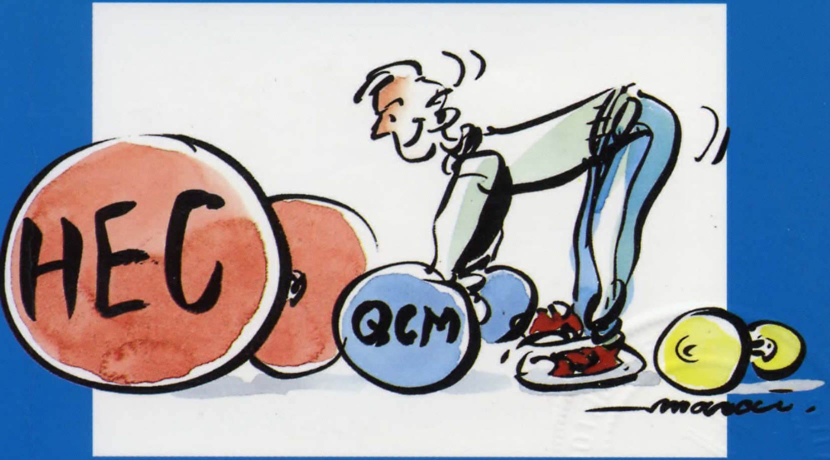
QCM

AUTOÉVALUATION DES CONNAISSANCES EN 111 QUESTIONS

DUNOD

Mathématiques

ANALYSE ET ALGORITHMIQUE



CLASSES PRÉPARATOIRES HEC

François Guénard   Patricia Hug

QCM de Mathématiques

HEC

Volume 1

Analyse, algorithmes

Dunod

Dans la collection
QCM DUNOD

CULTURE GÉNÉRALE
par Daniel Fouquet et Yves Stalloni

L'HISTOIRE DE 1880 À 1945
L'HISTOIRE DE 1945 À NOS JOURS
par Jeanne Cazier

MATHÉMATIQUES, PREMIER CYCLE SCIENTIFIQUE
par François Guénard et Patricia Hug

LITTÉRATURE
par Mathieu Lindon

A paraître (rentrée 93/94)

MATHÉMATIQUES HEC : ALGÈBRE ET PROBABILITÉS
PHYSIQUE, PREMIER CYCLE UNIVERSITAIRE
PHYSIQUE GÉNÉRALE
CHIMIE GÉNÉRALE
BIOCHIMIE
BIOLOGIE CELLULAIRE
BIOLOGIE ANIMALE
BIOLOGIE VÉGÉTALE

ISSN 1159 1595
ISBN 2 10 001113 8

Table des matières

[1] Questions

[2] Réponses

Avant-propos

Voici le premier volume d'un recueil de QCM destiné aux étudiants des classes préparatoires au Haut Enseignement Commercial, option générale et option économique.

Ce volume contient 11 questionnaires couvrant l'algorithmique et l'ensemble du programme d'analyse. Chaque chapitre regroupe 10 questions comportant chacune cinq affirmations dont l'une au moins est vraie.
Nous avons voulu faire de ce livre un véritable outil de travail, utile dans les différentes phases de la préparation : apprentissage, assimilation, consolidation et révision.

▸ Dans ce but, les questions de chaque chapitre sont classées par difficulté croissante :
— les quatre ou cinq premières questions sont très faciles : elles permettent de s'assurer que l'on a bien appris le cours ;
— les trois ou quatre suivantes sont des exercices permettant de vérifier que l'on a compris le cours ;
— les deux dernières sont de véritables compléments de cours, des exercices parfois difficiles, du niveau des oraux de concours.

▸ Les réponses constituent la deuxième moitié de l'ouvrage. Elles comportent les solutions développées, mais aussi des commentaires, des rappels de cours et quelques compléments.

▸ Dans chaque chapitre, les questions sont orientées vers les sujets qui posent le plus de problèmes aux étudiants. Par exemple, les questions sur l'algorithmique mettent l'accent sur la diversité des situations, tandis que dans le chapitre sur la continuité et la dérivabilité des fonctions usuelles, l'accent a été mis sur les définitions des différents concepts.

▸ La première difficulté des étudiants lorsqu'ils entrent dans le supérieur est le passage de mathématiques de recettes à des mathématiques fondées sur le raisonnement. Ce volume commence donc par un chapitre élémentaire sur la logique et la théorie des ensembles ; et dans le corps de l'ouvrage, beaucoup de questions font pratiquer les distinctions entre condition nécessaire et condition suffisante, entre *ou* et *et*.

Nous croyons que les Questionnaires à Choix Multiples constituent un outil de travail efficace, adapté aux étudiants des années 90 : finies les mathématiques tristes et ardues ; place à l'apprentissage ludique. Nous espérons que les lecteurs apprécieront l'esprit dans lequel nous avons rédigé les questions et leurs réponses, et qu'ils partageront notre foi dans ce nouvel outil. Toutes les remarques, critiques et suggestions seront bienvenues.

Nous remerçions Madame Laubiès et Messieurs Delaplace, Gautier et Megarbane qui ont bien voulu nous faire part de leurs remarques dans la préparation de ce livre.

