{x}$ n'est pas définie pour les nombres strictement négatifs. Dans ce cas, l'ensemble A doit donc être un sous-ensemble de $\mathbb{R}^+$. D'autre part, il se peut que pour des raisons d'interprétation des variables, certaines valeurs doivent également être écartées. Ainsi, lorsque la variable x représente un coefficient de pondération, elle doit se situer obligatoirement dans l'intervalle $[0, 1]$. La prise en compte de ces deux types de contraintes amène à délimiter le domaine, dorénavant noté D, de la fonction considérée. Sauf mention contraire, nous adopterons donc la notation suivante :

$$f : D \to \mathbb{R} : x \to f(x) \quad \text{où} \quad D \subset \mathbb{R}\,.$$

La notion de limite de fonction permet de définir la continuité et la dérivabilité qui, elles-mêmes, ouvrent la voie vers des théorèmes relatifs aux extrema. Les extrema (minima et maxima) de fonctions se situent au coeur de nombreux problèmes économiques et de gestion : le consommateur maximise sa fonction d'utilité, l'entreprise maximise son bénéfice ou minimise ses coûts, etc.

La limite bilatérale d'une fonction en un point indique le comportement de cette fonction « aussi près que l'on veut » du point désigné, sauf au point lui-même. Pour définir ce concept, il est donc indispensable que le domaine de la fonction offre la possibilité « d'encercler » le point, mais sans que ce point fasse obligatoirement partie du domaine. Ainsi, une fonction définie dans l'intervalle [0, 1] n'admettra pas de limite en 0, ni en 1. Par contre, il est concevable qu'une limite existe en 1 lorsque le domaine est $[0, 2]\backslash 1$.

Définition Le *domaine d'examen des limites bilatérales*, noté D', est donné par :

$$D' = \left\{x \in \mathbb{R} : \exists\delta > 0 \text{ tel que } (x-\delta, x+\delta)\backslash\{x\} \subset D\right\}.$$ ❑

Lorsqu'il n'y a pas de risque d'ambiguïté, on parle volontiers de « limite » pour désigner une « limite bilatérale ». En pratique, D' est déterminé à partir de D en enlevant les « bords » et en ajoutant les « trous ». Par extension, on définit les domaines d'examen des limites unilatérales.

Définitions

- Le *domaine d'examen des limites à gauche*, noté D'_G, est donné par :

$$D'_G = \left\{x \in \mathbb{R} : \exists\delta > 0 \text{ tel que } (x-\delta, x) \subset D\right\}.$$

- Le *domaine d'examen des limites à droite*, noté D'_D, est donné par :

$$D'_D = \left\{x \in \mathbb{R} : \exists\delta > 0 \text{ tel que } (x, x+\delta) \subset D\right\}.$$ ❑

Exemple

Soit la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R} : x \to 2x$.

- Si $a \in (0, 1)$, on peut tendre vers a (approcher a d'aussi près que l'on veut), aussi bien par la droite que par la gauche, tout en restant dans le domaine $D = [0, 1] \Rightarrow \forall a \in (0, 1) : a \in D'$.
- Si $a = 0$, on ne peut tendre vers a que par la droite puisque les points situés à gauche de a n'appartiennent pas au domaine $D \Rightarrow 0 \in D'_D$ mais $0 \notin D'$.
- Si $a = 1$, on ne peut tendre vers a que par la gauche $\Rightarrow 1 \in D'_G$ mais $1 \notin D'$.
- Si $a \notin [0, 1]$, on ne peut pas approcher a d'aussi près que l'on veut, ni par la droite, ni par la gauche tout en restant dans le domaine. On en conclut que $D' = (0, 1)$, $D'_D = [0, 1)$, $D'_G = (0, 1]$.

L'exemple précédent fait apparaître que seul le domaine D est utilisé pour déterminer D', D'_D et D'_G. L'expression analytique de la fonction a cependant joué un rôle en amont pour fixer D.

De plus, notons que $D'_G \cap D'_D = D'$.

1.2 Les notions de limites

Définitions de base

Suivant la logique mise en œuvre dans l'introduction des trois domaines d'examen des limites, les trois définitions suivantes présentent respectivement la limite bilatérale et les deux limites unilatérales.

Définitions Considérons la fonction $f : D \to \mathbb{R} : x \to f(x)$ et le nombre réel $b \in \mathbb{R}$.

- Premier cas : $a \in D'$.
  f a pour limite (bilatérale) b lorsque x tend vers a, ce qu'on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que : } \left.\begin{array}{l} x \in (a-\eta, a+\eta) \backslash \{a\} \\ x \in D \end{array}\right\} \Rightarrow \left|f(x) - b\right| < \varepsilon.$$

- Deuxième cas : $a \in D'_D$.
  f a pour limite à droite b, lorsque x tend vers a, ce qu'on note $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} a} f(x) = b$, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que : } \left.\begin{array}{l} x \in (a, a+\eta) \\ x \in D \end{array}\right\} \Rightarrow \left|f(x) - b\right| < \varepsilon.$$

- Troisième cas : $a \in D'_G$.
  f a pour limite à gauche b, lorsque x tend vers a, ce qu'on note $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} a} f(x) = b$, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que : } \left.\begin{array}{l} x \in (a-\eta, a) \\ x \in D \end{array}\right\} \Rightarrow \left|f(x) - b\right| < \varepsilon. \qquad \square$$

Comme $\left|f(x) - b\right| < \varepsilon \Leftrightarrow f(x) \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$, la première définition (par exemple) s'interprète de la manière suivante : on peut toujours trouver un intervalle centré autour de a tel que toutes les images des points de cet intervalle soient situées aussi près que l'on veut de b.

Exemple

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$ et $a = 0$.

$D = \mathbb{R} \Rightarrow D' = \mathbb{R}$ et la $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ peut être considérée.

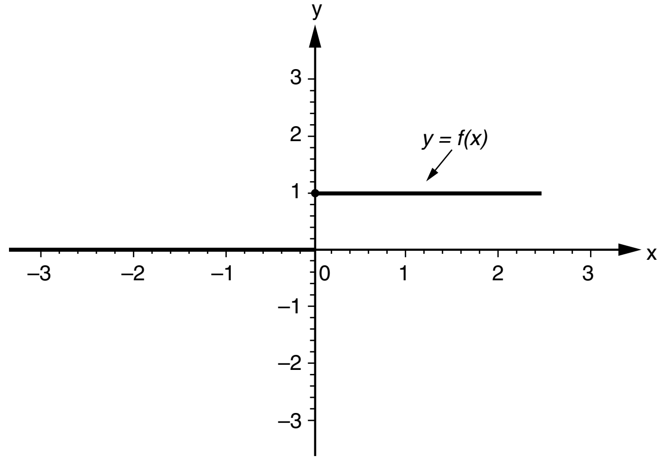
Toutefois, le comportement de f (voir figure 3.1, page ci-contre) est différent à gauche et à droite de 0. Les limites à gauche et à droite sont données par : $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} 0 = 0$ et $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} 1 = 1$.

Le lien entre les limites bilatérales et unilatérales est donné par la propriété suivante qui permet notamment d'établir formellement la non-existence de la limite bilatérale $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ dans l'exemple ci-dessus.

Propriété $\forall a \in D' = D'_G \cap D'_D : \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim\limits_{x \underset{<}{\to} a} f(x) = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} a} f(x) = b \in \mathbb{R}$. $\square$

Toute valeur connue d'une limite bilatérale est immédiatement interprétable comme la valeur commune des deux limites unilatérales.

Figure 3.1



Si une des limites unilatérales n'existe pas ou si les deux limites unilatérales sont distinctes, alors la limite bilatérale n'existe pas. Cela permet d'étudier la limite bilatérale en des points charnières comme dans l'exemple ci-dessus où $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} f(x) = 0 \neq \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = 1 \Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \nexists$.

Exemple

Pour la fonction définie par : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$, on a :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} (-x) = -\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} x = 0 \\ \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0.$$

Extensions des définitions

La première extension concerne les limites pour $x \to -\infty$ et $x \to +\infty$.

Définition Soit $f : D \to \mathbb{R} : x \to f(x)$, où D contient une demi-droite $\big(-\infty, p\big)$ (resp. une demi-droite $(p, +\infty)$) et $b \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{\substack{x \to -\infty \\ (\text{resp. } x \to +\infty)}} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists K > 0 \ \text{ tel que :}$$

$$\left.\begin{array}{c} x < -K (\text{resp. } x > K) \\ x \in D \end{array}\right\} \Rightarrow \big|f(x) - b\big| < \varepsilon. \quad ❏$$

Exemple

$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \to \dfrac{1}{x^2}$. $D = \mathbb{R}_0^+$ contient la demi-droite $(0, +\infty)$ et on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

En effet, selon la définition : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists K > 0 :$ $\left.\begin{array}{c} x > K \\ x \in \mathbb{R}_0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\dfrac{1}{x^2}\right| < \varepsilon.$

Or $\left|\frac{1}{x^2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} < \varepsilon \Leftrightarrow x^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \Leftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ (car $x \in \mathbb{R}_0^+$).

Il suffit alors de prendre $K = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + 1 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ pour obtenir $K > 0$ et $x > K \Rightarrow x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

La seconde extension concerne les limites infinies. Leur définition s'apparente à celle des limites infinies de suites, mais, du fait de la variété des possibilités au niveau des fonctions, plusieurs cas doivent être scindés.

Définitions

- Premier cas : $a \in D'$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \underset{(\text{resp. } -\infty)}{+\infty} \quad \text{si} \quad \forall L > 0, \exists \eta > 0 \ \text{ tel que :}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \in (a-\eta, a+\eta)\backslash\{a\} \\ x \in D \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{(\text{resp. } f(x)<-L)}{f(x) > L}.$$

- Deuxième cas : $a \in D'_G$.

$$\lim_{\substack{x\to a \\ <}} f(x) = \underset{(\text{resp. } -\infty)}{+\infty} \quad \text{si} \quad \forall L > 0, \exists \eta > 0 \ \text{ tel que :}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \in (a-\eta, a) \\ x \in D \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{(\text{resp. } f(x)<-L)}{f(x) > L}.$$

(et de façon analogue pour la limite à droite).

- Troisième cas : $D \supset \big(-\infty, p\big)$.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \underset{(\text{resp. } -\infty)}{+\infty} \quad \text{si} \quad \forall L > 0, \exists K > 0 \ \text{ tel que :}$$

$$\left.\begin{array}{l} x < -K \\ x \in D \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{(\text{resp. } f(x)<-L)}{f(x) > L}.$$

(et de façon analogue pour la limite pour $x \to +\infty$). ❏

1.3 Lien entre limites de fonctions et limites de suites

Deux propriétés font le lien entre les limites de fonctions et de suites. En premier, le théorème de transfert, énoncé ci-dessous, est utilisé en pratique pour montrer la non-existence de limites de fonctions.

Théorème de transfert $\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall$ suite $(x_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{N}_0 : x_t \in D\backslash\{a\} \\ \lim_{t\to\infty} x_t = a \end{cases} \qquad \text{on a : } \lim_{t\to\infty} f(x_t) = b.$$ ❏

Moyennant des changements évidents de formulation, on peut étendre ce théorème aux limites unilatérales, aux limites pour $x \to \pm\infty$ et aux limites infinies.

En pratique, pour montrer à l'aide de ce théorème que la $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ n'existe pas, on construira deux suites, $\left(x_t^{(1)}\right)$ et $\left(x_t^{(2)}\right)$, convergeant vers a et telles que $\forall t \in \mathbb{N}_0$: $x_t^{(1)}, x_t^{(2)} \in D\backslash\{a\}$, mais dont les limites des images sont telles que : $\lim\limits_{t\to\infty} f\left(x_t^{(1)}\right) = u$ et $\lim\limits_{t\to\infty} f\left(x_t^{(2)}\right) = v \neq u$.

Exemple

Montrons par le théorème de transfert que $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin\frac{1}{x}\right) \nexists$.

Les suites définies par $x_t^{(1)} = \frac{1}{2t\pi}$ et $x_t^{(2)} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2t\pi}$ convergent toutes deux vers 0. En outre, les suites images sont telles que : $\lim\limits_{t\to\infty}\sin(2t\pi) = 0$ et $\lim\limits_{t\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2t\pi\right) = 1 \neq 0$. Ce qui établit le résultat de non-existence.

> **Propriété** Si la suite réelle $(u_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ et la fonction $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R} : x \to f(x)$ sont telles que $\forall t \in \mathbb{N}_0 : f(t) = u_t$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim\limits_{t\to\infty} u_t = a$. ❏

Cette propriété sert à déterminer la valeur d'une limite de suite à partir de la limite pour $x \to +\infty$ d'une fonction dont le graphe passe par les points de la suite. Cette propriété permet notamment de lever des indéterminations dans les limites de suites, en faisant appel à la règle de l'Hospital (voir section 4.5.) qui s'applique uniquement aux limites de fonctions.

Exemple

Après avoir montré que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$ (voir exercice 8 **b**), la propriété permettra d'affirmer que la suite $\left(\frac{\sin t}{t}\right)_{t\in\mathbb{N}_0}$ converge vers 0.

1.4 Autres propriétés des limites de fonctions

Les règles de calcul dans $\mathbb{R}$ et dans $\overline{\mathbb{R}}$ des limites de fonctions, qu'elles soient bilatérales, unilatérales ou pour $x \to \pm\infty$, sont identiques à celles présentées au chapitre 2 (section 2) pour les limites de suites.

Exemple

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ impliquent que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x - \frac{1}{x}\right) = +\infty - 0 = +\infty$.

> **Limites des fonctions composées**
> Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c \in \overline{\mathbb{R}}$,
> alors $\lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x) = c$. ❏

Exemple

$\lim\limits_{x\to\sqrt{\pi}} x^2 = \pi$ et $\lim\limits_{x\to\pi} \cos x = \cos\pi = -1$ impliquent que $\lim\limits_{x\to\sqrt{\pi}} \cos x^2 = -1$.

Principe du « pincement » Si f, g et h sont des fonctions telles que : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$, et si $\exists\eta > 0, \forall x \in (a-\eta, a+\eta)\setminus\{a\} : f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$. ❑

Moyennant des changements évidents de formulation, on peut étendre les propriétés citées aux limites unilatérales et aux limites pour $x \to \pm\infty$.

Comme dans le chapitre 2, cette règle affirme l'existence d'une limite (et en donne la valeur). Pour l'utiliser, il faut, dans un voisinage du point a, encadrer la fonction dont on cherche la limite par deux fonctions qui tendent vers la même valeur.

Exemple

Appliquons la règle du pincement pour montrer que $\lim\limits_{x\to 0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right| = 0$. Notons qu'un exemple précédent (section 1.3) a établi que $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas. La règle de calcul relative au produit des limites dans $\overline{\mathbb{R}}$ n'est donc pas applicable ici. Par contre, le principe du pincement permet de prouver le résultat. En effet : $\forall x \in \mathbb{R}_0 : -1 \leqslant \sin\frac{1}{x} \leqslant 1 \Rightarrow -|x| \leqslant \left|x.\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant |x|$ et $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|) = \lim\limits_{x\to 0}|x| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right| = 0$.

2 Continuité

2.1 Définitions et propriétés fondamentales

La continuité représente le premier niveau de régularité des fonctions. On définit d'une part la continuité en un point, d'autre part la continuité dans un domaine. Intuitivement, une fonction est continue dans un ensemble D si on peut tracer son graphe, pour les valeurs d'abscisses dans D, sans lever le crayon, sous réserve que D soit convexe et qu'en conséquence il n'y ait pas de sous-domaines déconnectés.

La définition générale est plus large et s'applique à tous les domaines possibles. Elle s'appuie sur les concepts de limites présentés dans la section précédente.

Définitions Soit $f : D \to \mathbb{R} : x \to f(x)$.

- f est *continue* en $a \in (D' \cap D)$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$;
- f est *continue à gauche* en $a \in (D'_G \cap D)$ si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\<}} f(x) = f(a)$;
- f est *continue à droite* en $a \in (D'_D \cap D)$ si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\>}} f(x) = f(a)$. ❑

La propriété suivante découle directement de celles des limites.

Propriété Soit $a \in \big(D' \cap D\big)$.
f est continue en $a \Leftrightarrow f$ est continue à gauche et à droite en a. ❏

Exemples

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \\ x+3 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = 0 \neq f(0) = 3 \Rightarrow f$ n'est pas continue à gauche en $0 \Rightarrow f$ n'est pas continue en 0.

La fonction est cependant continue à droite en 0 : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 3 = f(0)$.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to |1-x| = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \leqslant 1 \\ x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} (1-x) = 0 = f(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} (x-1)$. La fonction est donc continue en 1.

La continuité dans un domaine exige que la fonction présente toutes les continuités possibles (unilatérales, et donc aussi bilatérales) dans ce domaine.

Définition La fonction f est *continue dans D* si elle vérifie toutes les conditions suivantes :

(i) $\forall a \in (D' \cap D) : f$ est continue en a ;

(ii) $\forall a \in \big((D'_G \backslash D') \cap D\big) : f$ est continue à gauche en a ;

(iii) $\forall a \in \big((D'_D \backslash D') \cap D\big) : f$ est continue à droite en a. ❏

En conséquence, pour des domaines qui sont des intervalles ouverts ou fermés, on a la propriété suivante.

Propriété

- f est continue dans (c, d) si $\forall a \in (c, d) : f$ est continue en a.
- f est continue dans $[c, d]$ si f est continue dans (c, d), f est continue à droite en c et f est continue à gauche en d. ❏

Définition Le *domaine de continuité* de f est le plus grand sous-ensemble de D dans lequel f est continue, il est noté DC. On a évidemment : $DC \subset D$. ❏

Exemples

1. $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \to \ln x$.
$\forall a \in \mathbb{R}_0^+ : \lim\limits_{x \to a} \ln x = \ln a \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}_0^+ : f$ est continue en $a \Rightarrow f$ est continue dans $\mathbb{R}_0^+ \Rightarrow DC = \mathbb{R}_0^+$.

2. $f : (0,1] \to \mathbb{R} : x \to \dfrac{1}{x}$.

$\forall a \in (0,1) : \lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a} = f(a) \Rightarrow \forall a \in (0,1) : f$ est continue en a.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{1}{x} = 1 = f(1) \Rightarrow f$ est continue à gauche en 1. Donc, f est continue dans $(0,1]$ et $DC = (0,1]$.

Notons que, comme $0 \notin D$, on ne se préoccupe pas de la $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$.

2.2 Fonctions de référence : limites et continuité

Lors la résolution des exercices, les limites évidentes relatives aux fonctions élémentaires seront supposées connues (sauf dans les exercices 1 et 2 qui en établissent certaines). Ces résultats concernent les fonctions puissances, sinus, cosinus, logarithme et exponentielle. Dans les deux derniers cas, rappelons que :

Si $a > 1$:

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0\,, \quad \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty\,, \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \log_a x = -\infty\,, \quad \lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty.$$

Si $0 < a < 1$:

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty\,, \quad \lim_{x \to +\infty} a^x = 0\,, \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \log_a x = +\infty\,, \quad \lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty.$$

En outre, on supposera dorénavant acquise la continuité des fonctions élémentaires suivantes dans leurs domaines de définition :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to b, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x,$

$f : D \to \mathbb{R} : x \to x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ où D est déterminé selon α,

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to a^x \left(a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}\right), f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \to \log_a x \left(a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}\right),$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \sin x, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \cos x.$

À partir de là, les règles de calcul des limites dans $\mathbb{R}$ permettent de déduire la continuité des fonctions sommes, produits et composées de fonctions continues.

2.3 Méthode pratique de l'étude de la continuité d'une fonction

Les diverses propriétés vues permettent de dresser une procédure pratique pour l'étude de la continuité d'une fonction donnée, dans un domaine D prédéfini.

(i) Si la fonction est donnée par une seule expression analytique, décomposer f en somme, produit et/ou composée de fonctions dont le domaine de continuité est connu.

(ii) Si la fonction est définie par plusieurs expressions analytiques (explicitement ou implicitement), appliquer d'abord (i) sur les plus grands sous-ensembles ouverts de D, puis étudier la continuité en le(s) point(s) charnière(s) à l'aide du calcul de limites.

Attention, il ne faut pas oublier de considérer les éventuels bords du domaine.

Exemples

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \text{signe}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$

Dans $(-\infty, 0)$ et dans $(0, +\infty)$, f est constante donc continue. Il reste à étudier le point charnière 0 où $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} f(x) = -1 \neq f(0) = 0$. Donc, f n'est pas continue à gauche en $0 \Rightarrow f$ n'est pas continue en 0.

En conclusion, $DC = \mathbb{R}_0$.

2. $f : [-8, 5) \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases} |2x - 2\pi| & \text{si } x \leqslant \pi \\ \dfrac{x \sin x}{\cos x + \sqrt{2}} & \text{si } x > \pi \end{cases}.$

Dans $[-8, \pi)$, f est continue comme composée et somme de fonctions continues dans $\mathbb{R}$ et donc dans ses sous-ensembles. Notons au passage que la continuité à droite en -8 découle immédiatement du fait que la fonction $|2x - 2\pi|$ est continue dans $\mathbb{R}$.

Comme $\forall x \in \mathbb{R} : \cos x + \sqrt{2} \neq 0$, dans$(\pi, 5)$, f est continue comme produit de x, $\sin x$ et $\dfrac{1}{\cos x + \sqrt{2}}$, qui sont toutes continues dans $\mathbb{R}$ et donc dans ses sous-ensembles.

Enfin, f est continue en le point charnière π, puisque f est continue à gauche et à droite en π. En effet, $\lim\limits_{\substack{x\to\pi \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to\pi \\ <}} |2x - 2\pi| = 2\pi - 2\pi = 0 = f(\pi) \Rightarrow f$ est continue à gauche en π.

Et $\lim\limits_{\substack{x\to\pi \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to\pi \\ >}} \dfrac{x \sin x}{\cos x + \sqrt{2}} = \dfrac{\pi \sin \pi}{\cos \pi + \sqrt{2}} = 0 = f(\pi) \Rightarrow f$ est continue à droite en π.

En conclusion, $DC = D = [-8, 5)$.

2.4 Théorème du point fixe de Brouwer

Plusieurs problèmes économiques, notamment en théorie de l'équilibre général, amènent à rechercher les points fixes d'une fonction, c'est-à-dire les points laissés invariants par la fonction.

> **Définition** Soit $f : D \to \mathbb{R} : x \to f(x)$. Le point $a \in D$ est appelé *point fixe* de f si $f(a) = a$. ❏
>
> **Théorème de Brouwer** Si $f : [a, b] \to [a, b] : x \to f(x)$ est continue dans $[a, b]$, alors : $\exists c \in [a, b] : f(c) = c$. ❏

Le théorème du point fixe de Brouwer affirme l'existence (mais pas l'unicité) d'un point fixe lorsque la fonction est continue dans un intervalle fermé et que les images se situent dans ce même intervalle.

3 Asymptotes

La fonction f admet une asymptote lorsque son graphe tend vers une droite, dénommée alors *asymptote* de la fonction. Deux types de limites peuvent conduire à une asymptote. D'une part, une limite unilatérale infinie en un point de $D'_D \cup D'_G$ se traduit par l'existence d'une asymptote verticale. D'autre part, lorsque le graphe de la fonction tend vers une droite pour $x \to \pm\infty$, on parlera, selon le cas, d'une asymptote horizontale ou oblique.

Définition La fonction $f : D \to \mathbb{R} : x \to f(x)$ admet une *asymptote verticale* à gauche (resp. à droite) en $a \in D'_D$ (resp. en $a \in D'_G$), notée AV $\equiv x = a$, si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \pm\infty$ (resp. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \pm\infty$). ❑

Notez que l'asymptote à droite est obtenue à l'aide d'une limite à gauche, et vice-versa, pour indiquer la position de l'asymptote par rapport au graphe de la fonction.

Remarques

- Une asymptote à droite et à gauche est dite bilatérale. Toutefois, l'existence de la limite bilatérale dans $\overline{\mathbb{R}}$ n'est pas nécessaire pour obtenir une asymptote bilatérale. En effet, on peut avoir, par exemple, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = -\infty$.
- Si $a \in DC$, la $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe automatiquement dans $\mathbb{R}$, et il n'y aura jamais d'asymptote verticale en a. Pour trouver les éventuelles asymptotes verticales d'une fonction, il suffit donc d'examiner les limites aux points de $(D'_D \cup D'_G) \setminus DC$.

Les asymptotes horizontales et/ou obliques concernent le comportement de la fonction lorsque $x \to \pm\infty$, sous réserve que le domaine permette de considérer de telles limites.

Définitions Soit $f : D \to \mathbb{R} : x \to f(x)$, où D contient une demi-droite $(-\infty, p)$ (resp. $(p, +\infty)$).

- f admet une *asymptote horizontale* à gauche (resp. à droite), notée AH $\equiv y = b$, si $\lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ (\text{resp. } x \to +\infty)}} f(x) = b \in \mathbb{R}$.
- f admet une *asymptote oblique* à gauche (resp. à droite), notée AO $\equiv y = ax + b$, si $\lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ (\text{resp. } x \to +\infty)}} \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}_0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ (\text{resp. } x \to +\infty)}} \left[f(x) - ax\right] = b \in \mathbb{R}$. ❑

Remarque

Si f admet une AH à gauche (resp. à droite), elle n'admettra pas d'AO à gauche (resp. à droite), et réciproquement.

Les exemples suivants montrent la marche à suivre pour la détermination des asymptotes.

Exemples

1. $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \to \dfrac{1}{x}\cdot$

Recherche d'asymptotes verticales :

$D'_D = \mathbb{R}^+$, $D'_G = \mathbb{R}_0^+ = DC \Rightarrow (D'_D \cup D'_G) \setminus DC = \{0\}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x} = +\infty \Rightarrow$ AV $\equiv x = 0$ à gauche.

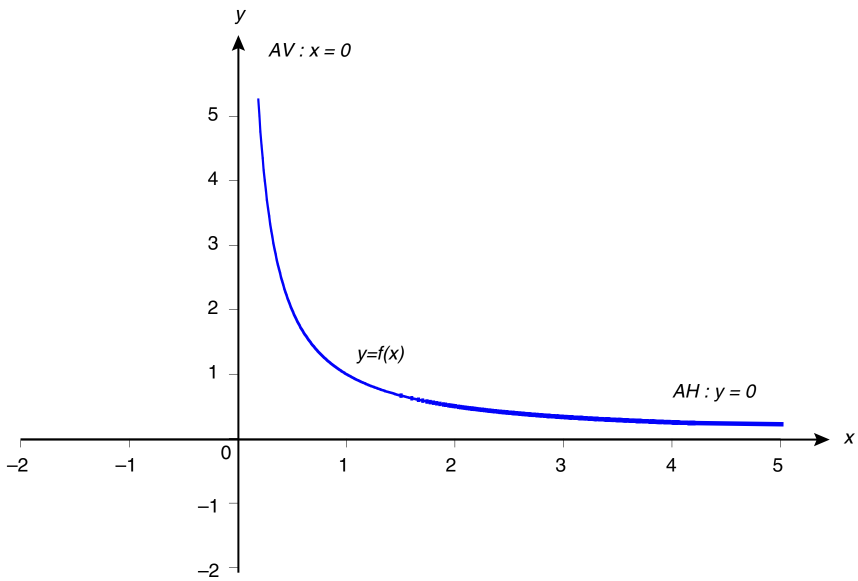
Recherche d'asymptotes horizontales et/ou obliques :

$D = \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow \nexists\text{AH}$ à gauche et $\nexists\text{AO}$ à gauche.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \Rightarrow \text{AH} \equiv y = 0$ à droite $\Rightarrow \nexists\text{AO}$ à droite.

En outre, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0^+$. Le graphe est donc situé au-dessus de l'AH (voir figure 3.2).

Figure 3.2



2. $f : \mathbb{R}\backslash\{1,-1\} \to \mathbb{R} : x \to \dfrac{x^3+2}{x^2-1}$.

Recherche d'asymptotes verticales :

$D'_D = D'_G = \mathbb{R}, DC = \mathbb{R}\backslash\{1,-1\} \Rightarrow \left(D'_D \cup D'_G\right)\backslash DC = \{1,-1\},$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >\\ <}} \dfrac{x^3+2}{x^2-1} = \pm\infty \Rightarrow AV \equiv x = 1$ (bilatérale)

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >\\ <}} \dfrac{x^3+2}{x^2-1} = \mp\infty \Rightarrow AV \equiv x = -1$ (bilatérale).

Recherche d'asymptotes horizontales et/ou obliques :

$\mathbb{R}\backslash\{-1,+1\} \supset (-\infty,-2)$ et $(2,+\infty)$

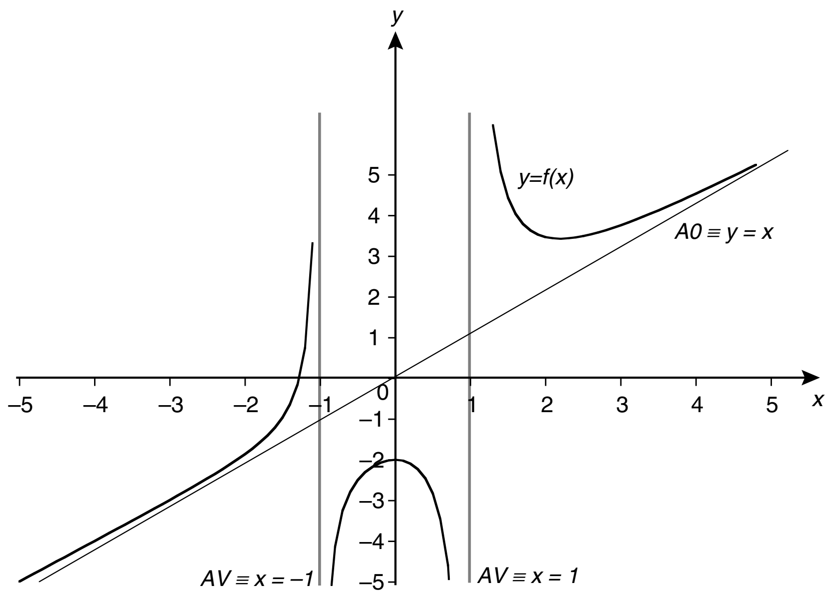
$\lim\limits_{x\to\mp\infty} \dfrac{x^3+2}{x^2-1} = \mp\infty \notin \mathbb{R} \Rightarrow \nexists\text{AH}$

$\lim\limits_{x\to\mp\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\mp\infty} \dfrac{x^3+2}{x^3-x} = 1 \in \mathbb{R}_0$ et

$\lim\limits_{x\to\mp\infty} \left(f(x) - 1.x\right) = \lim\limits_{x\to\mp\infty} \left(\dfrac{x^3+2}{x^2-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\mp\infty} \dfrac{x^3+2-x^3+x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to\mp\infty} \dfrac{x+2}{x^2-1} = 0$

$\Rightarrow \text{AO} \equiv y = x$ bilatérale (voir figure 3.3, page suivante).

Figure 3.3



4 Dérivabilité

Les dérivées jouent un rôle fondamental dans l'étude de la variation des fonctions. Au plan théorique, elles permettent d'aborder la caractérisation des fonctions monotones et la détermination des extrema. Au plan appliqué, elles conduisent à la formalisation de notions aussi importantes que la vitesse et l'accélération en physique, le coût marginal ou l'utilité marginale en gestion.

4.1 Définitions

Avant de calculer la dérivée d'une fonction, il convient d'examiner si la fonction est suffisamment régulière. Ainsi, on définira les notions de dérivabilités unilatérale et bilatérale en un point et dans un ensemble, ce qui conduira au domaine de dérivabilité. La notion de dérivée repose sur la limite du taux de variation. Des propriétés et des règles pratiques sont également fournies pour en faciliter le calcul.

Définitions Soit $f : D \to \mathbb{R} : x \to f(x)$.

- f est *dérivable* en $a \in \left(D' \cap D\right)$ si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \exists$ dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas, cette limite est appelée *dérivée* de f en a et est notée $f'(a)$.
- f est *dérivable à gauche (resp. à droite)*, en $a \in \left(D'_G \cap D\right)$, (resp. $a \in \left(D'_D \cap D\right)$), si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ < \\ (>)}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \exists$ dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas, cette limite est appelée *dérivée à gauche (resp. à droite)* de f en a et est notée $f'_g(a)$ (resp. $f'_d(a)$).

- f est *dérivable dans* D si toutes les conditions suivantes sont remplies :
  (i) $\forall a \in (D' \cap D) : f$ est dérivable en a ;
  (ii) $\forall a \in \big((D'_G \backslash D') \cap D\big) : f$ est dérivable à gauche en a ;
  (iii) $\forall a \in \big((D'_D \backslash D') \cap D\big) : f$ est dérivable à droite en a.
- Le *domaine de dérivabilité* de f, noté DD, est le plus grand sous-ensemble de D dans lequel f est dérivable.
- La *fonction dérivée* de f est la fonction $f' : DD \cap D' \to \mathbb{R} : x \to f'(x)$. ❑

4.2 Interprétation géométrique de la dérivée

Lorsqu'elle existe, la dérivée $f'(a)$ est le coefficient angulaire de la tangente T_a au graphe de la fonction au point d'abscisse a, dont l'équation est : $T_a \equiv y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

Exemples

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x$.

On a : $D = D' = \mathbb{R}$ et $\forall a \in \mathbb{R} : \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{x-a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} 1 = 1 \in \mathbb{R}$. f est donc dérivable dans $\mathbb{R}$: $DD = \mathbb{R}$ et $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 1$.

En tout point $a \in \mathbb{R}$, la tangente, $T_a \equiv y = x$, coïncide avec le graphe de la fonction.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Cette fonction est définie et continue dans $\mathbb{R}$, mais :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{-x}{x} = -1 \Rightarrow f'_g(0) = -1$$

et

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow f'_d(0) = 1.$$

La fonction f est donc dérivable à gauche et à droite en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

$DD = \mathbb{R}_0$ et $f' : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

$\forall a \in \mathbb{R}_0^- : T_a \equiv y = -x$ et $\forall a \in \mathbb{R}_0^+ : T_a \equiv y = x$.

4.3 Fonctions de référence

On supposera dorénavant acquise la dérivabilité des fonctions de référence suivantes dans leurs domaines respectifs, ainsi que les expressions de leurs dérivées :

$f(x)$	D	$f'(x)$	$f(x)$	D	$f'(x)$
b	$\mathbb{R}$	0	x^α $(\alpha \in \mathbb{Q})$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_0$	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\ln x$	$\mathbb{R}_0^+$	$\dfrac{1}{x}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{cotg} x$	$\mathbb{R}\backslash\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\dfrac{-1}{\sin^2 x}$

4.4 Propriétés

Les notions de continuité et de dérivabilité sont liées de manière très simple.

Propriétés

- f est dérivable en $a \Rightarrow f$ est continue en a.
- f est dérivable à droite (resp. à gauche) en $a \Rightarrow f$ est continue à droite (resp. à gauche) en a. ❑

On a donc $DD \subset DC \subset D$. Notons que les réciproques de ces propriétés sont fausses. Par exemple, la fonction « valeur absolue » est continue mais non dérivable en 0.

Propriété f est dérivable en $a \in D \cap D' \Leftrightarrow f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ existent et sont égales. ❑

La dérivabilité de chaque côté ne suffit pas à garantir la dérivabilité en un point. Ainsi, les points en lesquels la fonction est dérivable à gauche et à droite, sans être dérivable (dérivées à gauche et à droite distinctes), sont appelés des « points anguleux », parce que les deux « demi-tangentes » unilatérales forment un angle.

Règles de calcul des dérivées

- Si f et g sont dérivables en a, alors :
  (i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$: λf est dérivable en a et $\big(\lambda f\big)'(a) = \lambda f'(a)$;
  (ii) $(f+g)$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;
  (iii) $(f.g)$ est dérivable en a et $(f.g)'(a) = f'(a).g(a) + f(a).g'(a)$;
  (iv) Si $g(a) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{\big(g(a)\big)^2}$.
  (v) Si $f(a) > 0$, f^g est dérivable en a et

$$\left[f(a)^{g(a)}\right]' = f(a)^{g(a)}\left(g'(a)\ln f(a) + g(a)\frac{1}{f(a)}f'(a)\right).$$

- Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big)f'(a)$. ❑

Ces propriétés s'étendent à la dérivabilité à gauche (resp. à droite).

En pratique, l'étude de la dérivabilité d'une fonction s'effectue selon la même démarche que celle de la continuité. En outre, la dérivabilité est d'emblée exclue en les points où la fonction est discontinue. S'ajoute ici le calcul de la fonction dérivée.

Exemples

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to |x|$. $\quad DC = \mathbb{R}$, $DD = \mathbb{R}_0$.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \text{signe}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$. $\quad DC = DD = \mathbb{R}_0$.

3. $f : [-8, 5) \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases} |2x - 2\pi| & \text{si } x \leqslant \pi \\ \dfrac{x \sin x}{\cos x + \sqrt{2}} & \text{si } x > \pi \end{cases}$. $\quad DC = [-8, 5)$ et $DD = [-8, 5) \setminus \{\pi\}$.

En effet, dans $[-8, \pi)$, f est dérivable comme composée d'un polynôme, dérivable dans $\mathbb{R}$, et de $|x|$ dérivable dans $\mathbb{R}_0$. Dans $(\pi, 5)$, f est dérivable comme quotient de $x \sin x$, dérivable dans $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions de référence dérivables dans $\mathbb{R}$, et de $\cos x + \sqrt{2}$, dérivable dans $\mathbb{R}$ en tant que somme non nulle de fonctions de référence dérivables dans $\mathbb{R}$. Au point charnière π :

- $\displaystyle \lim_{\substack{x \to \pi \\ <}} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{\substack{x \to \pi \\ <}} \frac{|2x - 2\pi| - 0}{x - \pi} = 2\frac{\pi - x}{x - \pi} = -2 \in \mathbb{R}$

  $\Rightarrow f$ est dérivable à gauche en π et $f'_g(\pi) = -2$.

- $$\lim_{\substack{x \to \pi \\ >}} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{\substack{x \to \pi \\ >}} \frac{x.\sin x - 0}{(\cos x + \sqrt{2})(x - \pi)} = \lim_{\substack{x \to \pi \\ >}} \frac{-x.\sin(\pi - x)}{(\cos x + \sqrt{2})(\pi - x)}$$
  $$= \frac{-\pi}{-1 + \sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2} - 1} \in \mathbb{R}$$

  $\Rightarrow f$ est dérivable à droite en π et $f'_d(\pi) = \dfrac{\pi}{\sqrt{2} - 1} \neq f'_g(\pi)$.

Donc, f admet un point anguleux en π.

4. Considérons la fonction $(\text{tg}\, x)^{\cos x}$ dans un domaine D tel que $\forall x \in D : \text{tg}\, x > 0$.

$$\forall x \in D' : \quad \left[(\text{tg}\, x)^{\cos x}\right]' = (\text{tg}\, x)^{\cos x} \left[-(\sin x)\ln(\text{tg}\, x) + \cos x \frac{1}{\text{tg}\, x}\frac{1}{\cos^2 x}\right]$$
$$= (\text{tg}\, x)^{\cos x} \left[\frac{1}{\sin x} - (\sin x)\ln(\text{tg}\, x)\right].$$

4.5 La règle de l'Hospital

La règle de l'Hospital est utile pour lever des indéterminations qui se présentent dans les calculs de limites de fonctions. Elle est, au départ, formulée pour le cas « $\dfrac{0}{0}$ », mais elle s'adapte simplement à toutes les formes indéterminées.

Règle de l'Hospital Soit $f : D_1 \to \mathbb{R} : x \to f(x)$, $g : D_2 \to \mathbb{R} : x \to g(x)$ et $a \in (D'_1 \cap D'_2)$.

Si :

(i) $\displaystyle \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$;

(ii) $\exists \eta > 0 : f$ et g sont dérivables dans $(a - \eta, a + \eta) \setminus \{a\}$;

(iii) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$;

alors : $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. ❑

Moyennant des modifications évidentes de formulation, ce résultat est également applicable aux limites unilatérales et pour $x \to \pm\infty$.

L'hypothèse (i) fait référence à la forme indéterminée « $\dfrac{0}{0}$ ». En fait, la règle s'adapte également aux autres formes indéterminées de la manière suivante :

- Directement pour $\dfrac{\infty}{\infty}$.
- Pour $0 \times \infty$, la transformation $f(x)g(x) = \dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ permet de se ramener au cas $\dfrac{0}{0}$.
- Pour $\infty - \infty$, la transformation $f(x) - g(x) = \dfrac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x).g(x)}}$

  permet de se ramener au cas $\dfrac{0}{0}$.

  Toutefois, cette transformation complique souvent les calculs. Il est donc préférable de l'utiliser en dernier recours, après avoir tenté de factoriser et de simplifier l'expression initiale ou, tout simplement, de mettre au même dénominateur.
- Pour les formes indéterminées de type exponentiel (0^0, 1^∞, ∞^0), l'écriture $f(x)^{g(x)} = e^{g(x).\ln f(x)}$ place l'indétermination au niveau du logarithme de la limite recherchée, sous la forme $0 \times \infty$ traitée précédemment.

Exemple

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt[3]{x^3 - 2x}\right) = \lim_{x \to +\infty} x \left(1 - \sqrt[3]{1 - \frac{2}{x^2}}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(1 - \sqrt[3]{1 - \frac{2}{x^2}}\right)}{\frac{1}{x}}.$$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type $\infty - \infty$ qui se ramène à $0 \times \infty$, puis à $\dfrac{0}{0}$. Les hypothèses de la règle de l'Hospital sont vérifiées. On obtient :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt[3]{x^3 - 2x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{4}{3}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)^{-2/3} x^{-1}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{4}{3} \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)^{2/3}} = +\infty.$$

Enfin, la règle de l'Hospital s'applique uniquement aux formes indéterminées. On ne peut donc pas en faire usage pour calculer toute limite de quotient.

5 Théorème de Taylor

Le théorème de Taylor permet d'approcher des fonctions par un polynôme tout en établissant une majoration de l'erreur commise. Il utilise les dérivées successives, dont la dérivée seconde.

Définitions Soit $f : D \to \mathbb{R} : x \to f(x)$ et $a \in DD \cap D'$.

- f est *deux fois dérivable en* a si sa dérivée première f' est dérivable en a.
- Dans ce cas, $f''(a) = (f')'(a)$ est appelée *dérivée seconde* de f en a. ❑

De manière générale, on peut ainsi définir la notion de fonction p fois dérivable, le cas échéant à droite et/ou à gauche, en un point, puis dans un ensemble. De même, on définit les dérivées d'ordre p, unilatérales ou bilatérales.

Exemple

La fonction $f(x) = \sin x$ est dérivable dans $\mathbb{R}$ et sa dérivée, $f'(x) = \cos x$, est aussi dérivable dans $\mathbb{R}$. Elle est donc deux fois dérivable dans $\mathbb{R}$ et $f''(x) = (\cos x)' = -\sin x$.

Le théorème de Taylor offre une approximation polynomiale locale (au voisinage d'un point) d'une fonction pour autant qu'elle soit suffisamment régulière. La formule décompose la valeur de la fonction en deux termes : l'approximation dite de Taylor et le terme d'erreur, ou « reste », dont l'expression permet d'en établir une majoration spécifique (fonction de la dérivée d'ordre $p+1$ de la fonction considérée). Sachant que la « factorielle » d'un nombre $n \in \mathbb{N}_0$, notée $n!$, est définie par : $n! = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots 1$, avec, par convention, $0! = 1$, on formule le *théorème de Taylor* comme suit.

Théorème de Taylor Si f est $(p+1)$ fois dérivable dans l'intervalle $(a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_2)$, où $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, alors :

$$\forall x \in (a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_2) : f(x) = \underbrace{\underbrace{\sum_{i=0}^{p} \frac{f^{i/}(a)}{i!}(x-a)^i}_{\text{approximation de Taylor d'ordre } p} + \underbrace{\frac{f^{p+1/}(\alpha)}{(p+1)!}(x-a)^{p+1}}_{\text{reste d'ordre } p}}_{\text{développement de Taylor d'ordre } p}$$

où $\alpha = a + \theta\,(x-a)$, $\theta \in (0, 1)$. ❑

Dans le cas particulier où $a = 0$, le développement de Taylor est appelé *développement de Mac Laurin*.

Exemple

Le développement de Mac Laurin d'ordre pair $2k$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ de la fonction $f(x) = \sin x$ est donné par :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^{k+1}x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \underbrace{\frac{(-1)^k\,(\cos\alpha)}{(2k+1)!}x^{2k+1}}_{\text{Reste d'ordre } 2k}, \quad \text{où } 0 < \alpha < x,$$

puisque f est indéfiniment dérivable et $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, etc.

6 Caractéristiques des fonctions d'une variable

6.1 Fonctions monotones

Les fonctions partout croissantes, ou partout décroissantes, dans un domaine donné sont dites monotones dans ce domaine. Cette classe de fonctions, aisément caractérisable à l'aide de la dérivée première (sous réserve de régularité suffisante), joue un rôle pratique important, puisque la formalisation de plusieurs problèmes de gestion exige d'emblée des fonctions de ce type. Par exemple, la quantité globale demandée d'un bien de consommation est décroissante en fonction du prix, la quantité offerte généralement croissante, l'utilité attendue des investisseurs dépend positivement du rendement attendu (fonction croissante) et négativement du risque (fonction décroissante), etc.

Les fonctions qui sont tantôt croissantes, tantôt décroissantes dans leur domaine d'étude ne sont pas globalement monotones. Cependant, en découpant de façon cohérente le domaine, il est le plus souvent possible de dégager des sous-domaines dans lesquels une fonction donnée est monotone. Donc, même dans ce cas, les notions définies ci-dessous prennent tout leur intérêt.

Définitions Soit $f : D \to \mathbb{R} : x \to f(x)$

- f est *(strictement) croissante*[1] dans D si $\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \underset{(<)}{\leqslant} f(x_2)$.
- f est *(strictement) décroissante* dans D si $\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \underset{(>)}{\geqslant} f(x_2)$.
- f est *monotone* dans D si f est croissante dans D ou décroissante dans D. ❑

La propriété suivante permet d'établir la monotonie d'une fonction suffisamment régulière grâce au signe de sa dérivée première. En pratique, elle constitue un outil fondamental. En particulier, lorsque la fonction exprime l'évolution d'une variable au cours du temps (modélisation en temps continu), elle permet d'identifier, en fonction de la spécification retenue, les périodes de hausse et de baisse de cette variable.

Propriété Si D est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R} : x \to f(x)$ est continue dans D et dérivable dans D', alors :

- f est croissante dans $D \Leftrightarrow \forall x \in D' : f'(x) \geqslant 0$;
- f est décroissante dans $D \Leftrightarrow \forall x \in D' : f'(x) \leqslant 0$;
- f est strictement croissante dans $D \Leftarrow \forall x \in D' : f'(x) > 0$;
- f est strictement décroissante dans $D \Leftarrow \forall x \in D' : f'(x) < 0$. ❑

Exemple

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 3x - 1$ est continue et dérivable dans $\mathbb{R}$ et $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to 3$. On a $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ est strictement croissante dans $\mathbb{R}$.

1. Alternativement, on peut utiliser les qualificatifs « non décroissante » et « croissante » en lieu et place de « croissante » et « strictement croissante », respectivement.

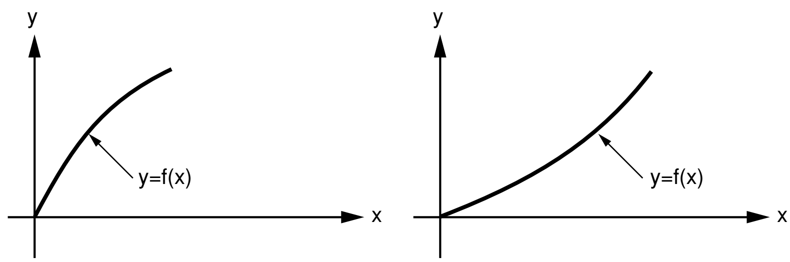
Lorsque le domaine D n'est pas convexe, la propriété n'est pas applicable directement. On peut cependant l'utiliser dans les sous-domaines convexes de D. Par ailleurs, dans le cas des fonctions strictement monotones, la condition de signe (strict) de la dérivée est suffisante, mais pas nécessaire. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^3$, qui est continue et dérivable dans $\mathbb{R}$ (avec $f'(x) = 3x^2$), est strictement croissante dans $\mathbb{R}$ ($\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow x^3 < y^3$) et pourtant sa dérivée s'annule en 0 ($f'(0) = 0$).

6.2 Fonctions concaves et convexes

Une fonction de production, ici à un facteur, est naturellement croissante puisque, avec une quantité supérieure du facteur de production, on ne peut qu'accroître le niveau produit. Elle peut être concave (fonction de production à rendements décroissants) ou convexe (fonction de production à rendements croissants). Les figures 3.4 illustrent ces possibilités dans le cas particulier où la fonction f est croissante et $f(0) = 0$, ce qui est typique pour une fonction de production puisque, sans facteur, la production est nulle.

Figure 3.4

Fonction de production concave (à gauche). Fonction de production convexe (à droite)



De façon générale, c'est la courbure du graphe qui est visée. Orientée vers le bas, l'allure de la courbe est dite concave, et, vers le haut, convexe. En outre, ces notions sont déterminantes dans l'étude des extrema ou optimisation. Les définitions de fonctions concaves et convexes s'énoncent dans les domaines D qui sont des *sous-ensembles convexes* de $\mathbb{R}$, ce qui implique que $D' \subset D$.

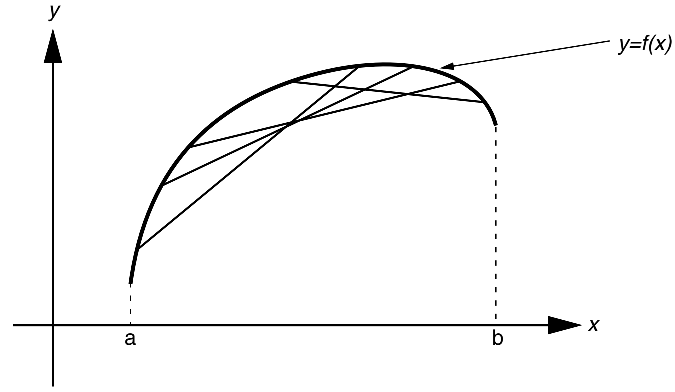
Définitions Soit $f : D \to \mathbb{R} : x \to f(x)$, où D est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}$.

- f est *concave* dans D si :
  $\forall x, y \in D, \forall \lambda \in [0, 1] : f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.
- f est *convexe* dans D si :
  $\forall x, y \in D, \forall \lambda \in [0, 1] : f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.
- f est *strictement concave* (resp. *convexe*) dans D si :
  $\forall x, y \in D (x \neq y), \forall \lambda \in (0, 1) : f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \underset{(\text{resp.} <)}{>} \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$. ❑

Ces inégalités offrent une interprétation géométrique directe : les fonctions concaves (voir la figure 3.5, page suivante) (resp. convexes), sont telles que toute sécante joignant deux points du graphe se situe sous le graphe, (resp. au-dessus du graphe). En outre, la concavité et la convexité strictes excluent la présence de « morceaux linéaires » dans le graphe.

De façon générale, le graphe d'une fonction continue dans un domaine convexe est tantôt concave, tantôt convexe. Les points où se situe la transition de l'une à l'autre de ces situations sont appelés « points d'inflexion ».

Figure 3.5



Définition f admet un *point d'inflexion* en a si f est continue en a et si

$$\exists\eta > 0 : \begin{cases} f \text{ est convexe (resp. concave) dans } (a-\eta, a) \\ f \text{ est concave (resp. convexe) dans } (a, a+\eta) \end{cases} .$$ ❏

En un point d'inflexion en lequel la fonction est dérivable (figure 3.6), le graphe de la fonction traverse la tangente. Si le point d'inflexion est situé en un point anguleux (figure 3.7), le graphe traverse la droite brisée constituée de deux « demi-tangentes » droite et gauche.

Figure 3.6

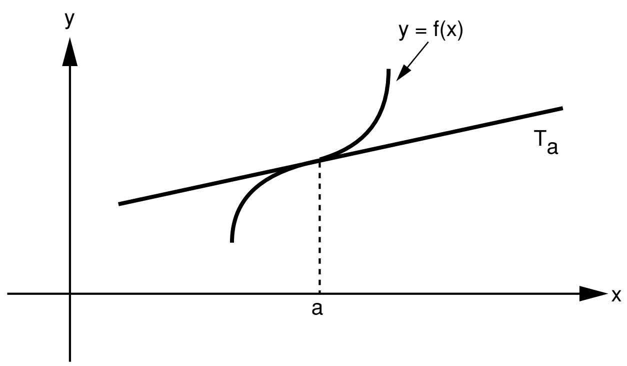
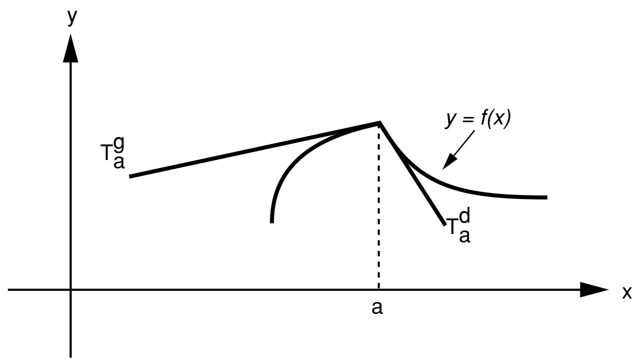


Figure 3.7



Dans toutes les propriétés qui suivent, le domaine D est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}$.

Propriétés

- f_1 et f_2 sont concaves (resp. convexes) dans $D \Rightarrow f_1 + f_2$ est concave (resp. convexe) dans D.
- Si f est concave (resp. convexe) dans D, alors :
  αf est concave (resp. convexe) dans D si $\alpha \geqslant 0$,
  αf est convexe (resp. concave) dans D si $\alpha \leqslant 0$.
- f est concave (resp. convexe) dans $D \Leftrightarrow \forall a \in D$, $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est une fonction décroissante (resp. croissante) dans $D \backslash \{a\}$. ❏

La dernière propriété concerne la monotonie du taux de variation des fonctions concaves et convexes. Elle s'applique notamment aux fonctions de production. En effet, comme $f(0) = 0$, en choisissant $a = 0$, on obtient que la productivité moyenne, $\dfrac{f(x)}{x}$, est décroissante pour une fonction de production concave et croissante pour une fonction de production convexe.

Le lien entre la concavité et la convexité d'une part, la continuité et la dérivabilité de l'autre est donné par la propriété suivante.

Propriété f est concave dans D ou convexe dans $D \Rightarrow f$ est continue, dérivable à gauche et à droite dans D'. ❏

Néanmoins, f n'est pas nécessairement dérivable dans D'. Par exemple, la fonction $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable dans $\mathbb{R}$ (non dérivable en 0) et pourtant convexe dans $\mathbb{R}$ puisque :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in [0, 1] :$$
$$|(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2)| \leqslant |\lambda x_1| + |(1 - \lambda) x_2| = \lambda |x_1| + (1 - \lambda) |x_2| .$$

La propriété suivante est probablement la plus importante en pratique. Elle permet de caractériser les fonctions concaves et convexes régulières à l'aide du signe de leur dérivée seconde.

Propriété Si f est 2 fois dérivable dans D, alors :

- f est concave dans $D \Leftrightarrow \forall x \in D' : f''(x) \leqslant 0$;
- f est convexe dans $D \Leftrightarrow \forall x \in D' : f''(x) \geqslant 0$. ❏

Exemple

$f(x) = x^2 - 5x + 1$ est deux fois dérivable dans $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x - 5$, $f''(x) = 2$. On a $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ est strictement convexe dans $\mathbb{R}$.

Les fonctions « minimum » et « maximum » sont utiles, par exemple, dans la modélisation des marchés en déséquilibre. Elles apparaissent ici parce qu'elles bénéficient de propriétés intéressantes au niveau de la concavité/convexité.

Définitions Soit deux fonctions f_1 et $f_2 : D \to \mathbb{R}$.

- $\min \{f_1, f_2\} : D \to \mathbb{R} : x \to \min \{f_1(x), f_2(x)\}$.
- $\max \{f_1, f_2\} : D \to \mathbb{R} : x \to \max \{f_1(x), f_2(x)\}$. ❏

En chaque point de D, la fonction $\min\{f_1, f_2\}$ (resp. $\max\{\{f_1, f_2\}\}$) prend la plus petite (resp. la plus grande), des valeurs prises en ce point par les deux fonctions de départ.

Propriétés

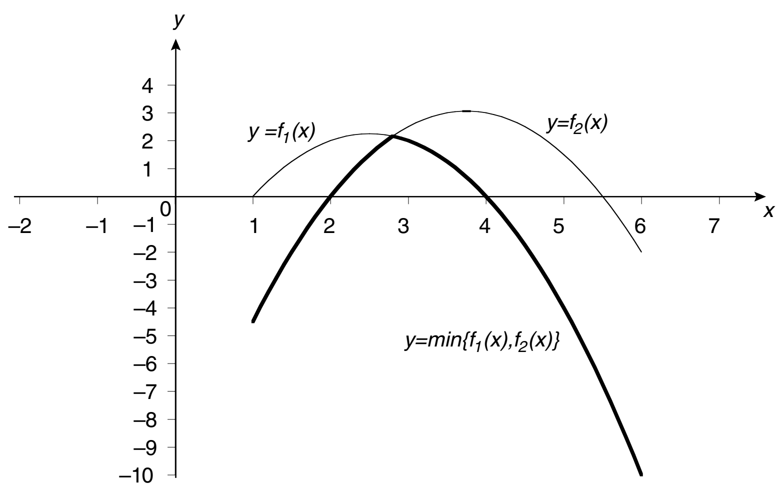
- f_1 et f_2 sont concaves dans $D \Rightarrow \min\{f_1, f_2\}$ est concave dans D.
- f_1 et f_2 sont convexes dans $D \Rightarrow \max\{f_1, f_2\}$ est convexe dans D. ❑

Exemple

Les fonctions $f_1 : [1, 6] \to \mathbb{R} : x \to -x^2 + 5x - 4$ et $f_2 : [1, 6] \to \mathbb{R} : x \to -x^2 + \frac{15}{2}x - 11$, sont toutes deux concaves dans $[1, 6]$. Il s'ensuit que :

$\min\{f_1, f_2\} : [1, 6] \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases} -x^2 + \frac{15}{2}x - 11 & \text{si } x \in \left[1, \frac{14}{5}\right] \\ -x^2 + 5x - 4 & \text{si } x \in \left[\frac{14}{5}, 6\right] \end{cases}$ est également concave dans $[1, 6]$ (voir figure 3.8).

Figure 3.8



Problèmes et exercices

Techniquement, ce sont à coup sûr les limites de fonctions qui occupent la majeure partie des exercices. D'abord étudiées pour elles-mêmes, elles apparaissent ensuite dans l'étude de la continuité, de la dérivabilité et des asymptotes. Les techniques de dérivation sont aussi à l'honneur, tant pour établir les équations de tangentes et les développements de Taylor que pour discuter la croissance/décroissance et la concavité/convexité des fonctions. Des applications à la gestion clôturent ces exercices.

Limites de fonctions

EXERCICE 1

Énoncé

Pour les fonctions suivantes, déterminez les domaines D, D', D'_D, D'_G.

a $f : D \to \mathbb{R} : x \to \ln x$.

b $f : D \to \mathbb{R} : x \to \dfrac{1}{x}$.

c $f : D \to \mathbb{R} : x \to \dfrac{1}{\ln(3-x)}$.

d $f : D \to \mathbb{R} : x \to \dfrac{\sqrt{x}}{x^2-9}$.

Solution

a $D = D' = \mathbb{R}_0^+$. En effet :

$$\forall x \in (0, +\infty), \exists \delta = \frac{x}{2} > 0 : (x-\delta, x+\delta) \subset D \Rightarrow \exists \delta > 0 : (x-\delta, x+\delta)\backslash\{x\} \subset D\,.$$

Par exemple pour $x = 1$, on peut choisir $\delta = \dfrac{1}{2}$ pour obtenir $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)\backslash\{1\} \subset (0, +\infty)$.

Aucun autre point ne vérifie la définition de D'.

$D'_G = (0, +\infty)$ car

(i) $D' \subset D'_G \Rightarrow D'_G \supset (0, +\infty)$

(ii) $0 \notin D'_G$ puisque $\forall \delta > 0 : (-\delta, 0) \not\subset D$

(iii) aucun autre point ne vérifie la définition de D'_G.

$D'_D = [0, +\infty)$ car

(i) $D' \subset D'_D \Rightarrow D'_D \supset (0, +\infty)$

(ii) $0 \in D'_D$ puisque $\exists \delta = 1 > 0 : (0, \delta) = (0, 1) \subset D$

(iii) aucun autre point ne vérifie la définition de D'_D.

b $D = \mathbb{R}_0$ car la fonction n'est pas définie en $x = 0$. $D'_G = D'_D = D' = \mathbb{R}$.

c $D = (-\infty, 3)\backslash\{2\}$, $D' = (-\infty, 3)$, $D'_G = (-\infty, 3]$ et $D'_D = (-\infty, 3)$.

d $D = [0, +\infty)\backslash\{-3, 3\}$, $D' = (0, +\infty)$, $D'_G = (0, +\infty)$, $D'_D = [0, +\infty)$.

EXERCICE 2

Énoncé

À l'aide de la définition de la notion de limite bilatérale, démontrez les résultats suivants.

a $\forall a \in \mathbb{R} : \lim\limits_{x\to a} x = a$.

b $\forall a, b \in \mathbb{R} : \lim\limits_{x\to a} b = b$.

Solution

a Pour montrer que : $\forall a \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow |x - a| < \varepsilon$, on prend par exemple $\eta = \varepsilon$.

b On doit montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : 0 < |x - a| < \eta \Rightarrow |b - b| < \varepsilon$. Comme : $|b - b| = 0 < \varepsilon$ est toujours vrai, on peut prendre un $\eta > 0$ quelconque.

EXERCICE 3

Énoncé

À l'aide des définitions, déterminez les limites suivantes dans $\overline{\mathbb{R}}$.

a $\lim\limits_{x\to 2}(3x - 5)$.

b $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ >}} \sqrt{x+1}$.

c $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x}\cdot$

d $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x$.

Solution

a $\lim\limits_{x\to 2} (3x - 5) = 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : 0 < |x - 2| < \eta \Rightarrow |(3x - 5) - 1| < \varepsilon$

Comme $|3x - 6| < \varepsilon \Leftrightarrow 3\,|x - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, il suffit de prendre $0 < \eta \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}\cdot$

b $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ >}} \sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : 0 < x + 1 < \eta \Rightarrow \left|(\sqrt{x+1}) - 0\right| < \varepsilon$.

Comme $\left|\sqrt{x+1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{x+1} < \varepsilon \Leftrightarrow x + 1 < \varepsilon^2$ (car $\sqrt{x+1} \geqslant 0$), il suffit de prendre $0 < \eta \leqslant \varepsilon^2$.

c $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} \dfrac{1}{x} = -\infty \Leftrightarrow \forall L > 0, \exists \eta > 0 : \underbrace{0 < 0 - x < \eta}_{0>x>-\eta} \Rightarrow \underbrace{\dfrac{1}{x} < -L}_{(*)}$.

Comme $(*) \Leftrightarrow \frac{1}{L} > -x \Leftrightarrow x > -\frac{1}{L}$ (car $x < 0$), il suffit de prendre un nombre η tel que $-\eta > -\frac{1}{L}$ et $\eta > 0$, c'est-à-dire tel que : $0 < \eta < \frac{1}{L}$.

d $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \Leftrightarrow \forall L > 0, \exists K > 0 : \begin{cases} x > K \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \underbrace{e^x > L}_{(*)}.$

Comme $(*) \Leftrightarrow x > \ln L$, il suffit de prendre $K > \min\{0, \ln L\}$.

EXERCICE 4

Énoncé

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$.
Calculez $\lim_{x \to \alpha} \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right)$.

Solution

$\lim_{x \to \alpha} \left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right) = \left(a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0\right)$

Démontrons ce résultat par récurrence.

Il est vérifié pour $n = 0$: $\lim_{x \to \alpha} a_0 = a_0$ (limite d'une fonction constante).

En supposant qu'il est vérifié pour un polynôme de degré $n = k - 1$, montrons-le pour un polynôme de degré $n = k$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to \alpha} \left(a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right) \\
&\quad = \lim_{x \to \alpha} \left(a_k x^k\right) + \lim_{x \to \alpha} \left(a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right) \\
&\quad = \lim_{x \to \alpha} \left(a_k x^k\right) + \left(a_{k-1}\alpha^{k-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0\right) \\
&\quad = \lim_{x \to \alpha} \left(a_k x^{k-1}.x^1\right) + \left(a_{k-1}\alpha^{k-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0\right) \\
&\quad = \lim_{x \to \alpha} \left(a_k x^{k-1}\right) . \lim_{x \to \alpha} x + \left(a_{k-1}\alpha^{k-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0\right) \\
&\quad = \left(a_k \alpha^{k-1}\right) .\alpha + \left(a_{k-1}\alpha^{k-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0\right) \\
&\quad = \left(a_k \alpha^k + a_{k-1}\alpha^{k-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0\right).
\end{aligned}$$

EXERCICE 5

Énoncé

À l'aide des propriétés, calculez les limites suivantes dans $\overline{\mathbb{R}}$.

a $\lim_{x \to 1} (\ln x - 1)$.

b $\lim_{x \to 2} \frac{e^x \cdot x}{(x-2)^2}$.

c $\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \ln(\sqrt{x+1})$.

d $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 + x^2 - 6x + 3}{2x^3 + 3x - 1}$.

Solution

a $\lim\limits_{x\to 1}(\ln x - 1) = \lim\limits_{x\to 1}(\ln x + (-1)) = \lim\limits_{x\to 1}(\ln x) + \lim\limits_{x\to 1}(-1) = 0 + (-1) = -1$

b $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^x \cdot x}{(x-2)^2} = +\infty$ (règle de calcul dans $\overline{\mathbb{R}}$: $\dfrac{e^2.2}{0^{(+)}}$).

c $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}}\sqrt{x+1} = 0^{(+)}\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\ln x = -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}}\ln(\sqrt{x+1}) = -\infty\\ \text{(limite d'une composée de fonctions).}\end{array}$

d $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3+x^2-6x+3}{2x^3+3x-1} = \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3.\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{6}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}\right)}{x^3.\left(2+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)} = \dfrac{1}{2}.$

EXERCICE 6

Énoncé

Soit $n, m \in \mathbb{N}$ et $a_i\ (i = 0, 1, \ldots, n)$, $b_j\ \big(j = 0, 1, \ldots, m\big) \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$.

Déterminez dans $\overline{\mathbb{R}}$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0}$.

Solution

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^n.(\overbrace{a_n}^{\to a_n}+\overbrace{a_{n-1}x^{-1}+\cdots+a_0x^{-n}}^{\to 0})}{x^m.(\underbrace{b_m}_{\to b_m}+\underbrace{b_{m-1}x^{-1}+\cdots+b_0x^{-n}}_{\to 0})} =$$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}x^{n-m}.\dfrac{a_n}{b_m} = \begin{cases}\pm\infty(*) & \text{si } n > m\\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m\\ 0 & \text{si } n < m\end{cases}$ où le signe de (*) est déterminé par celui de $\dfrac{a_n}{b_m}$ et, pour $x \to -\infty$, par la parité de $(n-m)$.

EXERCICE 7

Énoncé

Dans chaque cas, les limites suivantes existent-elles dans $\overline{\mathbb{R}}$? Si oui, donnez leur valeur.

a $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$, où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases}-\ln(x-1) & \text{si } x > 1\\ \dfrac{2}{(x-1)^2} & \text{si } x \leqslant 1\end{cases}$.

b $\lim\limits_{x\to -1}g(x)$, où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases}\dfrac{2x+3}{x^2-1} & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}\\ 4 & \text{si } x \in \{-1, 1\}\end{cases}$.

c $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}}h(x)$, où $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases}\cos x + 1 & \text{si } x \notin \left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}\\ 2 & \text{si } x \in \left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}\end{cases}$.

d $\lim\limits_{x\to 4} i(x)$, où $i : \mathbb{R}\backslash\{4\} \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{si } x < 4 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x > 4 \end{cases}$.

Solution

a $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} \dfrac{2}{(x-1)^2} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} (-\ln(x-1)) = -(-\infty) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty.$

b $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ <}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ <}} \dfrac{2x+3}{x^2-1} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ >}} \dfrac{2x+3}{x^2-1} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} g(x) \nexists \text{ dans } \overline{\mathbb{R}}.$

c $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}} h(x) = \lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}} (\cos x + 1) = \lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}} (\cos x) + \lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}} 1 = 0 + 1 = 1.$

d $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 4 \\ <}} i(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 4 \\ <}} \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{\substack{x\to 4 \\ >}} i(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 4 \\ >}} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 4} i(x) = \dfrac{1}{2}.$

EXERCICE 8

Énoncé

Dans chaque cas, calculez la limite.

a $\lim\limits_{x\to +\infty} \sin x.$

b $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right).$

c $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right).$

d $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$.

Solution

a Par le théorème de transfert, $\lim\limits_{x\to +\infty} \sin x$ n'existe pas dans $\overline{\mathbb{R}}$. En effet, la suite $(x_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ définie par $x_t = \dfrac{\pi}{2} + t\pi$ est telle que $x_t \to +\infty$ mais $f(x_t) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + t\pi\right) = (-1)^t$ n'admet pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

b Par pincement : $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = 0$. En effet :

$$\forall x \in \mathbb{R}_0^+ : \underbrace{\frac{-1}{x}}_{\downarrow \atop 0} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant \underbrace{\frac{1}{x}}_{\downarrow \atop 0}.$$

c Par pincement : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right) = 1$. En effet :

$$\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\backslash\{0\} : |\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\operatorname{tg} x|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\sin x|} \geqslant \frac{1}{|x|} \geqslant \frac{1}{|\operatorname{tg} x|}$$

$$\Rightarrow \frac{|\sin x|}{|\sin x|} \geqslant \frac{|\sin x|}{|x|} \geqslant \frac{|\sin x|}{|\operatorname{tg} x|}$$

$$\Rightarrow \underbrace{1}_{\to 1} \geqslant \left|\frac{\sin x}{x}\right| = \frac{\sin x}{x} \geqslant \underbrace{\frac{1}{|\cos x|}}_{\to 1}.$$

d $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$

Les suites définies par $x_t = \dfrac{1}{t} + 2\ (\in \mathbb{R})$ et $y_t = \dfrac{\pi}{t} + 2\ (\in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ sont telles que

$\lim\limits_{t\to\infty} x_t = 2$ et $\lim\limits_{t\to\infty} y_t = 2$ mais $\lim\limits_{t\to\infty} f(x_t) = \lim\limits_{t\to\infty} f\left(\dfrac{1}{t} + 2\right) = \lim\limits_{t\to\infty} 1 = 1$ et $\lim\limits_{t\to\infty} f(y_t) = \lim\limits_{t\to\infty} f\left(\dfrac{\pi}{t} + 2\right) = \lim\limits_{t\to\infty} 0 = 0.$

Par le théorème de transfert, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \nexists$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Continuité

EXERCICE 9

Énoncé

Soit $f : \mathbb{R}\backslash\{2\} \to \mathbb{R} : x \to 2x + 4$.
Montrez, en revenant à la définition, que f est continue en 3.

Solution

$$f \text{ est continue en } x = 3 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \left.\begin{array}{l} x \in (3 - \eta, 3 + \eta) \\ x \in \mathbb{R}\backslash\{2\} \end{array}\right\} \Rightarrow \left|f(x) - f(3)\right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \left.\begin{array}{l} |x - 3| < \eta \\ x \neq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{|(2x + 4) - 10| < \varepsilon}_{(*)}.$$

Comme $(*) \Leftrightarrow |2x - 6| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 3| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, il suffit de prendre $0 < \eta \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\cdot$

EXERCICE 10

Énoncé

Donnez un exemple de fonction définie dans $D = [-2, 2)$ et dont le domaine de continuité est $DC = [-2, 2)\backslash\{1\}$.

Solution On peut prendre, par exemple, $f : [-2, 2) \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases} x & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$.

EXERCICE 11

Énoncé

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminez les domaines de définition et de continuité.

a $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{\sqrt{x-3}}$.

b $f(x) = e^x(x+1) - \cos x$, où $x \in [-1, 7]$.

c $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x x}{(x-2)^2} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$.

d $f(x) = \begin{cases} \cos x + 1 & \text{si } x \notin \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \\ 2 & \text{si } x \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$.

e $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x^2-4} & \text{si } x \leqslant 3 \text{ et } x \notin \{-2, 2\} \\ (x-3)\sin\left(\dfrac{1}{x-3}\right) + 2 & \text{si } x > 3 \\ e^x & \text{si } x \in \{-2, 2\} \end{cases}$.

f $f(x) = \begin{cases} 3^{\frac{1}{e-x}} & \text{si } x > e \\ \ln x^2 - 2 & \text{si } x \leqslant e \end{cases}$.

Solution

a $D = (3, +\infty) = DC$. En effet, dans $(3, +\infty)$, f est continue comme quotient de $\ln(x^2+1)$ (continue dans $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions continues) et de $\sqrt{x-3}$ (continue comme composée de fonctions continues).

b $D = [-1, 7] = DC$, puisque f est obtenue par somme et produit de fonctions continues dans $\mathbb{R}$ et donc dans $[-1, 7]$.

c $D = \mathbb{R}$ et $DC = \mathbb{R}\backslash\{2\}$. En effet, f est continue dans $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ mais $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^x \cdot x}{(x-2)^2} = +\infty$.

d $D = \mathbb{R}$ et $DC = \mathbb{R}\backslash\{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Dans $\mathbb{R}\backslash\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, f est continue par les propriétés usuelles.

En outre, $\forall k \in \mathbb{Z}$: $\lim\limits_{x\to 2k\pi} (\cos x + 1) = 2 = f(2k\pi)$ et la fonction est continue en ces points, mais $\lim\limits_{x\to \pi+2k\pi} (\cos x + 1) = 0 \neq 2 = f(\pi + 2k\pi)$ et la fonction est discontinue en ces points.

e $D = \mathbb{R}$ et $DC = \mathbb{R}\backslash\{-2, 2\}$. En effet, dans $\mathbb{R}\backslash\{-2, 2, 3\}$, f est continue par les propriétés usuelles.

En $x = \pm 2$: $\lim\limits_{x\to\pm 2} \dfrac{x^2+1}{x^2-4} \nexists$ dans $\mathbb{R}$, donc la fonction n'est pas continue en $x = \pm 2$.

En $x = 3$: sachant que $\lim\limits_{x\to 0}\left(x.\sin\dfrac{1}{x}\right) = 0$, on a

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 3\\ >}}\left[(x-3)\sin\left(\frac{1}{x-3}\right)+2\right] = 0+2 = 2 = f(3)$$

et

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 3\\ <}}\frac{x^2+1}{x^2-4} = 2 = f(3)$$

donc la fonction est continue en 3.

f $D = DC = \mathbb{R}_0$. La continuité en e résulte du fait que $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ >}} 3^{\frac{1}{e-x}} = 0 = f(e)$.

EXERCICE 12

Énoncé

Soit $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-|x|}{x} & \text{si } x < 0 \\ \sin x + \alpha & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

Pour quelles valeurs du paramètre réel α, la fonction f est-elle continue dans $\mathbb{R}$?

Solution

D'après les propriétés usuelles, f est continue dans $\mathbb{R}_0$. Donc, pour qu'elle soit continue dans $\mathbb{R}$, il faut et il suffit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\dfrac{x-|x|}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\dfrac{x+x}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\dfrac{2x}{x} = 2 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = f(0) = \sin 0 + \alpha = \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = 2 \text{ est la seule valeur admissible.}$$

EXERCICE 13

Énoncé

Dans chaque cas, vérifiez que les fonctions données satisfont aux hypothèses du théorème de Brouwer. Déduisez-en l'existence de point(s) fixe(s) que vous déterminerez.

a $f : [0, 20] \to \mathbb{R} : x \to \dfrac{1}{2}x + 7$.

b $g : [-10, 100] \to [-10, 100] : x \to \begin{cases} -8 & \text{si } x \in [-10, 0] \\ -x^2 + 7x - 8 & \text{si } x \in (0, 6) \\ x - 8 & \text{si } x \in [6, 100] \end{cases}$.

Solution

a f est une fonction polynôme, continue dans tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et telle que : $\mathrm{Im}_f\,([0, 20]) = [7, 17] \subset [0, 20]$. Elle satisfait donc aux hypothèses du théorème de Brouwer et admet au moins un point fixe x_0 tel que : $\dfrac{1}{2}x_0 + 7 = x_0 \Rightarrow x_0 = 14$.

b g est définie de $[-10, 100] \to [-10, 100]$ et est continue dans $[-10, 100]$. La continuité dans $[-10, 100] \setminus \{0, 6\}$ découle des propriétés usuelles. En outre :

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} (-8) = -8 \\ \displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(-x^2 + 7x - 8\right) = -8\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x \to 0} g(x) = -8 = g(0) \\ \text{et } g \text{ est continue en } 0.\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{\substack{x \to 6 \\ <}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 6 \\ <}} \left(-x^2 + 7x - 8\right) = -2 \\ \displaystyle\lim_{\substack{x \to 6 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 6 \\ >}} (x - 8) = -2\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x \to 6} g(x) = -2 = g(6) \\ \text{et } g \text{ est continue en } 6.\end{array}$$

La fonction satisfait donc aux hypothèses du théorème de Brouwer et admet au moins un point fixe x_0 tel que $g(x_0) = x_0$. Pour les déterminer, on considère chacun des sous-domaines.

Dans $[-10, 0]$: $-8 = x_0 \Rightarrow x_0 = -8$; dans $[0, 6]$: $-x_0^2+7x_0-8 = x_0 \Leftrightarrow -x_0^2+6x_0-8 = 0 \Rightarrow x_0 = 2$ ou $x_0 = 4$; dans $[6, 100]$: $x_0-8 = x_0$ n'admet pas de solution. En conclusion, la fonction admet trois points fixes situés en -8, 2 et 4.

Asymptotes

EXERCICE 14

Énoncé

Dans chaque cas, déterminez les asymptotes éventuelles de la fonction donnée.

a $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

b $f(x) = \dfrac{1}{x-2} - \sqrt{x^2 - \pi}$.

c $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + \ln x & \text{si } x < \pi \\ \cos\left(\dfrac{x}{2}\right) & \text{si } x \geqslant \pi \end{cases}$.

d $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x^2} - 3x^2}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ -6 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

e $f(x) = e^x \cos x$.

Solution

a Conditions d'existence : $\dfrac{x-1}{x+1} \geqslant 0$ et $x + 1 \neq 0 \Rightarrow D = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$.

Il s'ensuit que : $D' = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $D'_G(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$, $D'_D = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$.

Recherche d'asymptotes verticales :

Comme $DC = D$, $D'_D \backslash DC = \emptyset$ et $D'_G \backslash DC = \{-1\}$, la seule possibilité se situe à gauche du point $x = -1$. Le calcul de la limite correspondante donne :

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = +\infty.$$

On en déduit qu'il existe une AV $\equiv x = -1$ à droite.

Recherche d'asymptotes horizontales et/ou obliques :

Le domaine permet cette recherche puisque $D \supset (1, +\infty)$ et $D \supset (-\infty, -1)$. En outre, on a : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$, de sorte que la fonction admet une AH $\equiv y = 1$ à droite et à gauche, et donc pas d'asymptote oblique.

b $D = \left[\left(-\infty, -\sqrt{\pi}\right] \cup \left[\sqrt{\pi}, +\infty\right)\right] \backslash \{2\}$.

Recherche d'asymptotes verticales :

$$\lim_{x \to \pm\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{x-2} - \sqrt{x^2 - \pi} \right) = \frac{1}{\pm\sqrt{\pi} - 2} \neq \pm\infty$$

$\Rightarrow$ pas d'asymptote verticale en $x = \pm\sqrt{\pi}$.

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ < \\ >}} \left(\frac{1}{x-2} - \sqrt{x^2 - \pi} \right) = \mp\infty \Rightarrow \text{AV} \equiv x = 2, \text{ bilatérale.}$$

Recherche d'asymptotes horizontales et/ou obliques :

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{x-2} - \sqrt{x^2 - \pi} \right) = -\infty \Rightarrow \text{pas d'asymptote horizontale.}$$

Cependant, il existe une asymptote oblique $\text{AO}_1 \equiv y = -x$ à droite et une asymptote oblique $\text{AO}_2 \equiv y = x$ à gauche. En effet :

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \underbrace{\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{(x-2)x}}_{=0} + \underbrace{\lim_{x \to \pm\infty} \frac{-\sqrt{x^2 - \pi}}{x}}_{\text{F.I.} \frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-|x|\sqrt{1 - \frac{\pi}{x^2}}}{x} = \mp 1$$

$$\begin{aligned}
\text{et} \quad \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) \pm x \right] &= \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{x-2} - \sqrt{x^2 - \pi} \pm x \right) \\
&= \underbrace{\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{x-2} \right)}_{=0} + \underbrace{\lim_{x \to \pm\infty} \left(-\sqrt{x^2 - \pi} \pm x \right)}_{\text{F.I.} \infty - \infty} \\
&= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\pm\left(x - \sqrt{x^2 - \pi}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - \pi}\right)}{\left(x \pm \sqrt{x^2 - \pi}\right)} \\
&= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\pm(x^2 - x^2 + \pi)}{\left(x \pm \sqrt{x^2 - \pi}\right)} = \frac{\pm\pi}{\pm\infty} = 0.
\end{aligned}$$

c AV $\equiv x = 0$, à droite.

d AV $\equiv x = 0$, bilatérale, et AH $\equiv y = -3$, bilatérale.

e Aucune asymptote. On utilise le théorème de transfert pour montrer l'absence d'asymptote oblique.

Dérivabilité

EXERCICE 15

Énoncé

Dans chaque cas, calculez la dérivée des fonctions données.

a $f(x) = x + x^2 + x^3$.

b $f(x) = (a + bx) + (a + bx)^2 + (a + bx)^3 \quad (a, b \in \mathbb{R})$.

c $f(x) = \dfrac{1}{(3x^2 + 7x)^3}$.

d $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad (a \in \mathbb{R})$.

e $f(x) = x^2 \sin x$.

f $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

g $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$.

h $f(x) = \left(\sqrt{1 + \cos^2 x}\right)^{-1}$.

i $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$.

j $f(x) = \ln(\ln x)$.

k $f(x) = \left(1 - \operatorname{tg}^2 x\right)^{-\frac{1}{3}}$.

l $f(x) = 2^{\left(5x^2 + \sqrt{x^3} - 1\right)}$.

m $f(x) = \operatorname{cotg}\left(2x^2\right)$.

n $f(x) = \left(\sqrt[4]{x}\right)^{x^{\left(\log_{10} x^2\right)}}$.

Solution

a $f'(x) = \left(x + x^2 + x^3\right)' = (x)' + \left(x^2\right)' + \left(x^3\right)' = 1 + 2x + 3x^2$.

b $f'(x) = \left((a + bx) + (a + bx)^2 + (a + bx)^3\right)' = (a + bx)' + \left((a + bx)^2\right)' + \left((a + bx)^3\right)'$
$= b + 2(a + bx)b + 3(a + bx)^2 b = b(1 + 2a + 3a^2 + 3b^2x^2 + 8abx)$.

c $f'(x) = -3\left(3x^2 + 7x\right)^{-4}(6x + 7) = \dfrac{-3(6x + 7)}{(3x^2 + 7x)^4}$.

d $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}$.

e $f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$.

f $f'(x) = \dfrac{e^x x - e^x}{x^2} = \dfrac{e^x(x - 1)}{x^2}$.

g $f'(x) = \dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}$.

h $f'(x) = \sin x \cos x (1 + \cos^2 x)^{-\frac{3}{2}}$.

i $f(x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow f'(x) = 0$.

j $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$.

k $f'(x) = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{3\sqrt[3]{\left(1 - \operatorname{tg}^2 x\right)^4} \cos^2 x}$.

l $f'(x) = 2^{\left(5x^2 + \sqrt{x^3} - 1\right)} . \left(10x + \dfrac{3}{2}\sqrt{x}\right) . \ln 2$.

m $f'(x) = \dfrac{-4x}{\sin^2(2x^2)}\cdot$

n $f'(x) = \dfrac{1}{4}\left(\sqrt[4]{x}\right)^{x^{2\log_{10} x}} x^{2\log x - 1}\left(4\log_{10} x \ln x + 1\right).$

EXERCICE 16

Énoncé

Déterminez le domaine de dérivabilité des fonctions données dans l'exercice 11 **a**, **b** et **e**.

Solution

a $DD = D = (3, +\infty)$.

En effet, f est le quotient de $\ln(x^2+1)$, qui est dérivable dans $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables (fonctions polynôme et $\ln x$), et de $\sqrt{x-3}$ qui est également composée de fonctions dérivables (fonctions polynôme et $\sqrt{x}$).

b $DD = D = [-1, 7]$, car f est obtenue par somme et produit de fonctions dérivables dans $\mathbb{R}$.

e $D = \mathbb{R}$ et $DC = \mathbb{R}\backslash\{-2, 2\}$ (voir exercice 11 **e**). Donc, $DD \subset \mathbb{R}\backslash\{-2, 2\}$.

En 3, on a :

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{(x-3)\sin\left(\dfrac{1}{x-3}\right) + 2 - 2}{x-3}$$
$$= \lim_{\substack{x \to 3 \\ >}} \sin\left(\frac{1}{x-3}\right) \nexists \text{dans } \mathbb{R}.$$

En conclusion, f est non dérivable en 3 et $DD = \mathbb{R}\backslash\{-2, 2, 3\}$.

EXERCICE 17

Énoncé

Déterminez le domaine de dérivabilité des fonctions données.

a $f(x) = \ln(2x+4) + \dfrac{1}{x}\cdot$

b $f(x) = |5x+2|$.

c $f(x) = \sqrt{\sin(2x)}$.

Solution

a $DD = D = (-2, +\infty)\backslash\{0\}$. En effet, f est la somme de la fonction $\ln(2x+4)$, qui est dérivable dans $(-2, +\infty)$ en tant que composée de fonctions dérivables, et de $\dfrac{1}{x}$ qui est dérivable dans $\mathbb{R}_0$.

b $f(x) = |5x-2| = \begin{cases} 5x-2 & \text{si } x \geqslant \dfrac{2}{5} \\ 2-5x & \text{si } x < \dfrac{2}{5} \end{cases} \quad D = \mathbb{R} \quad DD = \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{2}{5}\right\}\cdot$

En effet, f est dérivable dans $\left(-\infty, \frac{2}{5}\right)$ et $\left(\frac{2}{5}, +\infty\right)$ en tant que polynôme et, en $\frac{2}{5}$, on a :

$$\left.\begin{array}{l}
\lim\limits_{x \underset{>}{\rightarrow} \frac{2}{5}} \dfrac{f(x) - f\left(\frac{2}{5}\right)}{x - \frac{2}{5}} = \lim\limits_{x \underset{>}{\rightarrow} \frac{2}{5}} \dfrac{5x - 2 - 0}{x - \frac{2}{5}} = \lim\limits_{x \underset{>}{\rightarrow} \frac{2}{5}} \dfrac{5\left(x - \frac{2}{5}\right)}{x - \frac{2}{5}} = 5 \\
\lim\limits_{x \underset{<}{\rightarrow} \frac{2}{5}} \dfrac{f(x) - f\left(\frac{2}{5}\right)}{x - \frac{2}{5}} = \lim\limits_{x \underset{<}{\rightarrow} \frac{2}{5}} \dfrac{-5x + 2 - 0}{x - \frac{2}{5}} = \lim\limits_{x \underset{<}{\rightarrow} \frac{2}{5}} \dfrac{-5\left(x - \frac{2}{5}\right)}{x - \frac{2}{5}} = -5
\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow f \text{ est non dérivable en } \frac{2}{5}.$$

c $D = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left[k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right], DD = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

La fonction est dérivable dans $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ car elle l'est en tout point de chacun de ces intervalles ouverts en tant que composée de fonctions dérivables (fonctions polynôme, trigonométrique et $\sqrt{x}$). Aux bords des intervalles, c'est-à-dire en $k\pi$ et $\frac{\pi}{2}+k\pi$, la fonction n'est pas dérivable car :

$$\begin{aligned}
\lim_{x \underset{>}{\rightarrow} k\pi} \frac{\sqrt{\sin(2x)} - 0}{x - k\pi} &= \lim_{x \underset{>}{\rightarrow} k\pi} 2\frac{\sqrt{\sin(2x)}}{2\,(x - k\pi)} \\
&= \lim_{x \underset{>}{\rightarrow} k\pi} \frac{2}{\sqrt{\sin\left(2\,(x - k\pi)\right)}} \underbrace{\frac{\sin\bigl(2\,(x - k\pi)\bigr)}{2\,(x - k\pi)}}_{\rightarrow 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty
\end{aligned}$$

et

$$\lim_{x \underset{<}{\rightarrow} \frac{\pi}{2}+k\pi} \frac{\sqrt{\sin(2x)} - 0}{x - \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)} = +\infty.$$

Exercice 18

Énoncé

Écrivez l'équation de la tangente au graphe de la fonction $y = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$ au point d'abscisse $x = 1$.

Solution

On a : $T_1 \equiv y - f(1) = f'(1)(x - 1)$. Or $f(1) = \dfrac{e}{e+1}$ et $f'(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$

$\Rightarrow f'(1) = \dfrac{e}{(e+1)^2}$.

Donc : $T \equiv y - \dfrac{e}{e+1} = \dfrac{e}{(e+1)^2}(x - 1)$.

Exercice 19

Énoncé

Dans chaque cas, construisez un exemple de fonction répondant aux conditions données. Donnez-en la forme analytique et tracez-en le graphe.

a $f : [1, 7] \to \mathbb{R}$, dérivable dans $[1, 7]\backslash\{2\}$ et continue en 2.

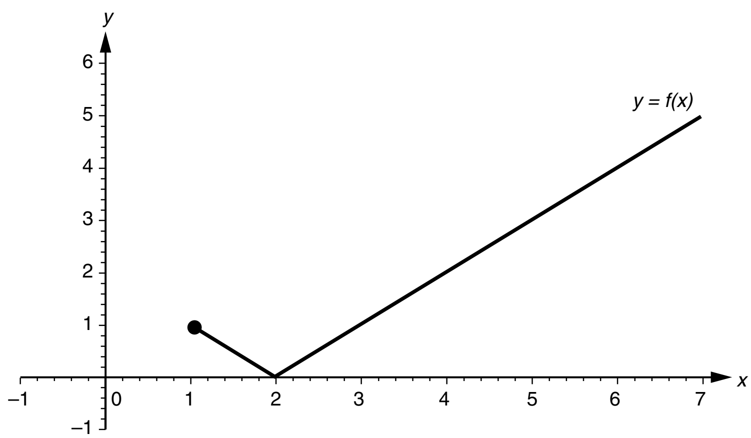
b $f : [-1, +\infty)\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, surjective, dérivable dans $(-1, +\infty)\backslash\{0, 1\}$ et admettant deux asymptotes verticales et une asymptote horizontale.

Solution

Ces exemples ne sont évidemment pas les seuls possibles.

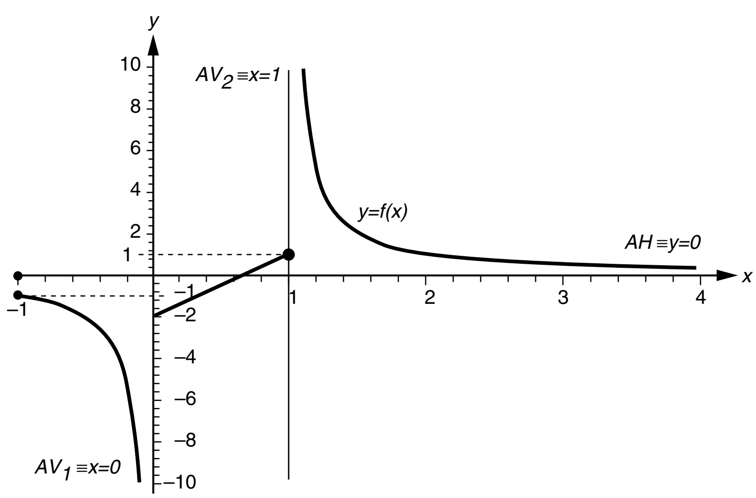
a $f : [1, 7] \to \mathbb{R} : x \to |x - 2|$ (voir figure 3.9).

Figure 3.9



b $f : [-1, +\infty)\backslash\{0\} \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases} 0 & \text{si } x = -1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in (-1, 0) \\ 3x - 2 & \text{si } x \in (0, 1] \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x \in (1, +\infty) \end{cases}$

Figure 3.10



Asymptotes (figure 3.10, page ci-contre) : $AV_1 \equiv x = 0$ à droite, $AV_2 \equiv x = 1$ à gauche, $AH \equiv y = 0$ à droite.

Exercice 20

Énoncé

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases} -x^2 + 3x - 2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ -\sqrt{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Déterminez la fonction dérivée de f.

Solution

$f' : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases} -2x + 3 & \text{si } x < 1 \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

En effet, en 1, f n'est pas dérivable puisque : $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{-\sqrt{x-1} - 0}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} -\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} = -\infty$.

Exercice 21

Énoncé

Soit la fonction $f(x) = \begin{cases} -4x + x(\sin x)\left(\sin \dfrac{1}{x}\right) + x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Déterminez $f'(0)$.

Solution

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{-4x + x(\sin x)\left(\sin \dfrac{1}{x}\right) + x^2 - 0}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-4x}{x} + \lim_{x \to 0} \frac{x(\sin x)\left(\sin \dfrac{1}{x}\right)}{x} + \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = -4 + \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} . \frac{\sin \dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}} + 0 = -4$$

puisque : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin \dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}} = 0$.

Exercice 22

Énoncé

Dans chaque cas, calculez la limite demandée, en utilisant, le cas échéant, la règle de l'Hospital.

a $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x}{\operatorname{tg} x}\right)$.

b $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\ln x}$.

c $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x \ln x)$.

d $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^{\sin x}$.

Solution **a** Il s'agit d'une forme indéterminée de type $\dfrac{0}{0}$ et les hypothèses de la règle de l'Hospital sont vérifiées (les deux fonctions sont dérivables dans $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$). On a donc

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\operatorname{tg} x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(x)'}{(\operatorname{tg} x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} = 1.$$

b Il s'agit d'une forme indéterminée du type $\dfrac{\infty}{\infty}$ et les hypothèses de la règle de l'Hospital sont vérifiées. Il s'ensuit que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} x\,e^x = +\infty.$

c Il s'agit d'une forme indéterminée du type $0 \times \infty$ qui se ramène à $\dfrac{\infty}{\infty}$ comme suit :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} (x\ln x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} \cdot$$

Les hypothèses de la règle de l'Hospital sont vérifiées. Il s'ensuit que :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} (x\ln x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} (-x) = 0.$$

d Comme :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \sin x.\ln x = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\ln x}{\dfrac{1}{\sin x}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{-\sin^2 x}{x\cos x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(\underbrace{-\sin x}_{\to 0}.\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}.\underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\to 1}\right) = 0,$$

on a : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x^{\sin x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} e^{\ln x^{\sin x}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} e^{\sin x.\ln x} = e^{0} = 1.$

Exercice 23

Énoncé

On cherche à déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$. Montrez que la règle de l'Hospital n'est pas applicable et déterminez cette limite autrement.

Solution

En vertu du théorème de transfert, on a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x-\sin x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\cos x}{1-\cos x} \nexists$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, de sorte qu'une hypothèse de la règle de l'Hospital n'est pas vérifiée.

Par contre, comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)}{x\left(1-\dfrac{\sin x}{x}\right)} = 1.$

EXERCICE 24

Énoncé

Déterminez les asymptotes de la fonction $f(x) = x\,e^{\frac{1}{x}}$ en faisant appel, si nécessaire, à la règle de l'Hospital.

Solution

$D = \mathbb{R}_0 = DC = DD$ et $D' = D'_D = D'_G = \mathbb{R}$.

Recherche d'asymptotes verticales :

Comme $D'_D \backslash DC = \{0\} = D'_G \backslash DC$, la seule possibilité se situe au point $x = 0$. Le calcul de la limite à droite donne, grâce à la règle de l'Hospital :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = +\infty \Rightarrow \text{AV} \equiv x = 0 \text{ à gauche}$$

tandis que la limite à gauche est immédiate : $\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} x\,e^{\frac{1}{x}} = 0 \Rightarrow$ pas d'AV à droite.

Recherche d'asymptotes horizontales et obliques :

Le domaine permet cette recherche. Le calcul des limite révèle l'absence d'asymptotes horizontales puisque :

$$\lim_{x\to+\infty} x\,e^{\frac{1}{x}} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x\,e^{\frac{1}{x}} = -\infty.$$

Il existe cependant une asymptote oblique bilatérale, $AO \equiv y = x + 1$. En effet, en appliquant la règle de l'Hospital dans le second calcul de limite, on a :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\,e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 \in \mathbb{R}_0.$$

et

$$\lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - x\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x\,e^{\frac{1}{x}} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = 1 \in \mathbb{R}.$$

Théorème de Taylor

EXERCICE 25

Énoncé

Établissez les approximations de Taylor d'ordre 1 et d'ordre 2 de la fonction $f(x) = e^x$ au voisinage de $x = 2$.

Solution La fonction f est indéfiniment dérivable dans $\mathbb{R}$ et $f(x) = f'(x) = e^x \Rightarrow f(2) = f'(2) = e^2$. L'approximation d'ordre 1 est donc donnée par :

$$f(x) \simeq f(2) + f'(2)(x-2) = e^2 + e^2(x-2) = e^2(x-1).$$

L'approximation d'ordre 2 est donnée par :

$$f(x) \simeq f(2) + f'(2)(x-2) + f''(2)\frac{(x-2)^2}{2!} = e^2 + e^2(x-2) + e^2\frac{(x-2)^2}{2}.$$

Exercice 26

Énoncé

Dans chaque cas, établissez les développements de Mac Laurin d'ordre $n \in \mathbb{N}_0$ des fonctions données.

a $f(x) = e^x$.

b $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

c $f(x) = \ln(1+x)$.

d $f(x) = \cos x$.

e $f(x) = (1+x)^m$, où $m \in \mathbb{N}_0$ et $m > n$.

Solution Notons d'emblée que toutes les fonctions proposées sont indéfiniment dérivables dans un voisinage de 0, de sorte que ces développements sont tous possibles.

a $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = f^{n/}(x) = e^x$

$$\Rightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}_{\text{reste d'ordre } n} e^{\alpha}, \text{ où } 0 < \alpha < x.$$

b $\forall i \in \mathbb{N} : f^{i/}(x) = \dfrac{(-1)^i\, i!}{(1+x)^{i+1}} \Rightarrow f^{i/}(0) = (-1)^i\, i!$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i x^i + \underbrace{(-1)^{n+1}}_{\text{Reste d'ordre } n}\ \frac{x^{n+1}}{(1+\alpha)^{n+2}}, \text{ où } 0 < \alpha < x.$$

c $$\ln(1+x) = \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{i+1}x^i}{i} + \underbrace{\frac{(-1)^{n+2}x^{n+1}}{(n+1)(1+\alpha)^{n+1}}}_{\text{Reste d'ordre } n} \text{ où } 0 < \alpha < x.$$

d Comme seules les puissances impaires de x sont affectées d'un coefficient nul, tout développement d'ordre impair $n = 2k+1$ coïncide avec celui de l'ordre pair précédent $n = 2k$:

$$\cos x = \sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^{i+1}x^{2i}}{(2i)!} + \underbrace{\frac{(-1)^k(\cos\alpha)}{(2k+2)!}x^{2k+2}}_{\text{Reste d'ordre } 2k \text{ ou } 2k+1}, \quad \text{où } 0 < \alpha < x.$$

e $(1+x)^m = \displaystyle\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}x^i$, où $\dbinom{m}{i} = \dfrac{m!}{(m-i)!\,i!}$ est appelé « coefficient binômial ».

L'expression du reste est nulle car il s'agit d'un polynôme de degré $m < n$.

Exercice 27

Énoncé

Soit la fonction $f(x) = \ln(1 + x)$.

a En utilisant le développement de Mac Laurin de $f(x)$, calculez la valeur de $\ln(1, 1)$ avec une erreur inférieure à 0,001.

b Majorez l'erreur commise dans le calcul de $\ln(1, 1)$ si on remplace $\ln(1 + x)$ par son développement de Mac Laurin d'ordre 38.

Solution

a Le développement a été obtenu dans l'exercice précédent :

$$\ln(1+x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{i+1}x^i}{i} + \underbrace{\frac{(-1)^{n+2}x^{n+1}}{(n+1)(1+\alpha)^{n+1}}}_{\text{Reste d'ordre } n}, \text{ où } 0 < \alpha < x.$$

Pour que l'erreur soit inférieure à 0,001 : la valeur absolue du reste d'ordre p, noté $\mathrm{R_p}$, doit être inférieure à 0,001 : $\left|\mathrm{R_p}\right| = \left|\dfrac{(-1)^p p!}{(1+\alpha)^{p+1}(p+1)!}x^{p+1}\right| < 0{,}001$.

Or $\alpha > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{(1+\alpha)^{p+1}} < 1$. Comme on prend ici $x = 0{,}1$, il apparaît que si $p = 2$, alors :

$$\left|\mathrm{R_p}\right| < \left|\frac{(-1)^p p!}{(p+1)!}(0{,}1)^{p+1}\right| = \frac{(0{,}1)^{p+1}}{p+1} < 0{,}001$$

L'approximation d'ordre 2 atteint donc la précision voulue : $\ln(1{,}1) \simeq 0{,}1 + \dfrac{(0{,}1)^2}{2} = 0{,}095$.

b L'erreur commise si on remplace $\ln(1 + x)$ par son développement de Mac Laurin d'ordre 38 peut être majorée comme suit : $\left|\dfrac{f^{38/}(\alpha)}{38!}(x)^{38}\right| = \left|\dfrac{(0{,}1)^{38}}{(1+\alpha)^{38}38}\right| < \dfrac{(0{,}1)^{38}}{38}$.

Fonctions croissantes, décroissantes, concaves et convexes

Exercice 28

Énoncé

Dans chaque cas, déterminez le domaine de définition, les régions de croissance, de décroissance, de concavité et de convexité des fonctions données.

a $f(x) = -x^2 - 1$.

b $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$.

c $f : [-5, 5] : x \to \begin{cases} |x+3| & \text{si } x \in [-5, 1] \\ \ln x + 4 & \text{si } x \in (1, 5] \end{cases}$.

Solution **a** $D = \mathbb{R}$ (fonction polynôme) et f est deux fois dérivable dans $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = -2x\,, \quad f''(x) = -2.$$

La fonction est croissante dans $\mathbb{R}^-$ et décroissante dans $\mathbb{R}^+$. Elle est concave dans $\mathbb{R}$.

b $D = \mathbb{R}$ (fonction polynôme) et f est deux fois dérivable dans $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = 3x^2 + 4x = x(3x+4)\,, \quad f''(x) = 6x + 4.$$

La fonction est croissante dans $\left(-\infty, -\dfrac{4}{3}\right)$, puis décroissante dans $\left(-\dfrac{4}{3}, 0\right)$ et à nouveau croissante dans $(0, +\infty)$. Elle est concave dans $\left(-\infty, -\dfrac{2}{3}\right)$, puis convexe dans $\left(-\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$.

Notons que, comme la fonction est partout continue, on peut indifféremment utiliser des sous-domaines ouverts ou fermés.

c $D = [-5, 5]$, $f : [-5, 5] : x \to \begin{cases} -x-3 & \text{si } x \in [-5, -3) \\ x+3 & \text{si } x \in [-3, 1] \\ \ln x + 4 & \text{si } x \in (1, 5] \end{cases}$ est dérivable dans $[-5, 5] \setminus \{-3\}$.

$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-5, -3) \\ 1 & \text{si } x \in (-3, 1] \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in (1, 5] \end{cases}$, et f est deux fois dérivable dans $[-5, 5] \setminus \{-3, 1\}$.

$f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-5, 1) \setminus \{-3\} \\ -\dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \in (1, 5] \end{cases}$.

La fonction est décroissante dans $[-5, -3)$ et croissante dans $(-3, 5]$. Elle est convexe dans $[-5, 1]$ et concave dans $[-3, 5]$ (à montrer en utilisant la définition). Notons que la fonction est concave et convexe sur $[-3, 1]$ où elle est linéaire.

EXERCICE 29

Énoncé

Soit $f(x) = |2x + 1|$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

a Montrez, en revenant à la définition, que f est convexe dans $\mathbb{R}$.

b Montrez, en revenant à la définition, que g n'est pas convexe dans $\mathbb{R}^+$.

Solution **a** $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned} \left|2\big(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1\big) + 1\right| &= |2\lambda x_2 + 2\,(1-\lambda)\,x_1 + 1| \\ &= |\lambda\,(2x_2 + 1) + (1-\lambda)\,(2x_1 + 1)| \\ &\leqslant \lambda\,|2x_2 + 1| + (1-\lambda)\,|2x_1 + 1| \end{aligned}$$

b On peut prendre par exemple :

$x_1 = 4\,; \quad x_2 = 14\,; \quad \lambda = \dfrac{1}{2}$:

$$\sqrt{\frac{4}{2} + \frac{14}{2}} = \sqrt{9} = 3 > \frac{1}{2}\sqrt{4} + \frac{1}{2}\sqrt{14} = 1 + 1{,}87 = 2{,}87.$$

Applications à la gestion

EXERCICE 30

Énoncé

La fonction logistique, définie de façon générale par $f(x) = \dfrac{k}{1 + be^{-ax}}$ (avec $a, b, k \in \mathbb{R}$), est souvent utilisée pour modéliser des phénomènes de croissance avec saturation progressive. En marketing, elle permet de décrire, par exemple, la diffusion d'innovations technologiques dans le domaine industriel.

a Pour quelles valeurs de a et b cette fonction est-elle définie dans $\mathbb{R}$?

b On donne les deux fonctions logistiques suivantes.

$$g(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}} \qquad h(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

Déterminez les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité ainsi que les asymptotes éventuelles de ces deux fonctions. Esquissez-en le graphe. Déduisez-en laquelle des deux semble la mieux adaptée à représenter la diffusion d'une innovation technologique.

Solution

a La fonction est définie à condition que $1 + be^{-ax} \neq 0$

- si $b \geqslant 0$ et $a \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : 1 + be^{-ax} \neq 0 \Rightarrow D = \mathbb{R}$.
- si $b < 0$ et $a \neq 0 : 1 + be^{-ax} \neq 0 \Leftrightarrow be^{-ax} \neq -1 \Leftrightarrow e^{-ax} \neq -\dfrac{1}{b} \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{1}{a}\ln\left(-\dfrac{1}{b}\right)$.
- si $b < 0$, $b \neq -1$ et $a = 0 : D = \mathbb{R}$.
- si $b = -1$ et $a = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ n'est pas définie.

En conclusion : soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^+$, soit $a = 0$ et $b \in \mathbb{R}_0^- \backslash \{-1\}$.

b Pour la fonction g, on a $D = DC = DD = \mathbb{R}_0$ et $D'_D = D'_G = \mathbb{R}$.

Recherche des asymptotes verticales :

$D'_G \backslash DC = D'_D \backslash DC = \{0\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{1 - e^{-x}} = +\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \dfrac{1}{1 - e^{-x}} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{AV} \equiv x = 0 \quad \text{bilatérale.}$$

Recherche des asymptotes horizontales/obliques :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 - e^{-x}} = 1 \quad \Rightarrow \text{AH}_1 \equiv y = 1 \text{ à droite.}$$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1 - e^{-x}} = 0 \quad \Rightarrow \text{AH}_2 \equiv y = 0 \text{ à gauche.}$$

Pour la fonction h, on a : $D = DC = DD = \mathbb{R}$, pas d'AV, $\text{AH}_1 \equiv y = 1$ à droite et $AH_2 \equiv y = 0$ à gauche.

Cette seconde fonction (voir figure 3.12, page suivante), d'allure sigmoïdale (en « S »), est clairement la mieux adaptée à la modélisation du processus de diffusion d'une innovation technologique (interpréter x comme le temps et $h(x)$ comme la part de pénétration) La fonction est en effet croissante d'abord convexe puis concave (saturation progressive) et tend asymptotiquement vers 100 %.

Figure 3.11

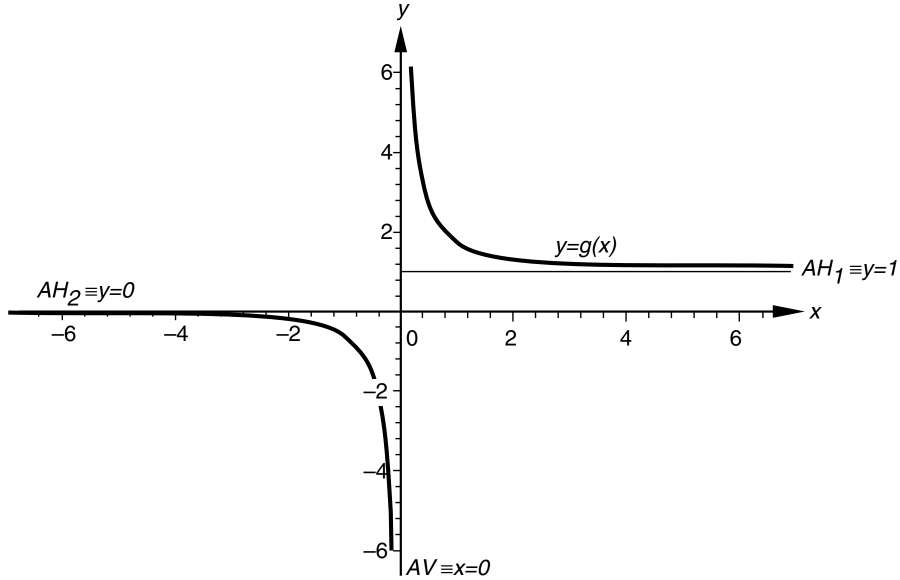
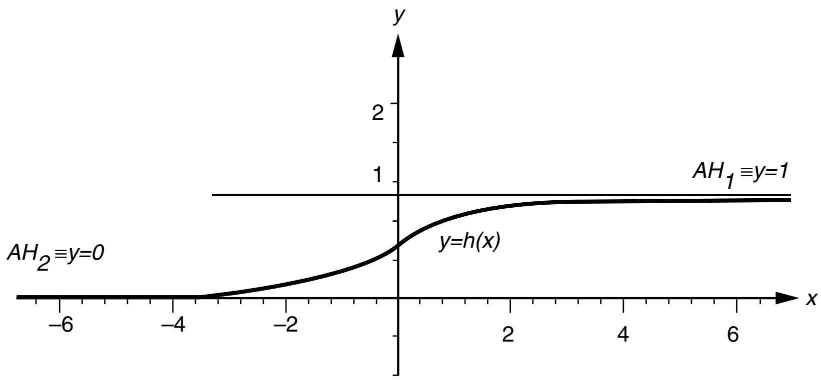


Figure 3.12



EXERCICE 31

Énoncé

Montrez que la fonction de production définie par $y = \sqrt{q}$ est croissante et déterminez si les rendements sont croissants ou décroissants.