Université de Paris-Sud
Département de mathématiques
Bât 425
91405 Orsay Cedex

Notations

Les notations utilisées sont conformes aux normes en vigueur. C'est ainsi qu'on désigne respectivement par ln, tan, et arctan, les fonctions logarithme népérien, tangente, et arc tangente. Le coefficient binomial de n et de p, $\frac{n!}{p!\,(n-p)!}$, est noté $\binom{n}{p}$. Si E et F sont deux ensembles, si f est une application $E \to F$, si A est une partie de E, et si B est une partie de F, on note $f(A)$ l'image directe de A par f, $f^{-1}(B)$ l'image réciproque de B par f, définie par $f^{-1}(B) = \{x \in E,\ f(x) \in B\}$. Cette dernière notation ne signifie bien sûr pas que f soit une bijection. On a utilisé les deux notations $E(x)$ et $\lfloor x \rfloor$ pour désigner la partie entière du réel x.

Notons toutefois une exception et une notation encore peu utilisée :

1) Selon la norme en vigueur, la virgule est utilisée comme séparateur dans les couples et les intervalles. Cet usage ne pose pas de problème dans les pays anglo-saxons où le séparateur décimal est le point. En français, la virgule est utilisée aussi comme séparateur décimal, et cela peut prêter à confusion : (1,2,3) désigne-t-il l'élément de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées 1, 2 et 3, l'élément de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées 1,2 et 3, ou bien encore le couple formé de 1 et de 2,3 ? Pour éviter de telles ambiguïtés, nous avons utilisé le point virgule comme séparateur dans les couples et les intervalles. Ainsi, (1;2;3) désigne l'élément de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées 1, 2 et 3, tandis que (1,2;3) désigne le couple de $\mathbb{R}^2$ formé de 1,2 et de 3.

2) Le programme ne prévoit pas l'étude d'une théorie particulière de l'intégrale, et les étudiants n'ont à connaître que les principales propriétés et quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions définies sur des intervalles. Le "dx" est donc un objet que l'on ne définit pas, à propos duquel aucune question ne doit être soulevée. Nous avons donc adopté la notation $\int_a^b f$ pour désigner l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$. Cette notation est plus simple et conforme à l'usage mathématique contemporain où l'on réserve la notation $\int_a^b f(x)\,dx$ à une intégrale dans une théorie disposant d'une notion de différentielle (par exemple la théorie de Riemann-Stieltjes).

QCM n°1
Raisonnement, notions de base

(Résultats p. 109)

1. La relation $p \Rightarrow q$ se lit "si p, alors q". Que signifie-t-elle ?

(1) p est une condition suffisante de q. ☐

(2) q est une condition nécessaire de p. ☐

(3) Pour que q, il suffit que p. ☐

(4) Pour que p, il suffit que q. ☐

(5) q seulement si p. ☐

2. Dans chacune des phrases suivantes, est-il raisonnable de considérer le "*et*" comme ayant le sens et la fonction du connecteur logique "*et*" ?

(1) Pierre *et* Paul déplacent la table. ☐

(2) Pierre *et* Paul aiment Marie. ☐

(3) Ils se marièrent *et* ils eurent beaucoup d'enfants. ☐

(4) Il a été classé trente *et* unième. ☐

(5) C'est votre professeur, *et* vous devez le respecter. ☐

3. Dans chacune des phrases suivantes, est-il raisonnable de considérer le "*ou*" comme ayant le sens et la fonction du connecteur logique "*ou*" ?

(1) Un choc physique *ou* une émotion peuvent lui être fatals. ☐

(2) Le ministre *ou* le secrétaire d'Etat présidera la cérémonie. ☐

(3) Le nom de famille *ou* patronyme doit s'écrire en majuscules d'imprimerie. ☐

(4) Je ne puis le plaindre *ou* le conseiller. ☐

(5) Je viendrai soit demain *ou* dimanche. ☐

4. On considère la phrase P : *"Pierre aime Marie et Marie aime Pierre"*. Quelle est la négation de P ?

(1) Pierre et Marie ne s'aiment ni l'un ni l'autre. ☐

(2) Pierre aime Marie, et Marie n'aime pas Pierre. ☐

(3) Il est faux que Marie aime Pierre et n'en soit pas aimée. ☐

(4) Marie n'est pas aimée de Pierre, ou elle ne l'aime pas. ☐

(5) Pierre aime Marie, et il est faux que Pierre et Marie s'aiment mutuellement. ☐

5. Quelles sont les assertions vérifiées par l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}$?

(1) $\mathbb{N}$ a un plus petit élément. ☐

(2) $\mathbb{N}$ a un plus grand élément. ☐

(3) $\mathbb{N}$ n'a que des parties propres finies ☐

(4) $\mathbb{N}$ est en bijection avec tout ensemble ayant un plus petit élément et pas de plus grand élément. ☐

(5) Tout élément de $\mathbb{N}$ admet un successeur. ☐

6. PRINCIPE DE RÉCURRENCE. Pour tout entier naturel n, soit $P(n)$ une assertion portant sur n, et telle que si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ l'est également. On suppose qu'il existe un entier n_0 tel que $P(n_0)$ soit faux. Quelles conclusions peut-on en tirer ?