Solution

Cette fonction, définie et continue dans $\mathbb{R}^+$, y est bien croissante puisque :

$$\forall q \in \mathbb{R}_0^+ : y' = \frac{1}{2\sqrt{q}} > 0.$$

Les rendements sont décroissants (fonction concave) puisque :

$$\forall q \in \mathbb{R}_0^+ : y'' = -\frac{1}{4\sqrt{q^3}} < 0.$$

Exercice 32

Énoncé

La fonction d'offre Q exprime la quantité produite q d'un bien en fonction de son prix p : $q = Q(p)$, où :

$$Q(p) = \begin{cases} 4 & \text{si } 0 < p < 2 \\ 8\left(6-p\right)^{-\frac{1}{2}} & \text{si } 2 \leqslant p < 5 \\ (p-3)^3 & \text{si } p \geqslant 5 \end{cases} .$$

a Montrez que Q est continue dans $\mathbb{R}_0^+$ et qu'elle est convexe dans chacun des sous-domaines $(0, 2)$; $(2, 5)$ et $(5, +\infty)$.

b Sur le graphe de la fonction, constatez visuellement qu'elle est globalement convexe dans $\mathbb{R}_0^+$.

Solution

a Dans $\mathbb{R}_0^+\backslash\{2, 5\}$, $Q(p)$ est continue d'après les propriétés usuelles.

En $p = 2$: $\lim\limits_{\substack{p\to 2 \\ <}} Q(p) = \lim\limits_{\substack{p\to 2 \\ >}} Q(p) = 4 = Q(2)$

En $p = 5$: $\lim\limits_{\substack{p\to 5 \\ <}} Q(p) = \lim\limits_{\substack{p\to 5 \\ >}} Q(p) = 8 = Q(5)$

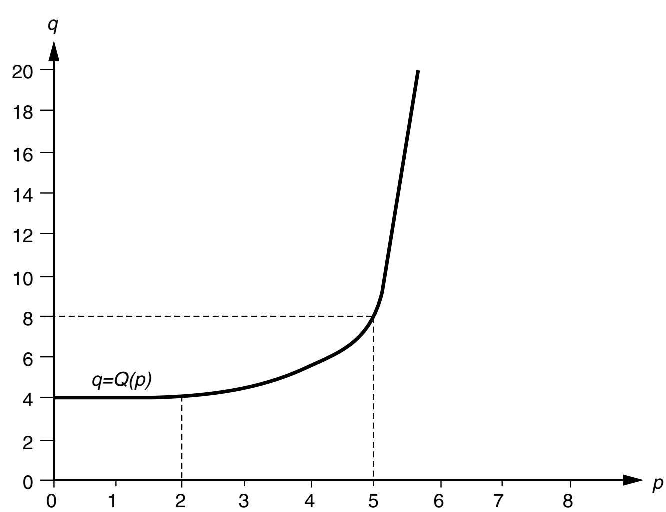
$$Q'(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < p < 2 \\ \dfrac{4}{\sqrt{\left(6-p\right)^3}} & \text{si } 2 < p < 5 \\ 3\left(p-3\right)^2 & \text{si } p > 5 \end{cases} \quad \text{et} \quad Q''(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < p < 2 \\ \dfrac{6}{\sqrt{\left(6-p\right)^5}} & \text{si } 2 < p < 5 \\ 6\left(p-3\right) & \text{si } p > 5 \end{cases} .$$

Cette fonction est convexe dans chacun des trois sous-domaines car :

$$\forall p \in \mathbb{R}_0^+\backslash\{2, 5\} : Q''(p) \geqslant 0.$$

b La convexité de $Q(p)$ dans l'ensemble du domaine $\mathbb{R}_0^+$ est plus difficile à établir. On se contente ici de l'observer sur la figure 3.13. En effet, tout segment liant deux points du graphe $q = Q(p)$ est entièrement situé au-dessus de la courbe.

Figure 3.13



EXERCICE 33

Énoncé

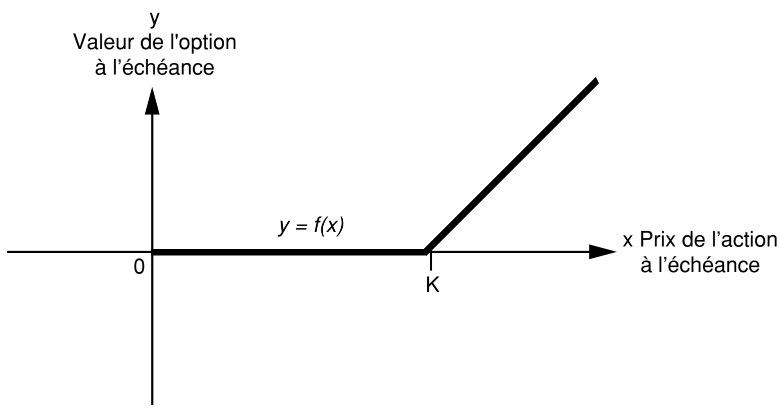
Une option d'achat CALL (européen) sur une action est un contrat qui confère à son détenteur, le droit (et non l'obligation) d'acheter cette action à l'échéance donnée pour un prix fixé (K). Déterminez analytiquement et graphiquement la valeur de cette option à l'échéance en fonction du prix de l'action sous-jacente. Donnez le domaine de définition, le domaine de continuité et de dérivabilité de cette fonction.

Solution

La fonction est définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : f(x) = \max\{x - K, 0\} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < K \\ x - K & \text{si } x \geqslant K \end{cases}$.

Le graphe est donné par la figure 3.14.

Figure 3.14



$DC = \mathbb{R}^+$ et $DD = \mathbb{R}^+ \backslash \{K\}$. En effet :

Dans $\mathbb{R}^+ \backslash \{K\}$, la fonction est continue, (resp. dérivable) car les fonctions constante et polynôme sont continues, (resp. dérivables) dans $\mathbb{R}$;

La fonction est continue en K : $\lim\limits_{\substack{x \to K \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to K \\ >}} f(x) = 0 = f(K)$;

La fonction est non-dérivable en K : en effet, $\lim\limits_{\substack{x \to K \\ <}} \dfrac{f(x) - f(K)}{x - K} = \lim\limits_{\substack{x \to K \\ <}} \dfrac{0 - 0}{x - K} = 0$, et $\lim\limits_{\substack{x \to K \\ >}} \dfrac{f(x) - f(K)}{x - K} = \lim\limits_{\substack{x \to K \\ >}} \dfrac{x - K - 0}{x - K} = 1 \neq 0$.

EXERCICE 34

Énoncé

La courbe d'expérience (« *experience curve* ») est un outil de planning stratégique utilisé pour la gestion des coûts de production d'une entreprise. Elle représente le coût marginal de fabrication d'un produit en fonction du volume de production accumulé.

Considérons la fonction suivante : $C_t = C_0 \left(\dfrac{V_t}{V_0} \right)^{-a}$, où $a \in \mathbb{R}^+$ est une constante qui dépend de l'industrie considérée, C_0 et C_t représentent les coûts par unité (déflatés) respectivement en 0 et en t. V_0 et V_t sont les volumes de production accumulés respectivement en 0 et en t.

On prend, par exemple, le secteur de fabrication des circuits intégrés, pour lequel la valeur $a = 0{,}5$ est considérée comme raisonnable.

a Déterminez la courbe d'expérience C d'une société x en t fixé sachant qu'en 0, cette société fabriquait 1 000 unités à 10 000 € la pièce ;

b Déterminez ses domaines de définition, de continuité et de dérivabilité et les éventuelles asymptotes.

c Esquissez et interprétez le graphe de la fonction.

Solution

a $C = 10\,000\left(\dfrac{V}{1\,000}\right)^{-0{,}5}$.

b $D = \mathbb{R}_0^+$ (les volumes de production accumulés sont toujours positifs) et la fonction est continue et dérivable en tout point de son domaine. Donc : $DC = DD = \mathbb{R}_0^+$

Recherche d'asymptotes verticales :

$D = D' = D'_G = DC = \mathbb{R}_0^+$ et $D'_D = \mathbb{R}^+ \Rightarrow D'_G \backslash DC = \emptyset$ et $D'_D \backslash DC = \{0\}$

$$\lim_{\substack{V \to 0\\ >}} C = \lim_{\substack{V \to 0\\ >}} 10\,000\left(\frac{V}{1\,000}\right)^{-0{,}5} = \lim_{\substack{V \to 0\\ >}} 10\,000\,(1\,000)^{0{,}5}\underbrace{\left(\frac{1}{V}\right)^{0{,}5}}_{\to+\infty}$$

$$= +\infty \Rightarrow \text{AV} \equiv V = 0 \quad \text{à gauche.}$$

Recherche d'asymptotes horizontales ou obliques :

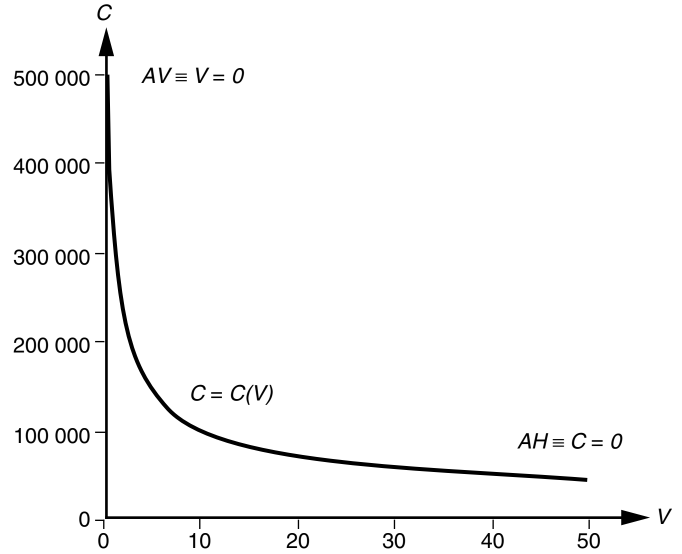
$$\lim_{V\to+\infty} C = \lim_{V\to+\infty} 10\,000\left(\frac{V}{1\,000}\right)^{-0{,}5} = \lim_{V\to+\infty} 10\,000\,(1\,000)^{0{,}5}\underbrace{\left(\frac{1}{V}\right)^{0{,}5}}_{\to 0}$$

$$= 0 \Rightarrow \text{AH} \equiv C = 0 \quad \text{à droite.}$$

c Le graphe est donné par la figure 3.15, page suivante.

Le graphe de cette courbe d'expérience montre que le coût de fabrication marginal d'un produit diminue à mesure que le nombre total d'unités produites augmente. Le coût de production évolue donc dans le temps : l'expérience, les économies d'échelle, et l'exécution de tâches répétitives contribuent à la baisse du coût de production d'une unité supplémentaire lorsque le volume total de production s'accroît. En outre, si le volume de production est quasi nul, le coût de fabrication de la première unité s'avère considérable (asymptote verticale à gauche en 0). À l'opposé, lorsque le volume de production devient très grand, le coût d'une unité de production supplémentaire apparaît négligeable (asymptote horizontale à droite).

Figure 3.15



C
500 000
400 000
300 000
200 000
100 000
0
AV ≡ V = 0
C = C(V)
AH ≡ C = 0
0
10
20
30
40
50
V

Chapitre 4

Optimisation des fonctions d'une seule variable

Optimisation des fonctions d'une seule variable

L'optimisation est au cœur de la modélisation d'un grand nombre de problèmes auxquels font face les gestionnaires : allocation optimale des ressources, maximisation du bénéfice, minimisation des coûts, maximisation de la satisfaction des clients, etc.

Toutefois, alors qu'en gestion, les variables de décisions sont généralement multidimensionnelles, ce chapitre ne concerne que les fonctions d'une seule variable réelle.

Cette limitation importante sera levée dans les chapitres 6 et 7. En fait, la complexité de l'étude des fonctions de plusieurs variables requiert au préalable la connaissance, d'une part, des propriétés des fonctions d'une variable, et d'autre part, des notions d'algèbre linéaire qui seront présentées dans le chapitre 5.

Mathématiquement, l'optimisation se traduit par la recherche des points du domaine en lesquels la fonction étudiée prend une valeur maximale ou minimale. En ces points, la fonction admet un *extremum*, appelé aussi *optimum*. Qu'il s'agisse de minima ou de maxima, on distingue deux grandes classes : les extrema locaux, définis dans le voisinage d'un point, pour lesquels sont formulées diverses conditions mathématiques, et les extrema globaux, valables dans tout le domaine de définition de la fonction, et qui sont souvent les plus utiles dans les applications pratiques.

Le chapitre s'articule comme suit. Après l'énoncé des principales définitions, la détermination des extrema locaux est présentée en deux étapes : sélection de « candidats », examinés ensuite au cas par cas. Enfin, le passage délicat aux extrema globaux est détaillé.

1 Les types d'extrema

Définitions Considérons une fonction $f : D \to \mathbb{R} : x \to f(x)$ et un point $a \in D$.

- f admet un maximum global en a si $\forall x \in D : f(a) \geqslant f(x)$;
- f admet un minimum global en a si $\forall x \in D : f(a) \leqslant f(x)$;
- f admet un maximum local en a si[1] $\exists V(a), \forall x \in V(a) \cap D : f(a) \geqslant f(x)$;
- f admet un minimum local en a si $\exists V(a), \forall x \in V(a) \cap D : f(a) \leqslant f(x)$;
- f admet un maximum global strict en a si $\forall x \in D \backslash \{a\} : f(a) > f(x)$;
- f admet un minimum global strict en a si $\forall x \in D \backslash \{a\} : f(a) < f(x)$;
- f admet un maximum local strict en a si $\exists V(a), \forall x \in V(a) \cap D \backslash \{a\} : f(a) > f(x)$;
- f admet un minimum local strict en a si $\exists V(a), \forall x \in V(a) \cap D \backslash \{a\}$: $f(a) < f(x)$. ❑

Si la fonction f admet un maximum (resp. un minimum) en a, alors $f(a)$ est la valeur maximale (resp. minimale) correspondante.

En l'absence de spécification, on considère que les extrema sont « non stricts ». Par ailleurs, si tout maximum global est aussi un maximum local, l'existence d'un ou plusieurs maxima locaux n'implique pas celle d'un maximum global. De plus, une fonction peut admettre un maximum global, en plusieurs points distincts, mais avec la même valeur maximale. Enfin, une fonction ne peut admettre un maximum global strict qu'en un seul point, mais il peut exister plusieurs maxima locaux stricts. Il en va évidemment de même pour les minima.

2 Propriétés

2.1 Condition suffisante d'existence d'extrema globaux

Le premier résultat garantit l'existence d'extrema globaux pour les fonctions définies et continues dans un intervalle fermé. Pour le reste, l'existence d'extrema, même locaux, n'est pas garantie.

Propriété Si f est continue dans $[a, b]$, alors f admet un maximum global et un minimum global dans $[a, b]$. ❑

2.2 Condition nécessaire du premier ordre

Les propriétés suivantes concernent la détermination des extrema locaux. Tout d'abord, la condition nécessaire du premier ordre (basée sur la dérivée première de la fonction) offre la possibilité d'opérer une première sélection de « candidats » extrema.

1. $V(a)$ représente un voisinage du point a (voir chapitre 1 section 1.6). On peut également formuler la définition des extrema locaux en remplaçant ce voisinage par un intervalle $(a - \eta, a + \eta)$, où $\eta > 0$.

Propriété Si f est dérivable en $a \in D \cap D'$ et si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$. ❑

Définition Un point $a \in D \cap D'$ en lequel f est dérivable et $f'(a) = 0$ est appelé *point critique*. ❑

Les points critiques, caractérisés géométriquement par une tangente au graphe horizontale ($T_a \equiv y = f(a)$), constituent des extrema possibles. Toutefois, certains points critiques ne sont pas des extrema. Par ailleurs, certains extrema peuvent être situés hors de $D \cap D'$ (en un bord du domaine) ou en un point où la fonction n'est pas dérivable (un point anguleux, par exemple).

En résumé, la première étape de la recherche des extrema locaux consiste à dresser *la liste exhaustive* des « candidats » :

- les points critiques,
- les bords de D qui sont les points de $D \backslash D'$,
- les points de $D \cap D'$ en lesquels la fonction n'est pas dérivable.

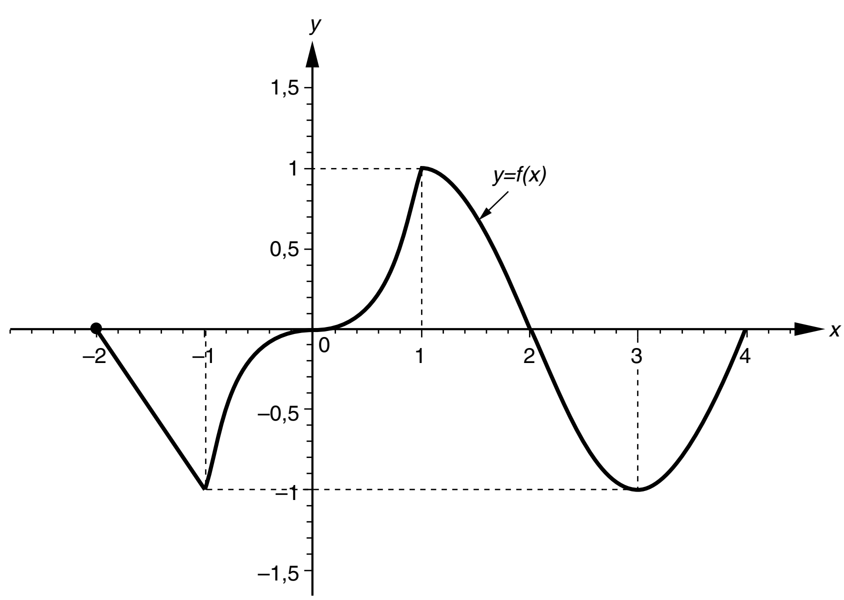
Un extremum situé en un bord du domaine (dans $D \backslash D'$) est parfois appelé *solution de coin* du problème d'optimisation.

Exemple

Cet exemple permet d'illustrer la diversité des cas possibles. En pratique, sauf à procéder de façon numérique, et donc approchée, on ne connaît pas *a priori* le graphe de la fonction et ce n'est qu'au terme d'une étude complète, incluant la détermination des extrema, que ce graphe peut être dressé.

La fonction $f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant -1 \\ x^3 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$, dont le graphe est donné par la figure 4.1, présente les caractéristiques suivantes :

Figure 4.1



- f est continue dans son domaine $[-2, 4]$ (à vérifier à titre exercice) qui est un intervalle fermé. Donc, d'après la propriété en 2.1, f admet un maximum global et un minimum global dans $[-2, 4]$. La valeur minimale globale, $f(x) = -1$, est atteinte en $x = -1$ et en $x = 3$, tandis que la valeur minimale globale, $f(x) = 1$, est atteinte en $x = 1$.
- En 0, f admet un point critique (la tangente à la courbe est horizontale) mais pas d'extremum. Par contre, en 3, f admet un point critique et un extremum.
- f n'est dérivable ni en -1, ni en 1 (expliquer pourquoi à titre d'exercice), alors qu'en ces points f admet des extrema (voir ci-dessus).
- Les bords du domaine sont -2 et 4, puisque : $D \backslash D' = [-2, 4] \setminus (-2, 4) = \{-2, 4\}$. En chacun de ces deux points, f admet un maximum local non global.

La seconde étape, souvent plus ardue en pratique, vise à trancher pour chacun des candidats. S'agit-il d'un extremum ? Si oui, de quel type (maximum ou minimum, local ou global) ? Malheureusement, aucun critère ne s'applique uniformément à tous les candidats de la première étape. Au cas par cas, des propriétés permettent de conclure dans la plupart des situations. En dernier ressort, les définitions restent évidemment d'application. Elles constituent le seul recours dans le cas d'une fonction très irrégulière, comme par exemple en un point de $D \cap D'$ où la fonction n'est pas continue.

2.3 Condition suffisante du second ordre

La condition suffisante du second ordre, permet de trancher pour les points critiques où la dérivée seconde existe et est non nulle.

Propriété Si f est deux fois dérivable en $a \in D \cap D'$ et si $f'(a) = 0, f''(a) \neq 0$, alors f admet un maximum local (resp. un minimum local) en a si $f''(a) < 0$ (resp. si $f''(a) > 0$). ❏

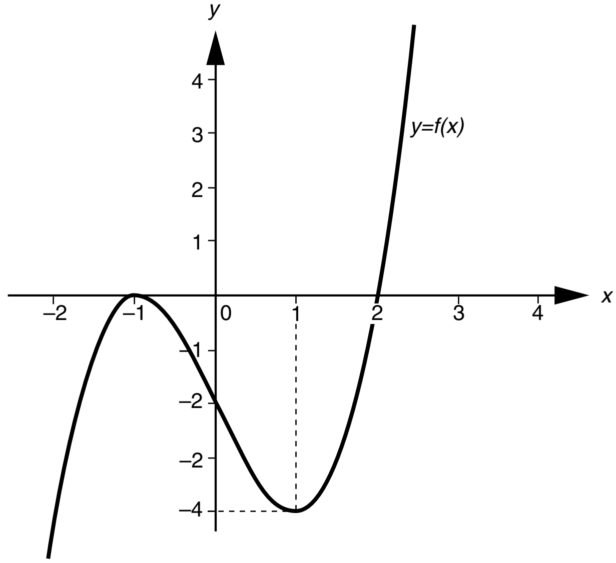
Exemple

On veut déterminer les extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^3 - 3x - 2$. En dérivant, on obtient : $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$ et $f''(x) = 6x$. Il s'ensuit que : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}$. Comme $f''(-1) = -6 < 0$ et $f''(1) = 6 > 0$, f admet un maximum local en -1 et un minimum local en 1 (figure 4.2, page ci-contre).

2.4 Condition nécessaire et suffisante d'ordre n ($n \geqslant 2$)

Au terme de l'application de la condition suffisante d'ordre 2, restent encore en suspens diverses catégories de candidats, dont les points critiques en lesquels la dérivée seconde s'annule. La condition nécessaire et suffisante d'ordre n, s'applique aux fonctions suffisamment régulières pour qu'on puisse déterminer l'ordre de la première dérivée qui ne s'annule pas. Selon que l'ordre est pair ou impair, il y a ou il n'y a pas un extremum en ce point.

Figure 4.2



Propriété Si f est n fois dérivable en $a \in D \cap D'$, si $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ et $f^{(n)}(a) \neq 0$, alors :

- n est pair et $f^{(n)}(a) < 0 \Rightarrow f$ admet un maximum local en a ;
- n est pair et $f^{(n)}(a) > 0 \Rightarrow f$ admet un minimum local en a ;
- n est impair $\Rightarrow f$ n'admet pas d'extremum en a. ❑

Exemple

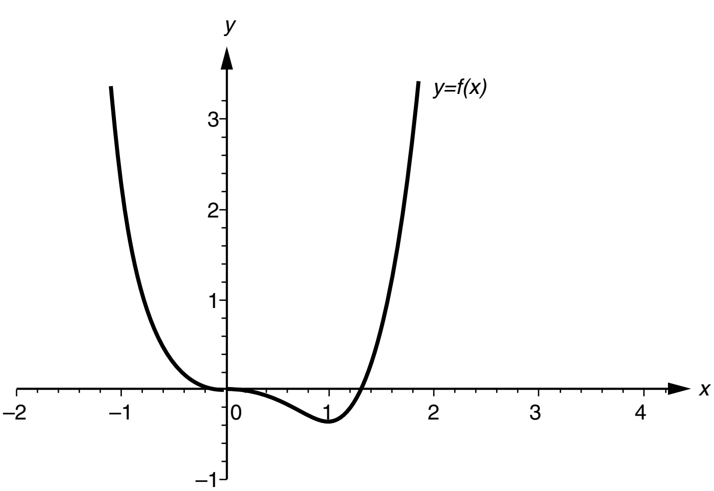
On veut déterminer les extrema locaux de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x^4 - \frac{4}{3}x^3$.

En dérivant, on obtient : $f'(x) = 4x^3 - 4x^2 = 4x^2(x-1)$ et $f''(x) = 12x^2 - 8x = 4x(3x-2)$.

On a : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 1\}$. Comme $f''(1) = 4 > 0$, f admet un minimum local en 1.

Par contre, comme $f''(0) = 0$, on ne peut pas conclure à l'aide de la condition du second ordre. On observe alors que : $f'''(x) = 24x - 8 \Rightarrow f'''(0) = -8 < 0$. En vertu de la propriété ci-dessus où $n = 3$, on conclut que f n'admet pas d'extremum local en 0 (figure 4.3).

Figure 4.3



2.5 CONDITIONS SUFFISANTES

Les propriétés suivantes sont fondées sur les caractéristiques de croissance et de décroissance de la fonction étudiée autour d'un extremum. Ce sont des conditions suffisantes. La première ne fait appel à aucune hypothèse de continuité ou de dérivabilité. De plus, le point a peut se situer en tout endroit de D, y compris en un bord. La seconde, plus exigeante en terme de régularité, permet d'établir les extrema locaux en dressant un tableau des signes de la dérivée de la fonction.

Propriétés

- Soit $a \in D$. Si $\exists \eta > 0$ tel que, f est croissante (resp. décroissante) dans $(a-\eta, a] \cap D$ et décroissante (resp. croissante) dans $[a, a+\eta) \cap D$, alors f admet un maximum local (resp. un minimum local) en a.
- Soit $a \in DC$. Si $\exists \eta > 0$ tel que f est dérivable dans $[(a-\eta, a+\eta) \setminus \{a\}] \cap D$ et $\begin{cases} \forall x \in (a-\eta, a) \cap D : f'(x) \geqslant 0 & \text{(resp. } f'(x) \leqslant 0) \\ \forall x \in (a, a+\eta) \cap D : f'(x) \leqslant 0 & \text{(resp. } f'(x) \geqslant 0) \end{cases}$,

  alors f admet un maximum local (resp. un minimum local) en a. ❑

La réciproque de la seconde propriété est fausse. Voici un contre-exemple.

$$f(x) = \begin{cases} x^2\left(2+\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

On a $0 \in DC = \mathbb{R}$. De plus, f est dérivable dans $\mathbb{R}_0$ et

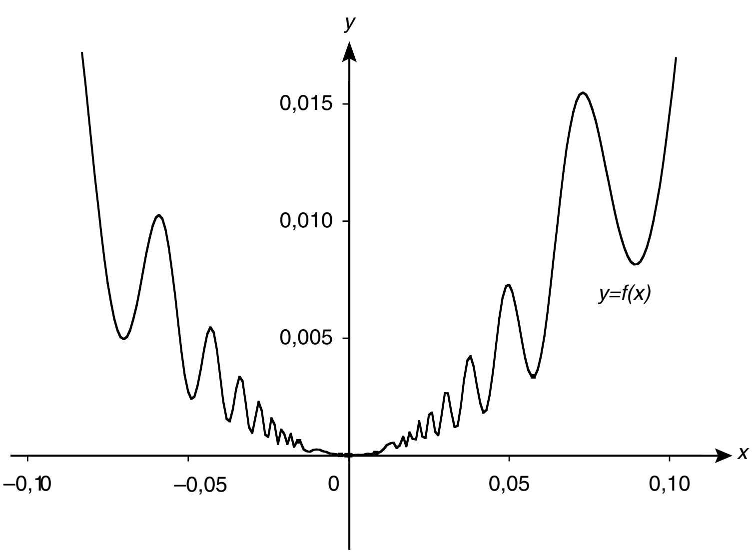
$$\forall x \in \mathbb{R}_0 : f'(x) = -\cos\left(\frac{1}{x}\right) + 2x\left(2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\cdot$$

Cette dérivée est négative en tous les points du type : $x = \dfrac{1}{2k\pi}$, où $k \in \mathbb{N}_0\setminus\{1\}$ (figure 4.4), et donc :

$$\forall \eta > 0, \exists x \in (0, \eta) : f'(x) < 0,$$

pourtant f admet un minimum local (strict) en 0.

Figure 4.4



La propriété qui permet d'utiliser le signe de f' comme indicateur de la présence d'un extremum au point a exige, d'une part, l'appartenance de a au domaine de continuité de f et, d'autre part, la dérivabilité de f « autour » de a, mais pas au point lui-même. Elle s'applique, par exemple, en un point anguleux ou même en un bord du domaine pour autant que ce bord appartienne au domaine de continuité. Elle peut aussi être vue comme une alternative à la condition suffisante du second ordre pour les points critiques en permettant, le cas échéant, de ne pas aborder le calcul de la dérivée seconde qui, pour certaines fonctions, s'avère fastidieux.

En pratique, on se sert souvent d'un tableau pour étudier les signes de f' (et de f'' pour étudier la concavité/convexité de f). Voici quelques cas typiques ($\eta > 0$ dans tous les cas) :

- Si f admet un point critique en a et

$$f'(x)\begin{cases} < 0 & \text{si } x \in (a-\eta, a) \\ = 0 & \text{si } x = a \\ > 0 & \text{si } x \in (a, a+\eta)\} \end{cases} \Rightarrow f \text{ admet un minimum local en } a.$$

- Si f est continue en a et dérivable dans un voisinage de a, sauf en a, et

$$f'(x)\begin{cases} > 0 & \text{si } x \in (a-\eta, a) \\ \nexists & \text{si } x = a \\ < 0 & \text{si } x \in (a, a+\eta) \end{cases} \Rightarrow f \text{ admet un maximum local en } a.$$

- Si f est continue à droite en le bord gauche a, dérivable dans un intervalle $(a, a+\eta)$ et $f'(x) < 0$ si $x \in (a, a+\eta) \Rightarrow f$ admet un maximum local en a.

3 Extrema globaux

Alors que le mathématicien s'intéresse principalement aux extrema locaux, le gestionnaire est le plus souvent préoccupé par la recherche d'extrema globaux. Ainsi, ayant déterminé tous les extrema locaux de la fonction dans le domaine considéré, il voudra identifier parmi eux les extrema globaux.

La propriété de la section 2.1 affirme l'existence des extrema globaux pour les fonctions continues dans un intervalle fermé. Dans ce cas, les extrema globaux sont obtenus en comparant les valeurs optimales locales. Ainsi, pour déterminer un maximum global, on procède comme suit :

- $MAXL = \{x \in D : f \text{ admet un maximum local en } x\}$.
- $M = \{f(x) : x \in MAXL\}$ est la valeur maximale globale, dont l'existence est assurée.
- Enfin, f admet un maximum global en tout point de $f^{-1}(\{M\}) = \{a \in D : f(a) = M\}$.

Remarque

La valeur maximale globale M est unique mais peut être atteinte en plusieurs points (lorsque $f^{-1}(\{M\})$ comporte plus d'un élément).

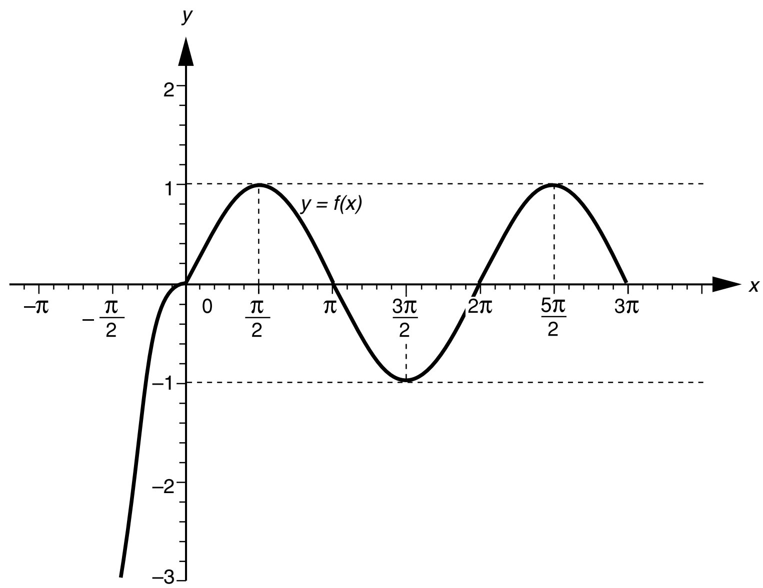
Dans le cas moins favorable où le domaine n'est pas un intervalle fermé et/ou si la fonction est discontinue, l'existence d'extrema globaux n'est pas assurée, même s'il existe des extrema locaux. Toutefois, s'il existe des extrema globaux, alors ils sont forcément parmi les extrema locaux. L'étude doit cependant être menée au cas par cas, aucune possibilité n'étant *a priori* exclue. Pour pouvoir conclure, il faut prendre en compte le comportement de la fonction :

– au voisinage des bords exclus du domaine D ;
– au voisinage des points de $D \backslash DC$, c'est-à-dire des points de discontinuité ;
– pour $x \to +\infty$ et/ou pour $x \to -\infty$ (si le domaine est non borné).

Exemple

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 0 \\ \sin x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$ admet un minimum local en une infinité de points mais ne possède aucun minimum global puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. Par contre, elle atteint la valeur maximale globale 1 en une infinité de points (figure 4.5).

Figure 4.5



4 Concavité, convexité et extrema

Les fonctions concaves et convexes ont été définies et étudiées dans le chapitre 3. Toutefois, la connaissance préalable de la concavité ou de la convexité d'une fonction simplifie considérablement la recherche de ses extrema, en transformant la condition nécessaire du premier ordre en une condition nécessaire et suffisante pour un extremum global.

Propriétés Soit un sous-ensemble D convexe de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R} : x \to f(x)$ dérivable dans D'.

- Si f est convexe dans D, alors $\forall a \in D' : f'(a) = 0 \Leftrightarrow f$ admet un maximum global en a.
- Si f est concave dans D, alors $\forall a \in D' : f'(a) = 0 \Leftrightarrow f$ admet un minimum global en a. ❏

Ce résultat n'affirme ni l'existence, ni l'unicité des extrema. Il ne s'applique pas aux cas où la condition nécessaire du premier ordre n'est pas valide : les bords éventuels de D et les points de discontinuité.

Exemples

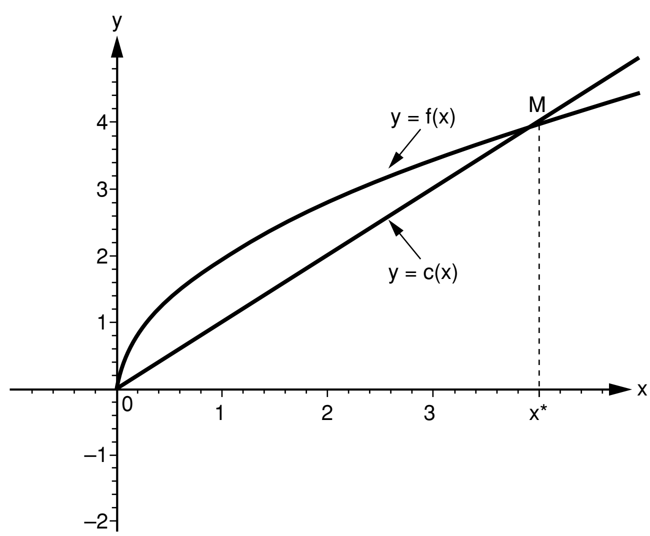
1. La fonction définie par $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow x^2$ est convexe et dérivable dans $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Elle admet donc un minimum global en 0 et aucun maximum (par absence de candidat).

2. Monsieur X a pour seule activité productive la culture d'huîtres, pour laquelle il n'utilise que son propre travail. Si $f(x)$ désigne la valeur de marché de la quantité d'huîtres x produites en une semaine, la fonction de production de Monsieur X, définie pour $x \geqslant 0$, est donnée par : $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x)$. Nous supposons que cette fonction est concave et dérivable dans son domaine.

D'autre part, la fonction de coût liée au travail hebdomadaire de Monsieur X est linéaire (proportionnelle au temps consacré à la production) : $C : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow cx$.

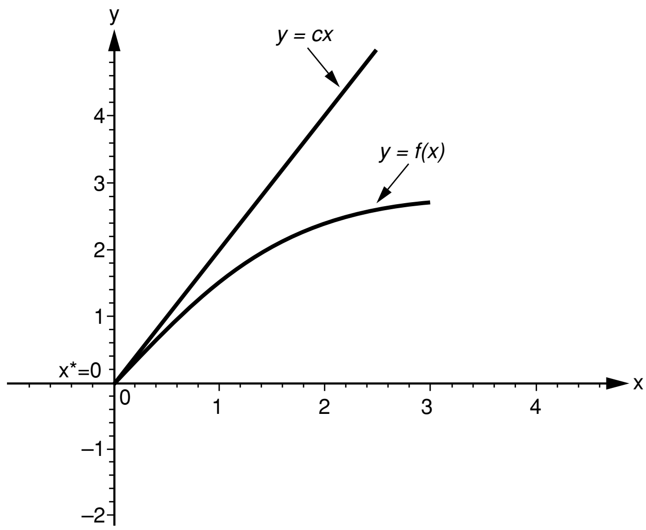
Si Monsieur X souhaite fixer sa quantité de travail de façon à optimiser son profit, il doit déterminer le maximum global de la fonction $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x) - cx$, qui est concave et dérivable dans $\mathbb{R}^+$. La solution de son problème (figure 4.6) se situera en $x^* \in \mathbb{R}_0^+$ tel que : $g'(x^*) = 0 \Leftrightarrow f'(x^*) = c$ (productivité marginale = coût marginal).

Figure 4.6



Toutefois, lorsque cette condition ne fournit pas de valeur $x^* \in \mathbb{R}_0^+$, il demeure la possibilité d'une solution de coin : $x^* = 0$. Ce sera le cas lorsque lorsqu'il n'est jamais rentable de produire : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : f(x) \leqslant cx$ (figure 4.7, page suivante).

Figure 4.7



Problèmes et exercices

Tous les exercices de cette section visent évidemment le même but : trouver les extrema locaux et globaux d'une fonction donnée. Toutefois, dans les applications pratiques à la gestion, poser le problème et établir la fonction d'objectif constituent souvent des préalables à la phase d'optimisation elle-même.

Recherche des extrema

EXERCICE 1

Énoncé

Dans chaque cas, utilisez la dérivée première pour déterminer les extrema éventuels des fonctions données.

a $f\ :\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\to -x^2+6x-11.$

b $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\to \dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}.$

c $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si}\quad -1<x\leqslant 0\\ x^4+\dfrac{4}{5}x^5 & \text{si}\quad 0<x<1\end{cases}.$

c $f:[-1,1]\to\mathbb{R}:x\to\sqrt[3]{x^2}.$

Solution

a La fonction est un polynôme, donc dérivable dans son domaine $\mathbb{R}$. Le seul candidat extremum est le point critique tel que $f'(x)=-2x+6=0\Rightarrow x=3$. L'étude du signe de la dérivée première et ses conséquences sur le comportement de la fonction sont résumées dans le tableau 4.1.

Tableau 4.1

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)=-2x+6$	$+$	0	$-$
$f(x)=-x^2+6x-11$	$-\infty$ $\nearrow$	-2	$\searrow$ $-\infty$

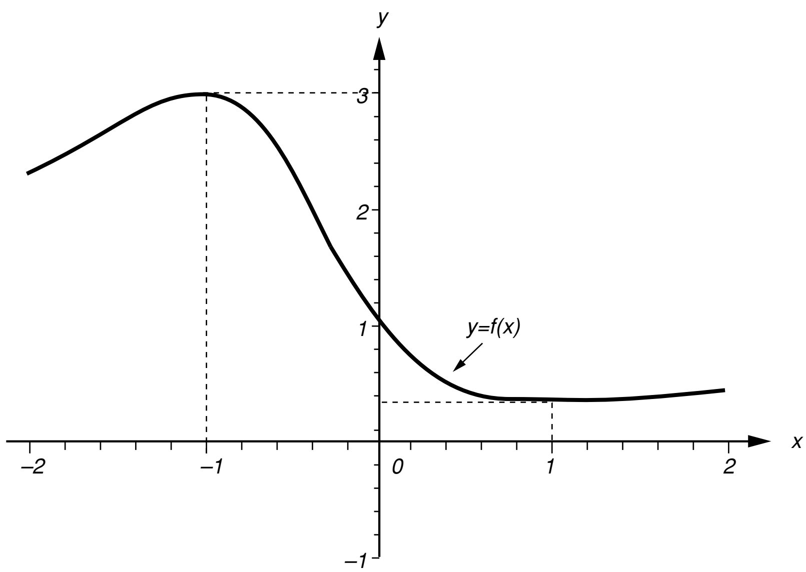
En conséquence, f admet un maximum global strict en 3, la valeur maximale associée est $f(3)=-2$.

b La fonction est dérivable dans son domaine $\mathbb{R}$, en tant que quotient de fonctions dérivables à dénominateur non nul (à vérifier !). Les seuls candidats sont les points critiques :

$$f'(x) = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}.$$

L'étude de signe montre que : $f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{si } \ -1 < x < 1 \\ > 0 & \text{si } \ x < -1 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$. Il s'ensuit que f admet un maximum local strict en -1 et un minimum local strict en 1 (figure 4.8).

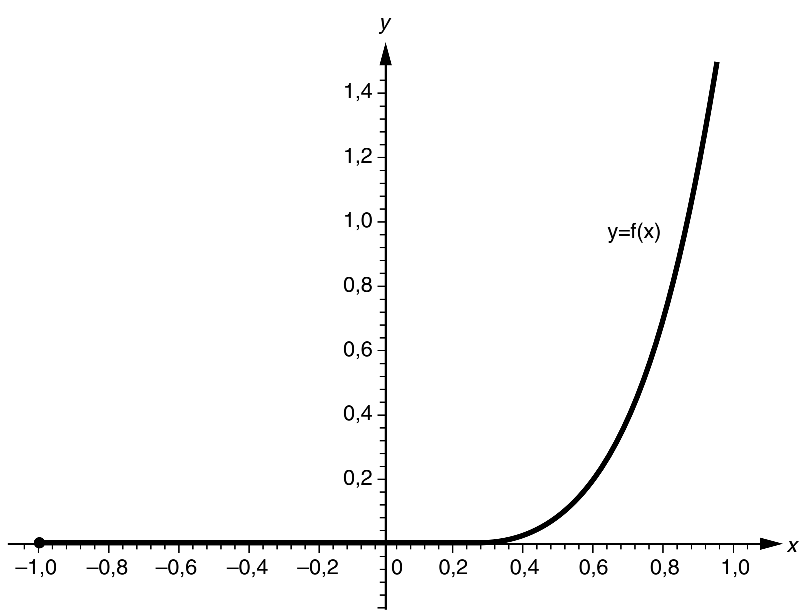
Figure 4.8



c La fonction n'admet pas d'extremum dans l'intervalle (0, 1) puisque

$$\forall x \in (0, 1) : f'(x) = 4x^3 + 4x^4 > 0.$$

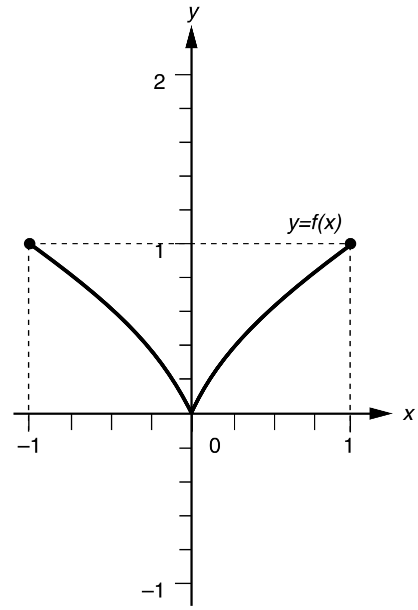
Figure 4.9



Par contre, tous les points de l'intervalle $(-1, 0]$ sont des points critiques en lesquels f atteint sa valeur minimale globale. Ces minima sont donc forcément non stricts (figure 4.9, page ci-contre). Notons aussi qu'en tout point de $(-1, 0)$, la fonction atteint une valeur maximale locale (non globale, non stricte). Cette situation apparemment paradoxale résulte du fait que la fonction est constante dans une partie de son domaine.

d La fonction est continue dans son domaine et dérivable dans $[-1, 1] \setminus \{0\}$ mais ne possède aucun point critique. Cependant, le signe de la dérivée première permet de conclure que f admet un minimum (global) en 0 et deux maxima (globaux) en -1 et 1 (figure 4.10).

Figure 4.10



EXERCICE 2

Énoncé

Dans chaque cas, déterminez les extrema locaux et globaux des fonctions données.

a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to e^x . \cos x.$

b $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \to \dfrac{\ln x}{x}\cdot$

c $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \dfrac{|x|}{1 + x^2}\cdot$

d $f : [-1, 1] \to \mathbb{R} : x \to 3x^5 - 10x^3 - 45x + 7.$

e $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R} : x \to x^2 + \dfrac{2}{x}\cdot$

f $f : (-1, 1) \to \mathbb{R} : x \to \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\cdot$

Solution

a La fonction est dérivable dans son domaine $\mathbb{R}$. Les seuls candidats extrema sont donc les éventuels points critiques. On a : $f'(x) = e^x (\cos x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

f est deux fois dérivable dans $\mathbb{R}$ et $f''(x) = -2e^x \sin x$. D'autre part :

- $f''\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = -2e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi} \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = -\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi} < 0 \Rightarrow f$ admet un maximum local (strict) en $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $f''\left(\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right) = -2e^{(2k+1)\pi} \sin\left(\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right) = \sqrt{2}e^{(2k+1)\pi} > 0 \Rightarrow f$ admet un minimum local (strict) en $\frac{\pi}{4} + (2k+1)\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

La fonction n'étant bornée ni supérieurement, ni inférieurement, aucun extremum n'est global.

b La fonction est deux fois dérivable dans son domaine, l'ouvert $\mathbb{R}_0^+$. La liste des candidats extrema est alors réduite au seul point critique :

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = e.$$

L'examen de la dérivée première permet de conclure qu'en e, la fonction admet un maximum global.

c La fonction est continue dans $\mathbb{R}$, dérivable dans l'ouvert $\mathbb{R}_0$ et non dérivable en 0, avec :

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1 + x^2}{(1 + x^2)^2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

La fonction est cependant dérivable à gauche et à droite en 0 avec :

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = 1 \neq f'_g(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{-1 + x^2}{1 + x^2} = -1.$$

Les points critiques sont ceux qui vérifient soit $1 - x^2 = 0$ et $x > 0$, soit $x^2 - 1 = 0$ et $x < 0$. Il s'agit donc des points 1 et -1. S'ajoute le candidat extremum 0 où la fonction est non dérivable.

À l'aide de la dérivée première, on vérifie qu'en 1 et en -1, f admet un maximum global (non strict) avec $f(1) = f(-1) = \frac{1}{2}$.

D'autre part, on a : $\forall x \in \mathbb{R}_0 : f(x) > 0 = f(0)$, donc f admet en 0 un minimum global strict.

Deux remarques peuvent être faites :

- La fonction est paire : $f(-x) = \dfrac{|-x|}{1 + (-x)^2} = \dfrac{|x|}{1 + x^2} = f(x)$. Il aurait pu suffire de déterminer ses extrema dans $[0, +\infty)$ et conclure par symétrie pour $(-\infty, 0]$.
- Les maxima en 1 et -1 peuvent aussi être obtenus en utilisant l'inégalité de Young :

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : ab \leqslant \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2.$$

En effet,

$$\forall x \in \mathbb{R} : |x| = 1.|x| \leqslant \frac{1}{2}1^2 + \frac{1}{2}|x|^2 = \frac{1}{2}\left(1 + x^2\right)$$
$$\Rightarrow f(x) = \frac{|x|}{1 + x^2} \leqslant \frac{1}{2} = f(1) = f(-1).$$

d La fonction n'admet pas de point critique (à vérifier). Comme f est continue dans un intervalle fermé, les extrema globaux, dont l'existence est assurée, sont automatiquement situés aux bords de l'intervalle : $f(-1) = 59$ et $f(1) = -45 \Rightarrow f$ admet un maximum global en -1 et un minimum global en 1.

e La fonction est deux fois dérivable dans son domaine $\mathbb{R}_0$.

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^2} = \frac{2(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x^2} \quad \text{et} \quad f''(x) = 2 + \frac{4}{x^3}$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$
$$f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow f \text{ admet un minimum local (et global) en 1.}$$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow f$ n'admet pas de maximum global.

f La fonction admet un minimum global (strict) en 0. Il s'agit du seul extremum de la fonction. En effet, f est dérivable dans l'ouvert $(-1, 1)$ et admet pour seul point critique le point 0 et

$$\forall x \in (-1, 1) : f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \geqslant 1 = f(0).$$

Exercice 3

Énoncé

a Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre réel k, la fonction $f(x) = \cos(2x) + k\cos x$ admet-elle un extremum en $\frac{\pi}{3}$?

b Déterminez $n \in \mathbb{N}_0$ tel que la fonction $f(x) = (x - 1)^n e^x$ admette un extremum en $x = -3$. Quelle est la nature de cet extremum ?

Solution

a La fonction $f(x) = \cos(2x) + k.\cos x$ est dérivable dans $\mathbb{R}$ pour toute valeur de k, donc tout extremum est un point critique. Dès lors, si f admet un extremum en $x = \frac{\pi}{3}$, alors :

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\sin\left(2\frac{\pi}{3}\right) - k\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow k = -\frac{2\sin\left(2\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = -2.$$

b $f'(x) = n(x - 1)^{n-1}e^x + (x - 1)^n e^x = (x - 1)^{n-1}e^x\,(x + n - 1)$.
Comme $f'(-3) = 0 \Leftrightarrow n = 4$, la fonction doit avoir la forme : $f(x) = (x - 1)^4 e^x$.
En outre, comme $f''(x) = e^x(x - 1)^2\left(x^2 + 5x + 2\right) \Rightarrow f''(-3) = -64e^{-3} < 0$, il s'agit d'un maximum local (non global).

Applications à la gestion

Exercice 4

Énoncé

La firme X fabrique des boîtes métalliques (sans couvercle) à partir de plaques carrées dont la surface mesure 4 dm^2. Les boîtes sont obtenues en ôtant en chaque coin de la plaque des pièces carrées identiques, puis en pliant les morceaux restants.

Quelles sont les dimensions des boîtes ainsi construites qui présentent un volume maximal?

Solution

Désignons par x la longueur (en dm) du côté de la pièce à ôter. Comme la plaque de départ a 2 dm de côté, il faut imposer la contrainte : $0 \leqslant 2x \leqslant 2 \Leftrightarrow x \in [0, 1]$. Par ailleurs, la boîte à construire se caractérise par une hauteur de x et une base carrée de côté $(2 - 2x)$, et donc un volume (en dm^3) de $V(x) = x(2-2x)^2$. Le problème se ramène donc à la maximisation de la fonction :

$$V : [0, 1] \to \mathbb{R} : x \to V(x) = x(2-2x)^2 = 4\left(x^3 - 2x^2 + x\right).$$

L'existence d'une solution est assurée puisque la fonction est continue dans un intervalle fermé. La fonction V est dérivable dans $(0, 1)$ et les points critiques sont déterminés par :

$$V'(x) = 4\left(3x^2 - 4x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{3} \cdot$$

Comme $1 \notin (0, 1)$, le seul point critique est $\frac{1}{3}$. S'ajoutent comme candidats les deux bords de l'intervalle : 0 et 1.

La comparaison des valeurs de $V(x)$ en les trois candidats révèle que le maximum global est atteint en $\frac{1}{3}$ et que la valeur maximale du volume est : $V\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{27}$.

En conclusion, la boîte de volume optimal $\frac{16}{27}$ dm^3, a pour hauteur $\frac{1}{3}$ dm et une base carrée de côté $\frac{4}{3}$ dm.

Exercice 5

Énoncé

Un carton publicitaire doit contenir 54 cm^2 de texte imprimé. Les marges imposées sont de 1 cm en haut et bas de page et de 1, 5 cm de chaque côté du texte.

Sachant que le prix du carton est proportionnel à sa superficie, quelles seront les dimensions du carton le moins cher possible?

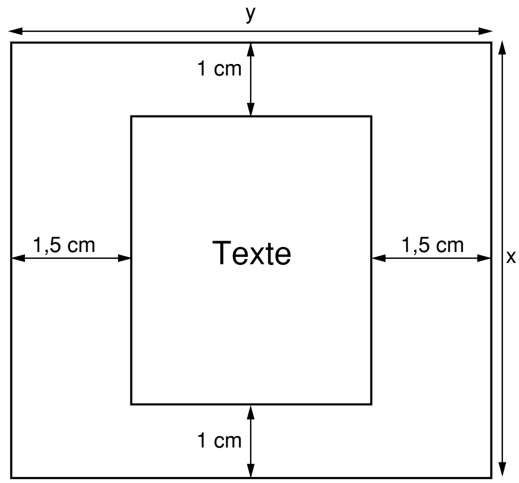
Solution

Désignons par x et y les dimensions du carton (figure 4.11, page ci-contre). Les dimensions recherchées minimisent la surface du carton : $S = x.y$.

Le texte occupe donc une surface égale à $(y-3)(x-2) = 54$. Il s'ensuit que :

$$y = \frac{54}{x-2} + 3, \quad x > 2 \quad \text{et} \quad y > 3$$

Figure 4.11



Le problème se ramène alors à minimiser la fonction $S(x) = \dfrac{54x}{x-2} + 3x$ dans l'ensemble ouvert $(2, +\infty)$. Les seuls points candidats seront donc les points critiques de la fonction S qui est deux fois dérivable dans $(2, +\infty)$.

$$S'(x) = \frac{-108}{(x-2)^2} + 3 = 0 \Leftrightarrow 3(x-2)^2 - 108 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 36 \Leftrightarrow x = 8 \text{ ou } x = -4.$$

Comme $x = -4 \notin (2, +\infty)$, le seul candidat est $x = 8$.

Le signe de la dérivée seconde est donné par : $S''(x) = \dfrac{216}{(x-2)^3} > 0$ dans $(2, +\infty)$.

La fonction S est donc strictement convexe dans $(2, +\infty)$ et admet dès lors un minimum global en $x = 8$. Les dimensions du carton optimal sont données par $x = 8$ et $y = \dfrac{54}{6} + 3 = 12$.

EXERCICE 6

Énoncé

Considérons une boîte cylindrique à base circulaire dont les deux couvercles sont fabriqués à partir d'une plaque métallique qui coûte p_1 cents le cm^2 et dont la surface latérale est fabriquée à partir d'une autre plaque métallique qui coûte p_2 cents le cm^2.

Quelles seront, en fonction des paramètres p_1 et p_2, les dimensions de la boîte la moins chère ayant un volume de 100 cm^3 ?

Solution

Si r désigne le rayon de la base et h désigne la hauteur de la boîte, le volume est donné par : $V = \pi r^2 h$. En imposant la contrainte $V = 100$, on peut exprimer la hauteur en fonction du rayon : $100 = \pi r^2 h \Rightarrow h = \dfrac{100}{\pi r^2}$ et déterminer le coût de fabrication d'une boîte en fonction de son rayon :

$$C(r) = 2p_1(\pi r^2) + 2p_2\pi r h = 2p_1\pi r^2 + 2p_2\pi r\frac{100}{\pi r^2} = 2\left(\pi p_1 r^2 + \frac{100 p_2}{r}\right)$$

Le rayon optimal r^* doit vérifier la condition du premier ordre :
$C'(r) = 2\left(\pi p_1 r^2 + \dfrac{100p_2}{r}\right)' = 2\left(\pi 2 p_1 r - \dfrac{100p_2}{r^2}\right)' = 0$, qui implique que $r^* = \sqrt[3]{\dfrac{50}{\pi}\cdot\dfrac{p_1}{p_2}}$ cm.

D'autre part $\forall r > 0 : C''(r) > 0 \Rightarrow C$ admet en r^* un minimum global.

La hauteur optimale correspondante est $h^* = \dfrac{100}{\pi(r^*)^2} = 100\sqrt[3]{\dfrac{p_1^2}{2\,500\pi p_2^2}}$ cm.

On observe que seul le rapport des prix intervient dans la détermination des dimensions de la boîte la moins chère.

EXERCICE 7

Énoncé

Soit $C_i(x)$ le prix (en euro) d'une isolation d'épaisseur x visant à réduire la consommation en chauffage. On suppose que $C_i(x) = ax$, $a > 0$ (le prix de l'isolation croît proportionnellement à son épaisseur). Désignons ensuite par $C_{ch}(x)$ le coût annuel du chauffage lorsqu'une isolation d'épaisseur x est installée. Ce coût décroît évidemment avec x. Supposons, par exemple, que $C_{ch}(x) = \dfrac{b}{x}$, $b > 0$.

Quelle sera, en fonction du paramètre b, l'épaisseur x^* de l'isolation qui minimise le coût total (non actualisé) sur une période de 10 ans ?

Solution

La fonction à minimiser est $C(x) = C_i(x) + 10C_{ch}(x) = ax + \dfrac{10b}{x}$, $x > 0$.

$$C'(x) = a - \frac{10b}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{10b}{a}} \quad \text{et} \quad C''(x) = \frac{20b}{x^3} > 0.$$

Donc l'épaisseur optimale recherchée est $x^* = \sqrt{\dfrac{10b}{a}}$.

EXERCICE 8

Énoncé

Le profit qu'une firme cherche à maximiser est égal à son revenu moins son coût de production : $\pi(q) = R(q) - C(q)$, où q désigne la quantité produite.

a Montrez qu'au niveau optimal de production q^*, le coût marginal (dérivée de la fonction de coût) est égal au revenu marginal (dérivée de la fonction de revenu).

b Déterminez le niveau optimal de production q^* pour les fonctions de revenu et coût suivantes :

$$R(q) = 179q - 3q^2 \quad \text{et} \quad C(q) = \frac{1}{3}q^3 - 3q^2 + 10q + 4$$

Solution **a** Par définition : $\pi(q) = R(q) - C(q)$.

Donc si q^* maximise le profit π, la condition du premier ordre impose que :

$$\pi'(q^*) = R'(q^*) - C'(q^*) = 0\,, \quad \text{et donc} \;\; R'(q^*) = C'(q^*).$$

b Dans ce cas, le profit vaut : $\pi(q) = -\frac{1}{3}q^3 + 169q - 4$. En vertu de la condition du premier ordre, on a : $\pi'(q) = -q^2 + 169 = 0$ et $q > 0 \Rightarrow q = 13$. Comme $\pi''(q) = -2q < 0$, la production optimale est donc $q^* = 13$ et le profit maximal est $\pi(13) = 1\,460{,}67$.

EXERCICE 9

Énoncé

Une firme en position de monopole fait face à deux fonctions de demande pour le même produit, émanant de deux marchés distincts : $q_1 = 40 - 2p_1$ et $q_2 = 20 - \frac{1}{2}p_2$. Sachant que le coût de production est de $C = 25 + 4q$ où $q = q_1 + q_2$, déterminez, dans chacun des cas suivants, le prix qui maximise le profit de la firme.

a La firme pratique une discrimination de prix entre les deux marchés.

b La firme pratique un prix unique sur les deux marchés.

Solution **a** Le revenu du premier marché au prix p_1 est $R_1(q_1) = p_1q_1 = \frac{1}{2}\left(40 - q_1\right)q_1 = 20q_1 - \frac{1}{2}q_1^2$ et le revenu du second au prix p_2 est $R_2(q_2) = p_2q_2 = 2\left(20 - q_2\right)q_2 = 40q_2 - 2q_2^2$.

D'après l'exercice 8 **a** , on égale le coût marginal de la firme à chacun des deux revenus marginaux (maximisation séparée sur chaque marché) pour obtenir :

$$C'(q_1) = R_1'(q_1) \Rightarrow 4 = 20 - q_1 \Rightarrow q_1 = 16$$

et

$$C'(q_2) = R_2'(q_2) \Rightarrow 4 = 40 - 4q_2 \Rightarrow q_2 = 9.$$

Les prix correspondants sont $p_1 = \frac{1}{2}\,(40 - 16) = 12$ et $p_2 = (40 - 18) = 22$.

b S'il n'y a pas de discrimination entre les deux marchés, alors $p_1 = p_2 = p$ et la fonction de la demande globale est $q = q_1 + q_2 = 40 - 2p + 20 - \frac{1}{2}p = 60 - \frac{5}{2}p$.

Il s'ensuit que $R(q) = pq = \frac{2}{5}(60 - q)q = 24q - \frac{2}{5}q^2$ le prix qui maximise le profit de la firme est tel que $C'(q) = R'(q) \Rightarrow 4 = 24 - \frac{4}{5}q \Rightarrow q = 25$. Le prix est alors $p = \frac{2}{5}(60 - 25) = 14$.

Chapitre 5

Les matrices

Les matrices

Les matrices à coefficients réels sont des tableaux de nombres à double entrée (lignes et colonnes). À ce titre, elles offrent une manière simple et pratique de condenser diverses informations. Le calcul matriciel s'avère important dans des domaines variés de la gestion : matrices *input-output* dans l'analyse de la production, matrices variances-covariances pour la mesure des risques, etc.

D'une façon plus théorique, les matrices sont indispensables pour aborder l'optimisation des fonctions de plusieurs variables, ce qui explique que ce chapitre précède celui qui est consacré à ce type de fonctions.

Les matrices constituent un outil privilégié de l'algèbre linéaire. Pour des raisons de place, le présent ouvrage n'aborde pas la théorie des espaces vectoriels et des applications linéaires dont les ramifications sont multiples. Toutefois, ce domaine est, d'une certaine manière, implicitement traité au travers de notions matricielles correspondantes, comme celle de rang, qui guide notamment la résolution des systèmes numériques linéaires. De même, nous sommes contraints d'effleurer seulement certaines matières, comme par exemple la théorie des déterminants. Le lecteur désireux de les approfondir trouvera dans la bibliographie divers ouvrages offrant de plus amples développements.

1 Opérations sur les matrices

Les matrices sont des tableaux à double entrée, dont les éléments peuvent appartenir *a priori* à n'importe quel ensemble de nombres. Dans les applications, c'est évidemment l'ensemble des nombres réels qui est le plus fréquemment rencontré. Dès lors nous focaliserons la présentation sur les matrices réelles définies comme suit :

Définition Une *matrice réelle* A de taille $n \times m$ (ou à n lignes et m colonnes) est un tableau de nombres réels $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$, représenté sous la forme condensée $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times m}$. ❑

L'ensemble des matrices réelles, de taille donnée $n \times m$, est noté $\mathbb{R}^{n\times m}$.

Dans l'écriture $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times m}$, les indices i et j sont « muets », donc interchangeables. Ainsi, on peut écrire indifféremment $A = (a_{kl})_{n\times m}$ ou même $A = \left(a_{ji}\right)_{n\times m}$. Cependant pour des valeurs fixées de i et j, le nombre a_{ij} désigne précisément l'élément situé en i-ème ligne et j-ème colonne de la matrice A. Afin d'éviter toute confusion, on réservera la notation à indices muets à l'introduction des notations tandis que toute transformation des éléments d'une matrice s'effectuera sur la base d'un élément typique à indices fixés.

Deux matrices sont égales si elles ont la même taille et si leurs éléments de mêmes indices sont identiques.

Définition Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times m}$ et $B = \left(b_{ij}\right)_{p\times q}$.

$$A = B \Leftrightarrow n = p\,,\quad m = q \quad \text{et} \quad \forall i = 1,\ldots,n, \forall j = 1,\ldots m : a_{ij} = b_{ij}.$$ ❑

Les matrices peuvent être additionnées et multipliées entre elles moyennant certaines restrictions de compatibilité concernant leurs tailles respectives. Les définitions des opérations mentionnent d'emblée ces restrictions. Une matrice de taille quelconque peut aussi être multipliée par un nombre réel. Cette *multiplication scalaire* s'effectue simplement élément par élément. Enfin, transposer une matrice consiste à inverser le rôle des lignes et des colonnes.

Définitions

- Si $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times m}$ et $B = \left(b_{ij}\right)_{n\times m}$, alors la matrice $C = \left(c_{ij}\right)_{n\times m}$ où $C = A + B$ est telle que : $\forall i = 1,\ldots,n, \forall j = 1,\ldots m : c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
- Si $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times m}$ et $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times p}$, alors la matrice $C = \left(c_{ij}\right)_{n\times p}$ où $C = A.B$ est telle que : $\forall i = 1,\ldots,n, \forall j = 1,\ldots p : c_{ij=} \displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_{ik}.b_{kj}$.
- Si $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times m}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la matrice $B = \left(b_{ij}\right)_{n\times m}$ où $B = \lambda A$, est telle que : $\forall i = 1,\ldots,n, \forall j = 1,\ldots m : b_{ij} = \lambda a_{ij}$.
- Si $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times m}$ alors sa *matrice transposée* $A' = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ est telle que : $\forall i = 1,\ldots,m, \forall j = 1,\ldots n : b_{ij} = a_{ji}$. ❑

Remarque

L'addition matricielle correspond à une addition élément par élément, tandis que le produit matriciel n'est pas une opération de ce type. Le choix d'une définition « ligne par colonne » telle que celle adoptée répond à des motivations précises, notamment au niveau des applications linéaires. Son adéquation à la résolution de divers problèmes pratiques apparaîtra dans la suite du chapitre.

Diverses propriétés des opérations matricielles découlent de ces définitions.

Propriétés Moyennant les restrictions adéquates sur les tailles des matrices en présence, on a :

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $A. (B.C) = (A.B) .C$
- $A'' = A$
- $(A.B)' = B'.A'$.
- $A. (B + C) = A.B + A.C$ et $(A + B) .C = A.C + B.C$ ❑

Toutefois, même en cas de tailles compatibles, le produit matriciel n'est pas commutatif, autrement dit les matrices $A.B$ et $B.A$ ne sont pas forcément égales.

Ainsi, pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a : $A.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B.A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, soit $A.B \neq B.A$.

Remarquons de plus que cet exemple fait apparaître que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont des « diviseurs de zéro » (matrices non nulles dont un produit est la matrice nulle).

2 Matrices particulières et sous-matrices

Diverses matrices seront appelées à jouer un rôle particulier dans la résolution de problèmes. Nous introduisons ici la nomenclature qui sera suivie, ainsi que les propriétés de base des matrices concernées.

Définition La *matrice nulle* de taille $n \times m$ est une matrice dont tous les éléments sont nuls :

$$0_{n\times m} = \left(a_{ij}\right)_{n\times m}, \quad \text{où } \forall i = 1, \ldots, n, \forall j = 1, \ldots m : a_{ij} = 0.$$ ❑

La matrice nulle est neutre pour l'addition matricielle (tailles compatibles).

Parmi *les matrices carrées* pour lesquelles $n = m$, on distingue les cas suivants :

Définitions La matrice $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ est :

- *triangulaire supérieure* (resp. *inférieure*) si :

$$\forall i = 1, \ldots, n, \forall j = 1, \ldots n : i > j \text{ (resp. } j > i) \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

- *symétrique* (resp. *antisymétrique*) si :

$$\forall i = 1, \ldots, n, \forall j = 1, \ldots n : a_{ij} = a_{ji} \text{ (resp. } a_{ij} = -a_{ji}).$$

- *diagonale* si :

$$\forall i = 1, \ldots, n, \forall j = 1, \ldots n : i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

- la *matrice identité* si

$$\forall i = 1, \ldots, n, \forall j = 1, \ldots n : a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$ ❑

La matrice identité de taille $n \times n$, notée $I_n = \left(\delta_{ij}\right)_{n\times n}$, est neutre pour le produit matriciel (tailles compatibles).

Parmi les matrices de taille quelconque, dites aussi *rectangulaires*, on distingue les *matrices colonnes* de taille $n \times 1$ et les *matrices lignes* de taille $1 \times n$.

Définition Toute matrice construite à partir de A par élimination de lignes et/ou de colonnes est dite *sous-matrice* de A. ❑

Propriété Si $B = \left(b_{ij}\right)_{p\times q}$ est une sous-matrice de $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times m}$, alors $p \leqslant n$ et $q \leqslant m$. ❑

En particulier, toute colonne ou toute ligne de A est une sous-matrice de A. Or, à toute ligne ou à toute colonne, on peut associer de façon évidente un vecteur, ce qui permet de parler sans ambiguïté de dépendance ou d'indépendance linéaire (voir chapitre 1, section 5) entre lignes ou entre colonnes d'une matrice donnée.

Exemple

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ possède 3 lignes représentées par les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$: $\begin{cases} L_1 = (1, 2, 3, 4) \\ L_2 = (2, 0, 1, -1) \\ L_3 = (3, 2, 4, 3) \end{cases}$. Ces vecteurs sont linéairement dépendants puisque qu'il existe la combinaison linéaire nulle suivante : $L_1 + L_2 - L_3 = \bar{0} \in \mathbb{R}^4$.

3 Trace, déterminant et rang

On associe aux matrices des caractéristiques numériques à usages divers. Ainsi, la trace et le déterminant sont des nombres réels associés aux seules matrices carrées. Par contre, le rang est un nombre naturel qui peut être déterminé pour toute matrice. Par souci de clarté, nous présentons chacune de ces notions assorties des propriétés afférentes.

3.1 Trace d'une matrice carrée

La *trace* d'une matrice carrée est la somme de ses éléments diagonaux.

Définition Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$. Sa *trace* est donnée par : $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. ❏

Exemples

1. $\operatorname{tr} 0_{n\times n} = 0$.

2. $\operatorname{tr} I_n = n$.

3. $\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1 + 4 = 5$.

4. $\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = 1 + (-1) + 0 = 0$.

Moyennant la compatibilité des tailles, la trace jouit des propriétés suivantes :

Propriétés

- $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$.
- $\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr} A$.
- $\operatorname{tr} A' = \operatorname{tr} A$.
- $\operatorname{tr}(A.B) = \operatorname{tr}(B.A)$. ❏

3.2 Déterminant d'une matrice carrée

Toute matrice réelle carrée $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ admet un déterminant réel noté $\det A$ ou $|A|$. La définition générale du déterminant étant lourde à présenter, nous abordons d'abord les cas particuliers les plus fréquemment rencontrés en pratique, où n vaut 1, 2 ou 3.

Définitions

- Pour $n = 1$, la matrice se réduit au seul élément $A = (a_{11})$ et $\det A = a_{11}$.
- Pour $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ et $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ (formule de Cramer).
- Pour $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ et $\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{33}a_{21} - a_{23}a_{11}a_{32}$ (formule de Sarrus). ❏

Exemples

1. $\det 0_{2\times 2} = \det 0_{3\times 3} = 0$.

2. $\det I_2 = \det I_3 = 1$.

3. $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 6 = -2.$

4. $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = 0 + 84 + 120 - (-21) - 48 - 0 = 177.$

Pour définir le déterminant d'une matrice carrée dans le cas général où $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, il faut d'abord considérer la notion de permutation de n éléments et de signature d'une telle permutation.

Définition Les *permutations* de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ sont les bijections de cet ensemble dans lui-même. ❑

Chaque permutation π a une signature, notée $\operatorname{sign}\pi$, qui vaut soit 1 soit (-1), selon que la permutation π est la composée d'un nombre pair ou impair de permutations de 2 éléments.

Définition

$$\operatorname{sign}\pi = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi = \text{composée d'un nombre pair de permutations} \\ & \text{de 2 éléments} \\ -1 & \text{si } \pi = \text{composée d'un nombre impair de permutations} \\ & \text{de 2 éléments} \end{cases}.$$ ❑

Comme il apparaît au travers des cas particuliers où n vaut 2 ou 3, le déterminant est une somme algébrique de $n!$ produits de n éléments de la matrice dont les indices de ligne et de colonne parcourent chacun l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. L'utilisation des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$ permet de construire une définition générale. Dans ce cadre, la signature indiquera si le produit d'éléments de la matrice est affecté d'un signe positif ou négatif.

Définition Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$.

$$\det A = \sum_{\pi \text{ est une permutation de } \{1,2,\ldots,n\}} (\operatorname{sign}\pi).a_{1\pi(1)}.a_{2\pi(2)}\ldots a_{n\pi(n)}.$$ ❑

Comme il existe $n!$ permutations distinctes de n éléments, le déterminant d'une matrice de taille $n \times n$ est bien une somme de $n!$ termes. La définition montre aussi la symétrie des rôles joués par les lignes et les colonnes dans le calcul des déterminants.

Exemples

1. $\det 0_{n\times n} = 0.$

2. $\det I_n = 1.$

3. $\det\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} = a_1 \ldots a_n.$

Il existe plusieurs méthodes de calcul permettant d'éviter le recours systématique à la définition, en particulier pour les matrices d'ordres supérieurs à 3. Pour une question de place, nous n'aborderons pas ici ces techniques.

Moyennant la compatibilité des tailles, le déterminant jouit de propriétés importantes. On notera cependant que le déterminant d'une somme de matrices ne coïncide pas avec la somme des déterminants.

Propriétés Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$.

- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.
- $\det(A.B) = \det A.\det B = \det(B.A)$.
- $\det A' = \det A$. ❑

Comme le montrera la section relative à l'inversion des matrices carrées, la nullité du déterminant constitue une caractéristique majeure. Il est donc intéressant de dégager certaines classes de matrices qui possèdent cette caractéristique.

Propriétés

- Ont un déterminant nul, les matrices ayant l'une des caractéristiques suivantes :
  - une ligne (ou une colonne) de zéros ;
  - deux lignes (ou deux colonnes) proportionnelles ;
  - une ligne (resp. une colonne) qui est combinaison linéaire des autres lignes (resp. des autres colonnes).
- Le déterminant ne se modifie pas si on ajoute à une ligne (resp. à une colonne), une combinaison linéaire d'autres lignes (resp. d'autres colonnes).
- Le déterminant change de signe si on permute deux lignes (ou deux colonnes).
- Le déterminant est multiplié par λ si on multiplie une ligne (ou une colonne) par λ ($\in \mathbb{R}$). ❑

3.3 Rang d'une matrice rectangulaire

La définition du rang d'une matrice quelconque fait référence à la notion d'indépendance linéaire entre colonnes (voir section 2).

Définition Le *rang* d'une matrice $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times m}$, noté $\operatorname{rg} A$, est égal au nombre de colonnes de A linéairement indépendantes. ❑

En fait, l'asymétrie de cette définition, qui semble privilégier le rôle des colonnes, n'est qu'apparente puisqu'on peut montrer que le rang est une caractéristique symétrique en terme de lignes et colonnes.

Propriétés Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times m}$.

- $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A'$.
- $\operatorname{rg} A \leqslant m$ et $\operatorname{rg} A \leqslant n$. ❑

Définition Si la matrice $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times m}$ est telle que $\operatorname{rg} A = \min\{m, n\}$, elle est dite *de plein rang*. ❑

La détermination du rang des matrices sera importante dans la résolution des systèmes linéaires. À cet égard, il est utile de présenter les transformations matricielles auxquelles le rang est insensible.

Propriétés Le rang d'une matrice ne se modifie pas lorsque :

- des colonnes (ou des lignes) sont permutées ;
- une colonne (ou une ligne), est multipliée par un réel non nul ;
- une combinaison linéaire d'autres colonnes (resp. d'autres lignes) est ajoutée à une colonne (resp. à une ligne) donnée. ❑

4 Inversion de matrices carrées

Dans $\mathbb{R}^{n\times n}$, le produit matriciel est défini pour tout couple d'éléments et la matrice I_n est neutre pour ce produit : $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n} : I_n.A = A = A.I_n$. On définit alors la notion de matrice inversible.

Définitions

- La matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est *inversible* (ou *régulière*) si

$$\exists A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^{-1}\, A = I_n = A.A^{-1}.$$

- Lorsqu'elle existe, A^{-1} est appelée la *matrice inverse* de A. ❑

Cependant toutes les matrices carrées non nulles, c'est-à-dire distinctes de $0_{n\times n}$, ne sont pas forcément inversibles. Les matrices non inversibles sont aussi qualifiées de *singulières*.

Exemples

1. La matrice identité I_n est évidemment inversible et : $I_n^{-1} = I_n$.

2. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible. En effet, pour toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les matrices inverses jouissent des propriétés suivantes.

Propriétés

- Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est inversible, alors :
  - A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$,
  - A' est inversible et $\left(A'\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)'$,
  - $\forall \lambda \in \mathbb{R}_0 : (\lambda A)$ est inversible et $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} A^{-1}$.
- Si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sont inversibles, alors le produit $A.B$ est inversible et

$$(A.B)^{-1} = B^{-1}\, A^{-1}.$$

❑

L'étude de l'inversibilité d'une matrice est cruciale dans de nombreux problèmes appliqués à la gestion, notamment ceux qui se formalisent en termes de systèmes linéaires, qu'ils soient numériques ou différentiels. Les notions de déterminant et de rang permettent chacune de caractériser simplement les matrices inversibles.

Propriété La matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rg} A = n$. ❑

En pratique, il existe plusieurs méthodes pour déterminer la matrice inverse d'une matrice régulière donnée. Dans cet ouvrage, nous privilégions celle qui se fonde sur la détermination d'une matrice inverse inconnue. Une autre technique consiste à exploiter les propriétés des déterminants.

5 Systèmes linéaires

5.1 Définitions et propriétés

Les systèmes numériques linéaires sont constitués d'empilements d'équations, chacune égalant une combinaison linéaire d'inconnues à une constante. De tels systèmes apparaissent dans la résolution de nombreux problèmes.

En fait, grâce à la simplicité des systèmes linéaires, il n'est pas toujours nécessaire de faire appel à une méthode générale pour en déterminer l'ensemble de solutions. Toutefois, une approche structurée comme celle présentée dans cette section a le mérite de permettre l'étude de l'existence et de l'éventuelle multiplicité de solutions, pour les systèmes de toute taille, même en présence de paramètres.

Un système linéaire de n équations à m inconnues soumet un vecteur X, à m composantes, simultanément à n équations linéaires.

Définitions

- Tout *système linéaire* s'écrit :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

$$\text{où } \forall i = 1, \ldots, n, \forall j = 1, \ldots m : a_{ij}, b_j \in \mathbb{R}$$

  ou, sous forme matricielle : $AX = B$, où $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times m}$, $B = (b_i)_{n\times 1}$ et $X = \left(x_j\right)_{m\times 1}$.
- Une *solution* de ce sytème est un vecteur $X = \left(x_j\right)_{m\times 1}$ dont les composantes vérifient simultanément toutes les équations du système.
- On distingue divers types de systèmes :
  - système *carré* si $m = n$;
  - système *de Cramer* si le système est carré et A est une matrice inversible ;

- système *homogène* si $B = 0$;
- système *impossible* s'il n'admet aucune solution (équations incompatibles) ;
- système *compatible* s'il admet au moins une solution ;
- système *indéterminé* s'il admet plusieurs solutions. ❑

Exemples

1. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$ est un système carré non homogène. Comme, en outre, $\det \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = -19 \neq 0$, il s'agit d'un système de Cramer.

2. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 = 2 \end{cases}$ est un système carré non homogène impossible (les deux équations sont contradictoires). Ce n'est pas un système de Cramer puisque $\det \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 0$.

3. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ est un système non carré (2 équations à 3 inconnues) homogène.

Les systèmes de Cramer jouissent de la propriété suivante qui en facilite la résolution.

Propriété Le système de Cramer $AX = B$ admet la solution unique $X = A^{-1}B$, qui s'exprime aussi sous la forme :

$$x_j = \frac{1}{\det A} \det \left(A_1 \dots A_{j-1}\, B\, A_{j+1} \dots A_n\right) \ , \quad j = 1, \dots, n,$$

où $A_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$ est la k-ème colonne de A. ❑

Exemple

Soit le système de Cramer $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$. Il a pour unique solution :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui se calcule plus aisément en utilisant la propriété ci-dessus :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{-19} \det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\[2ex] x_2 = \dfrac{1}{-19} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{19} \\[1ex] x_2 = \dfrac{3}{19} \end{cases} .$$

Les autres systèmes peuvent admettre une, aucune ou plusieurs solutions. Toutefois, grâce à la linéarité, on dispose de quelques résultats.

Propriétés

- Si le système linéaire $AX = B$ admet deux solutions distinctes, alors il en admet une infinité.
- Les systèmes homogènes admettent toujours (au moins) la solution nulle :

$$x_j = 0, j = 1, \ldots, m. \qquad \square$$

Les solutions d'un système non homogène compatible (ce qui n'est pas toujours le cas !) $AX = B$ peuvent être obtenues grâce à celles du *système homogène associé* $AX = 0$.

Propriété Si $\exists \tilde{X} \in \mathbb{R}^{m\times 1} : A\tilde{X} = B$, alors l'ensemble des solutions du système $AX = B$ est donné par : $\left\{X \in \mathbb{R}^{m\times 1} : X = \tilde{X} + Y,\ \text{où } AY = 0\right\}$. $\square$

Enfin, l'existence et l'unicité des solutions des systèmes linéaires peuvent être abordées au travers de conditions liant le rang de la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ des coefficients du système à celui de la matrice « augmentée », notée $\left(A\vdots B\right) \in \mathbb{R}^{n\times(m+1)}$, obtenue en accolant à A la colonne B des termes indépendants.

Propriétés

- Le système $AX = B$ admet au moins une solution $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\left(A\vdots B\right)$.
- Le système $AX = B$ admet une et une seule solution $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\left(A\vdots B\right) = m$. $\square$

Exemple

Le système $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ est homogène et admet donc au moins la solution nulle. Toutefois cette solution n'est pas unique puisque $m = 3$ et $\operatorname{rg} A \leqslant 2$ (car $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$).

5.2 Résolution par la méthode de Gauss

Les propriétés présentées dans la section précédente concernent surtout l'existence et l'unicité d'une solution. Elles sont à présent utilement complétées par la technique de résolution algorithmique de Gauss, qui sert également à résoudre d'autres problèmes d'algèbre linéaire, comme le calcul du rang d'une matrice.

Pour un système quelconque, la matrice A n'est pas nécessairement carrée, de sorte que, la résolution du système $AX = B$ par inversion de matrice, comme pour les systèmes de Cramer, n'est plus praticable.

La méthode de Gauss est une résolution générale par substitution de variables. Elle procède par transformations sur les équations du système, qu'on peut aussi voir comme les lignes de la matrice $\left(A \vdots B\right)$. Avant de décrire les étapes de la résolution, il convient de repérer chaque équation pour ensuite indiquer explicitement les opérations à effectuer. On écrit donc le système :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 & (2) \\ \qquad\qquad\vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n & (n) \end{cases}$$

Première étape : si $a_{11} \neq 0$, on remplace la première équation du système par :

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1m}}{a_{11}}x_m = \frac{b_2}{a_{11}} \cdot \qquad (1')$$

À chacune des autres équations ($i = 2, \ldots, n$) du système, on soustrait membre à membre $a_{i1}.(1')$ pour éliminer les termes en x_1 . On note $(2'), \ldots, (n')$ les équations obtenues et a'_{ij} les nouveaux coefficients. Le système initial est équivalent à celui constitué des équations $(1'), (2'), \ldots, (n')$.

Si $a_{11} = 0$, on procède de même après avoir préalablement permuté la première équation et une autre dans laquelle le coefficient de x_1 est non nul. Si x_1 n'apparaît pas dans le système, il est indéterminé et on passe au point suivant.

Deuxième étape : si $a'_{22} \neq 0$, on remplace la deuxième équation du système par :

$$x_2 + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}x_3 + \cdots + \frac{a'_{2m}}{a'_{22}}x_m = \frac{b'_2}{a'_{22}} \cdot \qquad (2'')$$

À chacune des autres équations ($i = 1, 3, \ldots, n$), on soustrait membre à membre $a'_{i2}.(2'')$ pour éliminer les termes en x_2. On note $(1''), (3''), \ldots, (n'')$ les équations obtenues. Le système initial est équivalent à celui constitué des équations $(1''), (2''), \ldots, (n'')$

Si $a'_{22} = 0$, on permute d'abord la deuxième équation avec une autre (mais pas la première) dans laquelle le coefficient devant x_2 est non nul. Si x_2 n'apparaît pas, ou uniquement dans $(1')$, il est indéterminé et on passe au point suivant.

Et ainsi de suite...

La procédure s'achève lorsqu'on a épuisé toutes les variables ou toutes les équations. À ce stade, le système obtenu (équivalent au système initial) peut comporter trois types d'équations, selon le nombre d'inconnues qui y figurent encore. Voici comment poser les conclusions.

- En ce qui concerne une équation qui ne comporte pas d'inconnues : si c'est une équation du type $0 = 0$, on l'élimine. Sinon, elle est du type $0 = 1$ et le système est impossible... Il est inutile d'examiner les autres équations.
- En ce qui concerne une équation qui comporte plus d'une inconnue : le système est indéterminé. S'il s'agit de la i-ème équation, on exprime x_i en fonction des autres variables (qui apparaissent comme des paramètres arbitraires).
- En ce qui concerne une équation qui comporte la seule inconnue x_i : la valeur prise par x_i est immédiatement donnée.

Exemples

1. $\begin{cases} x+2y-z=0 & (1) \\ 2x+y+z=1 & (2) \\ 4x+y+3z=-1 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=0 & (1') \\ -3y+3z=1 & (2') \\ -7y+7z=-1 & (3') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=0 & (1'') \\ y-z=\dfrac{-1}{3} & (2'') \\ -7y+7z=-1 & (3'') \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=\dfrac{2}{3} \\ y-z=\dfrac{-1}{3} \\ 0=\dfrac{-10}{3} \end{cases}$ système impossible.

2. $\begin{cases} 2x+6y-4z=2 \\ x-z=1 \\ -x+2y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y-2z=1 \\ x-z=1 \\ -x+2y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y-2z=1 \\ -3y+z=0 \\ 5y-z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y-2z=1 \\ y-\dfrac{1}{3}z=0 \\ 5y-z=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-z=1 \\ y-\dfrac{1}{3}z=0 \\ \dfrac{2}{3}z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-z=1 \\ y-\dfrac{1}{3}z=0 \\ z=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \\ z=\dfrac{3}{2} \end{cases}$ Solution unique : $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$.

La méthode de Gauss est aussi utile pour déterminer le rang d'une matrice. En effet, moyennant une éventuelle permutation des colonnes (qui ne modifie pas le rang), la méthode de Gauss permet de transformer une matrice quelconque, de taille $n \times m$, en une matrice de même rang composée de blocs du type $\begin{pmatrix} T_{r\times r} & B_{r\times(m-r)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{n\times m}$, où T est une matrice diagonale (ou, plus simplement, triangulaire supérieure) ayant des éléments non nuls sur la diagonale. Il s'ensuit que $\operatorname{rg} A = r$.

Exemple

Le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ -4 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ peut être obtenu de la façon suivante :

$$A \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ -4 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 3L_1 \\ L_4 \to L_4 + 4L_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & -4 & 10 & 4 \end{pmatrix} \overset{\substack{L_3 \to L_3 + L_2 \\ L_4 \to L_4 + 2L_2}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -10 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice, qui a le même rang que A, est de rang 3 puisque, ici,

$$T_{r\times r} = T_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

6 Diagonalisation des matrices carrées

6.1 Définitions

Dans l'optimisation de fonctions de plusieurs variables (chapitre 7), la diagonalisation est cruciale. L'objectif consiste à trouver, si possible, une matrice diagonale associée à une matrice carrée donnée. Le mode « d'association » entre matrices passe par la notion de « matrices semblables ». Seront aussi introduites les notions de valeurs propres et vecteurs propres qui permettent notamment de caractériser les matrices diagonalisables.

La méthode de Gauss (section 5.2) procède par annulations successives d'éléments de la matrice A. Si cette matrice était carrée, cette procédure s'apparenterait à une diagonalisation. Notons, en effet, que tout système linéaire carré $A.X = B$, pour lequel A est diagonale, est trivialement résolu (chaque équation donne la valeur d'une variable).

Définitions

- Les matrices A et $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sont dites *semblables* si $\exists H \in \mathbb{R}^{n\times n}$, inversible, telle que :
$$A = H^{-1}.B.H \left(\Leftrightarrow B = H.A.H^{-1}\right).$$
- Dans ce cas, la matrice H est appelée *matrice de passage*.
- La matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est *diagonalisable* si elle est semblable à une matrice diagonale. ❏

Toute matrice diagonale est évidemment diagonalisable (prendre $H = I_n$). Cependant, les matrices diagonales ne sont pas toutes semblables deux à deux. Ainsi, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables (prendre $H = H^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$) tandis que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ne le sont pas.

Les matrices carrées ne sont pas toutes diagonalisables. Une première question porte donc sur la caractérisation de telles matrices. Une seconde vise la détermination de la forme diagonale et, éventuellement, de la matrice de passage H. Dans les deux cas, la résolution passe par les notions de vecteurs et valeurs propres.

Définitions Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$.

- Le vecteur colonne $X \in \mathbb{R}^{n\times 1} \backslash \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est un *vecteur propre* de A si $\exists \lambda \in \mathbb{R}$: $AX = \lambda X$.
- Dans ce cas, on dit que X est associé à la *valeur propre* $\lambda \in \mathbb{R}$. ❏

Exemple

$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, associé à la valeur propre $\lambda = 2$, puisque $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice possède d'autres vecteurs propres comme, par exemple, le vecteur $\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ associé à la même valeur propre $\lambda = 2$ ou le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre $\lambda = -1$, puisque

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6.2 Le spectre d'une matrice

La détermination des valeurs propres de la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s'effectue grâce à la propriété suivante.

Propriété $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de $A \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$. ❑

Définitions Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$.

- Le polynôme $\det(A - \lambda I_n)$, de degré n, est appelé *polynôme caractéristique* de A.
- L'équation $\det(A - \lambda I_n) = 0$ est appelée *équation caractéristique* de A.
- L'ensemble des solutions *complexes* de cette équation constitue le *spectre* de A, noté S_A.
- La *multiplicité algébrique* d'une valeur propre est sa multiplicité comme solution de l'équation caractéristique [1]. ❑

Le spectre comporte donc n nombres complexes, distincts ou non. Toutefois, seuls ses éléments réels sont des valeurs propres auxquelles sont associés des vecteurs propres. Le spectre d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jouit des propriétés suivantes :

Propriétés

- A et A' ont le même spectre.
- Si A est inversible, alors 0 n'est pas une valeur propre de A.
- Si A est inversible et λ est une valeur propre réelle de A alors $\dfrac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de A^{-1}.
- Les matrices semblables ont toutes le même spectre. ❑

1. Le nombre a est une solution de multiplicité $p \in \mathbb{N}_0$ de l'équation polynomiale $Q(x) = 0$ (ou une racine de multiplicité p du polynôme Q) si on peut écrire $Q(x) = (x - a)^p R(x)$, où $R(x)$ est un polynôme tel que : $R(a) \neq 0$. On parle de « racine simple » si $p = 1$ et de « racine multiple » si $p \geqslant 2$.

Le dernier résultat laisse présager de l'importance que joue le spectre dans la phase de diagonalisation. La section suivante en détaille la procédure.

6.3 Spectre et diagonalisation

Les valeurs propres d'une matrice diagonale de $\mathbb{R}^{n \times n}$ sont les n nombres réels, nuls ou pas, se trouvant sur sa diagonale. Si un nombre y apparaît plus d'une fois, c'est que la valeur propre est multiple (racine multiple du polynôme caractéristique). Le spectre d'une matrice diagonale est donc un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Propriétés

- Si $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est diagonale : $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$,

  alors : $S_D = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$.
- Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est symétrique, alors elle est diagonalisable. ❑

En ce qui concerne les matrices carrées quelconques, une condition nécessaire et une condition suffisante sont établies.

Condition nécessaire Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est diagonalisable, alors toutes ses valeurs propres sont réelles. ❑

Dès lors, si le spectre de A comporte des nombres non réels, la matrice est non diagonalisable. Cette condition n'est cependant pas suffisante, puisque certaines matrices à spectre réel ne peuvent pas être diagonalisées.

Condition suffisante Si le spectre de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ comporte n valeurs propres réelles distinctes, alors A est diagonalisable. ❑

Restent alors à traiter les matrices dont toutes les valeurs propres sont réelles, et dont la multiplicité algébrique d'une valeur propre (au moins) est supérieure à 1. Ce cas requiert un examen plus approfondi reposant sur la résolution du système linéaire $AX = \lambda X$ pour chacune des valeurs propres multiples λ. En fait, ce système admet toujours une infinité de solutions, les vecteurs propres associés à λ et le vecteur nul. La caractérisation des matrices diagonalisables repose sur la dimension de cet ensemble de solutions (nombre de paramètres présents).

Condition nécessaire et suffisante $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est diagonalisable si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont réelles, et, pour toute valeur propre λ de multiplicité algébrique $m_\lambda \geqslant 2$, le système linéaire $AX = \lambda X$ admet une infinité de solutions à m_λ paramètres. ❑

On obtient une matrice diagonale semblable à la matrice diagonalisable A en plaçant les n valeurs propres de A sur la diagonale (avec répétition en cas de valeurs multiples). L'ordre des valeurs propres importe peu, puisque toutes les matrices diagonales dont les éléments sont identiques à une permutation près, ont le même spectre et sont toutes semblables entre elles.

Enfin, signalons que les puissances d'une matrice diagonalisable sont aisées à calculer.

Propriété Si A est diagonalisable avec $D = H^{-1}\,A.H$,

où $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors

$$\forall p \in \mathbb{N}_0 : A^p = H.D^p.H^{-1} = H \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^p \end{pmatrix} H^{-1}.$$ ❑

6.4 La diagonalisation en pratique

Sur la base des propriétés énoncées, la diagonalisation de la matrice carrée $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s'effectue selon le plan suivant.

Première étape : déterminer le spectre de A, c'est-à-dire les n solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation caractéristique $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Deuxième étape : si ce spectre comporte au moins un élément de $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, alors A n'est pas diagonalisable ; si toutes les valeurs propres sont réelles et distinctes, alors la matrice est diagonalisable ; si aucune des deux conclusions n'est applicable, passer au point suivant.

Troisième étape : pour chaque valeur propre λ dont la multiplicité algébrique est $\geqslant 2$, déterminer la dimension de l'ensemble des solutions du système $AX = \lambda X$; si, pour chacune d'entre elles, la multiplicité algébrique est égale à la dimension de cet ensemble, A est diagonalisable, sinon elle ne l'est pas.

En outre, si A est diagonalisable, une matrice diagonale qui lui est semblable est obtenue en plaçant les valeurs propres sur la diagonale (en ordre quelconque, avec multiplicité éventuelle).

Exemples

1. Pour vérifier si la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, on détermine son spectre S_A en résolvant l'équation caractéristique $\det(A - \lambda I_2) = 0$:

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-1-\lambda)(1-\lambda) - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 7 = 0$$

$S_A = \left\{\sqrt{7}, -\sqrt{7}\right\}$.

A admet donc 2 valeurs propres réelles et distinctes $\Rightarrow A$ est diagonalisable.

Les matrices diagonales semblables à A sont $\begin{pmatrix} \sqrt{7} & 0 \\ 0 & -\sqrt{7} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\sqrt{7} & 0 \\ 0 & \sqrt{7} \end{pmatrix}$.

2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, l'équation caractéristique s'écrit : $\det(B - \lambda I_3) = 0$.

Le calcul du déterminant s'effectue de la manière suivante :

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} \begin{vmatrix} -1 & 1-\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{L_2 \to L_2 - \lambda L_1}{=} \begin{vmatrix} -1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda+\lambda^2 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(1-\lambda+\lambda^2)(1-\lambda).$$

Le spectre de B possède au moins un élément non réel, solution de : $1-\lambda+\lambda^2 = 0$.
La matrice B n'est donc pas diagonalisable.

3. Si $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\det(C - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2.$$

S_C possède une unique valeur propre 1 de multiplicité algébrique 2. Pour vérifier si C est diagonalisable, il faut alors résoudre le système $C.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, pour $\lambda = 1$.

$$C.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow (C - I_2).\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - y = 0.$$

L'ensemble des solutions, donné par $\{(y,y) : y \in \mathbb{R}\}$, comporte un seul paramètre réel. La dimension de cet ensemble (égale à 1) est donc différente de la multiplicité algébrique (égale à 2) de la valeur propre. On en conclut que C n'est pas diagonalisable.

7 Formes quadratiques

7.1 Définitions

Une forme quadratique est une fonction polynomiale à une ou plusieurs variables, dont tous les termes sont du second degré. Les formes quadratiques interviennent dans l'étude des extrema des fonctions multivariées (chapitre 7). Plus précisément, l'étude du signe de telles fonctions présidera à la formulation de conditions du second ordre.

Si les formes quadratiques apparaissent dès ce chapitre, c'est parce que leur forme particulière permet d'étudier leur signe à l'aide de la diagonalisation de matrices symétriques.

Définition $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x = (x_1, \ldots, x_n) \to Q(x)$ est une *forme quadratique* si $\forall x \in \mathbb{R}^n : Q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$ où $\forall i, j : \alpha_{ij} \in \mathbb{R}$,

ou, sous forme matricielle : $Q(x) = X'\alpha X$, où $X = (x_i)_{n\times 1}$, $\alpha = (\alpha_{ij})_{n\times n}$ et X' est la matrice ligne transposée de X. ❑

Exemples

1. $Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^2 - 5x_1x_2$ est une forme quadratique dans $\mathbb{R}^2$.
2. $R(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^2 - 5x_1$ n'en n'est pas une (le dernier terme est du premier degré).

Comme $\forall i, j : \alpha_{ij}x_ix_j + \alpha_{ji}x_jx_i = \dfrac{\alpha_{ij}+\alpha_{ji}}{2}x_ix_j + \dfrac{\alpha_{ij}+\alpha_{ji}}{2}x_jx_i$, on peut, sans perte de généralité, supposer que la matrice α est symétrique. Les notions suivantes concernent le signe d'une forme quadratique.

Définitions

- La forme quadratique $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x = (x_1, \ldots, x_n) \to Q(x)$ est *définie positive* (resp. *définie négative)* si $\forall x \in \mathbb{R}^n : x \neq 0 \Rightarrow Q(x) > 0$ (resp. $Q(x) < 0$).
- La forme quadratique $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x = (x_1, \ldots, x_n) \to Q(x)$ est *semi-définie positive* (resp. *semi-définie négative)* si $\forall x \in \mathbb{R}^n : Q(x) \geqslant 0$ (resp. $Q(x) \leqslant 0$).
- La forme quadratique $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x = (x_1, \ldots, x_n) \to Q(x)$ est *indéfinie* si $\exists x, y \in \mathbb{R}^n : Q(x) > 0$ et $Q(y) < 0$. ❑

Remarque

Par définition : $Q(0) = 0$.

7.2 Formes quadratiques et diagonalisation

Considérons la forme quadratique $Q(x) = X'\alpha X$, où la matrice $\alpha \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est symétrique et donc diagonalisable (voir section 6.3). Il existe donc une matrice diagonale $\beta \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et une matrice inversible $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telles que : $\alpha = H^{-1}\beta H$ $(\Leftrightarrow \beta = H\alpha H^{-1})$. En outre :

$$\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \text{où les } \lambda_i \text{ sont les valeurs propres (réelles) de } \alpha.$$

À son tour, la matrice β permet de définir une forme quadratique en $Y = (y_i)_{n\times 1}$:

$$\hat{Q}(y) = Y'\beta Y = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}y_iy_j = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i^2.$$

et on peut montrer que :

$$Q \text{ est (semi)-définie positive (resp. négative)} \Leftrightarrow \hat{Q} \text{ est (semi)-définie positive (resp. négative).}$$

Propriétés Soit la forme quadratique $Q(x) = X'\alpha X$, où $\alpha \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est symétrique.

- Q est semi-définie positive $\Leftrightarrow$ toutes les valeurs propres de α sont $\geqslant 0$;
- Q est semi-définie négative $\Leftrightarrow$ toutes les valeurs propres de α sont $\leqslant 0$;
- Q est définie positive $\Leftrightarrow$ toutes les valeurs propres de α sont > 0 ;
- Q est définie négative $\Leftrightarrow$ toutes les valeurs propres de α sont < 0. ❑

On parle aussi bien de forme quadratique définie positive (par exemple) que de matrice symétrique définie positive. La propriété ci-dessus peut donc s'énoncer en remplaçant la forme Q par la matrice α.

7.3 La méthode des mineurs principaux

Étudier le signe de la forme quadratique $Q(x) = X'\alpha X$, où $\alpha \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est symétrique, revient à déterminer le signe des valeurs propres de α. Toutefois, dans la pratique, on fait volontiers usage de la *méthode des mineurs principaux*, souvent plus rapide que la diagonalisation complète.

Définition Les mineurs principaux de $\alpha = \left(\alpha_{ij}\right) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sont les déterminants des n sous-matrices :

$$\alpha_{(1)} = (\alpha_{11}) \in \mathbb{R}^{1\times 1}, \quad \alpha_{(2)} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \ldots$$

$$\ldots, \alpha_{(i)} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{i1} & \cdots & \alpha_{ii} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{i\times i}, \ldots, \alpha_{(n)} = \alpha. \quad ❏$$

Propriétés Soit $\alpha = \left(\alpha_{ij}\right) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique.

- α est définie positive $\Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n : \det \alpha_{(i)} > 0$;
- α est définie négative $\Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n : (-1)^i \det \alpha_{(i)} > 0$;
- α est semi-définie positive $\Rightarrow \forall i = 1, \ldots, n : \det \alpha_{(i)} \geqslant 0$;
- α est semi-définie négative $\Rightarrow \forall i = 1, \ldots, n : (-1)^i \det \alpha_{(i)} \geqslant 0$.
- $\exists i$ pair : $\det \alpha_{(i)} < 0 \Rightarrow \alpha$ est indéfinie. ❏

Notons que, pour les matrices semi-définies, les conditions sont nécessaires mais pas suffisantes. En outre, la dernière propriété est une conséquence directe des deux précédentes.

Dans le cas particulier des *matrices symétriques de taille* 2×2, $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, associées à des formes quadratiques du type : $Q\left(x, y\right) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2$, les deux mineurs principaux sont : $\det \alpha_{(1)} = a$ et $\det \alpha_{(2)} = \det \alpha = ac - b^2$.

Propriétés Soit $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ une matrice symétrique.

- α est définie positive $\Leftrightarrow a > 0$ et $ac - b^2 > 0$;
- α est définie négative $\Leftrightarrow a < 0$ et $ac - b^2 > 0$;
- α est semi-définie positive $\Rightarrow a \geqslant 0$ et $ac - b^2 \geqslant 0$.
- α est semi-définie négative $\Rightarrow a \leqslant 0$ et $ac - b^2 \geqslant 0$;
- $ac - b^2 < 0 \Rightarrow \alpha$ est indéfinie. ❏

Exemples

1. $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est définie positive ($a = 4 > 0$ et $ac - b^2 = 7 > 0$).

2. $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ est définie négative ($a = -2 < 0$ et $ac - b^2 = 2 > 0$).

3. $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est indéfinie ($ac - b^2 = -3 < 0$).

4. La matrice nulle, $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, n'est ni définie positive, ni définie négative puisque $a = 0$.

On ne peut rien conclure concernant le fait qu'elle soit semi-définie à partir des résultats ci-dessus. Cependant, la forme quadratique correspondante Q, définie par : $Q(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ est à la fois semi-définie positive et semi-définie négative. On aurait aussi pu déduire ce résultat de $S_\alpha = \{0\}$.

5. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est semi-définie négative car elle possède trois valeurs propres $\leqslant 0$.

6. Pour $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, la méthode des mineurs principaux ne permet pas de conclure.

Toutefois, on a : $S_\alpha = \{1, -1, 2\}$ (à vérifier comme exercice). Il s'ensuit que la matrice α possède des valeurs propres de signes opposés et α est indéfinie.

Problèmes et exercices

Ce chapitre porte sur plusieurs concepts importants d'algèbre linéaire. Les exercices se doivent de tous les illustrer. En particulier, les résultats relatifs au signe des formes quadratiques seront utilisés dans les exercices du chapitre 7, pour étudier les extrema des fonctions de plusieurs variables. Enfin, apparaîtront divers problèmes appliqués à la gestion dont la résolution fait intervenir des matrices ou des systèmes linéaires.

Opérations sur les matrices

Exercice 1

Énoncé

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

a Déterminez, si possible, les matrices suivantes : $3A$, $-C$, $A+B$, $B-A$, $B+C$, $A.B$, $B.A$, $B.C$. Vérifiez que $A.B \neq B.A$.

b Déterminez A', B', $(A.B)'$ et vérifiez que $(A.B)' = B'.A'$.

Solution

a $3A = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $-C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$, $A+B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, $B-A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$,

$B+C$: impossible, $A.B = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, $B.A = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 12 & -10 \end{pmatrix} \neq A.B$,

$B.C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 6 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

b $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B' = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $(A.B)' = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B'.A' = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = (A.B)'$.

Exercice 2

Énoncé

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Trouvez l'ensemble des matrices $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ telles que $A.B = B.A$.

Solution

Posons $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. La condition $A.B = B.A$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 3x+4z & 3y+4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y & 2x+4y \\ z+3t & 2z+4t \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2z = x+3y \\ y+2t = 2x+4y \\ 3x+4z = z+3t \\ 3y+4t = 2z+4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z = 3y \\ 2t = 2x+3y \\ 3x+3z = 3t \\ 3y = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{3}{2}y \\ t = x+\frac{3}{2}y \\ 3x+\frac{9}{2}y = 3x+\frac{9}{2}y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{3}{2}y \\ t = x+\frac{3}{2}y \\ x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Donc : $B = \begin{pmatrix} x & y \\ \frac{3}{2}y & x+\frac{3}{2}y \end{pmatrix}$, où $x, y \in \mathbb{R}$.

Matrices particulières

Exercice 3

Énoncé

Montrez que pour toute matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, les matrices $A.A'$ et $A'.A$ existent et sont carrées.

Solution

Par définition de la transposée, $A' \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Les deux produits matriciels $A.A'$ et $A'.A$ sont donc réalisables et, d'une part, $A\,A' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, d'autre part, $A'.A \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Ces deux matrices sont donc carrées.

EXERCICE 4

Énoncé

a Montrez que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est idempotente ($A^2 = A$) et si $B = I_n - A$, alors B est idempotente.

b Montrez que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est symétrique et idempotente, alors $A.A'.A = A$.

Solution

a Par hypothèse, $B = I_n - A$ et $A^2 = A$. Donc :

$$B.B = (I_n - A)(I_n - A) = I_n^2 - A - A + A^2 = I_n - 2A + A = I_n - A = B$$
$$\Rightarrow B \text{ est idempotente.}$$

b $A = A'$ et $A^2 = A \Rightarrow A.A'.A = \left(A.A'\right).A = (A.A).A = A^2.A = A\,A = A^2 = A.$

Trace et déterminant

EXERCICE 5

Énoncé

Reprenez les données de l'exercice 1.
Calculez tr $(3A + 2B)$ de deux manières différentes.

Solution

Première manière : $\operatorname{tr}(3A + 2B) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 12 & -4 \\ 12 & 7 \end{pmatrix} = 12 + 7 = 19.$

Seconde manière : $\operatorname{tr}(3A + 2B) = 3\operatorname{tr}A + 2\operatorname{tr}B = 3.3 + 2.5 = 19.$

EXERCICE 6

Énoncé

Calculez le déterminant de chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solution

$|A| = 2 \times 3 - (-1) \times 4 = 10.$

$|B| = -1 \times 2 \times 1 + 4 \times 2 \times 6 + 0 \times 1 \times 0 - 0 \times 2 \times 6 - 4 \times 1 \times 1 - (-1) \times 2 \times 0 = 42.$

$|C| = -4.$

EXERCICE 7

Énoncé

a Toute matrice triangulaire $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a pour déterminant le produit des éléments diagonaux. Montrez-le pour $n = 3$.

b Calculez $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ en passant par une forme triangulaire et en appliquant le résultat précédent.

Solution

a $T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ f & e & c \end{pmatrix}$ est la forme générale d'une matrice triangulaire inférieure de taille 3×3.

D'après la règle de Sarrus : $\det T = abc + 00f + 0de - 0bf - 0dc - a0e = abc$.

Comme $\det T = \det T'$, le résultat reste valable pour une matrice triangulaire supérieure.

b Les propriétés utilisées ici sont :

- Si une ligne est multipliée par un nombre réel, le déterminant l'est également.
- Le déterminant d'une matrice ne se modifie pas si on ajoute à une ligne, une combinaison linéaire d'autres lignes.
- Une permutation de deux lignes change le signe du déterminant.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 5 & 4 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2\to L_2+4L_1\\ L_3\to L_3-L_1\\ L_4\to L_4+3L_1}}{=} 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2\to L_2-3L_3\\ L_4\to L_4-L_3}}{=} 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 7 \end{vmatrix} \underset{L_3\leftrightarrow L_2}{=} -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\underset{L_4\to L_4-\frac{10}{11}L_3}{=} -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{47}{11} \end{vmatrix} = -2 \times 1 \times 2 \times 11 \times \frac{47}{11}$$

$$= -188.$$

EXERCICE 8

Énoncé

Montrez que le déterminant des matrices suivantes est nul :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} x & 2x+4 & 4 \\ y & 2y+9 & 9 \\ z & 2z & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \\ -1 & 8 & 0 & 1 \\ 1 & -20 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution

On procède par transformations de lignes (pour D et F), ou de colonnes (pour E), qui ne modifient pas le déterminant, jusqu'à l'obtention d'une matrice présentant une caractéristique suffisante pour annuler son déterminant.

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(deux lignes proportionnelles).}$$

$$|E| = \begin{vmatrix} x & 2x+4 & 4 \\ y & 2y+9 & 9 \\ z & 2z & 0 \end{vmatrix} \overset{C_2 \to C_2 - 2C_1}{=} \begin{vmatrix} x & 4 & 4 \\ y & 9 & 9 \\ z & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(deux colonnes identiques).}$$

$$|F| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \\ -1 & 8 & 0 & 1 \\ 1 & -20 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \\ -1 & 8 & 0 & 1 \\ 1 & -20 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 5 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & -10 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 + L_1 \\ L_4 \to L_4 - L_1}}{=} 4 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -9 & -1 & -1 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_3 \to L_3 - L_2 \\ L_4 \to L_4 + 3L_2}}{=} 4 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 \quad \text{(deux lignes identiques).}$$

EXERCICE 9

Énoncé

Résolvez l'équation $\begin{vmatrix} x-1 & 4 & 6 \\ 4 & x-4 & 4 \\ 5 & 8 & x-2 \end{vmatrix} = 0.$

Solution

$$\begin{vmatrix} x-1 & 4 & 6 \\ 4 & x-4 & 4 \\ 5 & 8 & x-2 \end{vmatrix} = 0 \overset{L_1 \to L_1+L_2+L_3}{\Leftrightarrow} \begin{vmatrix} x+8 & x+8 & x+8 \\ 4 & x-4 & 4 \\ 5 & 8 & x-2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\overset{\substack{C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_1}}{\Leftrightarrow} \begin{vmatrix} x+8 & 0 & 0 \\ 4 & x-8 & 0 \\ 5 & 3 & x-7 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x+8)\,(x-8)\,(x-7) = 0 \Leftrightarrow x \in \{7, 8, -8\}.$$

Exercice 10

Énoncé

Montrez que le déterminant d'une matrice de taille $n \times n$ antisymétrique est nul si n est impair.

Solution

Si $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est antisymétrique, alors :

$$M' = -M \Rightarrow \det M' = \det(-M) = \det[(-1)M] \Rightarrow \det M = (-1)^n \det M.$$

Si, en outre, n est impair, alors : $(-1)^n = -1$ et $\det M = -\det M \Rightarrow \det M = 0$.

Inversion de matrices

Exercice 11

Énoncé

a Montrez que : $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$: B inversible et $A.B = 0_{n\times n} \Rightarrow A = 0_{n\times n}$.

b Cette proposition reste-t-elle vraie si on remplace l'hypothèse d'inversibilité par $B \neq 0_{n\times n}$?

Solution

a $A.B = 0_{n\times n} \Rightarrow (A.B).B^{-1} = 0_{n\times n}.B^{-1} \Rightarrow A.\left(B.B^{-1}\right) = 0_{n\times n}.B^{-1} \Rightarrow A.I_n = 0_{n\times n} \Rightarrow A = 0_{n\times n}$.

b Non. Voici un contre-exemple.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{n\times n} \quad (\neq 0_{n\times n}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} \Rightarrow AB = 0_{n\times n}.$$

Exercice 12

Énoncé

a Inversez, si possible, les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

b Montrez que $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.

c La matrice $A.C$ est-elle inversible?

d Trouvez, si possible, $F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ telle que : $F^{-1} = \frac{1}{2}AC - 8I_2$.