(1) $P(n_0-1)$ est faux. ☐

(2) $P(n)$ est faux pour tout entier $n \leq n_0$. ☐

(3) $P(n_0+1)$ est faux. ☐

(4) $P(n)$ est faux pour tout entier $n \geq n_0$. ☐

(5) $P(n)$ est faux pour tout entier n. ☐

7. Soient A, B, C et D quatre ensembles. Quelles sont les paires d'ensembles égaux ?

(1) $(A \backslash C) \cup (B \backslash C)$ et $(A \cup B) \setminus C$ ☐

(2) $(A \backslash B) \cup (A \backslash C)$ et $A \setminus (B \cap C)$ ☐

(3) $(A \backslash C) \setminus (B \backslash C)$ et $A \cap (C \backslash B)$ ☐

(4) $(A \backslash B) \setminus (A \backslash C)$ et $(A \backslash B) \setminus C$ ☐

(5) $(A \times C) \cup (B \times D)$ et $(A \cup B) \times (C \cup D)$ ☐

8. Soient E et F deux ensembles, A et B deux parties de E, C une partie de F, et soit f une application $E \rightarrow F$. Les deux ensembles mentionnés dans chaque assertion sont-ils égaux ?

(1) $f(A \cup B)$ et $f(A) \cup f(B)$. ☐

(2) $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$. ☐

(3) A et $f^{-1}(f(A))$. ☐

(4) $f(f^{-1}(C))$ et $C \cap f(E)$. ☐

(5) $f[f^{-1}(C) \cap A]$ et $C \cap f(A)$. ☐

9. Comment doit-on compléter la définition suivante : *"Soient E et F deux ensembles et f une application $E \to F$. On dit que f est injective si et seulement si..."*

(1) tout élément x de E n'a qu'une image par f. ☐

(2) tout élément y de F a au moins un antécédent par f. ☐

(3) tout élément y de F a au plus un antécédent par f. ☐

(4) tout élément y de F a exactement un antécédent par f. ☐

(5) pour tous x et $y \in E$, la relation $f(x) = f(y)$ implique $x = y$. ☐

10. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble Γ. On définit la limite sup des A_n, $\overline{\lim}\, A_n$, et la limite inf des A_n, $\underline{\lim}\, A_n$, par

$$\overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_{n+k}\right)$$

$$\underline{\lim}\, A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty}\left(\bigcap_{k=0}^{\infty} A_{n+k}\right).$$

Quelles sont les propriétés vérifiées par $\overline{\lim}\, A_n$ et $\underline{\lim}\, A_n$?

(1) $\overline{\lim}\, A_n$ est l'ensemble des $x \in \Gamma$ qui appartiennent à tous les A_n, sauf un nombre fini. ☐

(2) $\underline{\lim}\, A_n$ est l'ensemble des $x \in \Gamma$ qui appartiennent à une infinité de A_n. ☐

(3) $\displaystyle\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \subset \underline{\lim}\, A_n \subset \overline{\lim}\, A_n \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ ☐

(4) Si $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, alors $\underline{\lim}\, A_n = \overline{\lim}\, A_n$. ☐

(5) $\underline{\lim}\left((A_n)^c\right) = \left(\overline{\lim}\, A_n\right)^c$ ☐
(A^c désigne le complémentaire de A).

QCM n°2

Nombres réels

(Résultats p. 113)

1. INTERVALLES. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Les propriétés suivantes impliquent-elles que A soit un intervalle ?

(1) $\forall (a;b) \in A^2, \forall x \in \mathbb{R},$
$(a < x < b) \Rightarrow (x \in A).$ ☐

(2) $\exists (a;b) \in A^2, \forall x \in \mathbb{R},$
$(a < x < b) \Rightarrow (x \in A).$ ☐

(3) $\exists (a;b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R},$
$(a < x < b) \Rightarrow (x \in A).$ ☐

(4) $\exists (a;b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R},$
$(a < x < b) \Leftarrow (x \in A).$ ☐

(5) $\exists (a;b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R},$
$(a < x < b) \Leftrightarrow (x \in A).$ ☐

2. RACINES. Les formules suivantes sont-elles toujours valides ?

(1) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ☐

(2) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ ☐

(3) $\sqrt{a^2} = a$ ☐

(4) $\frac{\sqrt{a}}{b} = \sqrt{\frac{a}{b^2}}$ pour tout $a \geq 0$. ☐

(5) $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$ ☐

$$= \begin{cases} 2 & \text{si } a \in [1;2] \\ 2\sqrt{a-1} & \text{si } a \in]2;+\infty[\end{cases}$$

3. TENNIS. Gabriella et Monica jouent un match de tennis en deux manches. Au cours de la première manche, Monica a un taux de réussite de premières balles de service meilleur que celui de Gabriella. Au cours de la deuxième manche, Monica a encore un taux de réussite de premières balles de service meilleur que celui de Gabriella. Que peut-on dire ?

(1) Monica a eu au cours du match un taux de réussite de premières balles de service meilleur que celui de Gabriella. ☐

(2) Gabriella a eu au cours du match un taux de réussite de premières balles de service meilleur que celui de Monica. ☐

(3) A partir des informations ci-dessus on ne peut dire laquelle des deux joueuses a obtenu le meilleur taux de réussite de premières balles de service sur l'ensemble du match. ☐

(4) Monica a gagné le match. ☐

(5) Les informations ci-dessus ne permettent pas de dire qui a gagné le match. ☐

4. INÉGALITÉS PÉRIMÉTRIQUES. Soient a, b, c trois réels strictement positifs, et s le réel défini par $2s = a + b + c$. On considère les trois inégalités suivantes :

$$(a+b-c)(a+c-b) \leq a^2 \qquad (i)$$

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc \qquad (ii)$$

$$8(s-a)(s-b)(s-c) \leq abc \qquad (iii)$$

Que peut-on dire de ces trois inégalités ?

(1) (i) est vraie quels que soient a, b, et c strictement positifs. ☐

(2) (ii) est vraie quels que soient a, b, et c strictement positifs. ☐

(3) (ii) est vraie seulement si l'un des trois termes $(a+b-c)$, $(b+c-a)$ et $(c+a-b)$ est négatif. ☐

(4) (iii) est vraie quels que soient a, b, et c strictement positifs. ☐

(5) a, b et c vérifient (ii) si et seulement s'ils ne vérifient pas (iii). ☐

5. PARTIE ENTIÈRE. On désigne par E la fonction partie entière. Quelles sont les propriétés de cette fonction ?

(1) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, E(nx) = nE(x)$. ☐

(2) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},$
$E(x+y) = E(x) + E(y)$. ☐

(3) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x).$ ☐

(4) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},$ ☐

$$\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx).$$

(5) $\forall x \in \mathbb{R},$ ☐

$$E(-x) = \begin{cases} -E(x) - 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{Z} \\ -E(x) & \text{si } x \in \mathbf{Z} \end{cases}.$$

6. BORNE SUPÉRIEURE. Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Quelles sont les assertions vraies ?

(1) A admet un plus grand élément que l'on appelle sa *borne supérieure.* ☐

(2) A admet une borne supérieure, a, caractérisée par les deux propriétés : ☐
 (a) $\forall x \in A,\ x \leq \mathrm{a}$;
 (b) $\forall \epsilon > 0,\ \forall x \in A,\ x \geq a - \epsilon$.

(3) A admet une borne supérieure, a, caractérisée par les deux propriétés : ☐
 (a) $\forall x \in A,\ x \leq \mathrm{a}$;
 (b) $\forall \epsilon > 0,\ \exists x \in A,\ x \geq a - \epsilon$.

(4) A admet une borne supérieure, a, caractérisée par la propriété ☐

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left[(\forall y \in A,\ y \leq x) \Rightarrow (x \geq a) \right]$$

(5) A admet une borne supérieure, qui est le plus grand des minorants de A. ☐

7. OPÉRATIONS SUR LES BORNES SUPÉRIEURES. Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$, de bornes supérieures respectives a et b. Est-il vrai que

(1) $A \cup B$ admette $\sup\{a;b\}$ comme borne supérieure ? ☐

(2) $A \cap B$ admette $\inf\{a;b\}$ comme borne supérieure ? ☐

(3) $A + B = \{x + y \mid x \in A, \quad y \in B\}$ admette $a+b$ comme borne supérieure ? ☐

(4) $A \cdot B = \{xy \mid x \in A, \quad y \in B\}$ admette ab comme borne supérieure ? ☐

(5) $A - B = \{x - y \mid x \in A, \quad y \in B\}$ admette $a-b$ comme borne supérieure ? ☐

8. VALEUR ABSOLUE. Soient a, b et c trois réels quelconques. Quelles sont les propriétés vérifiées par la valeur absolue ?

(1) $|a + b| \leq |a - c| + |c + b|$ ☐

(2) $\big|\,|a| - |b|\,\big| \geq |\, a - b \,|$ ☐

(3) $|b-a| + |b-c| + |a-c| = 2[\max\{a;b;c\} - \min\{a;b;c\}]$ ☐

(4) $a+b+c = \dfrac{3}{2}\left(\max\{a;b;c\} + \min\{a;b;c\}\right)$ ☐

(5) $|a+b| + |a+c| + |b+c| = |a+b+c| + |a| + |b| + |c|$ ☐

9. MOYENNE LOGARITHMIQUE. Si x et y sont deux réels strictement positifs et distincts, on définit leur moyenne logarithmique par

$$L(x;y) = \frac{x-y}{\ln x - \ln y}.$$

Quelles sont les inégalités vérifiées par cette moyenne ?

(1) $\sqrt{xy} \leq L(x;y)$ ☐

(2) $L(x;y) \leq \dfrac{x+y}{2}$ ☐

(3) $(xy)^{\frac{1}{4}} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2} \leq L(x;y)$ ☐

(4) $L(x;y) \leq \left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}\right)^2$ ☐

(5) $\dfrac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \geq L(x;y)$ ☐

10. MOYENNES. Si x_1, x_2, ..., x_n sont des réels strictement positifs, on définit leur moyenne arithmétique $A(x_1;x_2;...;x_n)$ par

$$A(x_1;x_2;\cdots;x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

leur moyenne géométrique $G(x_1;x_2;...;x_n)$ par

$$G(x_1;x_2;\cdots;x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n},$$

et leur moyenne harmonique $H(x_1;x_2;...;x_n)$ par

$$H(x_1;x_2;\cdots;x_n) = \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}}.$$

Quelles sont les inégalités reliant ces trois moyennes ?