Solution

a $\det A = 10 \neq 0$. Cherchons $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} 2a - c = 1 \\ 4a + 3c = 0 \\ 2b - d = 0 \\ 4b + 3d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{10}, \quad c = \dfrac{-2}{5} \\ b = \dfrac{1}{10}, \quad d = \dfrac{1}{5} \end{cases} \quad \text{et finalement : } A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{10} & \dfrac{1}{10} \\ -\dfrac{2}{5} & \dfrac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 \\ -\dfrac{2}{5} & \dfrac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

$\det C = 0 \Rightarrow C$ est singulière.

$\det D = -1 \neq 0$. Cherchons $D^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ telle que

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -a + 6d + 2g = 1 \\ d = 0 \\ 3a - 5g = 0 \\ -b + 6e + 2h = 0 \\ e = 1 \\ 3b - 5h = 0 \\ -c + 6f + 2i = 0 \\ f = 0 \\ 3c - 5i = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -30 \\ c = 2 \\ d = 0 \\ e = 1 \\ f = 0 \\ g = 3 \\ h = -18 \\ i = 1 \end{cases} \quad \text{et finalement : } E^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -30 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -18 & 1 \end{pmatrix}.$$

b $(A.B) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 20 & 15 \end{pmatrix}$

$$(A.B)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{15}{100} & \frac{5}{100} \\ -\frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix} = B^{-1}.A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{20} & \frac{1}{20} \\ -\frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

c Non. En effet, $\det(A.C) = \det A.\det C = 0$, puisque $\det C = 0$.

d $F^{-1} = \frac{1}{2}AC - 8I_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 16 & -24 \\ 12 & -18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow F^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ 6 & -17 \end{pmatrix} \Rightarrow F = \left(F^{-1}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ 6 & -17 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{17}{72} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{12} & 0 \end{pmatrix}.$$

Rang et systèmes linéaires

Exercice 13

Énoncé

a Résolvez le système de Cramer $\begin{cases} x + y = 1 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$ par la méthode des déterminants.

b Dans chaque cas, caractérisez le système et résolvez-le.

$$(i) \begin{cases} x + 2y - 5z + t = 0 \\ 2z + y - x + 2t = 0 \\ -2x + 7z + 2t = 0 \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} x + 2y - 5z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \quad (iii) \begin{cases} x + 2y = 2 \\ x - 2y = -1 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$$

Solution

a $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{2}{3}, y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{3}.$

b On utilise la méthode de Gauss sous forme matricielle, soit à partir la matrice A des coefficients (pour un système homogène), soit à partir de la matrice augmentée $\left(A \vdots B\right)$ (pour un système non homogène).

(i) Système homogène de 3 équations à 4 inconnues.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} \underset{L_3 \to L_3 + 2L_1}{\overset{L_2 \to L_2 + L_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 4 \end{pmatrix} \overset{L_2 \to \frac{1}{3}L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \to L_3 - 4L_2}{\overset{L_1 \to L_1 - 2L_2}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_2 \to L_2 + L_3}{\overset{L_1 \to L_1 + 3L_3}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 0 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases} .$$

Le système est donc indéterminé. L'ensemble de ses solutions est :

$$S = \{(\lambda, -\lambda, 0, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\} .$$

(ii) Système homogène de 3 équations à 3 inconnues, donc carré.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \to L_3 + L_1}{\overset{L_2 \to L_2 - L_1}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_2 \to -L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \overset{L_3 \to L_3 - 3L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} .$$

dont le déterminant est non nul, ce qui implique que le système homogène est de Cramer. Il possède donc l'unique solution (0, 0, 0).

(iii) Système non homogène de 3 équations à 2 inconnues.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \to L_3 - 3L_1}{\overset{L_2 \to L_2 - L_1}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & -5 & -6 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_2 \to \frac{-1}{4}L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & -5 & -6 \end{array}\right) \overset{L_3 \to L_3 + 5L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & -9/4 \end{array}\right) .$$

La dernière ligne signifie : « $0 = \dfrac{-9}{4}$ ». Le système est donc impossible.

Exercice 14

Énoncé

Déterminez les valeurs de a et $b \in \mathbb{R}$ telles que le système $\begin{cases} ax + 2by = ab + 1 \\ x - 2y = b \end{cases}$ soit compatible.

Solution $\left(\begin{array}{cc|c} a & 2b & ab+1 \\ 1 & -2 & b \end{array}\right) \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & b \\ a & 2b & ab+1 \end{array}\right) \overset{L_2 \rightarrow L_2 - aL_1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & b \\ 0 & 2b+2a & 1 \end{array}\right)$

$\overset{L_2 \rightarrow \frac{L_2}{2}}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & b \\ 0 & a+b & 0,5 \end{array}\right)$. Le système est compatible $\Leftrightarrow a+b \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -b$.

EXERCICE 15

Énoncé

Résolvez le système suivant en discutant selon le paramètre réel k : $\begin{cases} kx + 2y - z = 0 \\ x + y - 2kz = 0 \\ x + y = k \end{cases}$.

Solution $\begin{pmatrix} k & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2k & 0 \\ 1 & 1 & 0 & k \end{pmatrix} \overset{L_2 \leftrightarrow L_1}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2k & 0 \\ k & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & k \end{pmatrix}$

$$\overset{\substack{L_2 \rightarrow L_2 - kL_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2k & 0 \\ 0 & 2-k & -1+2k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2k & k \end{pmatrix} \qquad (*)$$

• Si $k \neq 2$:

$$(*) \overset{L_2 \rightarrow \frac{1}{2-k}L_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2k & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{-1+2k^2}{2-k} & 0 \\ 0 & 0 & 2k & k \end{pmatrix} \overset{L_1 \rightarrow L_1 - L_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{1-4k}{2-k} & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{-1+2k^2}{2-k} & 0 \\ 0 & 0 & 2k & k \end{pmatrix} \qquad (**)$$

• Si $k \neq 2$ et $k \neq 0$:

$$(**) \overset{L_3 \rightarrow \frac{1}{2k}L_3}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{1-4k}{2-k} & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{-1+2k^2}{2-k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \overset{\substack{L_1 \rightarrow L_1 - \frac{1-4k}{2-k}L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 - \frac{-1+2k^2}{2-k}L_3}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dfrac{4k-1}{4-2k} \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{1-2k^2}{4-2k} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

la solution $\left(\dfrac{4k-1}{4-2k}, \dfrac{1-2k^2}{4-2k}, \dfrac{1}{2}\right)$ est unique.

• Si $k = 2$:

$$(*) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \overset{L_2 \rightarrow \frac{1}{7}L_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \overset{L_3 \rightarrow L_3 - 4L_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

système impossible.

• Si $k = 0$:

$$(**) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}z \\ y = \frac{1}{2}z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

∞^1 solutions : $\left\{\left(-\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \lambda\right) : \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.

EXERCICE 16

Énoncé

Le système $AX = B$ comporte 30 équations à 20 inconnues. Déterminez son nombre de solutions, sachant que :

a $\operatorname{rg} A = 19$ et $\operatorname{rg}(A \vdots B) = 20$,

b $\operatorname{rg} A = 20$ et $\operatorname{rg}(A \vdots B) = 20$,

c $\operatorname{rg} A = 18$ et $\operatorname{rg}(A \vdots B) = 18$.

Solution

a aucune solution,

b une solution,

c une infinité de solutions.

EXERCICE 17

Énoncé

a Calculez le rang de chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b Discutez le rang des matrices suivantes en fonction des paramètres réels a et b :

$$E = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & -1 & b \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution

a $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \overset{L_2 \to L_2 - 2L_1}{\to} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \to \operatorname{rg} A = 2,$

$$B=\begin{pmatrix}1&4\\3&12\end{pmatrix}\overset{L_2\to L_2-3L_1}{\to}\begin{pmatrix}1&4\\0&0\end{pmatrix}\to \operatorname{rg} B=1,$$

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\overset{L_2\to L_2-L_1}{\to}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to \operatorname{rg} C=1,$$

$$D=\begin{pmatrix}1&-2&5&-4\\-2&4&-2&1\end{pmatrix}\overset{L_2\to L_2+2L_1}{\to}\begin{pmatrix}1&2&5&-4\\0&0&8&-7\end{pmatrix}\overset{C_2\leftrightarrow C_3}{\to}\operatorname{rg} D=2.$$

b $E=\begin{pmatrix}a&-1\\1&-1\end{pmatrix}\overset{L_1\leftrightarrow L_2}{\to}\begin{pmatrix}1&-1\\a&-1\end{pmatrix}\overset{L_2\to L_2-aL_1}{\to}\begin{pmatrix}1&-1\\0&a-1\end{pmatrix}\to\begin{cases}\operatorname{rg} E=2 & \text{si } a\neq 1\\ \operatorname{rg} E=1 & \text{si } a=1\end{cases},$

$$F=\begin{pmatrix}1&a&0\\2&-1&b\\2&0&0\end{pmatrix}\overset{L_1\leftrightarrow L_3}{\to}\begin{pmatrix}2&0&0\\2&-1&b\\1&a&0\end{pmatrix}\overset{L_1\to\frac{1}{2}L_1}{\to}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&b\\1&a&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{L_2\to L_2-2L_1\\ L_3\to L_3-L_1}}{\to}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&b\\0&a&0\end{pmatrix}\overset{L_3\to L_3+aL_2}{\to}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&b\\0&0&ab\end{pmatrix}.$$

- Si $ab=0\Leftrightarrow a=0$ ou $b=0$: $\operatorname{rg} F=2$.
- Si $ab\neq 0\Leftrightarrow a\neq 0$ et $b\neq 0$: $\operatorname{rg} F=3$.

Diagonalisation

EXERCICE 18

Énoncé

Dans chaque cas, déterminez le spectre des matrices données. Ces matrices sont-elles diagonalisables? Si oui, donnez-en une matrice diagonale semblable.

a $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}.$

b $B=\begin{pmatrix}2&-4\\5&-2\end{pmatrix}.$

c $C=\begin{pmatrix}4&1&-1\\2&5&-2\\1&1&2\end{pmatrix}.$

d $E=\begin{pmatrix}-3&1&-1\\-7&5&-1\\-6&6&-2\end{pmatrix}.$

Solution

a $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(-\lambda) - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow$ $S_A = \{2, -1\}$.

A admet 2 valeurs propres réelles distinctes $\Rightarrow$ A est diagonalisable. $D_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale semblable à A.

b $\det(B-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (2-\lambda)(-(2+\lambda)) + 20 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 16 = 0 \Rightarrow S_B = \{-4i, 4i\}$. $S_B \not\subset \mathbb{R} \Rightarrow B$ n'est pas diagonalisable.

c $\det(C-\lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 5-\lambda & -2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\overset{C_3 \to C_3 + C_2}{\Leftrightarrow} (3-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 5-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Pour faciliter la factorisation du polynôme caractéristique, on introduit des zéros en dernière colonne avant d'appliquer la règle de Sarrus :

$$(1) \overset{L_2 \to L_2 - L_3}{\Leftrightarrow} (3-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3-\lambda)\left((4-\lambda)^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)^2 (5-\lambda) = 0$$
$$\Rightarrow S_C = \{3, 5\}.$$

où les valeurs propres réelles, 3 et 5, sont de multiplicités algébriques respectives 2 et 1.

Il faut donc résoudre le système $C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, pour $\lambda = 3$.

$$C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow (C - 3I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \qquad (2)$$

Par la méthode de Gauss, on a : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc : (2) $\Leftrightarrow x + y - z = 0$.

L'ensemble des solutions, $\left\{(x, y, x+y) : x, y \in \mathbb{R}\right\}$, comporte 2 paramètres. C est donc diagonalisable.

$D_C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est semblable à C.

d $\det(E-\lambda I)=\begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & -1 \\ -7 & 5-\lambda & -1 \\ -6 & 6 & -2-\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow (4-\lambda)(\lambda+2)^2=0$

$\Rightarrow S_E=\{-2, 4\}$, où les valeurs propres réelles -2 et 4 sont de multiplicités algébriques respectives 2 et 1. Il faut donc résoudre le système $E\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, pour $\lambda=-2$.

$$E\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow (E+2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ z=0 \\ y\in\mathbb{R} \end{cases}$$

puisque par la méthode de Gauss, on a :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des solutions $\{(y, y, 0) : y\in\mathbb{R}\}$ ne comporte qu'un seul paramètre. Donc E n'est pas diagonalisable.

Formes quadratiques

EXERCICE 19

Énoncé

Étudiez le signe des formes quadratiques données par la méthode des valeurs propres.

a $Q(x, y)=x^2+3y^2+2xy$.

b $Q(x, y, z)=x^2+y^2+3z^2+4xy$.

c $Q(x, y, z)=6x^2+5y^2+7z^2-4xy+4xz$.

d $Q(x, y, z)=4x^2+4y^2-8z^2-10xy-4xz-4yz$.

e $Q(x, y, z)=y^2+z^2+2xy-2xz$.

Solution

a La matrice symétrique associée à Q est $\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\det(\alpha-\lambda I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(3-\lambda)-1$$
$$=\lambda^2-4\lambda+2 \Rightarrow S_\alpha=\left\{2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\right\}.$$

Les valeurs propres de α sont positives $\Rightarrow$ Q est définie positive.

b La matrice symétrique associée à Q est $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\det(\alpha - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)^2 (3-\lambda) - 4(3-\lambda) \\ &= (3-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 4\right) = (3-\lambda)(1-\lambda-2)(1-\lambda+2) \\ &= -(3-\lambda)^2(1+\lambda) \Rightarrow S_\alpha = \{-1, 3\}.\end{aligned}$$

L'existence de valeurs propres de signes opposés implique que Q est indéfinie.

c Q est définie positive.

d Q est indéfinie.

e La matrice symétrique associée à Q est $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}\det(\alpha - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= -\lambda(1-\lambda)^2 - (1-\lambda) - (1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)\left(\lambda^2 - \lambda - 2\right) \Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-2) = 0 \Rightarrow S_\alpha = \{-1, 1, 2\}.\end{aligned}$$

L'existence de valeurs propres de signes opposés implique que Q est indéfinie.

EXERCICE 20

Énoncé

Déterminez par la méthode des mineurs principaux si les matrices symétriques suivantes sont (semi)-définies positives ou négatives.

$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$,

$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$,

$K = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$,

$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6y \end{pmatrix}$ où $y \in \mathbb{R}$,

$T = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Solution

Les matrices A, C, E, F, M, P et S $(\forall y \in \mathbb{R})$ sont indéfinies car leurs déterminants sont négatifs.

Les matrices B, D, G, H, K, L, N, Q et R sont définies positives.

- Justification pour B : $\alpha_{(1)} = 6 > 0$, $\alpha_{(2)} = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 9 > 0$.
- On peut raisonner de la même façon pour D, H, Q et R.
- Justification pour G, L et N : ce sont des matrices diagonales dont les valeurs propres (qui apparaissent sur la diagonale) sont positives.
- Justification pour K :

$$\alpha_{(1)} = 2 > 0,\ \alpha_{(2)} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 8$$

$$\text{et}\quad \alpha_{(3)} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 48 - 24 - 16 = 8 > 0.$$

- Pour J : aucune conclusion n'est apportée par la méthode des mineurs principaux.
  Cependant, comme $S_J = \{-8, 0\}$, les valeurs propres sont toutes négatives ou nulles. On en conclut que J est semi-définie négative.
- T est définie négative. En effet : $\alpha_{(1)} = -4 < 0$, $\alpha_{(2)} = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$.

Applications à la gestion

Exercice 21

Énoncé

Une entreprise de fournitures de bureau vend des cartouches d'encre de qualité moyenne (mesurée par le nombre 15 sur une échelle numérique connue de 1 à 30) à 50 euros la pièce. Elle dispose de deux variables de décision pour influencer le volume V de ses ventes de cartouches d'encre et sa marge bénéficiaire par cartouche M : le prix par cartouche (noté p) et la qualité des cartouches (notée q).

Si le prix de la cartouche passe de p à $p + a$ (à qualité inchangée), les ventes diminuent globalement de $3a$ unités et la marge unitaire augmente de a. Si la qualité des cartouches passe de q à $q + b$ (à prix inchangé), les ventes augmentent de b unités et la marge unitaire baisse de b.

Déterminez la stratégie qui permet de vendre 20 cartouches de plus sans affecter la marge unitaire.

Solution

La solution est donnée par le couple (a, b), où a représente la variation de prix et b la variation de qualité, vérifiant les deux conditions suivantes :

- Accroissement des ventes de 20 unités : $\Delta V = -3a + b = 20$,
- Marge inchangée : $\Delta M = a - b = 0$.

Ces conditions se présentent sous la forme d'un système de Cramer :

$$\begin{cases} -3a+b=20 \\ a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a=20 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-10 \\ b=-10 \end{cases}.$$

Pour vendre 20 cartouches de plus sans changer sa marge, l'entreprise doit baisser son prix de vente de 10 euros par cartouche en diminuant la qualité de 10 unités. Elle doit donc vendre à 40 euros des cartouches de qualité 5.

EXERCICE 22

Énoncé

Une entreprise fabrique deux produits intermédiaires U et V. Pour produire une unité de produit U (resp. de produit V) l'entreprise utilise 20 % (resp. 10 %) de sa production de U et 60 % (resp. 30 %) de sa production de V.

On appelle *matrice des coefficients techniques*, la matrice $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ (ici $n = 2$) telle que a_{ij} représente la quantité de l'input i nécessaire pour produire une unité de j.

a Donnez la matrice des coefficients techniques de l'entreprise considérée.

b Si l'entreprise produit 200 unités de biens U et 350 unités de biens V, quelle sera la production finale qui parviendra aux consommateurs?

c Quelle est le niveau de la production totale qui satisfait une demande finale de 500 unités de U et 1 000 de V?

Solution

a La matrice des coefficients techniques est $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$.

b Sous forme matricielle, cette production s'exprime par : $X = \begin{pmatrix} 200 \\ 350 \end{pmatrix}$.

La consommation intermédiaire est donné par : $AX = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 200 \\ 350 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 \\ 225 \end{pmatrix}$.

Pour satisfaire la demande finale, il reste donc : $X - AX = \begin{pmatrix} 200 \\ 350 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 75 \\ 225 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 \\ 125 \end{pmatrix}$,

soit 125 unités de U et 125 unités de V.

c Soit $D = \begin{pmatrix} 500 \\ 1\,000 \end{pmatrix}$, la matrice colonne qui exprime la demande finale.

Il faut trouver $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ tel que : $X - AX = D$.

Or : $X - AX = D \Leftrightarrow (I-A)\,X = D \Leftrightarrow X = (I-A)^{-1}\,D$, car $(I-A)$ est une matrice inversible.

On procède donc à l'inversion de la matrice : $(I - A) = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}1 \\ -0{,}6 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

On obtient $(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 1{,}6 \end{pmatrix}$.

Il s'ensuit que : $X = (I - A)^{-1} D = \begin{pmatrix} 1{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 1{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500 \\ 1\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900 \\ 1\,700 \end{pmatrix}$.

Ainsi, la production nécessaire est 900 unités de U et 1 700 de V.

Remarque

la matrice $(I - A)$ est appelée *matrice de Léontiev*.

EXERCICE 23

Énoncé

Les prix, à la date t, de trois actions de firmes liées par leurs structures d'actionnariat, $p_{1,t}$, $p_{2,t}$ et $p_{3,t}$, dépendent chacun des anticipations des prix futurs des trois titres, $\hat{p}_{i,t+1}$ $(i = 1, 2, 3)$, de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} p_{1,t} \\ p_{2,t} \\ p_{3,t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & \frac{b}{2} \\ b & d & \frac{b}{3} \\ \frac{b}{2} & \frac{b}{3} & \frac{a+d}{2} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \hat{p}_{1,t+1} \\ \hat{p}_{2,t+1} \\ \hat{p}_{3,t+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \\ \varepsilon_{3,t} \end{pmatrix}, \quad \text{où } a, b, c, d > 0 \qquad (1)$$

où $\varepsilon_{1,t}$, $\varepsilon_{2,t}$ et $\varepsilon_{3,t}$ représentent des perturbations aléatoires.

a Montrez que la matrice A est diagonalisable.

b Grâce à cette diagonalisation, il existe un système de trois prix, combinaisons linéaires de $p_{1,t}$, $p_{2,t}$ et $p_{3,t}$, telle que l'évolution de chacun ne dépend que de sa propre anticipation et de perturbations. Démontrez-le.

Solution

a La matrice A étant symétrique, elle est diagonalisable.

b Condensons l'écriture de (1) sous la forme : $p_t = A\hat{p}_{t+1} + \varepsilon_t$.

Comme A est diagonalisable, on a, par définition : $\exists H, D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ telles que H est inversible, D est diagonale et : $A = H^{-1}DH$ $(\Leftrightarrow HA = DH)$.

Le système (1) s'écrit de façon équivalente, en multipliant à gauche par la matrice H :

$$Hp_t = \underbrace{HA}_{DH}\hat{p}_{t+1} + H\varepsilon_t \Leftrightarrow \tilde{p}_t = D\hat{\tilde{p}}_{t+1} + \tilde{\varepsilon}_t \qquad (2)$$

où $\tilde{p}_t = Hp_t \left(\Rightarrow \hat{\tilde{p}}_{t+1} = H\hat{p}_{t+1}\right)$ et $\tilde{\varepsilon}_t = H\varepsilon_t$.

Chaque composante du nouveau vecteur de prix $\tilde{p}_t = Hp_t$ s'exprime en fonction de sa propre anticipation et de perturbations puisque (2) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_{1,t} \\ \tilde{p}_{2,t} \\ \tilde{p}_{3,t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}}_{D} \begin{pmatrix} \hat{\tilde{p}}_{1,t+1} \\ \hat{\tilde{p}}_{2,t+1} \\ \hat{\tilde{p}}_{3,t+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_{1,t} \\ \tilde{\varepsilon}_{2,t} \\ \tilde{\varepsilon}_{3,t} \end{pmatrix}$$

ou encore : $\tilde{p}_{i,t} = d_i \hat{\tilde{p}}_{i,t+1} + \tilde{\varepsilon}_{i,t}$, $i = 1, 2, 3$.

EXERCICE 24

Énoncé

Un économètre a établi que la dynamique jointe des taux de change (vis-à-vis du dollar US) de l'euro $c_{1,t}$, du franc suisse $c_{2,t}$ et de la livre sterling $c_{3,t}$ s'établit comme suit :

$$\begin{pmatrix} c_{1,t} \\ c_{2,t} \\ c_{3,t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & c \\ b & 0 & a \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} c_{1,t-1} \\ c_{2,t-1} \\ c_{3,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1,t} \\ \varepsilon_{2,t} \\ \varepsilon_{3,t} \end{pmatrix}, \quad \text{où } a > 0 \text{ et } b, c \geqslant 0. \qquad (1)$$

a La matrice A est-elle diagonalisable ? On discutera en fonction des paramètres a, b et c.

b En omettant les perturbations (imprévisibles), écrivez la prévision du cours de l'euro pour la semaine prochaine (à la date $t+5$, puisqu'une semaine correspond à 5 jours ouvrables), en fonction des taux de change présents.

Solution

a $\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & 0 \\ b & a-\lambda & c \\ b & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^3.$

L'unique valeur propre, a, est réelle et de une multiplicité algébrique égale à 3. Il faut donc déterminer la dimension de l'ensemble des solutions de :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & c \\ b & 0 & a \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} bx + cz = 0 \\ bx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} cz = 0 \\ bx = 0 \end{cases}.$$

La dimension de l'ensemble de solution n'est égale à 3 que lorsque $b = c = 0$. On a donc : A est diagonalisable $\Leftrightarrow b = c = 0$.

b La première ligne du système (1) exprime que l'euro ne dépend ni la valeur passée du franc suisse, ni de celle de la livre sterling : $c_{1,t} = ac_{1,t-1} + \varepsilon_{1,t}$. Sachant que la perturbation est imprévisible (prévision nulle), on obtient simplement la prévision suivante : $\hat{c}_{1,t+5} = a\hat{c}_{1,t+4} = \cdots = a^5 c_{1,t}$.

Chapitre 6

Les fonctions de plusieurs variables réelles

Les fonctions de plusieurs variables réelles

Les fonctions de plusieurs variables constituent la matière mathématique de prédilection pour la formalisation des problèmes de la gestion. Qu'il s'agisse de traiter des questions relatives à la production, la consommation ou encore l'environnement et la gestion publique, une modélisation adéquate s'exprime le plus souvent à l'aide de fonctions de plusieurs variables. Les restrictions exigées par ce cadre conceptuel imposent toutefois, d'une part, la quantification des facteurs pris en compte (les valeurs des variables sont des nombres réels) et, d'autre part, la représentation des relations sous forme déterministe. Au-delà de ces restrictions, d'autres théories mathématiques, qui dépassent le cadre du présent ouvrage, prennent le relais. Ainsi, la théorie des probabilités offre diverses possibilités d'intégration de la notion de risque, cruciale par exemple pour les financiers.

Ce chapitre introduit les fonctions de plusieurs variables réelles en élargissant les définitions énoncées aux chapitres 1 et 4 pour les fonctions d'une variable réelle. Évidemment, la représentation géométrique devient plus lourde : une fonction de n variables se visualise *a priori* dans un espace à $n + 1$ dimensions (n pour les variables, 1 pour la fonction), alors que les pages d'un livre sont, par nature, bidimensionnelles. Pour contourner cette impossibilité technique, nous nous limiterons aux représentations des fonctions de deux variables, soit sous forme de dessins en perspective, soit sous forme de coupes par des plans horizontaux ou verticaux qui donnent des informations souvent utiles, quoique parcellaires. Ce problème de visualisation introduit une rupture nette par rapport aux fonctions d'une variable étudiées antérieurement.

Dans ce chapitre, nous prenons le parti de privilégier les thèmes qui s'écartent des notions vues pour les fonctions d'une seule variable. À l'opposé, les définitions et les propriétés qui apparaissent comme des généralisations évidentes sont évoquées ou présentées brièvement.

1 Domaine, image et limites

Les définitions de base vues aux chapitres 1 et 3 pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'adaptent sans difficulté au cas des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Définitions Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}^n$, associe à chaque élément $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$ un et un seul nombre réel $f(x)$.

Le *domaine* de f est l'ensemble D.

L'*image* par f de D est l'ensemble $\mathrm{Im}_f(D) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x), \text{ où } x \in D\}$.

Le *graphe* de f est la surface de $\mathbb{R}^{n+1}$ d'équation $y = f(x)$, où $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$. ❑

Exemples d'applications à la gestion

- L'utilité U d'un consommateur dépend de ses quantités consommées. En présence de n biens, la fonction d'utilité s'exprime sous la forme $U = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, où x_i désigne la quantité consommée du i-ème bien disponible $(i = 1, \ldots, n)$.
- Le coût C d'une brochure publicitaire dépend de son format (longueur p, largeur q, nombre de pages n), du nombre m de couleurs utilisées, de la surface s consacrée aux photographies :
$$C = f\left(p, q, n, m, s\right).$$
- La production P d'une entreprise est souvent exprimée en fonction de deux facteurs synthétiques : le capital, noté K, et le travail, noté W : $P = f(K, W)$.
- À la date t, le cours à terme du dollar US (vis-à-vis de l'euro), pour l'échéance T, s'exprime comme une fonction : $F = f\left(T - t, s_t, r_{t,T}, r^*_{t,T}\right)$, où s_t est le cours du dollar au comptant en t et $r_{t,T}$ (resp. $r^*_{t,T}$) est le taux d'intérêt en euros (resp. en dollars US) en vigueur à la date t pour l'échéance T.

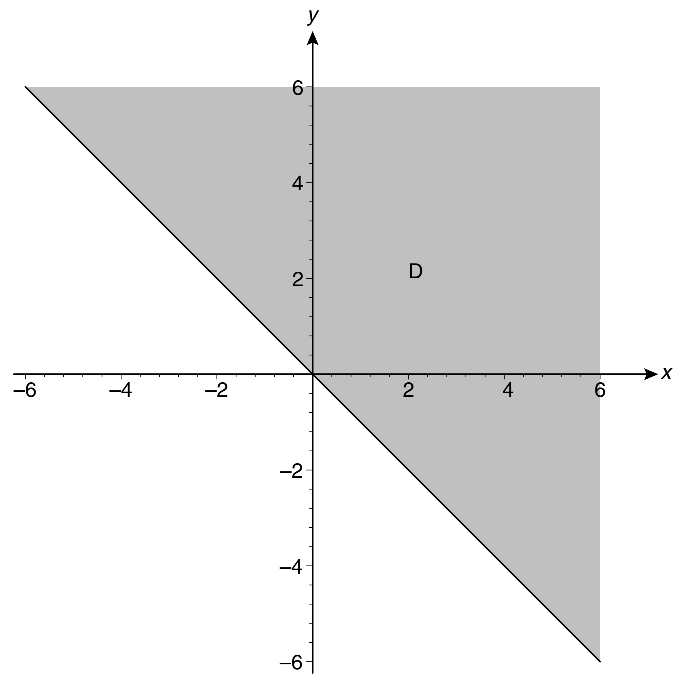
Lorsque $n = 2$, le graphe $G_f \equiv z = f(x, y)$, où $(x, y) \in D$, est tridimensionnel. Les axes relatifs aux variables, x et y, sont conventionnellement situés dans un plan horizontal (le domaine D apparaît alors comme un sous-ensemble de ce plan), tandis que la dimension verticale est réservée aux valeurs de z. Ainsi, à tout $a = (a_1, a_2) \in D$, dont l'image est $f(a) \in \mathbb{R}$, correspond le point suivant du graphe : $\left(a_1, a_2, f(a)\right) \in \mathbb{R}^3$. Une mise en perspective permet la visualisation des surfaces à trois dimensions (voir notamment la figure 6.12, page 171). Dans ce cas, l'axe z est toujours placé verticalement. Toutefois, pour des raisons de lisibilité, les axes x et y ne sont pas toujours présentés selon la même orientation.

Pour $n > 2$, la représentation plane devient malheureusement impraticable.

Exemples mathématiques

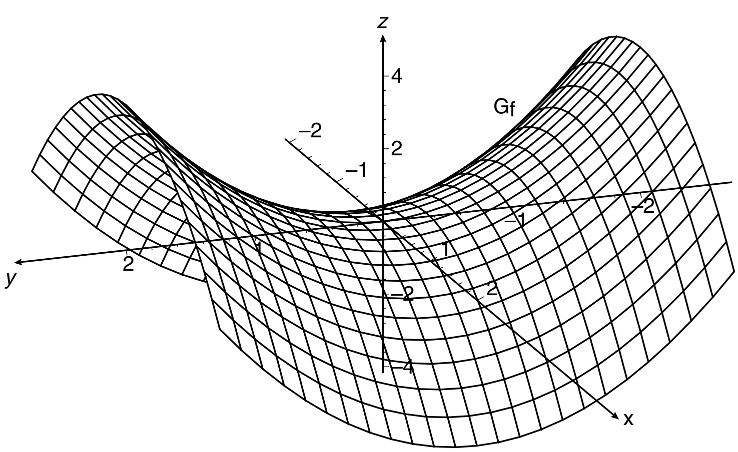
- Le domaine de la fonction $f(x, y) = \sqrt{x+y}$ est donné par $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + y \geqslant 0\}$. Il se représente donc naturellement comme une portion du plan $\mathbb{R}^2$ (voir figure 6.1). En outre, les valeurs prises par la fonction parcourent tout l'ensemble des réels positifs ou nuls : $\mathrm{Im}_f(D) = \mathbb{R}^+$.

Figure 6.1



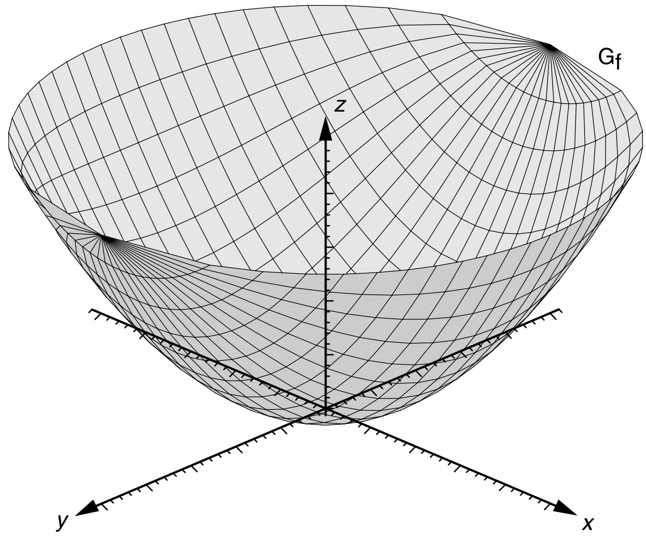
- Le graphe de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \to x^2 - y^2$ est une surface de $\mathbb{R}^3$ qui a la forme d'une selle de cheval, comme l'indique la représentation en perspective de la figure 6.2.

Figure 6.2



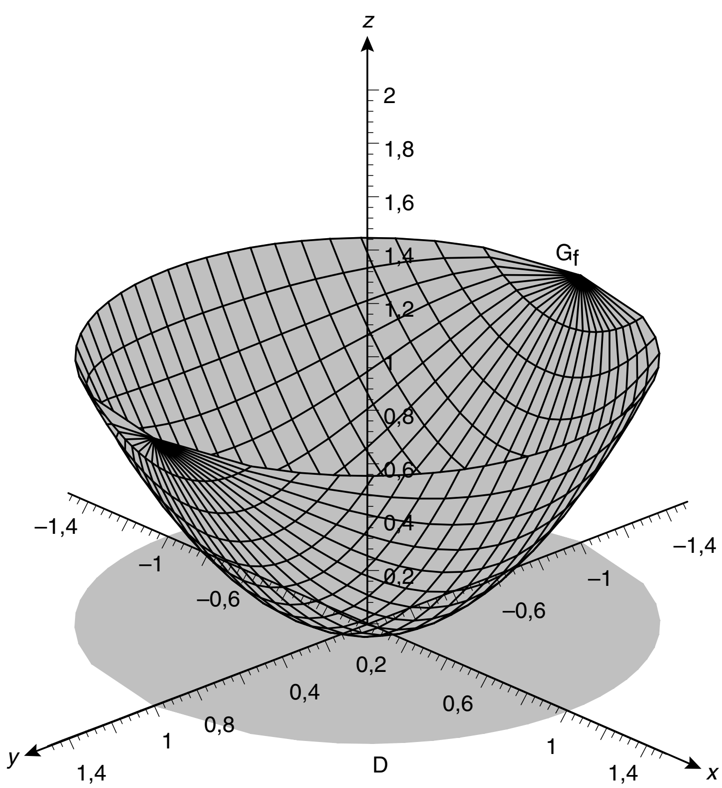
- Le graphe de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$, définie dans $D = \mathbb{R}^2$, est le paraboloïde représenté par la figure 6.3.

Figure 6.3



- La même fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$, mais définie dans le domaine restreint $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, correspond à la portion du paraboloïde de la figure 6.3 vérifiant $0 \leqslant z \leqslant 1$ (figure 6.4)

Figure 6.4



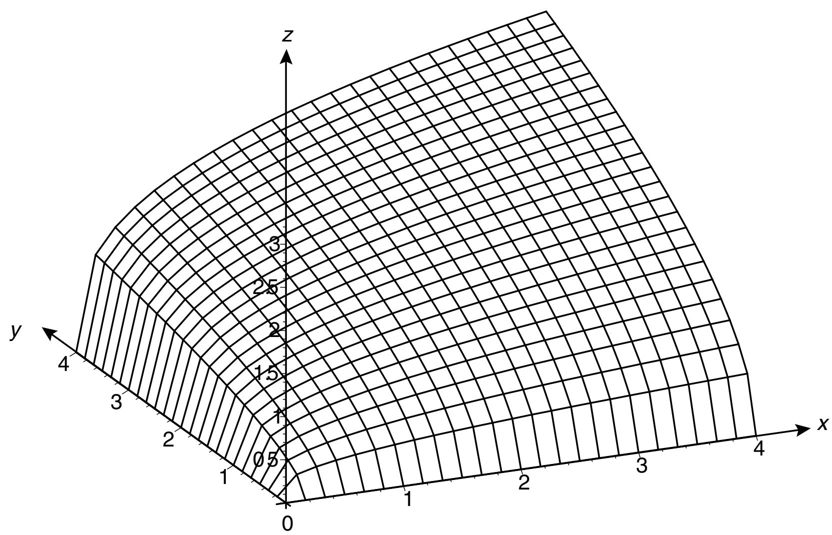
On observe que l'intersection du paraboloïde (figure 6.3, page ci-contre) et d'un plan horizontal d'équation $z = k$, où $k \geqslant 0$, est un cercle de rayon $\sqrt{k}$. Les traces verticales, moins faciles à visualiser, sont des paraboles. De façon générale, les coupes horizontales du graphe d'une fonction de deux variables sont des courbes planes, dites courbes de niveau. En pratique, on représente simultanément différentes courbes de niveau pour visualiser la progression du graphe. Cette représentation s'apparente aux cartes géographiques où le niveau correspond à l'altitude.

Définition Soit $f : D \to \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}^2$, et $k \in f(D) \subset \mathbb{R}$.
La *courbe de niveau* k de f est la courbe plane d'équation : $f(x, y) = k$. ❑

Exemples d'applications à la gestion

1. La fonction de production de Cobb-Douglas s'écrit $f(x, y) = x^\alpha y^\beta$ $(\alpha, \beta > 0)$. Les courbes de niveau d'une telle fonction sont nommées *isocantes* ou *courbes d'isoproduction*. Pour un niveau fixé k de production, l'équation $x^\alpha y^\beta = k$ détermine les points du plan (x, y) donnant toutes les combinaisons des quantités de facteurs qui permettent de produire ce niveau k. La figure 6.5 donne le graphe de la fonction $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/2}$, tandis que la figure 6.6, page suivante, représente les courbes de niveau correspondantes.

Figure 6.5



Sur la figure 6.6, page suivante, une flèche indique le sens de la croissance des valeurs de k.

2. $f(\mu, \sigma) = \mu - \alpha\sigma^2$ $(\alpha > 0)$.

Cette fonction est souvent utilisée en gestion de portefeuille : μ désigne la rentabilité attendue du portefeuille et σ sa volatilité (écart-type de la rentabilité). La fonction f représente l'utilité attendue d'un investisseur qui présente de l'aversion vis-à-vis du risque (σ^2 est affecté d'un coefficient négatif).

Les courbes de niveau pour $\alpha = 1$ (figure 6.7, page suivante) et $\alpha = 3$ (figure 6.8, page 167) sont ici appelées *courbes d'indifférence* ou *courbes d'iso-utilité* puisqu'elles caractérisent les rentabilités attendues et les volatilités des portefeuilles qui atteignent, pour l'investisseur considéré, un niveau fixé d'utilité attendue.

Figure 6.6

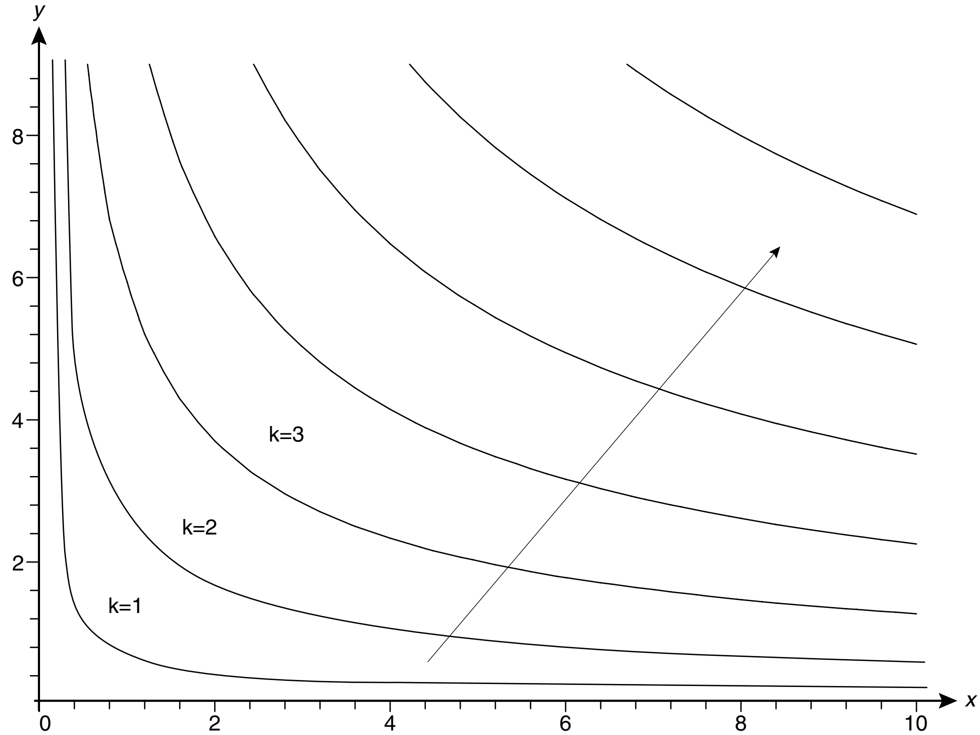
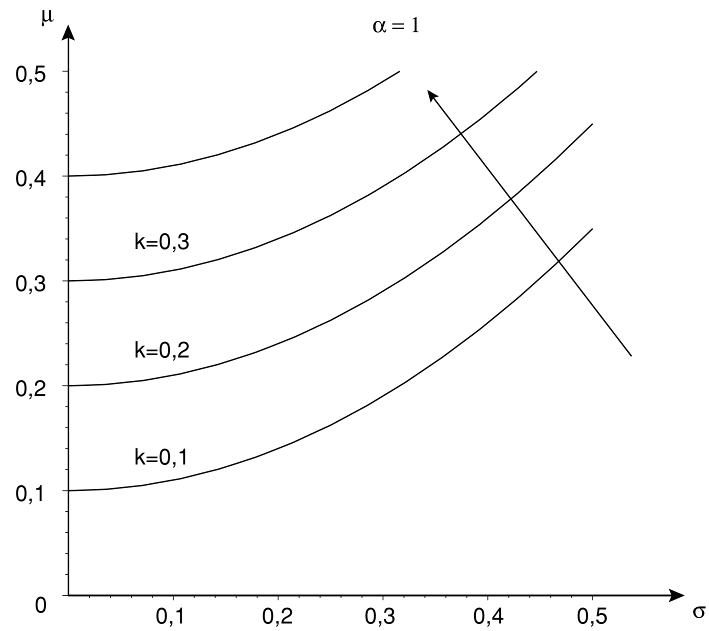
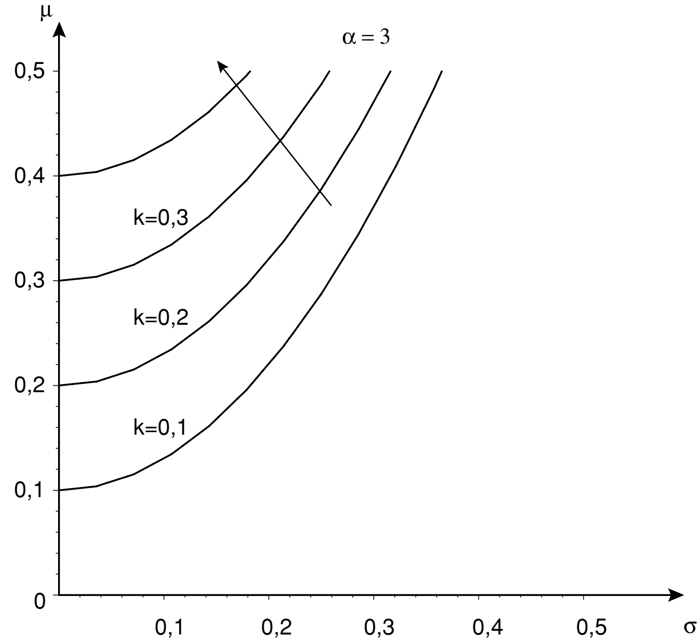


Figure 6.7



La notion de limite pour une fonction de plusieurs variables généralise naturellement la notion correspondante dans le cas des fonctions d'une seule variable. Toutefois, un nouvel élément entre en jeu : les limites unilatérales perdent leur sens et sont remplacées par les nombreuses limites directionnelles possibles. En effet, dès que le domaine se situe dans un espace à deux dimensions au moins, les chemins qui mènent à un point donné

Figure 6.8



peuvent suivre divers axes. Ainsi, l'ensemble D' des points en lesquels une limite peut être considérée, doit être défini en tenant compte de toutes les possibilités d'accès. Une façon commode de procéder s'appuie sur la notion de boule ouverte dans $\mathbb{R}^n$ (voir le chapitre 1) qui généralise celle d'intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$.

Définition Soit $f : D \to \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}^n$. Le *domaine d'examen* des limites est donné par :

$$D' = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \exists\delta > 0 \text{ tel que } B(x, \delta)\setminus\{x\} \subset D\right\}. \quad ❑$$

La notion de « limite », sans autre qualification, se substitue donc à celle de limite bilatérale pour les fonctions d'une seule variable réelle. Elle est définie comme suit.

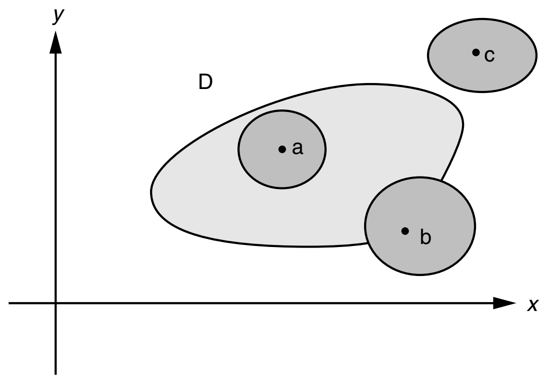
Définition Soit $f : D \to \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D'$ et $b \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \text{ si : } \forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0 \text{ tel que : } \left.\begin{array}{l} x \in B(a, \eta)\setminus\{a\} \\ x \in D \end{array}\right\} \Rightarrow \left|f(x) - b\right| < \varepsilon. \quad ❑$$

Lorsqu'elle existe, cette limite est unique. Les valeurs de la fonction tendent vers le nombre b, quel que soit le chemin emprunté par la variable x (de dimension n) pour approcher le point a.

Par définition, les points de D' peuvent être atteints par tout chemin dans une boule ouverte. On peut généraliser la définition précédente à l'ensemble moins restrictif, noté D'_B, des points qui peuvent être atteints par au moins un chemin dans D. Par exemple, pour le domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ représenté par la figure 6.9, page suivante, $a \in D'$ tandis que $b, c \notin D'$. Pourtant, à l'opposé de c, le point b est l'aboutissement de certains chemins dans D. Pour prendre en compte ce type de situation, on définit la limite le long d'une courbe.

Figure 6.9



Définition Soit $f : D \to \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$, et C une courbe dans D menant à $a \in D'_B$.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in C}} f(x) = b \text{ si } \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que : } \left. \begin{array}{l} x \in C \backslash \{a\} \\ x \in B(a, \eta) \end{array} \right\} \Rightarrow \left| f(x) - b \right| < \varepsilon. \ ❑$$

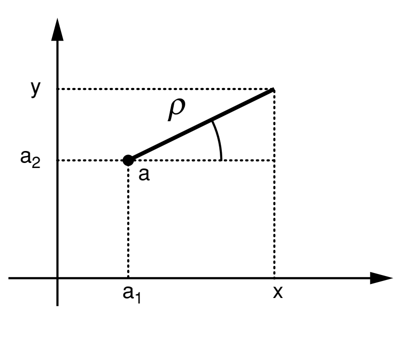
De façon évidente, lorsque $a \in D'$ et $\lim_{x \to a} f(x) = b$, toutes les limites le long de courbes sont égales à b. En pratique, on peut démontrer la non-existence d'une limite en exhibant des valeurs distinctes obtenues le long de deux chemins particuliers.

L'extension aux limites infinies et les propriétés (somme, produit, pincement, etc.) vues au chapitre 3 se transposent de façon immédiate au cas des fonctions de plusieurs variables. Pour éviter les redondances, nous ne les énonçons pas ici.

En pratique, lorsque $n = 2$, il est souvent utile de passer aux *coordonnées polaires* pour ramener le calcul de la limite d'une fonction de deux variables à celui de la limite d'une fonction d'une seule variable. En effet, tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ peut être représenté par ses coordonnées polaires centrées autour du point $a = (a_1, a_2)$ vers lequel il est appelé à tendre (voir figure 6.10) :

$$\begin{cases} x = a_1 + \rho \cos \theta \\ y = a_2 + \rho \sin \theta \end{cases} .$$

Figure 6.10



Dans cette écriture, ρ représente la distance entre a et x de sorte que

$$\lim_{(x,y) \to (a_1, a_2)} f(x, y) = \lim_{\rho \to o} f(a_1 + \rho \cos \theta, a_2 + \rho \sin \theta).$$

Exemple

Montrons de deux manières que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ n'existe pas. La première résulte directement de la définition. En effet, le long de l'axe horizontal $X \equiv y = 0$, on a :

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in X}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

tandis que, le long de l'axe vertical $Y \equiv x = 0$, on a :

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in Y}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1 \neq 1$$

de sorte que les deux limites ne coïncident pas.

La seconde manière est basée sur les coordonnées polaires. En posant : $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\cos^2\theta - \rho^2\sin^2\theta}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta} \\ &= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)}{\rho^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)} = \cos(2\theta).\end{aligned}$$

Le résultat varie selon la direction θ, donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

2 Continuité

La définition adoptée pour la continuité s'applique à tous les points de D auxquels mène au moins un chemin dans D (les points de $D'_B \cap D$), même les bords du domaine. Elle équivaut à imposer que tous les chemins conduisent à la même limite $f(a)$.

Définitions Soit $f : D \to \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}^n$.

f est *continue* en $a \in D'_B \cap D$ si :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in D : d(a,x) < \delta \Rightarrow \left|f(x) - f(a)\right| < \varepsilon.$$

f est *continue* dans D si $\forall a \in D'_B \cap D : f$ est continue en a. ❑

Cas particulier f est *continue* en $a \in D' \cap D$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Donc, pour les éléments de $D' \cap D$, cette définition s'exprime à l'aide de la limite usuelle. ❑

Les fonctions continues de plusieurs variables jouissent des mêmes propriétés que les fonctions continues d'une seule variable. Les fonctions élémentaires telles que les polynômes, les fonctions exponentielles, logarithmiques et trigonométriques sont continues dans leurs domaines de définition respectifs. La continuité des autres fonctions s'établit, le cas échéant, en tant que somme, produit, composée, etc., de fonctions continues.

Exemples

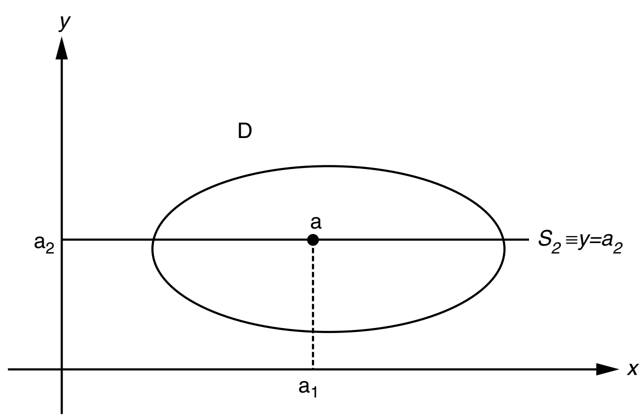
1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + y$ est continue dans $\mathbb{R}^2$ (polynôme du second degré à deux variables).
2. $f(x, y, z) = e^y + xy^2 - z$ est continue dans $\mathbb{R}^3$ (somme d'une exponentielle et d'un polynôme).
3. $f(x, y) = \ln\left(x + y^2\right) - 3$ est continue dans $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y^2 > 0\right\}$ comme somme du logarithme d'un polynôme (fonction composée) et d'une constante.

3 Dérivées partielles et élasticités

L'unique dérivée d'une fonction d'une variable, lorsqu'elle existe, est liée aux variations de la fonction tandis que la variable parcourt l'axe des abscisses. Pour une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dont le graphe est une surface de $\mathbb{R}^3$, la situation est très différente. En effet, l'axe réel n'offre que deux types de mouvements possibles : de gauche à droite et de droite à gauche tandis que le plan $\mathbb{R}^2$ possède une infinité de directions.

Or, il peut s'avérer intéressant d'étudier comment une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ évolue lorsque la variable suit l'une ou l'autre direction du plan. À cet égard, considérons d'abord la direction horizontale. Prenons le point $a = (a_1, a_2)$ du domaine de f (figure 6.11). Son image est $f(a) \in \mathbb{R}$ et le graphe de la fonction, qui est la surface d'équation $z = f\left(x, y\right)$ de $\mathbb{R}^3$ (figure 6.12, page ci-contre), comporte le point $\left(a_1, a_2, f(a)\right)$. L'intersection du graphe de f avec le plan vertical $y = a_2$ est la courbe d'équation $z = f(x, a_2)$ de $\mathbb{R}^3$.

Figure 6.11



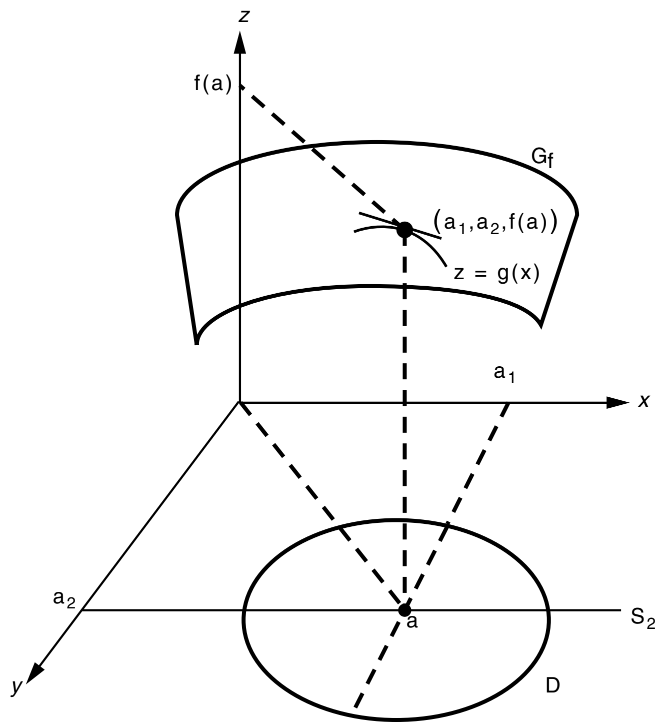
Le point $a = (a_1, a_2)$ étant fixé, on peut alors interpréter cette courbe comme le graphe de la fonction g d'une seule variable définie par $g(x) = f(x, a_2)$. Si g est dérivable en a_1, alors sa dérivée nous renseigne sur la variation de la fonction f lorsque $\left(x, y\right)$ se déplace le long de la droite horizontale de $\mathbb{R}^2$ passant par le point (a_1, a_2), représentée par S_2 sur les figures 6.11 et 6.12, page ci-contre.

Par définition de la dérivée d'une fonction d'une variable, il vient :

$$g'(a_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(a_1 + \Delta x) - g(a_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a_1 + \Delta x, a_2) - f(a_1, a_2)}{\Delta x}.$$

Si elle existe, cette dérivée s'appelle la *dérivée partielle* de f par rapport à x au point $a = (a_1, a_2)$, et se note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)$. De façon similaire, on définit la dérivée partielle par rapport à y obtenue en fixant $x = a_1$. La définition générale des dérivées partielles s'applique à toute fonction de n variables.

Figure 6.12



Définitions La fonction $f : D \to \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}^n$, est *dérivable partiellement* par rapport à sa i-ème variable en $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D' \cap D$ si

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + \Delta x_i, \ldots, a_n) - f(a)}{\Delta x_i} \quad \text{existe dans } \mathbb{R}.$$

Lorsqu'elle existe, cette limite est appelée *dérivée partielle* de f par rapport à sa i-ème variable en a et est notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ou $f_i'(a)$.

La fonction est *dérivable* en a si elle est dérivable partiellement par rapport à toutes ses variables en ce point. ❏

En pratique, pour calculer la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, on dérive f comme si elle était une fonction de la seule variable x_i et que toutes les autres variables, x_j, où $j \neq i$, étaient des constantes.

Les dérivées partielles jouissent des mêmes propriétés que les dérivées de fonctions d'une seule variable. En particulier, les fonctions élémentaires telles que les polynômes, les fonctions exponentielles, logarithmiques et trigonométriques sont dérivables dans leur domaine respectif. La dérivabilité (partielle) des autres fonctions s'établit, le cas échéant, en tant que somme, produit, composée, etc., de fonctions dérivables. Les règles de dérivation sont également similaires, à l'exception de celle relative à la dérivation des fonctions composées. En effet, lorsque $n > 1$, il est impossible de réaliser un produit de composition entre deux fonctions de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. À ce sujet, la règle de dérivation en chaîne sera exposée dans un cadre plus général, dans la section 4.3.

Exemples

1. Toute fonction polynôme est dérivable dans son domaine. Considérons, par exemple, la fonction $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, définie et dérivable dans $\mathbb{R}^2$. Ses deux dérivées partielles au point (2,1) sont obtenues en deux étapes. On calcule d'abord les dérivées partielles en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ grâce aux règles de dérivation des fonctions d'une variable (en considérant, à chaque fois, l'autre variable comme une constante) : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$. On évalue ensuite ces deux fonctions au point considéré : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = 16$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = 8$.

2. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Dans l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, f est dérivable en tant que quotient de fonctions dérivables (polynômes) à dénominateur non nul. Il convient cependant d'étudier la dérivabilité en (0,0), donc l'existence des deux dérivées partielles en ce point. On a :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0$$

La fonction f est donc dérivable en $(0, 0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. En conclusion, f est dérivable dans $\mathbb{R}^2$.

La propriété selon laquelle la dérivabilité d'une fonction d'une variable en un point implique la continuité en ce point ne se généralise pas à plus d'une variable. L'exemple 2 ci-dessus peut servir de contre-exemple :

$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0,0) \end{cases}$ est dérivable mais pas continue en (0,0). En effet, la limite de f le long de la bissectrice d'équation $x = y$ fait apparaître que :

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ x=y}} f(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ x=y}} \frac{x^2x^2}{x^4 + x^4} = \lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ x=y}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq f(0,0) = 0.$$

Les directions correspondant aux dérivées partielles sont celles des axes. D'autres dérivées directionnelles sont aussi envisageables, quoique nettement moins utiles dans les applications en gestion. Nous en citons simplement la définition.

Définition La fonction $f : D \to \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}^n$, est dérivable en $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D' \cap D$ *dans la direction indiquée par le vecteur* $u \in \mathbb{R}^n$ si

$$\lim_{\beta \to 0} \frac{f(a + \beta u) - f(a)}{\beta} \quad \text{existe dans } \mathbb{R}.$$

❑

Alors que les dérivées partielles s'interprètent en termes de variations de la fonction en niveau, les élasticités se réfèrent aux variations relatives (souvent exprimées en %). En pratique, les élasticités jouent un rôle important en tant que mesure de la sensibilité vis-à-vis de divers paramètres (élasticité des courbes d'offre et de demande vis-à-vis des prix, duration d'une obligation, etc.).

Définition Soit $f : D \to \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}^n$, dérivable partiellement par rapport à sa i-ème variable en $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D' \cap D$ telle que $a_i \neq 0$ et $f(a) \neq 0$. L'*élasticité* de f par rapport à sa i-ème variable en a, est donnée par :

$$E_f^i(a) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\dfrac{f(a_1, \ldots, a_i + \Delta x_i, \ldots, a_n) - f(a)}{f(a)}}{\dfrac{\Delta x_i}{a_i}}. \qquad \square$$

Au plan mathématique cependant, les propriétés des élasticités découlent directement de celles des dérivées partielles, en vertu du résultat suivant :

Propriété $E_f^i(a) = \dfrac{a_i}{f(a)} . \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a).$ $\square$

Exemple

$f : \left(\mathbb{R}_0^+\right)^n \to \mathbb{R} : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}.\ldots.x_n^{\alpha_n}$ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n > 0)$ est dérivable dans $\left(\mathbb{R}_0^+\right)^n$. Grâce aux règles de dérivation, on obtient :

$$E_f^i(x) = \frac{x_i}{f(x)} . f_i'(x) = \frac{x_i}{x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}.\ldots.x_n^{\alpha_n}} \alpha_i x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}.\ldots.x_i^{\alpha_i - 1}\ldots x_n^{\alpha_n} = \alpha_i.$$

En conséquence, toutes les fonctions de Cobb-Douglas bénéficient d'élasticités constantes, ce qui contribue à expliquer l'attrait qu'elles représentent pour le modélisateur.

4 Différentiabilité et (hyper)plan tangent

4.1 Différentiabilité des fonctions d'une seule variable

Quel que soit le nombre de variables en présence, la différentiabilité d'une fonction f en un point a correspond à l'existence d'une *approximation linéaire de la fonction au voisinage du point* $\big(a, f(a)\big)$ du graphe de la fonction.

Pour les fonctions d'une seule variable, cette approximation linéaire est fournie par la droite tangente d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$, impliquant directement l'équivalence entre la dérivabilité et la différentiabilité. Il n'était donc pas nécessaire d'ajouter une définition. Cependant, la notion de différentielle des fonctions d'une seule variable est abordée ici parce qu'elle permet de mieux appréhender la différentielle des fonctions de plusieurs variables.

Définition Soit $f : D \to \mathbb{R} : x \to f(x)$, où $D \subset \mathbb{R}$, et un point a en lequel f est dérivable. La *différentielle* de f au point a est la fonction linéaire $df_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \Delta x \to f'(a)\Delta x$ (où $\Delta x = x - a$). $\square$

Le point a étant fixé, la différentielle est une fonction de l'accroissement Δx de la variable. Elle constitue une approximation linéaire (formule de Taylor à l'ordre 1) de l'accroissement de la fonction $\Delta f = f(x) - f(a)$ au voisinage du point a, de sorte qu'on écrit, de façon condensée : $df_a \cong \Delta f$.

Pour la fonction identité, $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x$, on a : $\forall a \in \mathbb{R} : I'(a) = 1$. En conséquence, sa différentielle, notée dx , est telle que : $\forall a \in \mathbb{R} : dI_a = dx = \Delta x$. On substitue alors volontiers dx à Δx dans l'écriture de la différentielle d'une fonction quelconque (mais évidemment différentiable en a) pour obtenir l'expression $df_a = f'(a)dx$, ou même $df = f'(a)dx$.

Le cas simple des fonctions d'une seule variable illustre que la maîtrise des concepts de différentiabilité et de différentielle passe inévitablement par la compréhension des notations, variées et souvent abrégées, qui les concernent.

4.2 Différentiabilité des fonctions de n variables

Dans le cas des fonctions de deux variables et plus, l'équivalence disparaît entre l'existence des dérivées partielles, d'une part, et celle d'un plan tangent [(1)], d'autre part. Cela provient du fait que la dérivabilité repose seulement sur des limites le long de directions particulières. La dérivabilité apparaît donc comme un concept trop faible pour garantir l'existence d'un plan tangent. La notion de différentiabilité va combler ce déficit.

Pour les fonctions de deux variables, l'intuition géométrique peut encore servir de guide. Ainsi, si la fonction f est dérivable en $a = (a_1, a_2)$, on peut affirmer l'existence de deux droites tangentes, chacune par rapport à la trace verticale du graphe dans un plan d'équation $x_i = a_i\ (i = 1, 2)$. Dans le meilleur des cas, ces deux droites, nécessairement concourantes en $\big(a, f(a)\big)$, forment un plan qui est tangent au graphe. Toutefois, certaines irrégularités peuvent surgir (par exemple, la présence d'une discontinuité en a) qui excluent l'existence d'un plan tangent. Dans pareil cas, les deux droites existent et définissent un plan *qui n'est pas un plan tangent*, parce qu'un tel plan n'existe pas. Ces deux droites déterminent donc un « candidat plan tangent », dont l'existence doit encore être vérifiée.

Plus généralement, la différentiabilité d'une fonction de n variables, dérivable au point a, s'étudie en deux étapes. La première consiste à introduire la « candidate différentielle ». La seconde teste si cette candidate constitue effectivement une approximation locale de l'accroissement de la fonction. Les définitions suivantes précisent ces notions.

Définition Soit $f : D \to \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}^n$, dérivable en $a \in D' \cap D$. La fonction linéaire suivante est appelée *candidate différentielle* au point a :

$$cdf_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \to \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)dx_i. \quad ❑$$

La notion de différentiabilité impose que la candidate différentielle représente une approximation du premier ordre de $\Delta f = f(x) - f(a)$ au voisinage du point a et transforme donc la candidate en « différentielle » avérée.

1. Il s'agit en fait d'un plan tangent pour $n = 2$, d'un hyperplan tangent pour $n > 2$. Dans un espace de dimension n, un hyperplan est une variété linéaire de dimension $n - 1$.

Définition La fonction $f : D \to \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}^n$, est *différentiable en* $a \in D' \cap D$ s'il existe une fonction linéaire $df_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - df_a(x-a)}{\|x-a\|} = 0, \text{ où } \|x-a\| = d(x,a) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2}. \square$$

Lorsqu'elle existe, la fonction linéaire df_a est unique et donnée par la candidate différentielle : $df_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$, ou sous forme matricielle par : $df_a = \nabla f(a).dx$, où la matrice-ligne $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$ est le *gradient* de f en a et $dx = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$.

Dans le cas contraire, la fonction n'est pas différentiable au point a.

Remarque

Le gradient est aussi représenté sous la forme d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$:

$$\left(\text{Grad} f\right)(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Exemple

$f(x,y) = x^2 + y^2$ est dérivable dans $\mathbb{R}^2$ et on a : $\forall a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$: $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 2a_1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = 2a_2$.

La candidate différentielle en a s'écrit donc : $cdf_a = 2a_1 dx + 2a_2 dy$.

Afin de voir si cette candidate est effectivement une différentielle, on calcule :

$$\lim_{(x,y) \to a} \frac{f(x,y) - f(a) - df_a(x - a_1, y - a_2)}{\sqrt{(x-a_1)^2 + \left(y - a_2\right)^2}} = \lim_{(x,y) \to a} \frac{x^2 + y^2 - a_1^2 - a_2^2 - 2a_1(x - a_1) - 2a_2(y - a_2)}{\sqrt{(x-a_1)^2 + \left(y - a_2\right)^2}}$$

$$= \lim_{(x,y) \to a} \frac{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2}{\sqrt{(x-a_1)^2 + \left(y - a_2\right)^2}} = \lim_{(x,y) \to a} \sqrt{(x-a_1)^2 + \left(y - a_2\right)^2} = 0.$$

En conséquence, la fonction f est différentiable dans $\mathbb{R}^2$ et $\forall (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$: $df_a = 2a_1 dx + 2a_2 dy$.

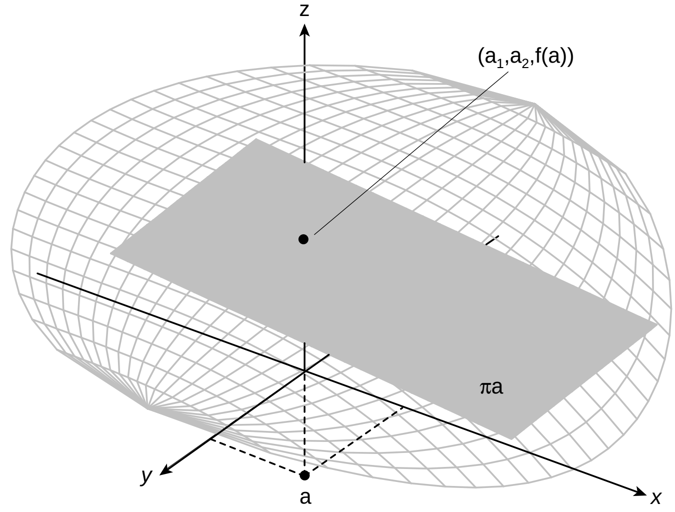
Notons que les fonctions élémentaires telles que les polynômes (voir l'exemple ci-dessus), les fonctions exponentielles, logarithmiques et trigonométriques sont automatiquement différentiables dans leur domaine respectif et que les propriétés de différentiabilité relatives aux sommes, produits, etc., existent.

À l'approche analytique, correspond la vision géométrique d'un *hyperplan tangent*. En effet, lorsque f est différentiable en a, on peut, dans un voisinage de a, approcher $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$ par $df_a(\Delta x)$, donc aussi approcher $f(a + \Delta x)$ par $f(a) + df_a(\Delta x)$: $f(a + \Delta x) \cong f(a) + df_a(\Delta x)$ (approximation locale linéaire ou du premier ordre).

Dans le cas d'une fonction de deux variables, la figure 6.13, page suivante, montre le plan tangent $\Pi_a \equiv z = f(a) + df_a(\Delta x, \Delta y)$ au voisinage du point $\left(a_1, a_2, f(a)\right)$. Cette équation s'écrit aussi : $\Pi_a \equiv z = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - a_2)$.

La différentiabilité est une notion plus forte que la continuité et que la dérivabilité.

Figure 6.13



Propriétés Soit $f : D \to \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}^n$ et $a \in D \cap D'$.

- f est différentiable en $a \Rightarrow f$ est dérivable en a
- f est différentiable en $a \Rightarrow f$ est continue en a. ❑

Les réciproques sont fausses. Ces propriétés sont souvent utiles pour montrer qu'une fonction n'est pas différentiable en un point donné.

Exemples

1. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ est non continue en (0,0) puisque $\lim\limits_{y \to 0} f(y^2, y) = \dfrac{1}{2}$ $\neq 0$. Elle n'est donc pas différentiable en (0,0).

2. $f(x, y) = |x| + |y|$ est non dérivable en (0,0), donc non différentiable en (0,0).

4.3 La règle de dérivation en chaîne (*chain rule*)

Dans certaines applications, on est amené à considérer des fonctions de $D \to \mathbb{R}^m$, où $D \subset \mathbb{R}^n$, qui peuvent être vues comme des empilements de fonctions de $D \to \mathbb{R}$:

$$f : D \to \mathbb{R}^m : x \to f(x) = \big(f_1(x), \dots, f_m(x)\big) \in \mathbb{R}^m.$$

De telles fonctions s'étudient comme s'il s'agissait de m fonctions de $D \to \mathbb{R}$. En ce qui concerne la différentiabilité, on adopte les définitions suivantes :

Définitions Soit $f : D \to \mathbb{R}^m : x \to f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_m(x)\big) \in \mathbb{R}^m$, où $D \subset \mathbb{R}^n$, et $a \in D \cap D'$.

f est *différentiable* en a si chacune de ses composantes f_i est différentiable en a.

Dans ce cas, la *différentielle* s'écrit comme un vecteur colonne $df_a = \begin{pmatrix} df_{1,a} \\ \vdots \\ df_{m,a} \end{pmatrix}$.

L'empilement des vecteurs gradients constitue une matrice, de taille $m \times n$, appelée *matrice jacobienne* de f en a ou *jacobien* de f en a :

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(a) \\ \vdots \\ \nabla f_m(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}_{m \times n}. \quad ❑$$

Exemple

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 : (x, y, z) \to \big(xyz, x^2 + y^2, e^{xy+z}, \sin(yz)\big)$ est différentiable dans $\mathbb{R}^3$ (ses quatre composantes le sont) et $J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 2x & 2y & 0 \\ ye^{xy+z} & xe^{xy+z} & e^{xy+z} \\ 0 & z\cos(yz) & y\cos(yz) \end{pmatrix}$.

Une des propriétés les plus usitées dans la pratique, la *règle de dérivation en chaîne* ou *chain rule*, est relative aux dérivées partielles des fonctions composées.

Règle de dérivation en chaîne (*chain rule*) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : x \to f(x) = \big(f_1(x), \ldots, f_m(x)\big)$ et $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p : y \to g(y) = \big(g_1(y), \ldots, g_p(y)\big)$.

Si f est différentiable en a et si g est différentiable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est différentiable en a et la matrice jacobienne de $g \circ f$ en a est donnée par : $J_{g\circ f}(a) = J_g\big(f(a)\big).J_f(a)$, ou encore,

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}\big(f(a)\big)\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a). \quad ❑$$

En pratique, le cas particulier où $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ $(p = 1)$ est souvent utilisé :

$$\frac{\partial g\big(f_1(x), \ldots, f_m(x)\big)}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial g}{\partial y_1}\big(f(a)\big)\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) + \frac{\partial g}{\partial y_2}\big(f(a)\big)\frac{\partial f_2}{\partial x_j}(a) + \cdots + \frac{\partial g}{\partial y_m}\big(f(a)\big)\frac{\partial f_m}{\partial x_j}(a).$$

Exemple

Le consommateur dont la fonction d'utilité est donnée par $U(x, y)$ est soumis à la contrainte de budget $p_x x + p_y y = R$ $(p_x, p_y, R > 0)$, où p_x et p_y sont les prix des deux biens et R le montant dévolu à l'achat des ces deux biens. La quantité consommée du second bien devient ainsi fonction de celle du premier : $y = f(x)$, où $f(x) = \dfrac{R - p_x x}{p_y}$, de sorte que, sous la contrainte de budget, la fonction d'utilité peut être exprimée sous la forme d'une fonction d'une seule variable : $V(x) = U\left(x, f(x)\right)$, qui est la composée de la fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : x \to \left(x, f(x)\right)$ et de la fonction $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \to U(x, y)$. Grâce à la *chain rule*, on a :

$$V'(x) = \frac{dV}{dx} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} f'(x) = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{p_x}{p_y}.$$

La différentielle, donnée par $dV = \left[\dfrac{\partial U}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial y} \dfrac{p_x}{p_y}\right] dx$, représente l'approximation linéaire de la variation de l'utilité due à la variation dx de la quantité consommée du premier bien, tenant compte de l'effet sur la quantité du second, via la contrainte de budget.

5 Fonctions homogènes

Les fonctions homogènes apparaissent dans plusieurs problèmes économiques : les fonctions de production de Cobb-Douglas, par exemple, sont homogènes.

Définition $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \to f(x)$ est dite *homogène de degré k* si :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda > 0 : f(\lambda x) = \lambda^k f(x).$$ ❑

Les fonctions homogènes bénéficient de la propriété suivante qui découle de la *chain rule*.

Formule d'Euler Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \to f(x)$ est homogène de degré k et différentiable dans $\mathbb{R}^n$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = k f(x).$$ ❑

Exemple

La fonction de production de Cobb-Douglas à rendements constants $f(x, y) = x^{\alpha}.y^{1-\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$, est homogène de degré 1 puisque $f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^{\alpha} \left(\lambda y\right)^{1-\alpha} = \lambda f(x, y)$. Dans ce cas, la formule d'Euler s'écrit : $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y)$. Le résultat $f(x, y)$ de la production obtenue avec les quantités respectives x et y de facteurs permet donc de rémunérer ces facteurs au niveau de leur productivité marginale.

6 Dérivées partielles d'ordres supérieurs et matrice hessienne

Chacune des dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ s'obtient en calculant la dérivée partielle par rapport à x_i de la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$, sous réserve d'existence. On peut, de la même façon, introduire les dérivées partielles d'ordres supérieurs. Les définitions suivantes s'énoncent dans des ensembles ouverts pour éviter les problèmes liés au calcul de limites au bord du domaine.

Définition $f : D \to \mathbb{R}$, où D est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, est *de classe* $C^k (k \in \mathbb{N}_0)$ dans D (on note : $f \in C^k(D)$), si f est k fois dérivable dans D et si ses dérivées partielles d'ordres 1 à k sont continues dans D. ❏

Propriété Si $f : D \to \mathbb{R}$, où D est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors : $f \in C^1(D) \Rightarrow f$ est différentiable dans D. ❏

Sur base de cette propriété, on dit volontiers d'une fonction de classe C^1 qu'elle est *continûment différentiable*. En adoptant la notation $C^0(D)$ pour l'ensemble des fonctions continues dans D, on obtient les inclusions évidentes : $C^0(D) \supset C^1(D) \supset C^2(D) \supset \cdots \supset C^k(D)$.

Exemple

$f(x, y) = x^2y + xy^3$ est un polynôme défini dans $\mathbb{R}^2$. Ses dérivées partielles de tout ordre sont également des polynômes et sont donc toutes continues. Donc : $\forall k \in \mathbb{N} : f \in C^k(\mathbb{R}^2)$.

Définition Soit $f : D \to \mathbb{R}$, où D est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, deux fois dérivable en $a \in D$. La matrice de taille $n \times n$ formée des dérivées secondes de f en a, notée $H_f(a)$, est appelée *matrice hessienne* de f en a :

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{n\times n} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}. ❏$$

Exemple

La matrice hessienne de la fonction $f(x, y) = x^2y + xy^3$ de l'exemple précédent est donnée par :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x + 3y^2 \\ 2x + 3y^2 & 6xy \end{pmatrix}.$$

Dans cet exemple, on remarque que la matrice $H_f(x, y)$ est symétrique du fait que les dérivées secondes mixtes, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, sont égales. Le théorème suivant garantit cette égalité sous des conditions légères.

Théorème de Schwarz Si $f \in C^2(D)$, où D est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors $\forall x \in D : H_f(x) = H_f'(x)$, où $H_f'(x)$ désigne la matrice transposée de $H_f(x)$. ❑

Comme la dérivée seconde pour les fonctions d'une seule variable, la matrice hessienne permet d'étudier la convexité des fonctions de plusieurs variables et joue, dès lors, un rôle important dans leur optimisation (voir le chapitre 7).

7 Fonctions concaves et convexes

Les définitions, vues dans le chapitre 3 pour les fonctions d'une variable, se généralisent de la façon suivante.

Définitions Soit $f : D \to \mathbb{R} : x \to f(x)$, où D est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$.

f est *concave* (resp. *convexe*) dans D si :

$$\forall a, b \in D, \forall t \in [0,1] : f\big((1-t)a + tb\big) \geqslant (\text{ resp. } \leqslant)(1-t)f(a) + tf(b).$$

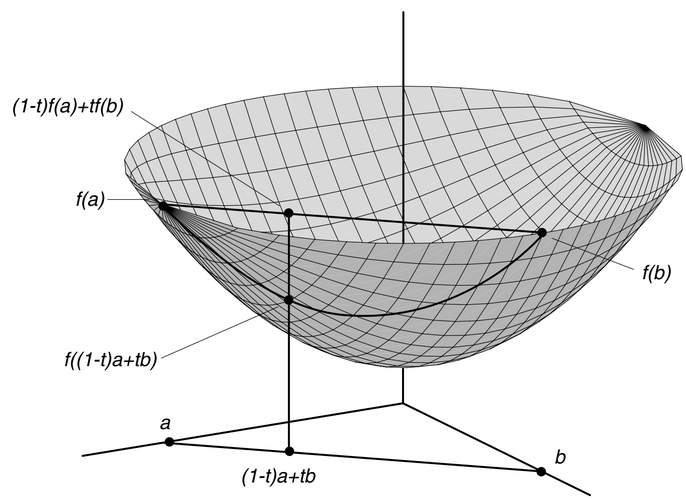
f est dite *strictement concave* (resp. *strictement convexe*) si :

$$\forall a, b \in D, \forall t \in (0,1) : f\big((1-t)a + tb\big) > (\text{ resp. } <)(1-t)f(a) + tf(b).$$ ❑

Exemple

La figure 6.14 donne le graphe de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \to x^2 + y^2$, convexe dans $\mathbb{R}^2$.

Figure 6.14



Comme pour les fonctions d'une variable, la concavité et la convexité des fonctions de n variables suffisamment régulières peuvent être caractérisées à l'aide des dérivées d'ordres 1 ou 2.

Propriétés Si $f : D \to \mathbb{R} : x \to f(x)$, où D est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, est différentiable dans D, alors :

- f est concave dans $D \Leftrightarrow \forall x, y \in D : f(y) \leqslant f(x) + \nabla f(x)(y-x)$.
- f est convexe dans $D \Leftrightarrow \forall x, y \in D : f(y) \geqslant f(x) + \nabla f(x)(y-x)$.

Si, en outre, $f \in C^2(D)$, alors :

- f est concave dans $D \Leftrightarrow \forall x \in D : H_f(x)$ est semi-définie négative.
- f est convexe dans $D \Leftrightarrow \forall x \in D : H_f(x)$ est semi-définie positive. ❑

Les deux premiers énoncés expriment que tout plan tangent au graphe d'une fonction concave (resp. convexe) se trouve au-dessus (resp. au-dessous) de ce graphe. Les deux derniers, relatifs à la matrice hessienne, rappellent celui qui fait référence au signe de la dérivée seconde d'une fonction d'une seule variable (voir chapitre 3, section 6.2). De la même manière, la condition stricte ne s'applique que dans un seul sens : si $\forall x \in D : H_f(x)$ est définie négative (resp. positive), alors f est strictement concave (resp. convexe) dans D. Dès lors, une fonction peut être strictement convexe sans que sa matrice hessienne soit définie positive en tout point.

Exemples

1. Soit $f(x,y) = x^2 + y^2$. On a : $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonale, sa double valeur propre 2 est strictement positive. Il s'ensuit que $H_f(x,y)$ est définie positive. La fonction est donc strictement convexe dans $\mathbb{R}^2$.

2. Soit $f(x,y) = x^4 + y^4$. On a : $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$ est diagonale, ses valeurs propres, $12x^2$ et $12y^2$, sont $\geqslant 0$ (strictement si $x \neq 0$ et $y \neq 0$). Il s'ensuit que $H_f(x,y)$ est définie positive pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2_0$ et semi-définie positive pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R}^2_0$. On peut cependant montrer à l'aide de la définition que la fonction est strictement convexe dans $\mathbb{R}^2$.

Problèmes et exercices

La visualisation géométrique des fonctions de deux variables (ou plus !) constitue un défi pour celui qui peine à voir dans l'espace. Les premiers exercices visent à accoutumer le lecteur à cette correspondance entre l'équation du graphe et sa représentation, notamment à l'aide de sections planes qui constituent des « tranches » du graphe. Suivent des énoncés plus analytiques relatifs au calcul de limites, à l'étude de la continuité, la dérivabilité et la différentiabilité. Les fonctions homogènes sont ensuite illustrées. Enfin, la détermination de matrices hessiennes et leur interprétation en terme de concavité et convexité sont abordées. Dans ce chapitre, compte tenu de la densité de la matière, nous avons opté pour une inclusion thématique des exercices appliqués à la gestion.

Domaine, graphe et courbes de niveau

EXERCICE 1

Énoncé

Dans chaque cas, déterminez et représentez le domaine de définition des fonctions données.

a $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{-y + x^2}}{\sqrt{y}}$.

b $f(x, y) = \dfrac{\ln y}{\sqrt{x - y}}$.

c $f(x, y) = \ln\left(x + y\right)$.

d $f(x, y, z) = \dfrac{\ln(x^2 + 1)}{yz}$.

Solution

a $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leqslant x^2 \text{ et } y > 0\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y \leqslant x^2\right\}$, représenté par la figure 6.15, page ci-contre.

b $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y \text{ et } y > 0\right\}$, représenté par la figure 6.16, page ci-contre.

Figure 6.15

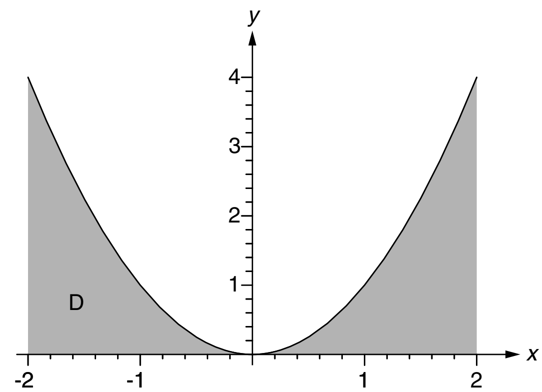
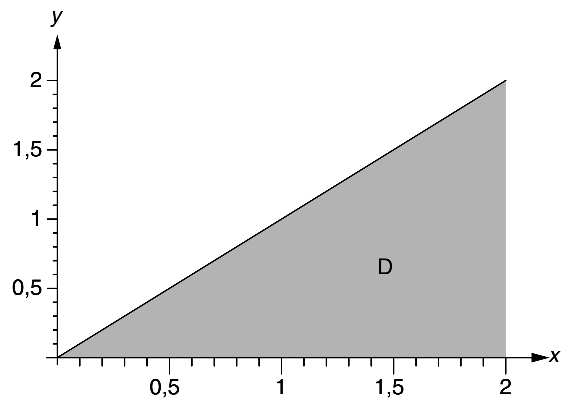


Figure 6.16



c $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x\right\}$

d $D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \neq 0 \text{ et } z \neq 0\right\}$

EXERCICE 2

Énoncé

Dans chaque cas, déterminez les courbes de niveau des fonctions de deux variables données. Esquissez ensuite leurs graphes, en recourant, si nécessaire, à une méthode numérique (le graphe peut être vu comme un empilement de courbes de niveau qui forment une surface dans $\mathbb{R}^3$).

a $f(x, y) = x + y - 1$

b $f(x, y) = e^{(y-x^2)}$

c $f(x, y) = y - \cos x$

Solution

a $D = \mathbb{R}^2$ et $\mathrm{Im}_f(\mathbb{R}^2) = \left\{z \in \mathbb{R} : z = x + y - 1, \text{ où } x, y \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}$. La courbe de niveau $k \in \mathbb{R}$ est donnée par l'équation $C_k \equiv x + y - 1 = k$. Les courbes de niveau sont donc des droites (figure 6.17, page suivante) et le graphe de f est un plan (figure 6.18, page suivante).

Figure 6.17

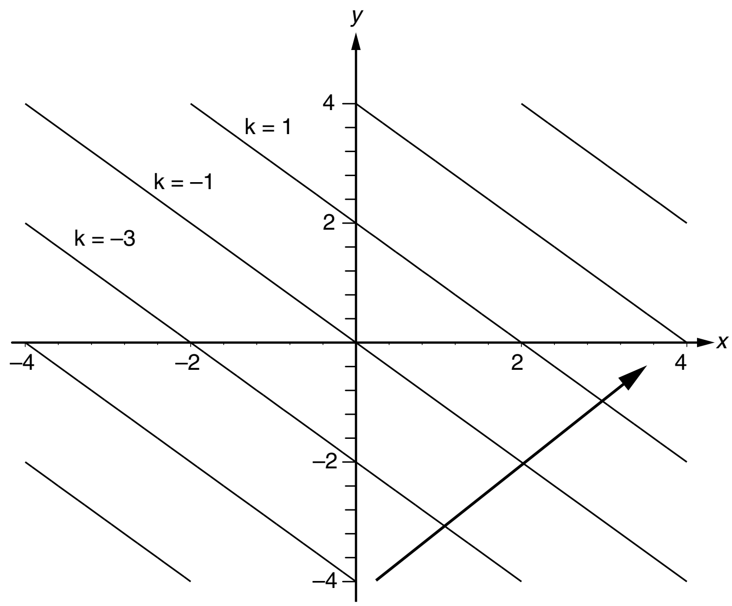
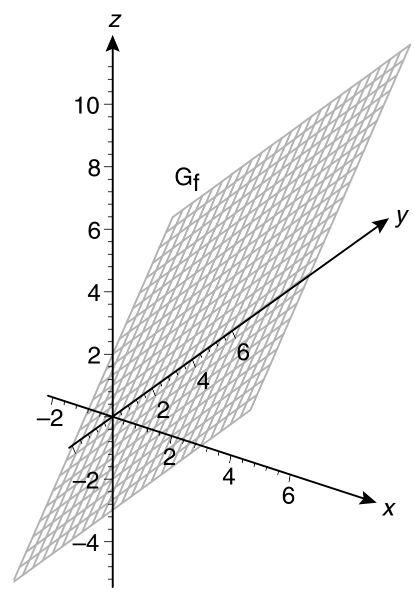


Figure 6.18



b $D = \mathbb{R}^2$ et $f(\mathbb{R}^2) = \left\{z \in \mathbb{R} : z = e^{(y-x^2)}, \text{ où } x, y \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}_0^+$. La courbe de niveau $k \in \mathbb{R}_0^+$ est donnée par l'équation $C_k \equiv e^{(y-x^2)} = k$, ou encore : $C_k \equiv y = x^2 + \ln k$. Les courbes de niveau sont donc des paraboles (figure 6.19, page ci-contre). Le graphe de f est donné par la figure 6.20, page ci-contre. On observe notamment la croissance exponentielle marquée lorsque les valeurs prises par y sont grandes et celles prises par $|x|$ sont petites.

c $D = \mathbb{R}^2$ et $f(\mathbb{R}^2) = \{z \in \mathbb{R} : z = y - \cos x \text{ où } x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$. La courbe de niveau $k \in \mathbb{R}$ est donnée par $C_k \equiv y = k + \cos x$ (figure 6.21, page 186). Le graphe de f est esquissé dans la figure 6.22, page 186.

Figure 6.19

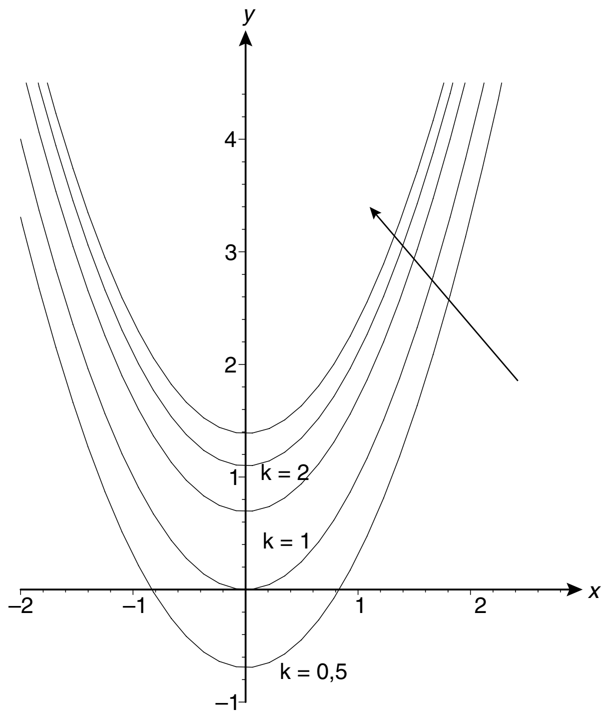


Figure 6.20

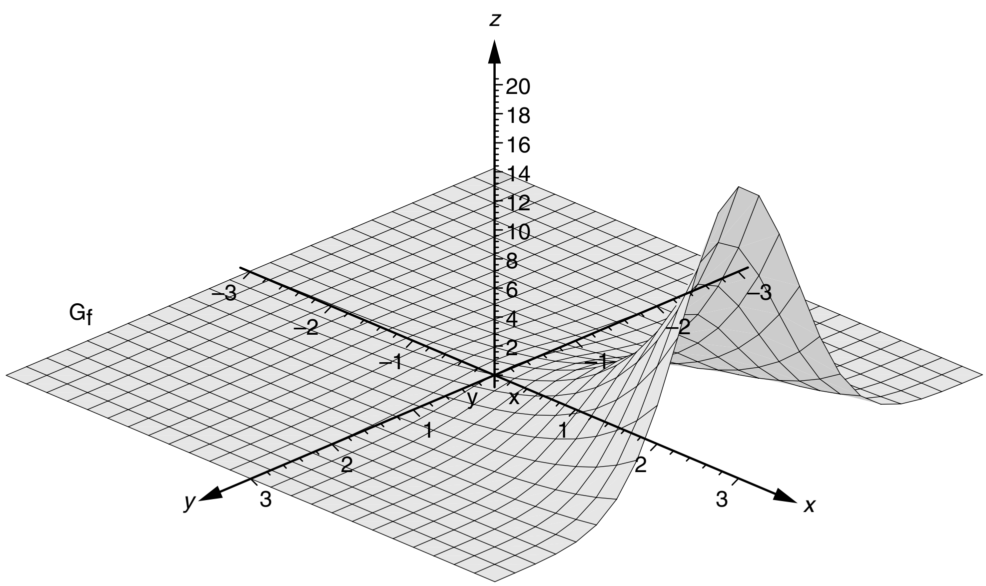


Figure 6.21

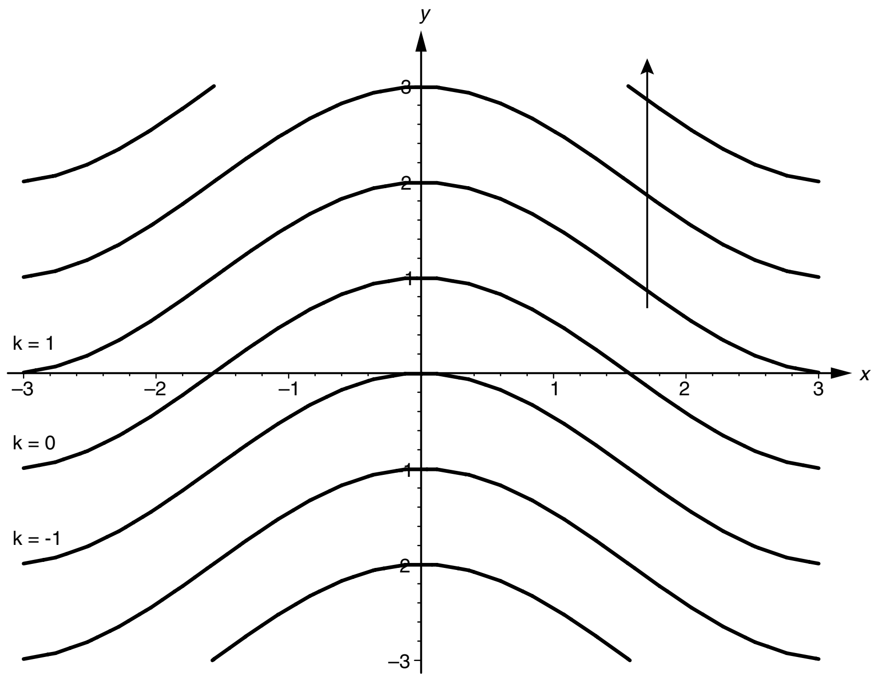
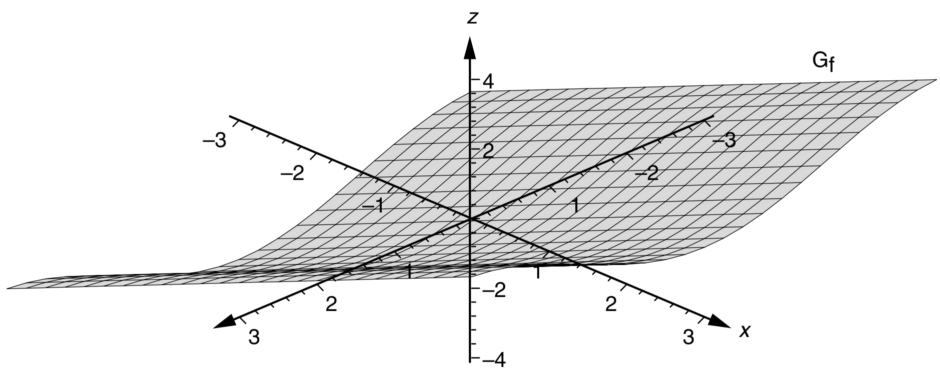


Figure 6.22



Limites et continuité

EXERCICE 3

Énoncé

Donnez, dans chaque cas, les ensembles D et D'_B des fonctions dont on cherche les limites. Ces limites existent-elles dans $\mathbb{R}$?

a $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{x-y}$

b $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2}$

c $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

Solution **a** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$, $D'_B = \mathbb{R}^2$. Cependant, la limite recherchée n'existe pas dans $\overline{\mathbb{R}}$ puisque :

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x=1, y<1}} \left(\frac{1}{x-y}\right) = \lim_{\substack{y\to 1\\ y<1}} \left(\frac{1}{1-y}\right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

et

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x=1, y>1}} \left(\frac{1}{x-y}\right) = \lim_{\substack{y\to 1\\ y>1}} \left(\frac{1}{1-y}\right) = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

b $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $D'_B = \mathbb{R}^2$. La limite demandée conduit *a priori* à une forme indéterminée. En passant aux coordonnées polaires : $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$, on obtient :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\sin^3\theta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho\sin^3\theta.$$

Or $0 \leqslant \left|\rho\sin^3\theta\right| \leqslant \rho$ et $\lim\limits_{\rho\to 0} \rho = 0$, d'où par le théorème de pincement :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho\sin^3\theta = 0.$$

Remarque

on peut également utiliser le théorème du pincement sans passer par les coordonnées polaires, grâce aux inégalités suivantes :

$$\forall y \neq 0 : x^2 + y^2 \geqslant y^2 \Rightarrow 0 \leqslant \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{|y|^3}{y^2} = |y|.$$

c $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $D'_B = \mathbb{R}^2$. Comme $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, on a : $f(x, x) = \dfrac{x^2}{x^2+x^2} = \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$, si $x \neq 0$, et $f(x, 0) = \dfrac{x.0}{x^2} = 0$, si $x \neq 0$. D'où $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y}} f(x, y) = \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x, y) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ n'existe pas.

EXERCICE 4

Énoncé

Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R} : (x, y) \to \dfrac{6x^2y}{x^2+y^2}$. Montrez que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$ de trois façons.

a D'après la définition.

b D'après le théorème de pincement.

c En utilisant les coordonnées polaires.

Solution **a** Soit $\varepsilon > 0$. Il faut trouver $\delta > 0$ tel que : $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \left|\dfrac{6x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon$.

Comme $\forall\,(x,y) \neq (0,0) : x^2+y^2 \geqslant x^2 \Rightarrow \left|\dfrac{6x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| \leqslant \dfrac{6x^2\,|y|}{x^2} = 6\,|y| \leqslant 6\sqrt{x^2+y^2}$.

Si on choisit $\delta = \dfrac{\varepsilon}{6}$: $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \left|\dfrac{6x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| \leqslant 6\sqrt{x^2+y^2} < 6\delta = \varepsilon$.

b $\forall\,(x,y) \neq (0,0)$: $0 \leqslant \left|\dfrac{6x^2y}{x^2+y^2}\right| \leqslant 6\,|y|$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 6\,|y| = 0$ entraînent le résultat.

c Posons $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$. On obtient :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{6\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0}\left(6\rho\cos^2\theta\sin\theta\right).$$

Or, $0 \leqslant \left|6\rho\cos^2\theta\sin\theta\right| \leqslant 6\rho$ et $\lim\limits_{\rho\to 0} 6\rho = 0$, d'où le résultat par pincement.

EXERCICE 5

Énoncé

Dans chaque cas, étudiez la continuité des fonctions données.

a $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

b $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

c $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,1) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,1) \end{cases}$.

d $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

e $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^x-x-1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

f $f(x,y) = \begin{cases} x-y^2 & \text{si } x \geqslant y^2 \\ 0 & \text{si } x < y^2 \end{cases}$.

Solution **a** Dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f est continue comme quotient de fonctions continues (polynômes) à dénominateur non nul. En $(0,0)$, en passant aux coordonnées polaires $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} &= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^4\left(\cos^4\theta+\sin^4\theta\right)}{\rho^2}\\ &= \lim_{\rho\to 0} \rho^2\left(\cos^4\theta+\sin^4\theta\right) = 0 = f\,(0,0)\,.\end{aligned}$$

La fonction f est donc continue en (0,0) et $DC = \mathbb{R}^2$.

b Dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ est continue comme quotient de fonctions continues à dénominateur non nul. Toutefois, f n'est pas continue en (0,0) car la limite n'existe pas :

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2} = -1 \neq 1.$$

En conclusion : $DC = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

c On peut écrire $g(x,y) = f(x,y-1)$, où f est la fonction étudiée dans l'exercice précédent (g est la composée d'un polynôme et de la fonction f). Comme $(x,y-1) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,1)$, on obtient : $DC = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}$.

d Dans $\mathbb{R}^2$, la fonction $\sin\left(x^2+y^2\right)$ est continue en tant que composée de fonctions continues et, dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f est continue comme quotient de fonctions continues à dénominateur non nul. En (0, 0), on a, par passage aux coordonnées polaires :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f\left(x,y\right) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\sin\rho^2}{\rho^2}\,.$$

L'indétermination résultante peut être levée par la règle de l'Hospital :

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\sin\rho^2}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0}\frac{2\rho\cos\rho^2}{2\rho} = \lim_{\rho\to 0}\cos\rho^2 = 1 = f\,(0,0)$$

et f est continue en (0,0).

Finalement : $DC = \mathbb{R}^2$.

Remarque

le résultat : $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\sin\rho^2}{\rho^2} = 1$ peut aussi être déduit de la formule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, établie dans le chapitre 3 (exercice 8), et la propriété relative à la limite d'une fonction composée.

e Dans $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x,y) : x = 0\right\}$, $f(x,y) = \dfrac{e^x-x-1}{x^2}$ est continue en tant que quotient de fonctions continues à dénominateur non nul. En les points $(0,b)$, où $b \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ x=0}} f(x,y) = \lim_{y\to b} y = b.$$

tandis que $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,b)\\ x\neq 0}} f(x, y) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{x^2}$ conduit à une forme indéterminée. Grâce à une double application de la règle de l'Hospital, on obtient : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{x^2} = \dfrac{1}{2}$. Il s'ensuit que f est continue en $(0, b)$ uniquement pour $b = \dfrac{1}{2}$. Le domaine de continuité de f est finalement :

$$DC = \left(\mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x, y) : x = 0\right\}\right) \cup \left\{\left(0, \frac{1}{2}\right)\right\} = (\mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}) \cup \left\{\left(0, \frac{1}{2}\right)\right\}.$$

f Dans $A = \left\{(x, y) : x > y^2\right\}$, $f(x, y) = x - y^2$ est continue. Dans $B = \left\{(x, y) : x < y^2\right\}$, $f(x, y) = 0$ est continue. Aux points de la parabole d'équation $x = y^2$, la limite est nulle. Il s'ensuit que : $DC = \mathbb{R}^2$.

Dérivées partielles, élasticités et différentielle

Exercice 6

Énoncé

Dans chaque cas, calculez toutes les dérivées partielles des fonctions données.

a $f\left(x, y\right) = x^2 + 3xy^2 - 6y^5$.

b $f\left(x, y\right) = x\cos(e^{xy})$.

c $f\left(x, y, z\right) = x\cos(xz) + \ln\left(2 - \sin^2(y + z)\right)$.

Solution

a $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(x, y\right) = 2x + 3y^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(x, y\right) = 6xy - 30y^4$.

b $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(x, y\right) = \cos(e^{xy}) - xye^{xy}\sin(e^{xy})$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(x, y\right) = -x^2e^{xy}\sin(e^{xy})$.

c $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(x, y, z\right) = \cos(xz) - xz\sin(xz)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(x, y, z\right) = -\dfrac{2\sin(y + z)\cos(y + z)}{2 - \sin^2(y + z)}$.

$\dfrac{\partial f}{\partial z}\left(x, y, z\right) = -x^2\sin(xz) - \dfrac{2\sin(y + z)\cos(y + z)}{2 - \sin^2(y + z)}$.

Exercice 7

Énoncé

Dans chaque cas, étudiez l'existence des dérivabilités partielles et déduisez-en le domaine de dérivabilité DD des fonctions données.

a $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad \left(x, y\right) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad \left(x, y\right) = (0, 0) \end{cases}$.

b $f(x, y) = \left|x + y\right|$.

c $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } \left(x,y\right) \neq (0{,}0) \\ 0 & \text{si } \left(x,y\right) = (0,0) \end{cases}.$

d $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x+y}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si } x = y \end{cases}.$

e $f(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ y & \text{si } x < 0 \end{cases}.$

f $f(x,y) = \sqrt{|xy|}.$

Solution

a Dans l'ouvert $\mathbb{R}^2\setminus\{(0{,}0)\}$, f est dérivable en tant que quotient de fonctions dérivables à dénominateur non nul. En $(0,0)$, comme $\forall \Delta x \in \mathbb{R}_0 : f(\Delta x, 0) = 0$, il vient

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0 \in \mathbb{R}.$$

La fonction f est donc dérivable par rapport à x en $(0, 0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0{,}0) = 0$.

De même, on a par rapport à y :

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f\left(0, \Delta y\right) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} 0 = 0 \in \mathbb{R}.$$

f est dérivable par rapport à y en $(0, 0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0{,}0) = 0$. En conclusion, $DD = \mathbb{R}^2$.

b Pour $x+y > 0$ et pour $x+y < 0$, f est dérivable en tant que polynôme. Les autres points sont du type $(a, -a)$, où $a \in \mathbb{R}$. En ces points, f n'est pas dérivable par rapport à x car :

$$\frac{f(a+\Delta x, -a) - f(a, -a)}{\Delta x} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta x > 0 \\ -1 & \text{si } \Delta x < 0 \end{cases}.$$

Comme la fonction est symétrique en x et y, elle n'est pas non plus dérivable par rapport à y en $(a, -a)$, où $a \in \mathbb{R}$. Le domaine de dérivabilité de f est finalement :

$$DD = \mathbb{R}^2\setminus\{(a,-a) : a \in \mathbb{R}\}.$$

c $DD = \mathbb{R}^2$.

d Dans $A = \left\{\left(x,y\right) : x \neq y\right\}$, f est dérivable en tant que quotient de fonctions dérivables à dénominateur non nul. En les points de la forme (a, a), où $a \in \mathbb{R}$, on a, lorsque $\Delta x \neq 0$:

$$\frac{f(a+\Delta x, a) - f(a,a)}{\Delta x} = \frac{\dfrac{2(a+\Delta x)+a}{a+\Delta x - a} + \dfrac{1}{2}}{\Delta x} = \frac{3a}{(\Delta x)^2} + \frac{5}{2\Delta x}.$$

Il s'ensuit que $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x, a) - f(a,a)}{\Delta x} = \pm\infty$ ($\nexists$ dans $\mathbb{R}$).

La fonction n'est donc pas dérivable par rapport à x en (a, a), $\forall a \in \mathbb{R}$. On montre de la même façon qu'elle n'est pas dérivable par rapport à y en ces points.

En conclusion : $DD = \mathbb{R}^2\setminus\{(a,a) : a \in \mathbb{R}\}$.

e $DD = \mathbb{R}^2\setminus\{(0,b) : b \in \mathbb{R}_0\}$.

f $DD = \left\{\left(x,y\right) \in \mathbb{R} : xy \neq 0\right\} \cup \{(0,0)\}$.

EXERCICE 8

Énoncé

Soit les fonctions f et g de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, différentiables dans $\mathbb{R}^n$, et le point $a \in \mathbb{R}^n$ tel que : $f(a) \neq 0$ et $g(a) \neq 0$. Montrez que toute élasticité partielle de la fonction produit $fg : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \to f(x)g(x)$ est égale à la somme des élasticités correspondantes des deux fonctions : $\forall i = 1, \ldots, n : E^i_{fg}(a) = E^i_f(a) + E^i_g(a)$.

Solution

$$\begin{aligned} E^i_{fg}(a) &= \frac{a_i}{(fg)(a)} \frac{\partial (fg)}{\partial x_i}(a) = \frac{a_i}{f(a)g(a)} \left(g(a)\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + f(a)\frac{\partial g}{\partial x_i}(a) \right) \\ &= \frac{a_i}{f(a)} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{a_i}{g(a)} \frac{\partial g}{\partial x_i}(a). \end{aligned}$$

EXERCICE 9

Énoncé

Le revenu brut R d'une firme qui produit un bien unique est égal au prix de vente unitaire p multiplié par la quantité vendue, q, elle-même fonction du prix : $R(p) = pq(p)$.

a Utilisez le résultat de l'exercice 8 pour calculer l'élasticité du revenu par rapport au prix.

b Interprétez ce résultat.

Solution

a $E^p_R(p) = E^p_{pq}(p) = E^p_p(p) + E^p_q(p) = 1 + E^p_q(p)$.

b Comme l'élasticité de la demande est naturellement négative (la demande décroît lorsque le prix augmente) on peut réécrire l'expression précédente sous la forme :

$$E^p_R(p) = 1 - \left| E^p_q(p) \right|.$$

Si la demande est très élastique ($\left|E^p_q(p)\right| > 1$), une augmentation de prix réduit suffisamment la demande pour que le revenu chute. Si la demande est faiblement élastique ($\left|E^p_q(p)\right| \approx 1$), la croissance du prix influence peu le revenu. Enfin, si la demande est inélastique ($\left|E^p_q(p)\right| < 1$), alors une croissance du prix entraîne une croissance du revenu.

EXERCICE 10

Énoncé

a Soit f définie par $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0,0) \end{cases}$.

Calculez l'élasticité partielle de f par rapport à x.

b Soit g définie par $g(x, y) = \begin{cases} xy & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0,0) \end{cases}$.

Calculez l'élasticité partielle de g par rapport à y.

Solution

a La fonction f est dérivable dans $\mathbb{R}^2$. Toutefois, l'élasticité partielle par rapport à x ne peut être calculée aux points de la forme $(a, 0)$ ou $(0, b)$, où la fonction s'annule. Aux autres points (a, b), on a : $E_f^x(a, b) = \dfrac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}$.

b Aux points (a, b) tels que $ab \neq 0$, on a : $E_g^y(a, b) = \dfrac{b}{ab}\dfrac{\partial(xy)}{\partial y}(a, b) = \dfrac{ab}{ab} = 1$ (élasticité unitaire).

EXERCICE 11

Énoncé

La fonction de demande d'un individu pour un bien déterminé est donnée par : $Q\left(p_1, p_2, p_3, R\right) = -1,5 \ln p_1 + 2 \ln p_2 - 0,2 \ln p_3 + 0,01R$, où p_1 représente le prix du bien considéré, p_2 et p_3 sont les prix de deux autres biens et R désigne le revenu de l'individu.

Calculez les élasticités $E_Q^{p_2}$ et $E_Q^{p_3}$ en $p_1 = 10$, $p_2 = 20$, $p_3 = 40$ et $R = 2\,000$.

Solution

$E_Q^{p_2} = \dfrac{2}{Q}$ et $Q(10, 20, 40, 2\,000) = -1{,}5 \ln 10 + 2 \ln 20 - 0{,}2 \ln 40 + 20 = 20{,}18$.

$\Rightarrow E_Q^{p_2}(10, 20, 40, 2\,000) = \dfrac{2}{20{,}18} = 0{,}0991$.

De même, comme $E_Q^{p_3} = \dfrac{-0{,}2}{Q}$, on obtient : $E_Q^{p_3}(10, 20, 40, 2\,000) = \dfrac{-0{,}2}{20{,}18} = -0{,}0099$.

Remarque

La croissance du prix p_2 entraîne une augmentation de la demande Q de bien 1. Les biens 1 et 2 sont donc des « substituts ». À l'inverse, la croissance du prix p_3 entraîne une décroissance de la demande Q de bien 1. Les biens 1 et 3 sont donc « complémentaires ».