(1) $A(x_1;x_2;...;x_n) \leq G(x_1;x_2;...;x_n)$ ☐

(2) $A(x_1;x_2;...;x_n) \geq G(x_1;x_2;...;x_n)$ ☐

(3) $A(x_1;x_2;...;x_n) \geq H(x_1;x_2;...;x_n)$ ☐

(4) $H(x_1;x_2;...;x_n) \geq G(x_1;x_2;...;x_n)$ ☐

(5) $H(x_1;x_2;...;x_n) \leq G(x_1;x_2;...;x_n)$ ☐

Si A est un ensemble de n nombres réels positifs, la moyenne géométrique des éléments de A est égale à la moyenne géométrique des moyennes géométriques des éléments des parties non vides de A.

QCM n°3

Suites numériques

(Résultats p. 120)

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles, et $l \in \mathbb{R}$. Quelles sont les assertions vraies ?

(1) Si $(|u_n|)$ converge vers 0, alors (u_n) converge vers 0. ☐

(2) Si $(|u_n|)$ converge vers l, alors (u_n) converge vers l ou $-l$. ☐

(3) Si (u_n) converge vers l, alors $(|u_n|)$ converge vers $|l|$. ☐

(4) Si (u_n) est à termes strictement positifs, alors l est strictement positif. ☐

(5) Si (v_n) converge vers 0, alors $(u_n v_n)$ converge vers 0. ☐

2. Soit (u_n) une suite réelle. Les énoncés suivants sont-ils exacts?

(1) Si (u_n) converge, alors elle est monotone. ☐

(2) Si (u_n) diverge, alors elle est monotone. ☐

(3) Si (u_n) diverge, alors elle est non bornée. ☐

(4) Si (u_n) est croissante majorée, alors elle converge. ☐

(5) Si (u_n) est décroissante et non minorée, alors elle tend vers $-\infty$. ☐

3. MAIS OÙ EST LA SUITE ARITHMÉTIQUE ? Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite satisfaisant à la relation

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \sqrt{\frac{u_{n-1}^2 + u_{n+1}^2}{2}} .$$

Que peut-on dire d'une telle suite ?

(1) C'est une suite arithmétique. ☐

(2) C'est une suite géométrique. ☐

(3) C'est une suite constante ou divergente. ☐

(4) Si elle est à valeurs entières, cette suite est constante. ☐

(5) Une telle suite ne peut exister. ☐

4. On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{cases} u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \\ \forall n \geq 0, \; u_{n+2} = 10u_{n+1} - 9u_n \end{cases}$$

et par

$$\forall n \geq 0, \quad v_n = u_{n+1} - u_n$$

Que peut-on dire de ces deux suites ?

(1) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique. ☐

(2) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. ☐

(3) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 9^n + 1^n$ ☐

(4) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 9^n - 1^n$ ☐

(5) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{64}\left(9^n - 8n - 9\right)$ ☐

5. Quelles sont les propriétés de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} \;?$$

Attention! $\dfrac{1}{\binom{n}{k}} = \binom{n}{k}^{-1} \neq \binom{k}{n}$

(1) (u_n) est une suite croissante. ☐

(2) (u_n) est une suite bornée. ☐

(3) (u_n) est une suite convergente. ☐

(4) La suite (u_n) est convergente, et la suite (v_n) dont le terme général vaut $v_n = u_n - \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ vérifie $v_n \sim \dfrac{1}{n}$. ☐

(5) La suite (u_n) est convergente, et la suite (v_n) dont le terme général vaut $v_n = u_n - \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ est décroissante. ☐

6. Soient k un entier > 0 et a un réel > 1. Que peut-on dire de la suite $\left(\dfrac{n^k}{a^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

(1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$$ ☐

(2) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = +\infty$$ ☐

(3) La relation ☐

$$\forall t \in]0;1[,$$
$$n t^n < 1 + t + \ldots + t^{n-1} < \frac{1}{1-t}$$

permet de montrer que, pour tout entier $n > 0$, on a la majoration

$$\frac{n^k}{a^n} \le \frac{a}{\left(a^{\frac{1}{k}} - 1\right)^k}$$

(4) Si f est la fonction $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^k a^{-x}$, on a ☐

$$\max_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n^k}{a^n} = \max\{f(M) ; f(M+1)\},$$

où $M = \left\lfloor \dfrac{k}{\ln a} \right\rfloor$ ($\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x).

(5) Pour tout entier $n > 0$, et tout $a > 1$, on a ☐

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = +\infty$$

7. On considère la suite (u_n) de points de $\mathbf{Q}$ définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\,\frac{1}{k!}$. Quelles sont les propriétés de cette suite convergente ?