EXERCICE 12

Énoncé

Pour chacune des fonctions suivantes, calculez, si elles existent, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$. Déduisez-en l'expression de l'éventuelle candidate différentielle en (0,0) ? La fonction est-elle différentiable en (0,0) ?

a $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + xy^2 + y^4}{x^2 + y^2} & \text{si } \left(x, y\right) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } \left(x, y\right) = (0,0) \end{cases}$.

b $f(x, y) = |x| + y$.

c $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad \big(x,y\big)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si} \quad \big(x,y\big)=(0,0)\end{cases}.$

d $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3-x^4}{x^2+y^2} & \text{si} \quad x\neq y\\ 0 & \text{si} \quad x=y\end{cases}.$

Solution

a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-0}{x-0}=1\Rightarrow \exists\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1,$

et $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y^2-0}{y-0}=\lim\limits_{x\to 0}y=0\Rightarrow \exists\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$

Comme f est dérivable en (0,0), la candidate différentielle $cdf_{(0,0)}$ existe et vaut :

$$cdf_{(0,0)}=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)dy=1.dx+0.dy=dx.$$

La fonction f est différentiable en (0,0). En effet :

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)h-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\dfrac{h^3+hk^2+k^4}{h^2+k^2}-0-h}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{k^4}{(h^2+k^2)^{3/2}}$$

$\to$ indétermination du type $\dfrac{0}{0}$ qui peut être levée comme suit :

$$\forall(h,k)\in\mathbb{R}^2\ :(h^2+k^2)^{3/2}\geqslant(k^2)^{3/2}=|k|^3$$

$$\Rightarrow\forall h\in\mathbb{R},\forall k\in\mathbb{R}_0:0<\frac{k^4}{(h^2+k^2)^{3/2}}\leqslant\frac{k^4}{|k|^3}=|k|$$

$$\Rightarrow\forall h\in\mathbb{R},\forall k\in\mathbb{R}_0:0\leqslant\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{k^4}{(h^2+k^2)^{3/2}}\leqslant\lim_{k\to 0}|k|=0$$

$$\Rightarrow\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{k^4}{(h^2+k^2)^{3/2}}=0.$$

La candidate différentielle obtenue plus haut est donc une « vraie » différentielle : $df_{(0,0)}=dx$.

b $f(x,y)=|x|+y$ n'est pas dérivable, et donc pas différentiable, en (0,0). En effet :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}\nexists.$$

c $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. La candidate différentielle est donc : $cdf_{(0,0)}=dx$. La fonction n'est cependant pas différentiable en (0,0). En effet, en passant en coordonnées polaires, on montre que :

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\dfrac{h^3}{h^2+k^2} - 0 - h}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}} \nexists.$$

d $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$, $cdf_{(0,0)} = dy$. La fonction f n'est pas différentiable en (0,0).

EXERCICE 13

Énoncé

Dans chaque cas, calculez la différentielle des fonctions données en un point quelconque.

a $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \to x^2yz^3 + y^2x^3$.

b $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (x, y) \to (x^3y^2, e^{x+y}, y)$.

Solution

a f est un polynôme $\Rightarrow f$ est différentiable dans $\mathbb{R}^3$ et la différentielle en (x, y, z) est donnée par : $df_{(x,y,z)} = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}dz = (2xyz^3 + 3y^2x^2)dx + (x^2z^3 + 2yx^3)dy + 3x^2yz^2dz$.

b Les trois composantes de f sont différentiables dans $\mathbb{R}^2$, donc f est différentiable dans $\mathbb{R}^2$ et :

$$\nabla f\left(x,y\right) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2 & 2x^3y \\ e^{x+y} & e^{x+y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow df_{(x,y)} = \nabla f\left(x,y\right) . \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2y^2dx + 2x^3ydy \\ e^{x+y}dx + e^{x+y}dy \\ dy \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 14

Énoncé

On considère la fonction de production de Cobb-Douglas à deux facteurs et à rendements constants définie par $f\left(x,y\right) = x^a y^{1-a}$ $(a > 0)$.

a Que vaut cette fonction en $(x_0, y_0) = (10, 10)$ et en $(x, y) = (10{,}1; 9{,}95)$ lorsque $a = \dfrac{1}{2}$? Par différence, déterminez l'accroissement Δf correspondant.

b Déterminez la différentielle de cette fonction.

c Pour $a = \dfrac{1}{2}$, déduisez-en l'approximation linéaire de f au point $(x, y) = (10{,}1; 9{,}95)$ en prenant comme référence le point $(x_0, y_0) = (10, 10)$.

d Comparez l'accroissement exact de la fonction à son approximation linéaire à partir de $(x_0, y_0) = (10, 10)$, en prenant successivement les points suivants : $(10{,}1; 9{,}5)$, $(10{,}4; 9{,}4)$, $(11, 9)$, $(12; 8{,}2)$ et $(13, 8)$.

Solution

a Pour $a = \dfrac{1}{2}$: $f\left(x,y\right) = \sqrt{xy}$

$\Rightarrow f(10, 10) = 10$ et $f(10{,}1; 9{,}95) = \sqrt{(10{,}1)\,(9{,}95)} = 10{,}0247$.

$\Rightarrow \Delta f = f(10{,}1; 9{,}95) - f(10, 10) = 10{,}025 - 10 = 0{,}0247$.

b La différentielle en (x, y) est donnée par : $df_{(x,y)} = ax^{a-1}y^{1-a}dx + (1-a)x^a y^{-a}dy$.

c Pour $a = \frac{1}{2}$: $df_{(x,y)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}dx + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}dy$. En particulier :

$$df_{(10,10)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{10}{10}}dx + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{10}{10}}dy = \frac{dx+dy}{2}$$
$$\Rightarrow f(x, y) \cong \underbrace{f(10, 10)}_{10} + \frac{1}{2}\left[(x-10) + \left(y-10\right)\right].$$

Ainsi, $f(10{,}1; 9{,}95) \cong 10{,}025$ est une bonne approximation de la valeur exacte donnée par : $f(10{,}1; 9{,}95) = 10{,}0247$.

d Pour les points donnés, on a respectivement à partir de $(x_0, y_0) = (10, 10)$:

$$f(10, 1\,;\ 9, 5) - f(10, 10) = 9, 7954 - 10 = -0, 2045$$

dont l'approximation linéaire est :

$$df_{(10,10)}(10{,}1 - 10\,;\ 9{,}5 - 10)$$
$$= df_{(10,10)}(0{,}1\,;\ -0{,}5) = \frac{0{,}1 - 0{,}5}{2} = -0{,}2\,;$$
$$f\,(10{,}4\,;\ 9{,}4) - f\,(10, 10) = 9{,}8873 - 10 = -0{,}1126$$
$$\text{et} \quad df_{(10,10)}(0{,}4\,;\ -0{,}6) = \frac{0{,}4 - 0{,}6}{2} = -0{,}1\,;$$
$$f\,(11{,}9\,;\ 9) - f\,(10, 10) = 10{,}3489 - 10 = 0{,}3489$$
$$\text{et} \quad df_{(10,10)}(1{,}9\,;\ -1) = \frac{1{,}9 - 1}{2} = 0{,}45\,;$$
$$f\,(12\,;\ 8{,}2) - f\,(10, 10) = 9{,}9196 - 10 = -0{,}0803$$
$$\text{et} \quad df_{(10,10)}(2\,;\ -1{,}8) = \frac{2 - 1{,}8}{2} = 0{,}1\,;$$
$$f\,(13, 8) - f\,(10, 10) = 10{,}1980 - 10 = 0{,}1980$$
$$\text{et} \quad df_{(10,10)}(3\,;\ -2) = \frac{3 - 2}{2} = 0{,}5.$$

Remarque

L'approximation de $\Delta f = f\left(x, y\right) - f\,(10, 10)$ devient moins précise lorsque (x, y) s'éloigne du point (10,10).

EXERCICE 15

Énoncé

La fonction de production d'un entrepreneur est donné par $K^{\frac{1}{2}}.L^{\frac{1}{4}}$, où K représente le capital utilisé et L le travail. Actuellement, il utilise 9 unités de capital et 16 unités de travail. Déterminez par approximation linéaire la production obtenue s'il augmente d'une unité le capital et de deux unités le facteur travail.

Solution La fonction $f(K, L) = K^{\frac{1}{2}}.L^{\frac{1}{4}}$ est différentiable dans $\left(\mathbb{R}_0^+\right)^2$. On a, par approximation linéaire :

$$f(10,18) \approx f(9,16) + \nabla f(9,16).(1,2) = 6 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{3}{32} \times 2 = 6 + \frac{25}{48} = 6{,}52.$$

Fonctions homogènes

EXERCICE 16

Énoncé

Montrez que si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \to f(x, y)$ est différentiable et homogène de degré k dans $\mathbb{R}^2$, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont homogènes de degré $k - 1$ dans $\mathbb{R}^2$.

Solution Soit $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda x, \lambda y) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(\lambda x + h, \lambda y) - f(\lambda x, \lambda y)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f\left(\lambda\left(x + \dfrac{h}{\lambda}, y\right)\right) - f(\lambda x, \lambda y)}{\lambda.\dfrac{h}{\lambda}}.\end{aligned}$$

Comme f est homogène de degré k : $f\left(\lambda\left(x, y\right)\right) = \lambda^k f(x, y)$, on obtient, en posant $h' = \dfrac{h}{\lambda}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda x, \lambda y) = \frac{1}{\lambda} \lim_{h' \to 0} \frac{\lambda^k \left(f(x + h', y) - f(x, y)\right)}{h'} = \lambda^{k-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

La démonstration est similaire pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

EXERCICE 17

Énoncé

On considère trois fonctions :

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, homogène de degré 2 et différentiable dans $\mathbb{R}^2$;

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, homogène de degré 1 et différentiable dans $\mathbb{R}^2$;

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, homogène de degré 1 et différentiable dans $\mathbb{R}$.

a Sachant que $f(3, 4) = 5$ et que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(3, 4) = 4$, calculez $f(6, 8)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{3}{2}, 2\right)$.

b La fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \to F(t) = f\left(g(h(t), t), t\right)$ est-elle homogène? Si oui, de quel degré?

Solution **a** f est homogène de degré 2 $\Rightarrow f(6,8) = f(2(3,4)) = 2^2 f(3,4) = 20$. D'autre part, d'après l'exercice 16, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est homogène de degré 1, d'où : $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{3}{2}, 2\right) = \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{1}{2}(3,4)\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y}(3,4) = 2$.

b On a pour $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} F(\lambda t) &= f\left(g(h(\lambda t), \lambda t), \lambda t\right) = f\left(g(\lambda h(t), \lambda t), \lambda t\right) = f\left(g\left(\lambda(h(t), t)\right), \lambda t\right) \\ &= f\left(\lambda g\big(h(t), t\big), \lambda t\right) = f\left(\lambda\left(g\big(h(t), t\big), t\right)\right) = \lambda^2 f\left(g\big(h(t), t\big), t\right) = \lambda^2 F(t). \end{aligned}$$

La fonction F est donc homogène de degré 2.

EXERCICE 18

Énoncé

Montrez que la fonction de production de Cobb-Douglas $Q(L, K) = AK^{\alpha}L^{\beta}$, $(A > 0, \alpha, \beta \in (0, 1))$ est homogène dans $\left(\mathbb{R}_0^+\right)^2$.

Solution Soit $\lambda > 0$. On a : $Q(\lambda L, \lambda K) = A(\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{\beta} = A\lambda^{\alpha+\beta}K^{\alpha}L^{\beta} = \lambda^{\alpha+\beta}Q(L, K)$.

Matrice hessienne, fonctions concaves et convexes

EXERCICE 19

Énoncé

Dans chaque cas, la fonction donnée est-elle (strictement) concave dans $\mathbb{R}^2$? (strictement) convexe dans $\mathbb{R}^2$?

a $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$.

b $f(x, y) = y^3 + xy$.

c $f(x, y) = -(x + y)^2 - x^2$.

Solution

Remarques préliminaires :

1. Toutes ces fonctions sont des polynômes, donc de classe C^2 dans $\mathbb{R}^2$.
2. Les résultats relatifs aux matrices (semi)définies ont été établis dans les exercices du chapitre 5.

a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est définie positive $\Rightarrow f$ est strictement convexe dans $\mathbb{R}^2$.

b $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6y \end{pmatrix}$ est indéfinie $\Rightarrow f$ n'est ni convexe, ni concave dans $\mathbb{R}^2$.

c $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ est définie négative $\Rightarrow f$ est strictement concave dans $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 20

Énoncé

Étudiez la convexité de la fonction de Cobb-Douglas $Q(L, K) = AK^{\alpha}L^{\beta}$ (avec $A > 0, \alpha, \beta \in (0, 1)$).

Solution

La fonction est de classe C^2 dans $\left(\mathbb{R}_0^+\right)^2$ et : $H_Q(K, L) = \begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)K^2Q & \alpha\beta KLQ \\ \alpha\beta KLQ & \beta(\beta-1)L^2Q \end{pmatrix}$.

Pour appliquer la méthode des mineurs principaux (voir chapitre 5, section 7.3), on détermine :

$$\det H_{(1)} = \alpha(\alpha-1)K^2Q < 0 \quad (\text{car } \alpha < 1),$$

et

$$\det H_{(2)} = \left(\alpha(\alpha-1)\beta(\beta-1) - \alpha^2\beta^2\right) K^2L^2Q^2 = \alpha\beta\,(1-\alpha-\beta)\,K^2L^2Q^2$$

de même signe que $[1 - (\alpha + \beta)]$.

- Si $\alpha + \beta < 1$, alors $\det H_{(2)} > 0$ et Q est strictement convexe.
- Si $\alpha + \beta = 1$, alors $\det H_{(2)} = 0$, ce qui ne permet pas de conclure. Un calcul direct montre que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y)H_Q(K, L)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha(\alpha-1)Q\left(Kx + Ly\right)^2 \leqslant 0$ puisque $0 < \alpha < 1$ et $Q > 0$. Q est donc convexe.
- Si $\alpha + \beta > 1$: $\det H_{(2)} < 0 \Rightarrow Q$ n'est ni convexe, ni concave.

EXERCICE 21

Énoncé

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \to g(t) = f\,(a + t(b-a))$, où $a, b \in \mathbb{R}^n$ $(a \neq b)$.

a Déterminez $g'(t)$ et $g''(t)$.

b En appliquant à g la formule de Mac Laurin à l'ordre 1 vue dans le chapitre 3 (section 5) pour les fonctions d'une seule variable, déduisez-en la formule suivante (formule de Taylor à l'ordre 1 pour les fonctions de n variables) :

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\,(a + \theta(x-a))\,(x_i - a_i)(x_j - a_j)$$

où $\theta \in (0, 1)$.

c Exprimez ce résultat sous forme matricielle.

Solution **a** La fonction g est une fonction composée : $g = f \circ h$ où $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n : t \to a + t(b-a)$. D'après la *chain rule*, on a :

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(b-a)) \frac{\partial (a_i + t(b_i - a_i))}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(b-a))(b_i - a_i).$$

Une seconde application de la *chain rule* conduit à :

$$g''(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + t(b-a))(b_i - a_i)(b_j - a_j).$$

Remarque

comme $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, l'ordre de dérivation est indifférent : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

b La formule de Mac Laurin (formule de Taylor au voisinage de 0) à l'ordre 1 indique que :

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{g''(\theta t)}{2}t^2, \quad \text{où } \theta \in (0,1). \tag{1}$$

Dans le cas présent :

$$g(0) = f(a), g'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(b_i - a_i)$$

et

$$g(\theta t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + \theta t(b-a))(b_i - a_i)(b_j - a_j).$$

En remplaçant dans (1), on obtient :

$$\begin{aligned} g(t) = f(a + t(b-a)) = f(a) &+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(b_i - a_i)t \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + \theta t(b-a))(b_i - a_i)(b_j - a_j)t^2. \end{aligned}$$

Finalement, pour $t = 1$ et $b = x$, il vient :

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + \theta(x-a))(x_i - a_i)(x_j - a_j)$$

où $\theta \in (0,1)$.

c $f(x) = f(a) + \nabla f(a).(x-a) + \dfrac{1}{2}(x-a)'.H_f(a + \theta(x-a)).(x-a)$, où $\theta \in (0,1)$ et $(x-a)$ représente le vecteur colonne $\begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix}$.

Chapitre 7

Optimisation des fonctions de plusieurs variables

Parmi toutes les matières abordées dans cet ouvrage, l'optimisation à plusieurs variables est sans conteste celle qui apparaît le plus fréquemment dans la modélisation des décisions des gestionnaires. Qu'il s'agisse de maximiser le bénéfice, la satisfaction des clients, la productivité ou de minimiser les coûts, le risque, l'écart par rapport à une valeur cible, le retard d'un projet, etc., tous ces problèmes exigent une mise en équations qui passe par l'optimisation de fonctions, généralement de plusieurs variables.

La détermination des extrema dans le cas d'une seule variable a été détaillée au chapitre 4. Logiquement, le présent chapitre en est un prolongement qui fait intervenir les diverses notions spécifiques aux fonctions multivariées étudiées dans le chapitre 6. Néanmoins, le thème de l'optimisation à plusieurs variables exige un saut conceptuel important. En effet, plusieurs notions relatives aux fonctions d'une variable sont loin de se généraliser de façon évidente. Par exemple, les fonctions d'une variable (suffisamment régulières) admettent une seule dérivée première, une seule dérivée seconde, etc., tandis que, pour les fonctions de n variables, le nombre de dérivées possibles croît avec l'ordre de dérivation : n dérivées partielles premières, n^2 dérivées partielles secondes, etc. Une conséquence directe de cet accroissement apparaîtra sous la forme de conditions de premier et second ordre plus lourdes à formuler.

Par ailleurs, la prise en compte pratique des contraintes imposées aux variables doit être fondamentalement revue. Prenons le cas de la maximisation de la fonction $f(x)$ dont l'unique variable est soumise à une contrainte de non-négativité ($x \geqslant 0$), qui traduit par exemple le fait que x est une quantité, un prix ou toute autre grandeur dépourvue de sens pour une valeur négative. L'optimisation s'effectue alors à l'aide de la procédure usuelle (voir chapitre 4), la contrainte ayant pour effet de restreindre le domaine d'étude à $\mathbb{R}^+$ et d'exiger un examen particulier pour le seul point qui en constitue le « bord » ($x = 0$). Plongeons le même problème dans un cadre bivarié : maximiser $f(x, y)$ sous la double contrainte $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$. À présent, le domaine admissible est donné par $\left(\mathbb{R}^+\right)^2$ dont le « bord », $\left\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}^+\right\} \cup \left\{(0, y) : y \in \mathbb{R}^+\right\}$, comporte évidemment une infinité de points. Une étude individuelle des points de cet ensemble devient techniquement difficile, de sorte qu'il apparaît indispensable de disposer de méthodes d'optimisation qui intègrent d'emblée la présence de contraintes qui font apparaître des « bords ». Cette approche (recherche d'extrema liés), spécifique aux fonctions de plusieurs variables, sera abordée dans ce chapitre après l'exposé des principes de l'optimisation dite libre, qui vise la détermination des extrema dans un domaine ouvert, donc « sans bords ».

1 Extrema libres

1.1 Définitions

Les définitions des différents types d'extrema des fonctions d'une variable s'étendent de façon naturelle aux fonctions de plusieurs variables.

Définition Soit $f : D \to \mathbb{R} : x \to f(x)$, où $D \subset \mathbb{R}^n$, et $a \in D$.

- f admet un *maximum global* en a si $\forall x \in D : f(x) \leqslant f(a)$.
- f admet un *minimum global* en a si $\forall x \in D : f(a) \leqslant f(x)$.
- f admet un *maximum local* en a si [1] $\exists V(a) : \forall x \in V(a) \cap D : f(x) \leqslant f(a)$.
- f admet un *minimum local* en a si $\exists V(a) : \forall x \in V(a) \cap D : f(a) \leqslant f(x)$. ❑

Lorsque la fonction f admet un maximum (resp. un minimum) en $a \in D$, le nombre réel $f(a)$ est la *valeur maximale* (resp. la *valeur minimale*) correspondante.

On peut également définir les extrema stricts (voir le chapitre 4) mais, sauf mention expresse, on s'intéresse ici aux extrema non nécessairement stricts.

1.2 Condition suffisante d'existence d'extrema globaux

L'étude des fonctions d'une variable a montré que l'existence d'extrema n'est garantie *a priori* que sous certaines conditions mêlant la nature topologique du domaine et la régularité de la fonction. Dans la même veine, la propriété suivante offre une condition suffisante d'existence d'extrema globaux pour les fonctions de plusieurs variables.

Propriété Si $f : D \to \mathbb{R} : x \to f(x)$ est continue dans $D \subset \mathbb{R}^n$ et si D est fermé et borné (on dit alors que D est *compact*), alors f admet un minimum global et un maximum global dans D. ❑

1. $V(a)$ représente un voisinage du point a (voir chapitre 1, section 1.6). On peut également formuler la définition des extrema locaux en remplaçant ce voisinage par une boule ouverte $B(a, \eta)$, où $\eta > 0$.

Ce résultat appelle des commentaires dans deux directions opposées. D'une part, il apporte une information utile puisque, dans la pratique, le gestionnaire cherche généralement des solutions optimales globales. Atteindre un optimum local est en effet futile s'il se trouve ailleurs dans le domaine des possibilités des valeurs supérieures de la fonction d'objectif. Ce serait comme escalader une colline alors qu'un sommet voisin plus élevé est accessible... La question demeure cependant de savoir s'il existe réellement un « point culminant ». C'est cette information qu'apporte la propriété, du moins lorsqu'elle est applicable.

D'autre part, la restriction relative au domaine compact est malheureusement trop forte pour la résolution de nombreux problèmes, en particulier, ceux pour lesquels les variables de décision ne sont pas bornées. Dès lors, comme dans le cas des fonctions d'une variable, une phase délicate concernera le passage des extrema locaux aux extrema globaux. Dans cette optique, la section suivante mettra en lumière l'importance que peut jouer la concavité ou la convexité de la fonction d'objectif.

La question du traitement des éventuels « bords » du domaine traverse de part en part ce chapitre. Beaucoup plus épineuse à n variables qu'à une seule variable, elle motive la scission entre extrema libres et liés. En effet, les restrictions du domaine qui s'expriment sous la forme d'une égalité ($g(x) = 0$) ou d'une inégalité non stricte ($g(x) \leqslant 0$) créent généralement une infinité de bords, dont l'étude au cas par cas devient impraticable. Les conditions de Lagrange et de Kuhn et Tucker visent à combler cette lacune. Avant d'aborder ces nouveaux résultats, la section suivante présente la détermination des extrema dans un domaine ouvert. La terminologie d'extrema « libres » résulte de l'absence de conditions introduisant des « bords » dans le domaine, que l'on appelle aussi des « contraintes ».

1.3 Détermination des extrema libres dans un domaine ouvert

La détermination des extrema libres d'une fonction multivariée repose d'abord sur la condition nécessaire du premier ordre.

Condition nécessaire du premier ordre Si $f : D \to \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}^n$, est différentiable en $a \in D \cap D'$ et admet un extremum local en a, alors $\forall i = 1, \ldots, n$: $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ (ou en abrégé : $\nabla f(a) = 0$). ❑

Définition Un point $a \in D \cap D'$ en lequel f est différentiable et tel que $\nabla f(a) = 0$ est appelé *point critique*. ❑

Comme pour les fonctions d'une variable, la première étape de la recherche des extrema consiste à dresser la liste des « candidats » extrema locaux qui est constituée de trois types de points de D :

- les points critiques ;
- les éléments de $D \cap D'$ en lesquels f n'est pas différentiable ;
- les bords du domaine.

La dernière catégorie fera l'objet des sections 7.2 et 7.3. Dès lors, nous faisons ici l'hypothèse que le domaine D est ouvert et, par conséquent, ne possède pas de bords.

La seconde étape dans la recherche des extrema consiste à classer les candidats retenus. À cette fin, plusieurs critères de second ordre existent pour les fonctions suffisamment régulières. En dernier ressort, la définition reste toujours applicable, quoique souvent peu commode à l'usage.

Néanmoins, dans plusieurs cas, il apparaît difficile, voire impossible, d'aboutir à une conclusion à l'aide de la seule approche analytique. Il peut alors être utile de se tourner vers des techniques numériques pour explorer le domaine de la fonction à la recherche de ses extrema.

Les deux conditions suffisantes qui suivent concernent exclusivement les points critiques. Elles reposent sur la notion de fonction concave ou convexe et celle de matrice hessienne (matrice des dérivées partielles secondes), qui ont été définies au chapitre 6.

Critère de la convexité/concavité Soit $f : D \to \mathbb{R}$, où D est un sous-ensemble ouvert et convexe de $\mathbb{R}^n$, et a un point critique.

- Si f est convexe dans D, alors f admet un minimum global en a.
- Si f est concave dans D, alors f admet un maximum global en a. ❑

Ce critère est crucial puisqu'il offre une condition suffisante pour obtenir un extremum global dans un domaine ouvert et convexe, alors que les autres résultats de cette section ne concernent que les extrema locaux.

Condition suffisante du second ordre Soit $f : D \to \mathbb{R}$, de classe C^2 dans D, où D est un sous-ensemble ouvert et convexe de $\mathbb{R}^n$, et a un point critique.

- Si $H(a)$ est définie positive, alors f admet un minimum local en a.
- Si $H(a)$ est définie négative, alors f admet un maximum local en a. ❑

Le critère de la convexité et la condition du second ordre se présentent sous la forme de conditions suffisantes pour obtenir un extremum en un point critique. De façon complémentaire, la propriété suivante peut conduire à conclure à l'absence d'extremum en un point critique.

Critère du point de selle Soit $f : D \to \mathbb{R}$, de classe C^2 dans D, où D est un sous-ensemble ouvert et convexe de $\mathbb{R}^n$.

Si a est un point critique et $H(a)$ est indéfinie (ni semi-définie positive, ni semi-definie négative), alors f n'admet pas d'extremum local en a (un tel point est dit *point de selle*). ❑

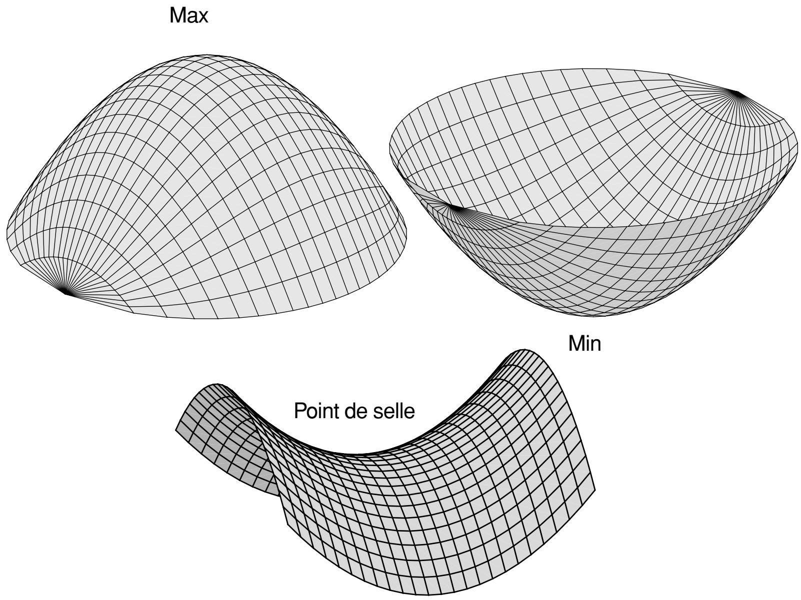
La figure 7.1, page ci-contre, illustre les situations qui, en un point critique, sont identifiables, soit à l'aide de la condition du second ordre (dans les deux premiers cas), soit à l'aide du critère du point de selle (dernier cas).

Néanmoins, lorsque a est un point critique et $H(a)$ est une matrice semi-définie, il est moins aisé de conclure. En l'absence de connaissance préalable au sujet de la concavité ou la convexité de la fonction, une étude locale (voir exercices) peut s'avérer indispensable. Il en est de même pour les candidats extrema en lesquels la fonction n'est pas différentiable.

Remarque

Même pour les fonctions suffisamment régulières, il est irréaliste d'envisager des conditions d'ordres supérieurs à deux, pour des raisons de complexité croissante des dérivées partielles.

Figure 7.1



Au plan géométrique (pour 2 variables), si la fonction f est différentiable et admet un point critique en a, alors le plan tangent au graphe de f est horizontal en $x = a$.

Si la fonction est de classe C^2 dans un voisinage de a, on peut formuler le *développement de Taylor à l'ordre 2* dans ce voisinage :

$$f(x) \cong f(a) + \frac{1}{2} q_a(x - a)$$

où $q_a(x-a) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)(x_i - a)(x_j - a)$ est *la forme quadratique associée à* $H(a)$.

Cette écriture met en lumière le rôle de la matrice hessienne en un point critique et souligne l'importance d'étudier le signe de la forme quadratique associée. Pour ce faire, on recourt aux techniques matricielles exposées au chapitre 5.

Exemples

1. Pour déterminer les extrema libres de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$ dans $\mathbb{R}^2$, on constate d'abord que f est un polynôme, donc différentiable dans l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Les seuls candidats extrema locaux sont les points critiques. Toutefois, nous ne disposons d'aucune garantie *a priori* sur le fait que les éventuels extrema locaux soient globaux.

Recherche des points critiques

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 2y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3y^2 - 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) = \left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}\right) \\ \text{ou} \\ (x, y) = (1, 1) \end{cases}.$$

Les deux candidats sont donc $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ et $(1, 1)$.

Classification

La matrice hessienne de f en un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix}.$$

D'une part, $H_f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ est indéfinie (voir chapitre 5, exercice 20) $\Rightarrow$ $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ est un point de selle.

D'autre part, $H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ est semi-définie positive (voir chapitre 5, exercice 20) $\Rightarrow f$ admet en $(1, 1)$ un minimum local de valeur $f(1, 1) = -1$. Ce minimum n'est cependant pas global puisque, par exemple, $f(0, -2) = -6 < f(1, 1) = -1$.

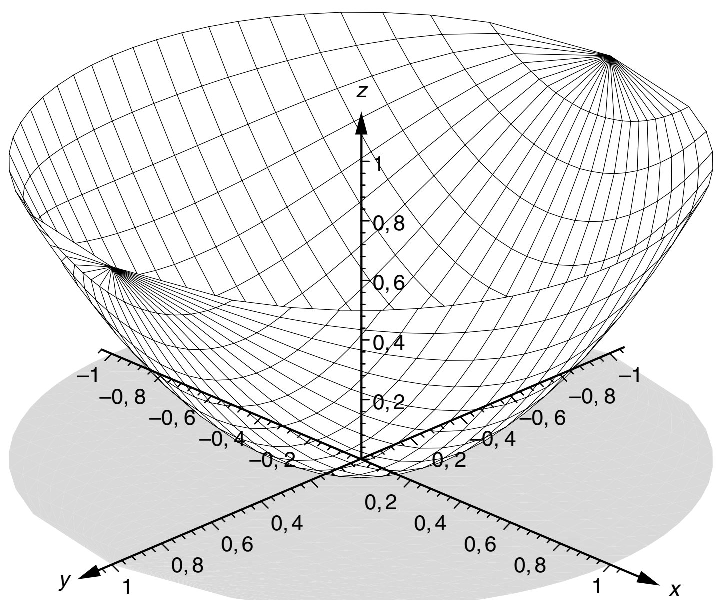
2. On veut optimiser la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ dans le disque ouvert centré en (0,0) de rayon 1, représenté par $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.

Le seul candidat est l'unique point critique (0,0). Comme illustré par la figure 7.2, la définition implique de façon immédiate que f admet un minimum global en (0,0). En effet :

$$\forall (x, y) \in D : f(x, y) = x^2 + y^2 \geqslant 0 = f(0, 0).$$

Donc, la fonction n'admet aucun maximum.

Figure 7.2



3. Une firme, dont la fonction de production à deux facteurs, notée $f(x, y)$, est supposée concave et différentiable, maximise son profit donné par : $\Pi(x, y) = pf(x, y) - \alpha x - \beta y$, où les paramètres positifs p, α et β, représentent les prix unitaires respectivement de l'*output* et des deux *inputs*. À cet effet, elle fixe les quantités de facteurs, x et y.

La concavité de f entraîne celle de Π. Un point critique sera donc automatiquement un maximum dans l'ensemble ouvert et convexe $(\mathbb{R}_0^+)^2$. Notons cependant qu'on exclut de la sorte les éventuelles « solutions de coin » où l'une ou l'autre des quantités de facteurs s'annule.

La condition du premier ordre s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi}{\partial x}(x,y) = p\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \alpha = 0 \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial y}(x,y) = p\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \alpha \\ p\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \beta \end{cases}.$$

Elle exprime que la productivité marginale de chaque input doit être égale à son prix.

En particularisant ce résultat à la fonction de production de Cobb-Douglas $f(x,y) = x^a y^b$ (où $a + b \neq 1$), on obtient :

$$\begin{cases} pax^{a-1}y^b = \alpha \\ pbx^a y^{b-1} = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} pax^a y^b = \alpha x \\ pbx^a y^b = \beta y \end{cases}.$$

Si l'on désigne par $z = x^a y^b$ le niveau de production optimal de la firme, alors la dernière expression s'écrit : $\begin{cases} paz = \alpha x \\ pbz = \beta y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{paz}{\alpha} \\ y = \dfrac{paz}{\beta} \end{cases}$.

Le niveau de production optimal satisfait donc l'équation :

$$z = \left(\frac{paz}{\alpha}\right)^a \left(\frac{paz}{\beta}\right)^b \Leftrightarrow z = \left(\frac{pa}{\alpha}\right)^{\frac{a}{1-a-b}} \left(\frac{pa}{\beta}\right)^{\frac{b}{1-a-b}}$$

qui exprime la fonction d'offre de la firme.

2 Extrema liés : contraintes d'égalités

La scission entre extrema libres et liés (ou « sous contraintes ») est née de l'impossibilité technique de traiter l'optimisation dans les domaines non ouverts selon la procédure exposée dans la section 7.1. En effet, la condition du premier ordre ne s'applique pas aux bords du domaine. Or, si de tels points existent, leur étude au cas par cas est généralement peu aisée. Dès lors, la théorie mathématique propose des méthodes d'optimisation liée. Celles-ci incorporent directement dans la résolution les contraintes qui définissent des domaines non ouverts.

La nomenclature peut s'avérer trompeuse. En effet, au plan opérationnel, ce n'est pas la présence intrinsèque de contraintes dans l'optimisation qui conduit à délaisser l'optimisation libre au profit de l'optimisation liée. Ce sont plutôt les conséquences de ces restrictions au niveau de la nature topologique du domaine de définition de la fonction qui guident l'utilisateur vers l'une ou l'autre des techniques. Ainsi, dans un domaine fort limité, mais ouvert, comme celui figurant dans l'exemple 2 de la section 1.2, la recherche des extrema libres s'applique. À l'inverse, une contrainte sous forme d'inégalité non stricte doit toujours être prise en compte pour déterminer les extrema liés.

Parmi les types de contraintes auxquelles le modélisateur peut se trouver confronté, deux classes se distinguent. D'une part, celles qui lient les variables du problème au travers d'une ou plusieurs équations. Ces contraintes dites d'égalités sont appréhendées grâce au théorème de Lagrange, qui fournit une condition de premier ordre formulée à partir d'une fonction *ad hoc*, dénommée lagrangien. Dans cette approche, de nouvelles variables, dites multiplicateurs, apparaissent et offrent une possibilité supplémentaire dans l'analyse des résultats. D'autre part, l'optimisation sous des contraintes d'inégalités non strictes, traitée grâce au théorème de Kuhn et Tucker, sera présentée dans la section 3.

2.1 Théorème de Lagrange

On considère le problème suivant : déterminer les extrema d'une fonction de n variables, notée $f(x_1, \ldots, x_n) = f(x)$, mathématiquement définie dans un domaine ouvert $D \subset \mathbb{R}^n$, mais dont les variables sont soumises aux m contraintes : $g_1(x) = 0, g_2(x) = 0, \ldots, g_m(x) = 0$, où les fonctions g_j sont également définies dans D. Ces contraintes sont directement issues de la mise en équation des limitations rencontrées par le gestionnaire. Elles délimitent le sous-ensemble A de D dans lequel s'effectue l'optimisation : $A = \{x \in D : g_1(x) = 0, \ldots, g_m(x) = 0\}$.

La définition des *extrema liés* résulte donc de celle des extrema libres.

Définition La fonction f admet un *maximum lié* (resp. un *minimum lié*) sous les contraintes $g_1(x) = 0, \ldots, g_m(x) = 0$, en $a \in A$ si, en ce point, elle admet un maximum libre (resp. un minimum libre) dans le domaine A. ❏

Généralement, une contrainte de type $g_j(x) = 0$ définit une courbe. L'ensemble A est donc constitué de l'intersection de m courbes dans $D \subset \mathbb{R}^n$. Pour $m > 1$, il peut donc contenir fort peu de points. C'est pourquoi, en pratique, il est rare de rencontrer plus d'une contrainte à l'égalité. Et, dans tous les cas, il est exclu d'avoir plus de contraintes que de variables, de sorte que la condition $m < n$ sera systématiquement imposée. À l'opposé, les contraintes sous forme d'inégalités, nettement moins restrictives, sont souvent plus nombreuses. Elles seront abordées dans la section 3.

De manière condensée, le problème traité ici se présente sous la forme suivante :

Problème d'optimisation (opt) *sous contraintes* (s.c.) *d'égalités*

$$\begin{cases} \text{opt } f(x), x \in D \subset \mathbb{R}^n \\ \text{s.c. } g_j(x) = 0, j = 1, \ldots, m \quad (m < n) \end{cases}$$

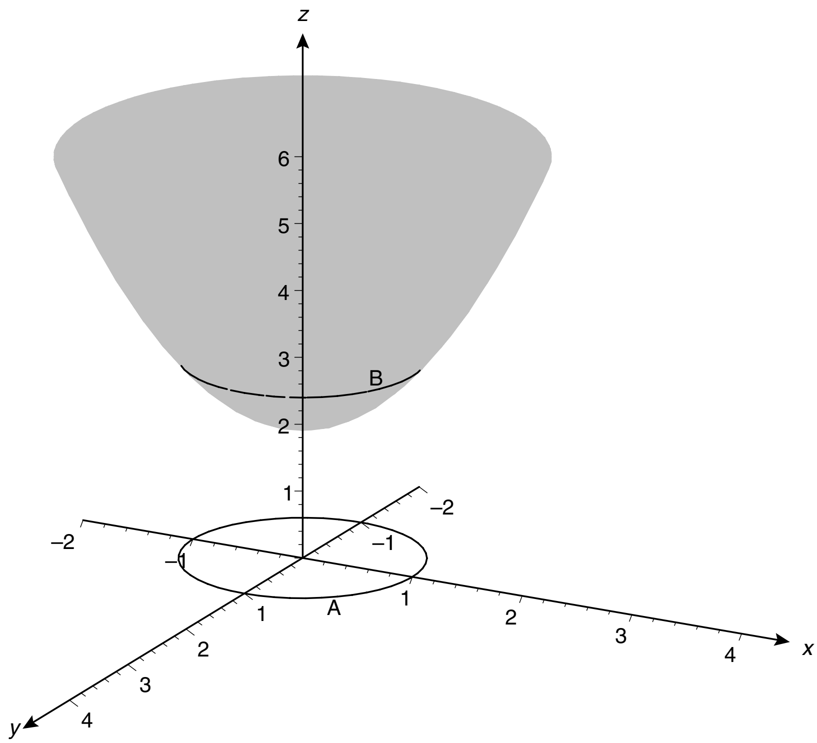
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{opt } f(x), x \in A \\ \text{où } A = \{x \in D : g_1(x) = 0, \ldots, g_m(x) = 0\} \end{cases}.$$

Exemples

1. La figure 7.3, page ci-contre, représente le graphe de la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2$. Le graphe de f restreint aux points du cercle défini par la contrainte $A \equiv x^2 + y^2 - 1 = 0$ est noté B. Il est obtenu par projection verticale de ce cercle sur le graphe de f.
2. Le consommateur maximise une fonction d'utilité, notée $U(x, y)$, qui dépend des quantités consommées de deux biens, x et y, sous une contrainte budgétaire : $p_1x + p_2y = R$, où p_1 et p_2 $(p_1, p_2 > 0)$ sont les prix des biens. Cette contrainte exprime que le montant alloué aux dépenses relatives aux deux biens considérés est fixé à R.

   Dans ce cas simple qui comporte deux variables et une contrainte, on peut aisément ramener l'optimisation liée à la recherche d'un maximum libre. En effet, la contrainte de budget

Figure 7.3



permet d'expliciter la quantité d'un bien en fonction de l'autre : $y = \dfrac{R}{p_2} - \dfrac{p_1}{p_2}x$. En vertu de la condition du premier ordre pour la fonction d'une variable obtenue après substitution de y en fonction de x, on a :

$$\frac{dU\big(x, y(x)\big)}{dx} = U'_x(x, y) + U'_y(x, y)\frac{dy}{dx}(x) = U'_x(x, y) - \frac{p_1}{p_2}U'_y(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{U'_x(x, y)}{p_1} = \frac{U'_y(x, y)}{p_2}.$$

Ce résultat indique qu'à l'optimum, les utilités marginales pondérées par les inverses des prix s'égalisent. Désignons par λ cette quantité commune : $\dfrac{U'_x(x, y)}{p_1} = \dfrac{U'_y(x, y)}{p_2} = \lambda$.

Par ailleurs, la contrainte de budget peut être reformulée par $g(x, y) = 0$, où $g(x, y) = p_1x + p_2y - R$, de sorte que $p_1 = g'_x(x, y)$ et $p_2 = g'_y(x, y)$, et finalement :

$$\begin{cases} U'_x(x, y) - \lambda g'_x(x, y) = 0 \\ U'_y(x, y) - \lambda g'_y(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \nabla U - \lambda \nabla g = 0.$$

Le théorème de Lagrange généralise la démarche adoptée dans la résolution de l'exemple 2. Il représente la condition du premier ordre pour l'optimisation sous des contraintes à l'égalité.

Théorème de Lagrange (première version) Soit les fonctions f et $g_1, \ldots, g_m (m < n)$ de classe C^1 dans un ouvert $D \subset \mathbb{R}^n$.

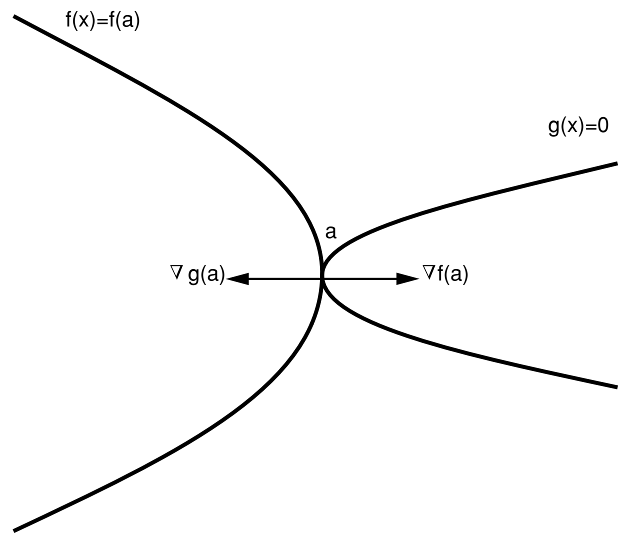
Si f admet en a un extremum lié sous les contraintes $g_1(x) = 0, \ldots, g_m(x) = 0$, et si la jacobienne des contraintes en a, $\left(\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{m\times n}$, est de plein rang m, alors :

$$\exists \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m : \nabla f(a) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(a) = 0.$$ ❏

Ce résultat fondamental doit être assorti de plusieurs commentaires qui en précisent les contours et en facilitent l'usage pratique.

- La thèse de ce théorème signifie qu'au point a, le gradient $\nabla f(a)$ est une combinaison linéaire des gradients des contraintes : $\nabla g_1(a), \ldots, \nabla g_m(a)$. En particulier, quand $n = 2$ et $m = 1$ (deux variables et une contrainte), la condition s'écrit $\nabla f(a) = \lambda \nabla g(a)$. Elle exprime que, dans le plan $\mathbb{R}^2$, la courbe de niveau $f(x) = f(a)$ et la courbe $g(x) = 0$ ont une tangente commune au point a (figure 7.4).

Figure 7.4



- Le théorème de Lagrange peut être vu comme la condition du premier ordre appliquée à la fonction de $n + m$ variables définie comme suit :

Définition La fonction *lagrangienne* (ou le *lagrangien*) du problème

$$\begin{cases} \text{opt } f(x), x \in D \subset \mathbb{R}^n \\ \text{s.c. } g_j(x) = 0, j = 1, \ldots, m \quad (m < n) \end{cases}$$

est définie par : $L : D \times \mathbb{R}^m : (x, \lambda) \to L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$,

où $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$.

La thèse du théorème de Lagrange s'exprime alors sous la forme :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^m : \nabla_x L(x, \lambda) = 0, \text{ où } \nabla_x L(x, \lambda) = \left(L'_{x_1}(x, \lambda), \ldots, L'_{x_n}(x, \lambda)\right).$$

Les dérivées partielles par rapport aux λ_j n'apparaissent pas dans cette écriture. La condition $\nabla_\lambda L(x, \lambda) = 0$ est cependant toujours vérifiée puisque $L'_{\lambda_j}(x, \lambda) = g_j(x)$ et l'annulation de cette quantité représente la j-ème contrainte. Les solutions (x, λ) du système $\nabla L(x, \lambda) = 0$ sont logiquement nommées *points critiques du lagrangien*. ❑

- Parmi les hypothèses du théorème de Lagrange, figure une condition relative à la matrice jacobienne des contraintes. Cette condition garantit que le système des contraintes n'est pas « pathologique » au point a. Par commodité, on introduit la définition suivante.

Définition Un point $a \in A$ tel que

$$\mathrm{rg}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{m\times n} = m$$

est appelé *point régulier* des contraintes. ❏

Les points de A non réguliers, dits alors *singuliers*, sont automatiquement sélectionnés comme candidats extrema liés, au même titre que les points de A en lesquels la différentiabilité de chacune des fonctions en présence n'est pas assurée.

Moyennant ces nouveaux éléments, le théorème peut être reformulé sous une forme plus compacte et opérationnelle.

Théorème de Lagrange (seconde version) Soit les fonctions f et $g_1, \ldots, g_m (m < n)$ de classe C^1 dans un ouvert $D \subset \mathbb{R}^n$.

Si f admet un extremum lié par les contraintes $g_1(x) = 0, \ldots, g_m(x) = 0$, au point régulier a, alors : $\exists \lambda \in \mathbb{R}^m : \nabla L(a, \lambda) = 0$. ❏

2.2 Interprétation des multiplicateurs de Lagrange

D'une manière qui peut sembler paradoxale, l'optimisation liée d'une fonction de n variables sous m contraintes conduit à l'écriture d'une condition de premier ordre relative à une fonction de $n + m$ variables, alors qu'intuitivement, on aurait plutôt attendu une baisse de la dimension du problème due aux restrictions impliquées par la présence de contraintes.

Mais le paradoxe n'est qu'apparent. En effet, l'introduction des multiplicateurs de Lagrange, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, enrichit plus qu'elle n'alourdit l'optimisation, grâce à l'interprétation dont jouissent ces variables. Précisément, la valeur prise par un multiplicateur traduit l'influence marginale du niveau de la contrainte correspondante sur la valeur de la fonction objective à l'optimum. On dit aussi que le multiplicateur de Lagrange *mesure* l'intensité de la contrainte.

Afin de formaliser ce résultat, énonçons le problème traité en paramétrant le niveau des contraintes : optimiser la fonction $f(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, s.c. $g_1(x) = R_1, g_2(x) = R_2, \ldots, g_m(x) = R_m$.

Le lagrangien de ce problème s'écrit $\tilde{L}(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \big(g_i(x) - R_i\big)$. Il dépend naturellement des niveaux R_i des contraintes, de sorte que tant les points critiques que la valeur de la fonction d'objectif f en ces points varient selon $R = (R_1, \ldots, R_m)$, ce qui permet d'énoncer la propriété relative à l'interprétation des multiplicateurs sous la forme :

Propriété Sous les conditions de régularité usuelles, si $\big(x^*(R), \lambda^*(R)\big)$ est un point critique de $\tilde{L}$, alors $\lambda_i^* = \dfrac{\partial F}{\partial R_i}$, où $F(R) = f\big(x^*(R)\big)$ représente la valeur de la fonction d'objectif en x^*. ❏

Ce résultat applicable en tout point critique est en particulier vrai lorsqu'il s'agit d'un extremum. Ainsi, chaque multiplicateur exprime la sensibilité de la fonction d'objectif à la variation du niveau d'une contrainte. Par exemple, une contrainte qui n'influence pas l'optimisation (contrainte inopérante ou superflue) est affectée d'un multiplicateur nul. À l'opposé, un multiplicateur élevé correspond à une contrainte qui pénalise de façon importante l'optimum.

Exemple

Dans le problème du consommateur qui maximise son utilité $U(x, y)$ en présence de deux biens, faisons varier le niveau R du budget (contrainte : $p_1 x + p_2 y = R$). Le multiplicateur mesure alors l'utilité marginale du revenu à l'optimum :

$$\lambda^*(R) = \frac{\partial U}{\partial R}\left(x^*(R), y^*(R)\right).$$

2.3 Classification des candidats

À ce stade, trois types de candidats ont été sélectionnés :

- les points critiques du lagrangien ;
- les points de $D \cap D'$ où $f, g_1, \ldots,$ ou g_m ne sont pas différentiables ;
- les points singuliers.

Il s'agit à présent de classer ces candidats. Comme dans le cas des extrema libres, on peut formuler des conditions du deuxième ordre relatives aux points critiques, mais qui ne s'appliquent qu'à certains cas. Leur énoncé est précédé par la définition de la matrice hessienne partielle.

Définition Si le lagrangien L est de classe C^2, on définit la matrice *hessienne partielle* (par rapport aux x_i), de taille $n \times n$, par : $H_L^x(x, \lambda) = \left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(x, \lambda)\right)_{n\times n}$.
❑

Conditions du second ordre Soit $f, g_1, \ldots g_m \in C^2(D)$, où D est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, et (x^*, λ^*) un point critique du lagrangien L.

- $H_L^x(x^*, \lambda^*)$ est définie positive $\Rightarrow f$ admet un minimum local lié en x^*.
- $H_L^x(x^*, \lambda^*)$ est définie négative $\Rightarrow f$ admet un maximum local lié en x^*.
- $\forall x \in D : H_L^x(x, \lambda^*)$ est semi-définie positive $\Rightarrow f$ admet un minimum global lié en x^*.
- $\forall x \in D : H_L^x(x, \lambda^*)$ est semi-définie négative $\Rightarrow f$ admet un maximum global lié en x^*. ❑

Remarques

1. Les conditions relatives aux matrices semi-définies (dans les deux derniers cas) jouent ici le rôle des conditions de concavité et de convexité, et conduisent à détecter un extremum global.
2. Contrairement au cas des extrema libres, on ne peut rien conclure lorsque $H_L^x(x^*, \lambda^*)$ est indéfinie.

Exemple

Formulons le problème du consommateur pour une fonction d'utilité particulière. Il s'agit de maximiser $U(x, y) = \sqrt{xy}$ sous la contrainte budgétaire $p_1x + p_2y - R = 0$, où $p_1, p_2 > 0$, en supposant, pour simplifier, que les « solutions de coin » sont exclues et donc que

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\right\}.$$

On a : $L(x, y, \lambda) = \sqrt{xy} - \lambda(p_1x + p_2y - R)$.

En vertu du théorème de Lagrange (condition du premier ordre), on a :

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} - \lambda p_1 = 0 \\ \dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} - \lambda p_2 = 0 \\ p_1x + p_2y = R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{\sqrt{y}}{2p_1\sqrt{x}} \\ \dfrac{y}{x} = \dfrac{p_1}{p_2} \\ x\left(p_1 + p_2\dfrac{y}{x}\right) = R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{R}{2p_1} \\ y = \dfrac{R}{2p_2} \\ \lambda = \dfrac{1}{2\sqrt{p_1p_2}} \end{cases}.$$

Le lagrangien admet donc un seul point critique : $(x^*, y^*, \lambda^*) = \left(\dfrac{R}{2p_1}, \dfrac{R}{2p_2}, \dfrac{1}{2\sqrt{p_1p_2}}\right)$.

La matrice hessienne partielle est donnée par :

$$H_L^{x,y}(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial^2 x}(x, y, \lambda) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x, y, \lambda) \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x, y, \lambda) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial^2 y}(x, y, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{y}}{4x\sqrt{x}} & \dfrac{1}{4\sqrt{xy}} \\ \dfrac{1}{4\sqrt{xy}} & -\dfrac{\sqrt{x}}{4y\sqrt{y}} \end{pmatrix}.$$

Elle est semi-définie négative sur l'ouvert convexe D. D'où, d'après la condition du deuxième ordre, il existe un maximum lié global en $(x^*, y^*) = \left(\dfrac{R}{2p_1}, \dfrac{R}{2p_2}\right)$, avec pour valeur maximale $U(x^*, y^*) = \dfrac{R}{2\sqrt{p_1p_2}}$.

3 Extrema liés : contraintes d'inégalité

Avant d'aborder la résolution mathématique générale, revenons en guise de préambule sur le problème du consommateur. Grâce à la méthode de Lagrange, nous avons pu incorporer la contrainte de budget dans la maximisation de la fonction d'utilité. Pourtant, cette contrainte est apparue sous la forme de l'égalité $p_1x + p_2y = R$, traduisant le fait que tout le budget R sera consacré à la consommation. Le problème posé n'offrant pas de possibilité d'épargne, toute fonction d'utilité « raisonnable » conduira effectivement à épuiser le budget à l'optimum.

Dans la réalité pourtant, la contrainte de budget correspond à l'inégalité $p_1x + p_2y \leqslant R$, personne ne forçant le consommateur à épuiser son budget. Mais comme ce consommateur est supposé rationnel, à l'optimum, l'égalité est *spontanément* réalisée. On dira que la solution du problème sature la contrainte (en outre, le multiplicateur de Lagrange mesure la sensibilité de l'utilité optimale à cette contrainte).

Par ailleurs, il faut aussi expliciter, dans la spécification du problème, les contraintes de non-négativité relatives aux quantités ($x \geqslant 0, y \geqslant 0$), qui, elles, sont souvent – mais pas toujours ! – inopérantes (non saturées à l'optimum).

En conclusion, le problème du consommateur apparaît naturellement comme une optimisation sous contraintes d'inégalités : maximiser l'utilité $U(x, y)$ sous les trois contraintes : $p_1 x + p_2 y - R \leqslant 0, x \geqslant 0, y \geqslant 0$. La résolution de ce type de problèmes est abordée ici dans une perspective pratique.

3.1 Contraintes saturées, contraintes régulières

Le problème concerne la détermination des extrema d'une fonction f de n variables, résumées par le vecteur x, sous p contraintes d'inégalités non strictes $g_j(x) \leqslant 0, j = 1, \ldots, p$. Les fonctions f et $g_j, j = 1, \ldots, p$, sont toutes définies dans un domaine ouvert $D \subset \mathbb{R}^n$. Le domaine admissible est donc donné par $A = \{x \in D : g_1(x) \leqslant 0, \ldots, g_p(x) \leqslant 0\}$. Parmi les points de cet ensemble, on distingue des autres ceux qui se situent sur un bord au moins.

Définition La contrainte $g_j(x) \leqslant 0$ est dite *saturée* (ou *serrée*) au point $a \in A$ si $g_j(a) = 0$. ❏

Exemple

Considérons le système suivant de deux contraintes : $\begin{cases} x \leqslant 1 \\ y \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \leqslant 0 \\ -y \leqslant 0 \end{cases}$.

Les points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tels que $x < 1$ et $y > 0$, sont admissibles et ne saturent aucune contrainte. Ceux qui vérifient soit $x = 1$ et $y > 0$, soit $x < 1$ et $y = 0$, saturent une seule contrainte tandis que l'unique point $(1, 0)$ sature les deux contraintes simultanément.

Un extremum situé en un point de A en lequel aucune contrainte n'est saturée peut être repéré comme un extremum libre dans un domaine ouvert. Par contre, en un point qui sature au moins une contrainte, un éventuel extremum se présente comme lié par la (ou les) contrainte(s) saturée(s) exprimée(s) alors sous forme d'égalité.

Exemple

Recherchons les extrema de la fonction $f(x, y) = x + y - 1$ s.c. $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Les fonctions f et g, où $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, sont toutes deux définies et différentiables dans $D = \mathbb{R}^2$. Le domaine admissible est donc donné par $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

La fonction n'admet aucun point critique dans l'intérieur du domaine admissible ($x^2 + y^2 < 1$) puisque $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \nabla f(x, y) = (1, 1) \neq (0, 0)$.

- Au bord du domaine admissible ($x^2 + y^2 - 1 = 0$), on cherche les points critiques du lagrangien : $L(x, y, \lambda) = x + y - 1 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. La résolution du système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 1 - 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 1 - 2\lambda y = 0 \\ g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

  conduit à deux points critiques : $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)$.

  Ce sont les deux seuls candidats extrema.

- Pour conclure, on observe que le domaine A est compact (borné et fermé), ce qui garantit l'existence d'un maximum et d'un minimum global (voir section 1.2). En comparant les valeurs prises par la fonction d'objectif aux deux points candidats, on déduit que le maximum global est situé en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et le minimum global en $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$.

Ce même exemple sera aussi résolu plus loin à l'aide du théorème de Kuhn et Tucker.

Préalablement à la présentation du théorème de Kuhn et Tucker qui synthétise les conditions de premier ordre relatives, d'une part, aux extrema libres, et d'autre part, aux extrema sous contraintes d'égalités, il convient de définir la notion de système régulier des contraintes. Logiquement, dans le contexte des contraintes d'inégalités, la définition doit être adaptée pour faire référence aux seules contraintes saturées.

> **Définition** Le point $a \in A$ est un *point régulier* du système des contraintes $g_j(x) \leqslant 0, j = 1, \ldots, p$, si la matrice jacobienne (voir chapitre 6, section 4.3) des contraintes saturées en a est de rang maximum. Dans le cas contraire, le point $a \in A$ est dit *singulier*. ❑

Considérons un point $a \in A$. L'ensemble $C_a = \left\{j \in \{1, \ldots, p\} : g_j(a) = 0\right\}$ permet de repérer les contraintes saturées en a. Le point a est donc singulier si le rang de la matrice $\left(\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(a)\right)_{\substack{k \in C_a \\ i \in \{1,\ldots,n\}}}$ n'est pas égal au rang maximum qui est la plus petite des deux valeurs suivantes : n et le nombre d'éléments de C_a.

Ce rang maximum varie selon le point considéré. Par exemple, les points situés dans l'intérieur de A ne saturent aucune contrainte, de sorte que le rang maximal est égal à zéro et que le système des contraintes est automatiquement régulier.

En outre, contrairement à l'hypothèse adoptée pour le nombre m des contraintes à l'égalité, le nombre p de contraintes à l'inégalité peut dépasser le nombre n de variables du problème, de sorte que le nombre d'éléments de C_a peut, pour certains points a, être supérieur à n.

Exemple

Il s'agit d'optimiser $f(x, y) = x^2 + y^2$ s.c. $g(x, y) = x^2 - y^2 \leqslant 0$. Il y a donc une seule contrainte ($p = 1$).

- Si $x^2 \neq y^2 \Rightarrow$ aucune contrainte saturée en (x, y).
- Si $x^2 = y^2 \Rightarrow$ une contrainte saturée en (x, y).

  On a $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2x$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -2y$. Le rang du jacobien $J_g(x, y) = \nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \end{pmatrix}$ est maximal (égal à 1) si et seulement si : $(x, y) \neq (0,0)$.
- Si $x = y = 0$: le point (0,0), qui vérifie la contrainte $x^2 = y^2$, est singulier.

Notons au passage que la détermination des points réguliers ne concerne que les contraintes, pas la fonction d'objectif f. Enfin, dans cet exemple, f admet un minimum lié (et libre !) global évident en (0,0).

3.2 Le théorème de Kuhn et Tucker

Pour simplifier la formulation des résultats, nous nous limitons, sans grande perte de généralité, au cas où toutes les fonctions d'intérêt sont de classe C^1 dans $\mathbb{R}^n$. Par la suite, cette hypothèse ne sera plus mentionnée dans les énoncés.

Nous considérerons d'abord un premier problème où seules des contraintes d'inégalités sont introduites. Ensuite, nous envisagerons le cas mixte (égalités et inégalités).

Soit le *premier problème* suivant :

$$\begin{cases} \text{opt } f(x), x \in \mathbb{R}^n \\ \text{s.c. } g_j(x) \leqslant 0, j = 1, \ldots, p \end{cases}.$$

La condition du premier ordre pour ce problème repose sur un lagrangien défini comme précédemment : $L(x, \mu) = f(x) - \sum_{j=1}^{p} \mu_j g_j(x)$.

Dans l'écriture de ce lagrangien, les notations sont légèrement modifiées pour « réserver » les multiplicateurs λ_k aux contraintes d'égalités qui apparaîtront dans le deuxième problème.

Théorème de Kuhn et Tucker (pour le premier problème)

Si f admet en a un maximum lié (resp. un minimum lié) sous les contraintes $g_1(x) \leqslant 0, \ldots, g_p(x) \leqslant 0$, et si le système des contraintes est régulier en a, alors : $\exists \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que :

- $\mu_j \geqslant 0$ (resp. $\mu_j \leqslant 0$), $j = 1, \ldots, p$;
- $\dfrac{\partial L}{\partial x_i}(a, \mu) = 0, i = 1, \ldots, n$;
- $\mu_j g_j(a) = 0, j = 1, \ldots, p$ (conditions d'exclusion). ❏

La dernière ligne s'interprète comme suit : soit la j-ème contrainte est saturée en a ($g_j(a) = 0$) et la condition est automatiquement rencontrée, soit la j-ème contrainte n'est pas saturée en a ($g_j(a) < 0$), et le multiplicateur correspondant μ_j doit s'annuler. Ainsi, en un extremum qui ne sature aucune contrainte, tous les multiplicateurs sont égaux à zéro, réduisant le lagrangien à la fonction d'objectif f et la thèse du théorème à la simple condition du premier ordre pour extrema libres. À l'opposé, si un extremum saturait toutes les contraintes (tout en y garantissant la régularité du système, ce qui impose notamment que $m < n$), alors le théorème se réduirait à celui de Lagrange relatif à l'optimisation sous contraintes d'égalités.

Considérons à présent le *second problème* :

$$\begin{cases} \text{opt } f(x), x \in \mathbb{R}^n \\ \text{s.c. } g_j(x) \leqslant 0, j = 1, \ldots, p \\ h_k(x) = 0, k = 1, \ldots, m \quad (m < n) \end{cases}$$

La condition du premier ordre pour ce problème repose sur un lagrangien incorporant les deux types de contraintes : $L(x, \lambda, \mu) = f(x) - \sum_{j=1}^{p} \mu_j g_j(x) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k h_k(x)$.

Théorème de Kuhn et Tucker (pour le second problème) Si f admet en a un maximum lié (resp. un minimum lié) sous les contraintes $g_1(x) \leqslant 0, \ldots, g_p(x) \leqslant 0$, $h_1(x) = 0, \ldots, h_m(x) = 0$, et si le système des contraintes est régulier en a, alors : $\exists \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_p) \in \mathbb{R}^p$, $\exists \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tels que :

- $\mu_j \geqslant 0$ (resp. $\mu_j \leqslant 0$), $j = 1, \ldots, p$;
- $\dfrac{\partial L}{\partial x_i}(a, \lambda, \mu) = 0, i = 1, \ldots, n$;
- $\mu_j g_j(a) = 0, j = 1, \ldots, p$ (conditions d'exclusion). ❑

Cette formulation est semblable à la précédente, quoique plus générale. En effet, les multiplicateurs λ_k relatifs aux contraintes d'égalités ne peuvent désormais plus être effacés à l'aide de conditions d'exclusion. Cette observation résulte simplement du fait que, par nature, toute contrainte d'égalité est saturée en un point admissible.

Remarque

Tout problème contraint par des égalités peut trivialement se ramener à un problème soumis exclusivement à des inégalités. En effet, l'égalité $h(x) = 0$ est évidemment équivalente à la réunion des deux inégalités : $h(x) \leqslant 0$ et $-h(x) \leqslant 0$. Pourtant, dans la pratique, il convient cependant d'éviter d'opérer de telles substitutions qui alourdissent la formulation des conditions nécessaires d'optimisation, et ont surtout tendance à multiplier les points singuliers (les gradients de $h(x)$ et $[-h(x)]$ sont proportionnels), peu commodes à traiter.

Exemple

Déterminons, par la méthode de Kuhn et Tucker, les extrema de la fonction $f(x, y) = x + y - 1$ s.c. $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

La contrainte n'admet pas de point singulier, puisque le point (0,0) ne sature pas la contrainte $(0^2 + 0^2 - 1 \neq 0)$.

On définit : $L(x, y, \mu) = f(x, y) - \mu g(x, y) = x + y - 1 - \mu(x^2 + y^2 - 1)$.

Les conditions de Kuhn et Tucker pour un maximum sont :

$$\begin{cases} \mu \geqslant 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x}(x, y, \mu) = 1 - 2\mu x = 0 & (1) \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x, y, \mu) = 1 - 2\mu y = 0 & (2) \\ \mu(x^2 + y^2 - 1) = 0 \text{ (condition d'exclusion)} \end{cases}.$$

On envisage les deux possibilités d'atteindre la condition d'exclusion :

- soit $x^2 + y^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow \mu = 0$, ce qui est impossible en vertu de (1).
- soit $x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \mu \geqslant 0 \\ x = y = \dfrac{1}{2\mu} \\ \dfrac{1}{4\mu^2} + \dfrac{1}{4\mu^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$.

Le domaine admissible est compact, donc f admet un maximum global en l'unique candidat $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. De manière similaire (seule différence : $\mu \leqslant 0$), on montre que $\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}, \dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ réalise un minimum global.

Problèmes et exercices

Les exercices suivent l'ordre adopté dans la présentation de la théorie. Les premiers portent sur les extrema libres. Afin d'éviter les répétitions, les résultats relatifs aux matrices hessiennes des exercices 1 à 8 sont repris de l'exercice 20 du chapitre 5. Les exercices concernant les extrema liés appliquent soit la méthode de Lagrange, soit celle de Kuhn et Tucker. Dans le second cas, le lecteur constatera qu'il est souvent fastidieux de passer en revue l'ensemble des points à traiter, alors que certains peuvent être rapidement écartés. De plus, dans le cas de deux variables, la représentation géométrique du domaine admissible peut utilement guider la résolution.

Afin de se concentrer sur l'approche appliquée à la grande majorité des problèmes de la gestion, les cas « rares » de fonctions irrégulières et de points singuliers sont exclus des exercices.

Extrema libres

Notez que toutes les fonctions considérées ci-dessous sont suffisamment régulières dans un ensemble ouvert (elles appartiennent à $C^2(\mathbb{R}^2)$ ou $C^2(\mathbb{R}^3)$, sauf pour l'exercice 5) pour justifier l'application des conditions d'ordres 1 et 2, sans autres candidats que les points critiques. En fait, elles sont même toutes de classe C^∞ (les dérivées de tous ordres existent et sont continues).

Dans les exercices 1 à 8, déterminez les extrema libres des fonctions données.

Exercice 1

Énoncé

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Solution

Points critiques : $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ deux candidats : $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

Classification : la matrice hessienne de la fonction f en un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est donnée par :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ et $H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$.

- $H_f(0, 0)$ est indéfinie $\Rightarrow$ (0,0) est un point de selle.
- $H_f(1, 1)$ est définie positive $\Rightarrow$ f admet un minimum local en $(1, 1)$, mais non global puisque, par exemple, $f(-2, 0) = -8 < f(1, 1) = -1$.

EXERCICE 2

Énoncé

$f(x, y) = y^3 - 2xy + x^2 - 1.$

Solution

Points critiques :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2y + 2x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3y^2 - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = 0 \text{ ou } y = \dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

Les candidats sont donc $(0, 0)$ et $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$.

Classification : on a $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix}$.

- $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ est indéfinie $\Rightarrow$ $(0, 0)$ est un point de selle.
- $H_f\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ est définie positive $\Rightarrow$ f admet un minimum local en $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$, non global puisque $\lim\limits_{y \to -\infty} f(0, y) = \lim\limits_{y \to -\infty} (y^3 - 1) = -\infty$.

EXERCICE 3

Énoncé

$$f(x, y) = (x - y)^4 + (y - 1)^4.$$

Solution

Point critique : $(1, 1)$ qui est l'unique solution de

$$\nabla f(x, y) = \big(4(x - y)^3, -4(x - y)^3 + 4(y - 1)^3\big) = (0, 0).$$

Classification : $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12(x-y)^2 & -12(x-y)^2 \\ -12(x-y)^2 & 12(x-y)^2 + 12(y-1)^2 \end{pmatrix}$.

$H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, dont on ne peut tirer aucune conclusion.

Une étude directe révèle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = (x - y)^4 + (y - 1)^4 \geqslant 0 = f(1, 1) \Rightarrow f$ admet un minimum global en $(1, 1)$.

EXERCICE 4

Énoncé

$$f(x, y) = \sin(xy).$$

Solution

Points critiques : $\begin{cases} y\cos(xy) = 0 \\ x\cos(xy) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \text{ou} \quad xy = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ y = 0 \quad \text{ou} \quad xy = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

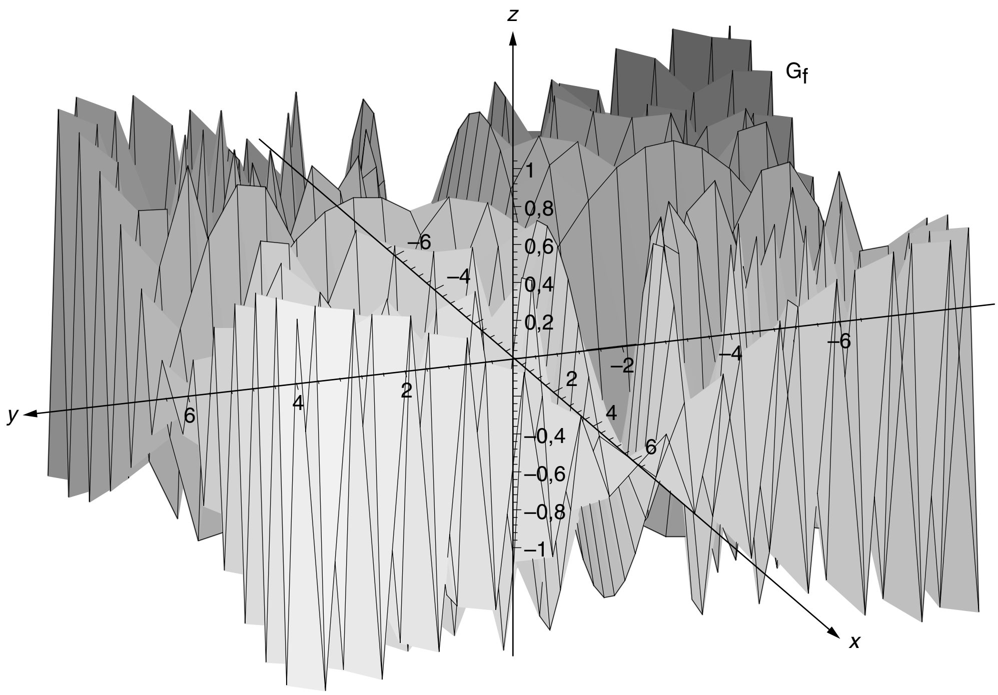
Classification : $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -y^2\sin(xy) & \cos(xy) - xy\sin(xy) \\ \cos(xy) - xy\sin(xy) & -x^2\sin(xy) \end{pmatrix}$.

- $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (0, 0)$ est un point de selle.
- Si $xy = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ et k est pair alors $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -y^2 & -xy \\ -xy & -x^2 \end{pmatrix}$: aucune conclusion.
- Si $xy = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ et k est impair alors $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 & xy \\ xy & x^2 \end{pmatrix}$: aucune conclusion.

Pour classer ces candidats, on doit recourir à une autre méthode :

Comme $-1 \leqslant f(x, y) \leqslant 1$ et $f\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) = \begin{cases} -1 & \text{si } k \text{ impair} \\ 1 & \text{si } k \text{ pair} \end{cases}$, la fonction admet un minimum global en tout (a, b) tel que $ab = \dfrac{\pi}{2} + (2k+1)\pi = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, et un maximum global en tout (a, b) tel que $ab = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Le graphe de f, donné par la figure 7.5, page ci-contre, est malheureusement difficile à décrypter.

Figure 7.5



Exercice 5

Énoncé

$$f(x, y) = y^2 + xy \ln x.$$

Solution

Points critiques : f est de classe C^2 dans son domaine, l'ouvert $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. Les seuls candidats sont les deux points critiques $(1, 0)$ et $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{2e}\right)$.

Classification :

- $H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est indéfinie $\Rightarrow$ point de selle en (1,0).
- $H_f\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{2e}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est définie positive $\Rightarrow$ minimum local en $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{2e}\right)$, non global car $\lim_{x\to+\infty} f(x, -x) = \lim_{x\to+\infty} x^2(1 - \ln x) = -\infty$.

Exercice 6

Énoncé

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$

Solution *Points critiques* : $(0, 0)$, $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ et $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.

Classification :

- $H_f\left(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}\right) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$ est définie positive

  $\Rightarrow$ minima globaux en $\left(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}\right)$.

- $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$: aucune conclusion possible. Toutefois, on a :

$$\begin{aligned} &\forall x \neq 0 : f(x, x) = 2x^4 > f(0, 0) = 0 \\ \text{et} \quad &\forall x \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \setminus \{0\} : f(x, -x) = 2x^2(x^2 - 2) < f(0, 0) = 0. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que toute boule ouverte de $\mathbb{R}^2$ centrée à l'origine contient des points où f est positive et des points où f est négative. Il n'y a donc pas d'extremum en $(0, 0)$.

Exercice 7

Énoncé

$$f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz.$$

Solution *Point critique* : $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x - 2y + 2z = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 6y - 2x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 4z + 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow$ un seul point critique : $(0, 0, 0)$.

Classification : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est définie positive

$\Rightarrow f$ est convexe dans $\mathbb{R}^3$ (voir chapitre 6) $\Rightarrow f$ admet un minimum global en $(0, 0, 0)$.

Exercice 8

Énoncé

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Solution La fonction f n'admet pas d'extrema mais un point de selle en $(0, 0, 0)$.

EXERCICE 9

Énoncé

Vous êtes le directeur financier de la firme Sanbon & Fils. Cette entreprise a investi 3 000 euros pour mettre au point un nouveau parfum. Le coût de la production est de 3 euros par flacon de 100 ml. L'expert consulté par M. Sanbon père a établi que si la firme consacre x euros en publicité pour son parfum et que le prix de vente d'un flacon est de y euros, la firme vendra exactement $\left(300 + 6\sqrt{x} - 10y\right)$ pièces.

La firme Sanbon & Fils fixe évidemment x et y de manière à maximiser son profit. En tant que directeur financier, il vous incombe de déterminer ces valeurs.

Solution

- Revenu de la vente $= y(300 + 6\sqrt{x} - 10y)$.
- Coût de production $= 3(300 + 6\sqrt{x} - 10y)$.
- Coût de développement et de publicité $= 3\,000 + x$.

Le profit de la firme à maximiser est donc : $\Pi(x, y) = (y-3)(300+6\sqrt{x}-10y)-x-3\,000$.

La condition du premier ordre s'écrit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi}{\partial x}(x, y) = \dfrac{3(y-3)}{\sqrt{x}} - 1 = 0 \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial y}(x, y) = 330 + 6\sqrt{x} - 20y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (164\,025, 138)\,.$$

La hessienne en ce point est définie négative (à vérifier), et on a bien un maximum. La firme Sanbon & Fils va donc consacrer 164 025 euros à la promotion de son nouveau parfum et vendre le flacon de 100 ml à 138 euros. Elle réalisera de la sorte le profit maximal de $\Pi(164\,025, 138) = 15\,225$ euros.

Extrema liés : contraintes d'égalités

EXERCICE 10

Énoncé

Dans les cas suivants, recherchez les extrema de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

a $f(x, y) = y^2 + (x-1)^2$ et $g(x, y) = y^2 - 4x$.

b $f(x, y) = 2\ln x$ et $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

c $f(x, y) = y^3$ et $g(x, y) = x^2 - y^3 + y$.

Solution

a Le lagrangien du problème, $L(x, y, \lambda) = y^2 + (x-1)^2 - \lambda\left(y^2 - 4x\right)$, est de classe C^∞ et la contrainte n'admet pas de point singulier puisque : $\forall\left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2 : \nabla g(x, y) = (-4, 2y) \neq (0, 0)$.

Le seul candidat extremum lié est le point critique du lagrangien qui vérifie :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 2(x-1) + 4\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 2y - 2\lambda y = 0 \\ g(x, y) = y^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \lambda = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

La matrice hessienne partielle du lagrangien est donnée par :

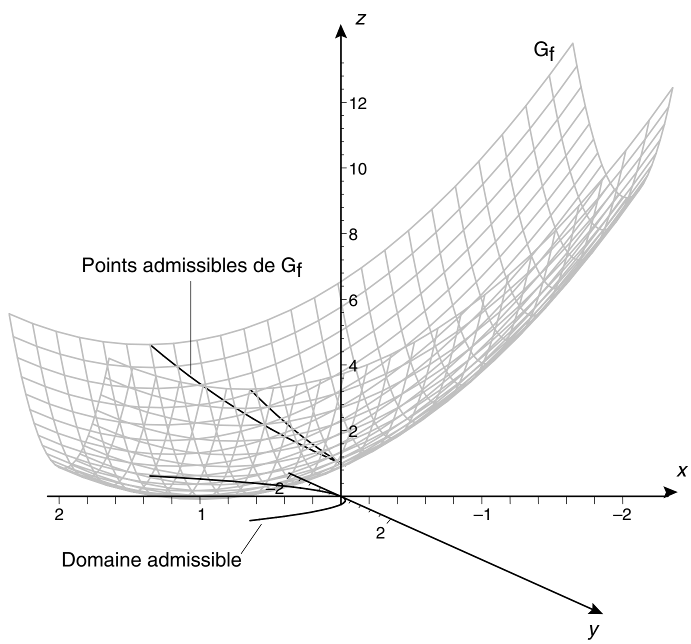
$$H_L^{x,y}(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x, y, \lambda) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x, y, \lambda) \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x, y, \lambda) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, y, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2(1-\lambda) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : H_L^{x,y}\left(x, y, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est clairement définie positive.

La fonction admet donc un minimum global lié en (0, 0).

La figure 7.6 présente le graphe de f, G_f, le domaine contraint et la courbe des points admissibles du graphe. La figure 7.7, page ci-contre, complète la représentation par une projection sur le plan horizontal.

Figure 7.6



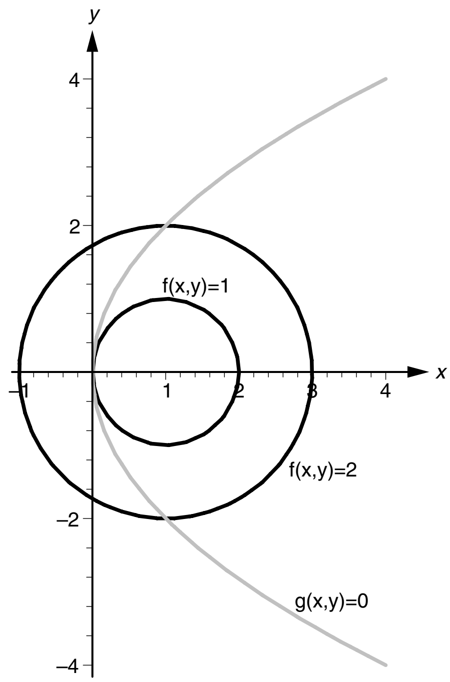
Remarque

Ici la contrainte $x = \dfrac{1}{4}y^2$ permet de se ramener à la recherche des extrema libres de la fonction F de la seule variable y définie par :

$$F(y) = f\left(\frac{1}{4}y^2, y\right) = y^2 + \left(\frac{1}{4}y^2 - 1\right)^2 = \frac{1}{16}y^4 + \frac{1}{2}y^2 + 1.$$

Cette fonction admet un minimum global en 0, ce qui rejoint la conclusion obtenue par la méthode de Lagrange.

Figure 7.7



b Les fonctions f et g sont de classe C^∞ dans l'ouvert $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ et la contrainte n'admet pas de point singulier puisque, pour tous les points admissibles, on a : $\nabla g(x, y) = (2x, 2y) \neq (0, 0)$. Les candidats sont donc les seuls points critiques du lagrangien :

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x} - 2\lambda x = 0 \\ -2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases} .$$

On a aussi $x^2 + y^2 - 1 = 0$ et $x > 0 \Rightarrow 0 < x \leqslant 1 \Rightarrow 2 \ln x \leqslant 0 = f(1, 0) \Rightarrow$ maximum global lié en (1,0) (voir figure 7.8, page suivante).

c Les fonctions f et g sont de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^2$ et la contrainte n'admet pas de point admissible singulier. Les candidats sont donc donnés par les points critiques du lagrangien : (0,0,0), $\left(0, 1, \dfrac{3}{2}\right)$ et $\left(0, -1, -\dfrac{3}{2}\right)$.

- $H_L^{x,y}(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est semi-définie : aucune conclusion.
- $H_L^{x,y}\left(0, 1, \dfrac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ est indéfinie : aucune conclusion.
- $H_L^{x,y}\left(0, -1, -\dfrac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est définie positive $\Rightarrow$ minimum local lié en $(0, -1)$.

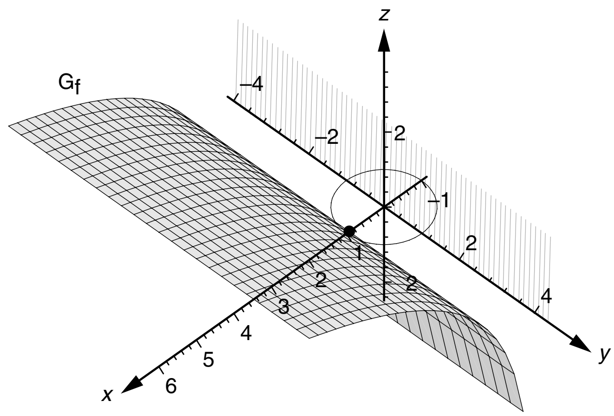
On peut en outre établir que ce minimum est global. En effet :

$$g(x, y) = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^3 + y = 0 \Leftrightarrow y^3 - y = x^2 \geqslant 0 \Rightarrow y \in ([-1, 0] \cup [1, +\infty)) .$$

Il s'ensuit que : $g(x, y) = 0 \Rightarrow f(x, y) = y^3 \geqslant -1 = f(0, -1) \Rightarrow$ minimum global lié en $(0, -1)$.

D'autre part, par des arguments locaux, relativement lourds à présenter, on peut établir la présence d'un maximum local lié en (0,0) et d'un minimum local lié en (0,1).

Figure 7.8



EXERCICE 11

Énoncé

La fonction d'utilité d'un consommateur est donnée par $U(x, y) = \sqrt{x}.\sqrt[4]{y}$, où x et y représentent respectivement les consommations journalières de frites (en « cornets moyens ») et de bière (en verres de 0,25 l). Le cornet de frites coûte 2 euros, le verre de bière coûte 1 euro et le budget « bière et frites » journalier du consommateur est fixé à 10 euros.

Déterminez la consommation qui maximise la satisfaction de ce consommateur.

Solution

Le problème s'écrit : maximiser $U(x, y) = \sqrt{x}\sqrt[4]{y}$ sous la contrainte $2x + y = 10$. Le lagrangien associé, $L(x, y, \lambda) = \sqrt{x}.\sqrt[4]{y} - \lambda(2x + y - 10)$, conduit au système de Lagrange :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.\sqrt[4]{y} - 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = \sqrt{x}.\dfrac{1}{4\sqrt[4]{y^3}} - \lambda = 0 \\ 2x + y = 10 \end{cases} .$$

On trouve ainsi les consommations optimales : $x = \dfrac{10}{3}$, $y = \dfrac{10}{3}$, mais l'histoire ne dit pas comment le consommateur parvient à négocier des tiers de verres et de cornets de frites avec ses fournisseurs !

Remarque

Plus sérieusement, il est possible de formaliser le problème en imposant que les variables de décision se cantonnent aux valeurs entières. Les problèmes de ce type relèvent de la « programmation en nombres entiers », qui offre divers algorithmes numériques de résolution.

EXERCICE 12

Énoncé

Maximisez la fonction de Cobb-Douglas $f(x, y) = x^\alpha y^\beta$ $(\alpha, \beta \in (0, 1))$ sous la contrainte $px + qy = w\left(p, q, w > 0\right)$. Quel est l'effet marginal d'une variation de w sur la valeur maximale de f ?

Solution

$$x^* = \frac{\alpha w}{p(\alpha+\beta)}, \quad y^* = \frac{\beta w}{q(\alpha+\beta)}, \quad \frac{dF}{dw} = \lambda^* = \frac{\alpha^\alpha \beta^\beta w^{\alpha+\beta-1}}{p^\alpha q^\beta (\alpha+\beta)^{\alpha+\beta-1}},$$

où $F(w) = f\left(x^*(w), y^*(w)\right)$.

EXERCICE 13

Énoncé

Considérons une firme qui minimise le coût, supposé linéaire, associé à la production (à deux facteurs) d'un nombre, fixé à k, d'unités d'*output*. Elle minimise donc $c(x, y) = \alpha x + \beta y$ sous la contrainte $f(x, y) = k$. Les nombres positifs α et β désignent les prix des deux facteurs, les variables x et y sont les quantités à déterminer dans l'optimisation.

a En supposant f suffisamment régulière, montrez, grâce au théorème de Lagrange, qu'à l'optimum (coût minimal), on a $\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \dfrac{\alpha}{\beta}$, ce qui signifie que le taux de substitution technique est égal au rapport des prix des facteurs.

b Interprétez le multiplicateur de Lagrange.

Solution

a Le problème s'écrit : minimiser $c(x, y)$ s.c. $f(x, y) = k$. Appliquons le théorème de Lagrange à ce problème en supposant que les conditions de régularité sont satisfaites. Le lagrangien est : $L(x, y, \lambda) = c(x, y) - \lambda(f(x, y) - k)$. Ses points critiques vérifient le système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = \dfrac{\partial c}{\partial x}(x, y) - \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = \dfrac{\partial c}{\partial y}(x, y) - \lambda \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \\ f(x, y) - k = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{l} \alpha - \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \beta - \lambda \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{array}\right\} \\ f(x, y) - k = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

b En vertu de la propriété théorique relative à l'interprétation du multiplicateur, nous avons : $\lambda^*(k) = C'(k)$, où $C(k) = c\left(x^*(k), y^*(k)\right)$. Ceci signifie que le multiplicateur de Lagrange exprime le coût marginal de production à l'optimum.

Extremas liés : contraintes d'inégalités

EXERCICE 14

Énoncé

Maximisez $x + y^2$ sous la contrainte $x^2 + y^2 - 1 \leqslant 0$.

Solution

Le lagrangien associé, $L(x, y, \mu) = x + y^2 - \mu(x^2 + y^2 - 1)$, conduit aux conditions de Kuhn et Tucker suivantes :

$$\begin{cases} \mu \geqslant 0 \\ 1 - 2\mu x = 0 \\ 2y - 2\mu y = 0 \\ \mu(x^2 + y^2 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu > 0 \\ x = \dfrac{1}{2\mu} > 0, y = \mu y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{soit } y = 0 \Rightarrow \mu = \dfrac{1}{2} \text{ et } x = 1 \\ \text{soit } y \neq 0 \Rightarrow \mu = 1, x = \dfrac{1}{2} \text{ et } y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Cela permet de conclure à l'existence d'un double maximum global, en $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

EXERCICE 15

Énoncé

Reprenez le problème du consommateur de l'exercice 11, en formulant toutes les contraintes en termes d'inégalités.

Montrez comment la résolution proposée par la méthode de Lagrange dans l'exercice 11 en découle.

Solution

Il s'agit de maximiser $U(x, y) = \sqrt{x}.\sqrt[4]{y}$ dans le domaine (figure 7.9, page ci-contre) :

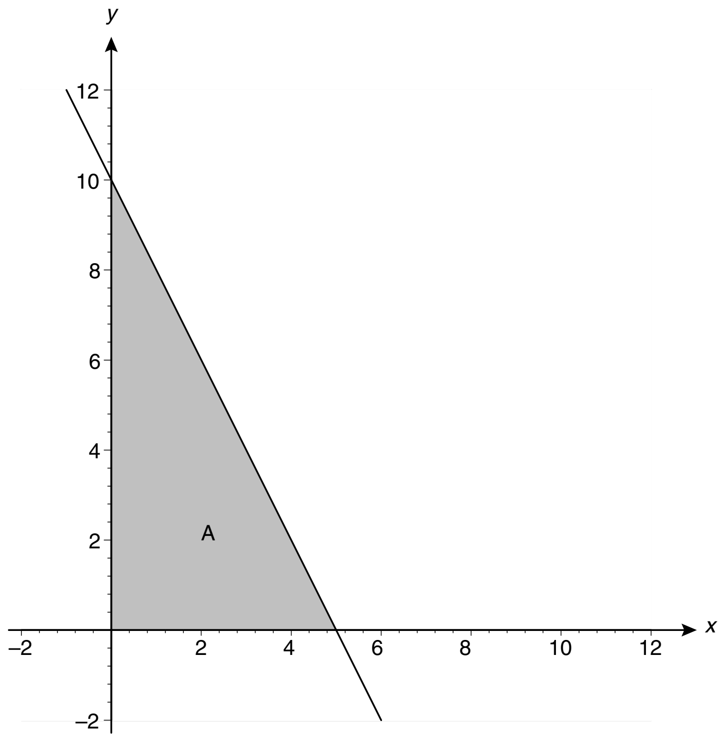
$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0, y \geqslant 0, 2x + y \leqslant 10\right\}.$$

La fonction U ne possède aucun point critique. Dès lors, les candidats sont situés au bord du domaine. Les points de A situés sur les axes ($x = 0$ ou $y = 0$) correspondent de toute évidence à des minima. On les exclut dorénavant, de sorte que la maximisation s'opère dans :

$$\tilde{A} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, 2x + y \leqslant 10\right\}.$$

Pour maximiser la fonction U dans $\tilde{A}$, on plonge ce domaine dans l'ensemble ouvert suivant : $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\right\}$. Comme les candidats sont situés sur le seul

Figure 7.9



bord restant $(2x + y = 10)$, le problème se ramène à la maximisation de U, définie dans D, sous la contrainte à l'égalité $2x + y = 10$. Ceci justifie l'approche suivie dans la résolution de l'exercice 11.

EXERCICE 16

Énoncé

Maximisez la fonction d'utilité $U(x, y) = xy$ sous la contrainte du budget $p_1x+p_2y-R \leqslant 0$ $(p_1, p_2, R > 0)$ et les contraintes de non-négativité de x et y.

Solution

Il s'agit de maximiser la fonction U dans le domaine représenté par la figure 7.10, page suivante :

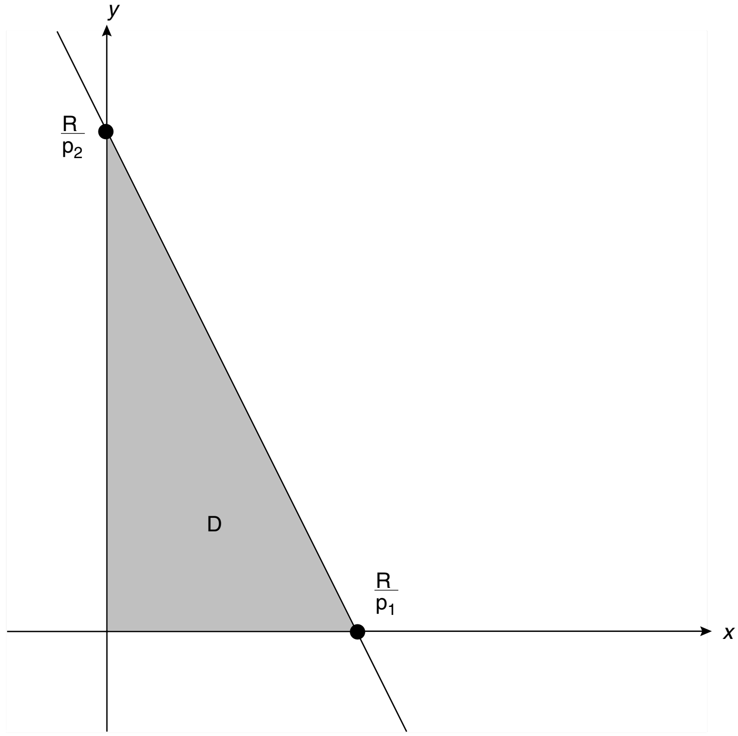
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0, y \geqslant 0, p_1x + p_2y - R \leqslant 0\right\}.$$

Notons d'emblée que U est une fonction continue dans un domaine compact, de sorte qu'un maximum global lié existe. Pour le trouver, il suffira de comparer les valeurs de la fonction atteintes en les divers candidats retenus à l'aide des conditions de Kuhn et Tucker.

Le problème, formulé à l'aide des trois inégalités, s'écrit :

$$\begin{cases} \max U(x, y) = xy \\ g_1(x, y) = p_1x + p_2y - R \leqslant 0 \\ g_2(x, y) = -x \leqslant 0 \\ g_3(x, y) = -y \leqslant 0 \end{cases}.$$

Figure 7.10



C'est donc un problème de type 1 avec $p = 3$. Le lagrangien associé s'écrit :

$$\begin{aligned} L(x, y, \mu_1, \mu_2, \mu_3) &= f(x, y) - \mu_1 g_1(x, y) - \mu_2 g_2(x, y) - \mu_3 g_3(x, y) \\ &= xy - \mu_1 \left(p_1 x + p_2 y - R\right) + \mu_2 x + \mu_3 y. \end{aligned}$$

Les conditions de Kuhn et Tucker sont :

$$\begin{cases} \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geqslant 0 \\ y = \mu_1 p_1 - \mu_2, x = \mu_1 p_2 - \mu_3 \\ \mu_1(p_1 x + p_2 y - R) = 0, \mu_2 x = 0, \mu_3 y = 0 \end{cases}.$$

Considérons successivement les divers cas possibles et déduisons-en les candidats :

- Toutes les contraintes sont saturées : impossible.
- Contraintes : g_1, g_2 saturées et g_3 non saturée

$$\Rightarrow \begin{cases} y > 0 \Rightarrow \mu_3 = 0 \\ x = 0 = \mu_1 p_2 - \mu_3 \Rightarrow \mu_1 = 0 \\ y = \mu_1 p_1 - \mu_2 \\ p_2 y - R = 0 \Rightarrow y = \dfrac{R}{p_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(x, y\right) = \left(0, \frac{R}{p_2}\right)$$

est candidat avec $f\left(x, y\right) = 0.\dfrac{R}{p_2} = 0.$

- Contraintes : g_1, g_3 sont saturées et g_2 non saturée $\Rightarrow \left(\frac{R}{p_1}, 0\right)$ est candidat (par symétrie) avec $f\left(x, y\right) = \frac{R}{p_1}.0 = 0$.
- Contraintes : g_2, g_3 saturées et g_1 non saturée $\Rightarrow x = y = 0$ avec $f(x, y) = 0$.
- Contraintes : g_1 saturée et g_2, g_3 non saturées

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_2 = \mu_3 = 0 \\ x = \mu_1 p_2 \\ y = \mu_1 p_1 \\ p_1 x + p_2 y - R = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{R}{2p_1} \\ y = \dfrac{R}{2p_2} \\ \mu_1 = \dfrac{R}{2p_1 p_2} \end{cases}$$

$\Rightarrow \left(x, y\right) = \left(\frac{R}{2p_1}, \frac{R}{2p_2}\right)$ est candidat avec $f\left(x, y\right) = \frac{R}{2p_1}.\frac{R}{2p_2} = \frac{R^2}{4p_1 p_2}$.

- Contraintes : g_2 saturée et g_1, g_3 non saturées $\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow f(x, y) = 0 \\ y = -\mu_2 \\ 0 < y < \dfrac{R}{p_2} \\ \mu_1 = \mu_3 = 0 \end{cases}$
- Contraintes : g_3 est saturée et g_2, g_3 non saturées $\Rightarrow \begin{cases} x = -\mu_1 \\ y = 0 \Rightarrow f(x, y) = 0 \\ 0 < x < \dfrac{R}{p_1} \\ \mu_2 = \mu_3 = 0 \end{cases}$
- Aucune contrainte saturée : pas de candidats.

On conclut donc que le maximum lié recherché est situé en $\left(\frac{R}{2p_1}, \frac{R}{2p_2}\right)$.

Exercice 17

Énoncé

Maximisez $f(x, y) = x + y$ sous les contraintes $x^2 + y \leqslant 2$ et $x \leqslant 1$.

Solution

La figure 7.11, page suivante représente le domaine, qui est fermé mais non borné, donc non compact. L'existence d'extrema n'est donc *a priori* pas garantie. Néanmoins, en ajoutant à la représentation du domaine, celle des courbes de niveau (figure 7.12, page suivante), des droites dans le cas présent, il devient apparent que le problème de maximisation liée admet une solution. À l'inverse cependant, il n'existe pas de minimum lié.

Le lagrangien associé au problème (de type 1) est donné par :

$$L(x, y, \mu_1, \mu_2) = x + y - \mu_1(x^2 + y - 2) - \mu_2(x - 1).$$

Figure 7.11

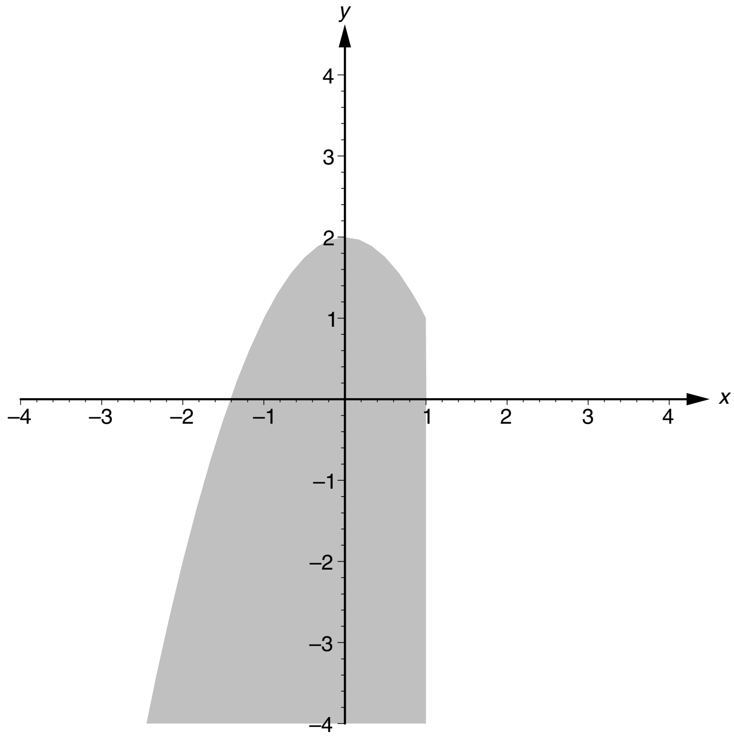
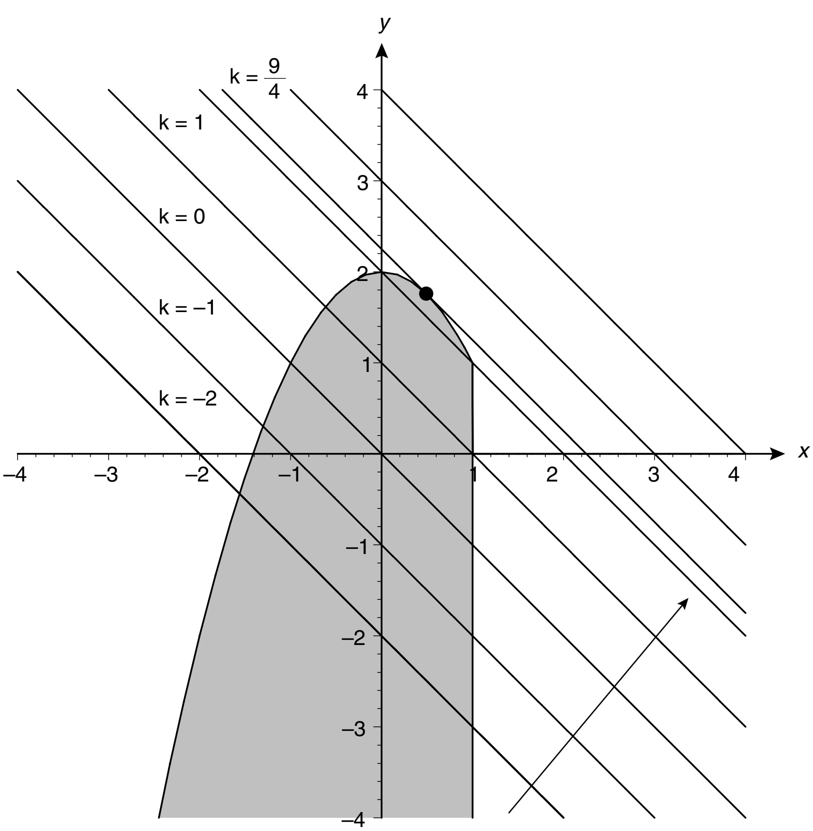


Figure 7.12



Les conditions de Kuhn et Tucker sont :

$$\begin{cases} \mu_1, \mu_2 \geqslant 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x}(x, y, \mu_1, \mu_2) = 1 - 2\mu_1 x - \mu_2 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x, y, \mu_1, \mu_2) = 1 - \mu_1 = 0 \\ \mu_1(x^2 + y - 2) = 0, \mu_2(x - 1) = 0 \quad \text{(conditions d'exclusion)} \end{cases}.$$

- $(x^2 + y - 2) \neq 0$ et $(x - 1) \neq 0 \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = 0$, ce qui est impossible.
- $(x^2 + y - 2) \neq 0$ et $(x - 1) = 0 \Rightarrow \mu_1 = 0$: impossible
- $(x^2 + y - 2) = 0$ et $(x - 1) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \mu_1 = 1, \mu_2 = 0 \\ x = \dfrac{1}{2\mu_1} = \dfrac{1}{2} \\ y = 2 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{4} \end{cases},$
- $(x^2 + y - 2) = 0$ et $(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \mu_1 = 1, \mu_2 = -1 \ \text{: impossible} \\ x = 1 \\ y = 2 - 1 = 1 \end{cases}.$

La fonction f admet un maximum local lié en $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)$ qui est situé sur la courbe (parabole) d'équation $x^2 + y - 2 = 0$, tandis que la contrainte $x \leqslant 1$ n'est pas saturée à l'optimum. En ce point la valeur maximale est de $\frac{9}{4}\cdot$

EXERCICE 18

Énoncé

Considérez l'optimisation de $f\left(x, y\right) = x^2 + 2y^2$

$$\text{s.c.} \quad 1 - x^2 - y^2 \geqslant 0, 1 + x - 2y \geqslant 0 \quad \text{et} \quad 1 - x - 2y \geqslant 0.$$

a Représentez le domaine délimité par les contraintes ainsi que quelques courbes de niveaux de la fonction d'objectif.

b Utilisez la condition de Kuhn et Tucker pour déterminer les candidats extrema et classez-les.

Solution

a Sur la figure 7.13, page suivante, le domaine admissible (délimité par les contraintes) est la surface grisée délimitée par la courbe noire. Les courbes de niveaux sont les ellipses d'équations $x^2 + 2y^2 = r^2$.

À titre illustratif, la figure 7.14, page suivante, présente le graphe de la fonction.

b Les conditions de Kuhn et Tucker fournissent les candidats suivants : $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $(0, -1)$, $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ et $(0, 0)$. En comparant les valeurs prises par la fonction d'objectif f, et en vertu de l'argument de compacité, on conclut que f admet un maximum lié global en $(0, -1)$ et un minimum lié (et libre) global en (0,0).

Figure 7.13

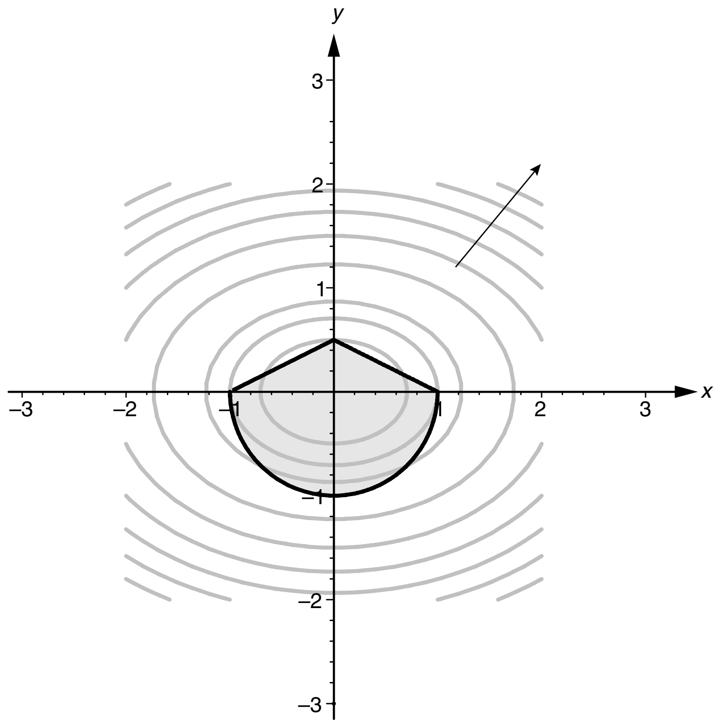
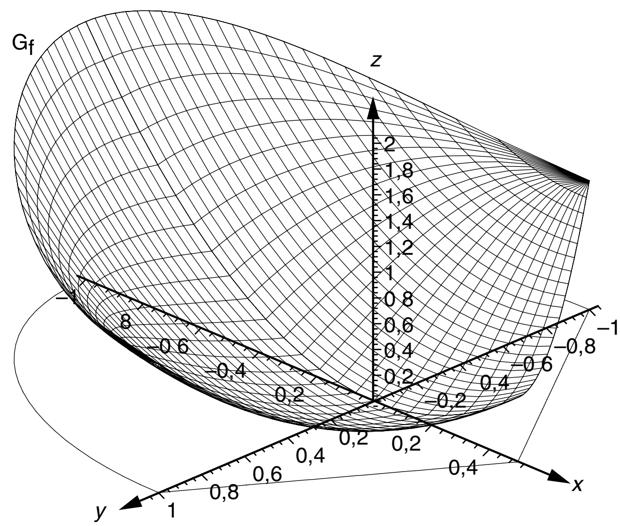


Figure 7.14



Accessoirement, on peut aussi montrer que la fonction admet un maximum lié local (non global) en $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ et pas d'extremum en les autres candidats (inspirez-vous du graphe).

Références bibliographiques

Livres de mathématiques appliquées à l'économie et/ou la gestion

ARCHINARD, G. et B. GUERRIEN, *Analyse mathématique pour économistes*, Economica (4e édition), 1992.

BAIR, J. *Mathématiques générales à l'usage des Sciences Économiques, de gestion et A.E.S*, De Boeck, 1993.

BISMANS, F., *Mathématiques pour l'économie*, De Boeck, 1998.

CHIANG, A.C., *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, Mc Graw Hill (3rd edition), 1984.

ESCH, L., *Mathématique pour économistes et gestionnaires*, De Boeck, 1992.

MICHEL, Ph., *Cours de mathématique pour économistes*, Economica (2e édition), 1989.

SOPER, J, *Mathematics for Economics and Business*, Blackwell (2nd edition), 2004.

Livres de mathématiques

ADAMS, R.A., *Calculus: A complete course*, Pearson Education (5th edition), 2003.

BEVERIDGE, G.S., and R.S. SCHECHTER, *Optimization: Theory and practice*, McGraw-Hill, 1970.

GANTMACHER, F.R., *Théorie des matrices* (2 tomes), Dunod, 1966 (traduction).

LANCASTER P. and M. TISMENETSKY, *The Theory of Matrices*, Academic Press (2nd edition), 1985.

MARSDEN, J.E. and A.J. TROMBA, *Vector Calculus*, W.H. Freeman (4th edition), 1996.

STEWART, J., *Multivariable calculus*, Wadsworth (5th edition), 2002.

Livres de gestion et d'économie

DOR, E., *Économétrie appliquée*, Pearson Education France, 2004.

GILLET, R., J.P. JOBARD, P. NAVATTE et Ph. RAIMBOURG, *Finance*, Dalloz (2e édition), 2003.

DE PALMA, A., DROESBEKE, J.J. et C. LEFÈVRE, *Modèles de diffusion en marketing*, Presses Universitaires de France, 1991.

FARBER, A., LAURENT, M.P., K. OOSTERLINCK et H. PIROTTE, *Finance*, Pearson Education France, 2004.

GOURIÉROUX, C., O. SCAILLET et A. SZAFARZ, *Économétrie de la finance*, Economica, 1997.

ROGER, P., *Probabilités, statistique et processus stochastiques*, Pearson Education France, 2004.

KRUGMAN, P.R. et M. OBSTFELD, *Économie internationale*, De Boeck, 2003 (traduction).

VARIAN, H.R., *Introduction à la microéconomie*, De Boeck (5e édition), 2003 (traduction).

Sciences de gestion

Synthèse de cours & exercices corrigés

Mathématiques appliquées à la gestion

Les auteurs :

Jeremy Dussart, ingénieur de gestion, Solvay Business School (SBS), Université Libre de Bruxelles (ULB) ; chercheur en stratégie, Centre Emile Bernheim (CEB).

Natacha Joukoff, mathématicienne, enseignante (SBS, ULB) spécialisée en cours de soutien.

Ahmed Loulit, docteur en sciences mathématiques, ULB, chercheur en finance mathématique, CEB.

Ariane Szafarz, docteur en sciences mathématiques, professeur de mathématiques et de finance, ULB. Elle dirige le Centre Émile Bernheim et est membre du département d'économie appliquée (DULBEA). Présidente de l'École doctorale en gestion de l'ULB (SBS), elle est l'auteur de nombreux livres et articles scientifiques en économétrie financière.

L'objectif principal de cet ouvrage est d'apporter aux étudiants en sciences de gestion et en sciences économiques les fondements mathématiques nécessaires à la maîtrise des autres disciplines de leur cursus (statistique, finance, microéconomie, économétrie…). Après un rappel des notions de base, il présente les nombres complexes ; les suites réelles ; les fonctions d'une variable ; la détermination des extrema de ces fonctions ; les matrices, systèmes linéaires et formes quadratiques ; les fonctions de plusieurs variables et la recherche de leurs extrema. Les résultats sont largement illustrés par des exemples.

Les exercices, qui occupent la seconde et majeure partie de chaque chapitre, se répartissent entre problèmes théoriques et questions posées par les sciences économiques et de gestion (fonctions de production, fonctions d'utilité, dynamique des taux de change, maximisation de profit…). Tous sont accompagnés de solutions détaillées.

Ce livre s'adresse aux étudiants des écoles de commerce ainsi qu'aux étudiants des deux premières années d'économie et de gestion. Il sera également utile aux professionnels en formation continue.

Direction de collection :

Roland Gillet, professeur à l'université Paris 1 Panthéon-Sorbonne

Dans la même collection :

- **Économétrie**, Éric Dor (IESEG, Lille)
- **Finance**, André Farber *et al.* (Solvay Business School, ULB, Bruxelles)
- **Probabilités, statistique et processus stochastiques**, Patrick Roger (ULP, Strasbourg)

La *collection Synthex* propose aux gestionnaires et aux économistes de découvrir ou de réviser les fondements théoriques d'une discipline et de se familiariser avec ses applications au travers d'exercices résolus.

Chaque ouvrage présente une synthèse pédagogique et rigoureuse des fondements théoriques et des techniques d'une discipline. Une sélection d'exercices aux corrigés détaillés permet d'assimiler successivement, et d'illustrer plus concrètement, les différents principes et apports fondamentaux.

Le lecteur, étudiant ou professionnel, est conduit au cœur de la discipline considérée, et, en s'entraînant à la résolution d'exercices et de problèmes progressifs, acquiert une compréhension rapide et un raisonnement solide.

PEARSON

Pearson Education France
47 bis, rue des Vinaigriers
75010 Paris
Tél. : 01 72 74 90 00
Fax : 01 42 05 22 17
www.pearson.fr

ISBN : 978-2-7440-7374-8