(1) (u_n) est strictement décroissante. ☐

(2) (u_n) est bornée. ☐

(3) Pour $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, avec $m > n$, ☐

$$| u_m - u_n| \leq \frac{1}{2^n}\,\frac{1}{(n+1)!}.$$

(4) Sa limite appartient à $\mathbf{Q}$. ☐

(5) Sa limite, ℓ, vérifie ☐

$$2^{\ell} = \ell^2 - 6\ell + 3\ \ln 2.$$

Vocabulaire

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Une propriété asymptotique de cette suite est une propriété portant sur $(u_n)_{n\geq N}$, pour un entier N assez grand. Par exemple, on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***asymptotiquement constante*** s'il existe un entier N tel que l'on ait $u_n = u_N$ pour tout entier $n \geq N$. Elle est dite ***asymptotiquement périodique*** s'il existe un entier $p > 0$ (la période), et un entier naturel N tel que, pour tout entier $n \geq N$, on ait $u_{n+p} = u_n$. On définit de même les suites réelles asymptotiquement croissantes, etc.

Le caractère borné, le caractère convergent d'une suite sont des propriétés asymptotiques. On ne doit donc pas parler de suite "asymptotiquement bornée", ni de suite "asymptotiquement convergente".

8. UNE SUITE COMPLEXE. On considère la suite complexe (z_n) définie par $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|)$.

Que peut-on affirmer sur cette suite ?

(1) Si $z_n = \rho_n e^{i\theta_n}$, et si $z_{n+1} = \rho_{n+1} e^{i\theta_{n+1}}$, avec $\theta \in [-\pi;\pi]$ et $\rho \in \mathbb{R}$, alors ☐

$$\rho_{n+1} = \rho_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \text{ et } \theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}.$$

(2) La suite (z_n) est asymptotiquement constante si et seulement si $z_0 \in \mathbb{R}$. ☐

(3) La suite (z_n) converge seulement si $z_0 \in \mathbb{R}$. ☐

(4) La suite (z_n) converge pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$. ☐

(5) Pour tout $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-_*$, la suite (z_n) converge vers $|z_0|$. ☐

9. RÉCURRENCE NON LINÉAIRE. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in [0;1]$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}}$$

Quelles sont les propriétés de cette suite et de cette fonction ?

(1) La fonction f est croissante sur $[0;1]$. ☐

(2) L'ensemble des points fixes de f est $\{0; 1\}$. ☐

(3) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 si $u_0 \neq 1$. ☐

(4) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 si $u_0 \neq 0$. ☐

(5) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2}$ si $u_0 \notin \{0; 1\}$. ☐

10. COBWEB. Des fermiers décident sur la base des prix pratiqués une année de la quantité de blé qu'ils planteront pour l'année suivante : en supposant que les cours resteront stables, ils plantent beaucoup si les prix sont élevés, peu si les prix sont faibles. L'année suivante, si les récoltes sont abondantes, les prix baissent, tandis qu'ils montent si les récoltes sont faibles.

On désigne par D_n la demande de l'année n, par p_n le prix de blé au quintal l'année n, par S_n la récolte de l'année n. Pour modéliser les hypothèses précédentes, on suppose que les fonctions prix-demande et prix-offre sont affines, c'est-à-dire qu'il existe des réels strictement positifs a, b, c et d tels que

$$\begin{cases} D_n = -ap_n + b \\ S_{n+1} = cp_n + d \end{cases}$$

Enfin, il y a forcément équilibre de l'offre et de la demande, ce qui se traduit par

$$D_{n+1} = S_{n+1}.$$

Que peut-on dire de l'évolution des prix ?

(1) La suite (p_n) des prix satisfait à une relation de récurrence affine, de la forme ☐

$$p_{n+1} = A\,p_n + B.$$

(2) La suite (p_n) des prix satisfait à une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, de la forme ☐

$$\alpha p_{n+1} + \beta p_n + \gamma p_{n-1} = 0.$$

(3) La suite (p_n) des prix converge toujours. ☐

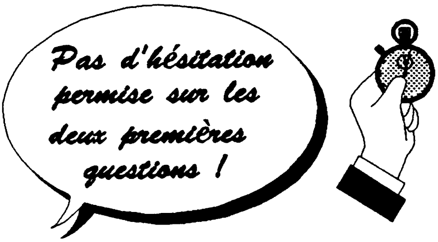
(4) La suite (p_n) des prix converge si et seulement si $\frac{a}{c} < 1$. ☐

(5) La suite (p_n) des prix est croissante. ☐

QCM n°4

Séries à termes réels

(Résultats p. 134)



1. RÈGLES DE CONVERGENCE. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. Quelles sont les affirmations exactes ?

(1) Si Σu_n converge, alors (u_n) tend vers 0. ☐

(2) Si (u_n) tend vers 0, alors la série Σu_n converge. ☐

(3) Si Σu_n et Σv_n convergent, alors $\Sigma(u_n+v_n)$ converge. ☐

(4) Si $\Sigma(u_n+v_n)$ converge, alors Σu_n et Σv_n convergent. ☐

(5) Si Σu_n et Σv_n divergent, alors $\Sigma(u_n+v_n)$ diverge. ☐

2. SÉRIES DE RÉFÉRENCE. Quelles sont les affirmations exactes ?

(1) La série réelle $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ converge si et seulement si $|x| < 1$. ☐

(2) La série réelle $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ converge si et seulement si $|x| < 1$. ☐

(3) La série réelle $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge si et seulement si $|x| < 1$. ☐

(4) La série réelle $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. ☐

(5) La série réelle $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ converge. ☐

3. UNE FAMILLE DE SÉRIES. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$u_n = \sin\left[\pi\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right)\right]$$

$$v_n = \sin\left[\pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right]$$

et $$w_n = \sin\left[\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right]$$

Quelles sont les affirmations exactes ?

(1) La série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ ne converge pas, car son terme général ne tend pas vers 0. ☐

(2) La série $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ est une série géométrique de raison < 1, donc absolument convergente. ☐

(3) La série $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ est une série géométrique de raison > 1, donc divergente. ☐

(4) Les deux séries $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ sont convergentes. ☐

(5) Les deux séries $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ sont convergentes. ☐

4. EXEMPLES DE SÉRIES. Les affirmations de convergence sont-elles correctes ?

(1) La série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$ converge. ☐

(2) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{n=0}^{\infty}\ln\left(\frac{2+n^p}{1+n^p}\right)$ est convergente. ☐

(3) La série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{1^2+2^2+\ldots+n^2}$ est convergente. ☐

(4) Pour tout $x \in]1;+\infty[$, la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+2+\ldots+n}$ est convergente. ☐

(5) La série $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)$ converge. ☐

5. SÉRIES AMALGAMANTES. Une méthode courante pour le calcul des sommes de séries est celle des *séries amalgamantes*, aussi appelées *séries téléscopiques*.

Par exemple, pour la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$, la décomposition $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ permet d'écrire

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

puis d'en déduire la somme, en passant à l'infini.

Chacune des assertions suivantes indique une série, et propose une égalité. Cette égalité est-elle correcte, et permet-elle de calculer par amalgame la somme de la série ?

(1) Série $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2-1}$, avec la décomposition ☐

$$\frac{(-1)^k}{k^2-1} = \frac{(-1)^k}{k-1} - \frac{(-1)^k}{k+1}$$

(2) Série $\sum_{k=4}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2-4}$, avec la décomposition ☐

$$\frac{(-1)^k}{k^2-4} = \frac{(-1)^k}{4(k-2)} - \frac{(-1)^k}{4(k+2)}$$

(3) Série $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)^3\,(k+1)^3}$, avec la décomposition □

$$\frac{1}{(k-1)^3\,(k+1)^3} = \frac{1}{8\,(k-1)^3} - \frac{3}{16\,(k-1)^2} + \frac{3}{16\,(k-1)} - \frac{1}{8\,(k+1)^3} - \frac{3}{16\,(k+1)^2} - \frac{3}{16\,(k+1)}$$

(4) Série $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2-4}{k^4+k^3-k-1}$, avec la décomposition □

$$\frac{k^2-4}{k^4+k^3-k-1} = \frac{-1}{2\,(k-1)} + \frac{3}{2\,(k+1)} + \frac{2-k}{k^2+k+1}$$

(5) Série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(2k+1)(2k-1)(2k-5)}$, avec la décomposition ☐

$$\frac{k}{(2k+1)(2k-1)(2k-5)}$$
$$= \frac{1}{8\times 3\times\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)\left(k-\frac{5}{2}\right)}$$
$$- \frac{3}{16\times 2\times\left(k-\frac{3}{2}\right)\left(k-\frac{5}{2}\right)} + \frac{1}{8\times\left(k-\frac{5}{2}\right)}$$
$$- \frac{1}{8\times 3\times\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)}$$
$$+ \frac{3}{16\times 2\times\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)} - \frac{1}{8\times\left(k-\frac{3}{2}\right)}$$

6. UNE SÉRIE DE CANTOR. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers vérifiant $1 \leq b_n \leq n-2$ pour $n > 2$.

Que peut-on dire de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n!}$?

(1) Cette série diverge toujours. ☐

(2) Cette série converge toujours. ☐

(3) Cette série converge seulement si l'on a $b_n \leq \frac{n}{2}$ pour tous les n, sauf peut-être un nombre fini. ☐

(4) Cette série diverge si l'on a $b_n \geq \frac{n}{2}$ pour tous les n, sauf peut-être un nombre fini. ☐

(5) Cette série converge si et seulement si la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. ☐

7. *EPISTOLA PRIOR, EPISTOLA POSTERIOR.* Dans une lettre datée du 12 mai 1676, Leibniz communiqua deux séries à Henry Oldenburg, Secrétaire de la *Royal Society*, en lui demandant si quelqu'un pouvait en trouver la somme. Newton avait déjà trouvé dix ans plus tôt la somme de l'une de ces deux séries, et il envoya deux lettres de réponse (connues sous le nom d'*Epistola Prior*, et d'*Epistola Posterior*) ; dans l'une d'elles, il donna la somme qu'il avait déjà trouvée, et dans l'autre, il donna la somme d'une troisième série, dont le terme général ressemblait à celui de la deuxième série de Leibniz. Traduite en français, et en termes mathématiques contemporains, voici quelle était en substance la démonstration de Newton pour le calcul de la somme de cette troisième série.

Considérons l'intégrale $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+\sqrt{2}\,x+x^2}$. Par primitivation, on a

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+\sqrt{2}\,x+x^2} = \left[\sqrt{2}\,\arctan\left(\frac{x+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\right)\right]_{-1}^{1}$$
$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Par ailleurs, on a

$$1+x^4 = \left(1+\sqrt{2}\,x+x^2\right)\left(1-\sqrt{2}\,x+x^2\right),$$

ce qui conduit à

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+\sqrt{2}\,x+x^2} = \int_{-1}^{1} \frac{1-\sqrt{2}\,x+x^2}{1+x^4}\,dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx$$
$$= 2\int_{0}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx$$

puis à

$$\int_{0}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

et enfin à la somme de série...

Justement, quelle est la série dont Newton trouva ainsi la somme ?

(1) $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$ ☐

(2) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \ldots$ ☐

(3) $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\ldots$ ☐

(4) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots$ ☐

(5) $1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\ldots$ ☐

8. LE TRIANGLE DE PASCAL À L'ENVERS. La formule du binôme montre que l'on trouve les lignes du triangle de Pascal en développant $(1+x)^n$, et en regardant les coefficients des x^k dans ce développement.
Par exemple, $(1+x)^2 = 1+2x+x^2$, et "1 2 1" est la troisième ligne du triangle.

$$\begin{array}{llllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}$$

Si f est une fonction C^∞, on peut former la série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k$, dont les sommes partielles coïncident avec les polynômes de Taylor de f en 0. Quelles sont les fonctions dont le développement en série de la forme $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ permet d'obtenir les colonnes du triangle de Pascal ?

(1) $f : \,]-1;1[\, \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin nx$ ☐

(2) $f :]-1;1[\to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto \dfrac{1}{1-x^n}$ ☐

(3) $f :]-1;1[\to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^n}$ ☐

(4) $f :]-1;1[\to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto [\ln(1-x)]^n$ ☐

(5) $f :]-1;1[\to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto \dfrac{1}{[\ln(1-x)]^n}$ ☐

9. Soit $(u_n)_{n>1}$ la suite de terme général $u_n = \left[\dfrac{\ln(1+n)}{\ln n}\right]^n$.
Que peut-on affirmer ?

(1) La suite $(u_n)_{n>1}$ est minorée par 1. ☐

(2) La suite $(u_n)_{n>1}$ est convergente. ☐

(3) La série $\Sigma\, u_n$ est convergente. ☐

(4) La série $\Sigma\, u_n$ est divergente. ☐

(5) La suite $(u_n)_{n>1}$ converge, et la série de terme général $u_n - \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ est convergente. ☐

10. UNE SUITE DE SÉRIES. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose, si ce terme est défini,

$$w_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{nk+1}$$

Sachant que $\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^2} = \frac{\pi^2}{6}$, que peut-on dire de w_n ?

(1) w_n n'existe que si $n \geq 2$. ☐

(2) Pour tout n tel que w_n soit défini, on a ☐

$$w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$$

(3) $$w_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$ ☐

(4) $$\lim_{n\to\infty} w_n = 0$$ ☐

(5) Au voisinage de $+\infty$, w_n admet le développement limité suivant : ☐

$$\frac{\ln 2}{n} - \frac{\pi^2}{12\,n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

QCM n°5

Fonctions usuelles

(Résultats p. 149)

1. Si $\log_x 16 = \frac{2}{3}$, que vaut x ?

(1) 4 ☐

(2) 16 ☐

(3) 64 ☐

(4) 12 ☐

(5) 24 ☐

2. POLLUTION. On considère la réaction chimique $CO + Cl_2 \rightarrow CO\,Cl_2$. Dans cette réaction, le monoxyde de carbone, CO, réagit sous l'influence des rayons ultraviolets, avec la chlorine, Cl_2, pour produire du phosgène, $CO\,Cl_2$. Une telle réaction s'effectue à un taux proportionnel au produit des concentrations des produits qui réagissent ; la constante de proportionalité, k, dépend de la température, T. En effet, pour réagir, les molécules doivent entrer en collision, et seulement celles qui ont une énergie cinétique suffisante au moment de la collision vont entrer en réaction. La barrière d'énergie requise pour la réaction, E_a, est connue sous le nom d'énergie d'activation, et k est donné par l'équation d'Arrhenius,

$$k = A \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right),$$

où A est une constante liée à la réaction, appelée le facteur d'Arrhenius, et où R est la constante des gaz.

Quelles sont les propriétés de cette fonction donnant k, que nous écrirons pour simplifier

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-\frac{1}{x}} \end{cases} ?$$

(1) f se prolonge par continuité en 0, en posant $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$. ☐

(2) En prolongeant f par continuité en 0, on obtient une fonction dérivable à droite en 0, dont la dérivée à droite en 0 est nulle. ☐

(3) En prolongeant f par continuité en 0, on obtient une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}_+$, dont les dérivées à droite successives en 0 sont toutes nulles. ☐

(4) La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. ☐

(5) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ ☐

3. LIMITES ET COMPOSITION DES FONCTIONS. Soient a et b deux réels, f une fonction définie au voisinage de a, g une fonction définie au voisinage de b. Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = b$, et si $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x \neq b}} g(x) = c$, que peut-on affirmer sur $g \circ f$? (On pourra considérer les quatre fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto 0$, $x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ et $x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$.)

(1) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \big(g \circ f(x)\big) = c$ ☐

(2) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \big(g \circ f(x)\big)$ existe seulement si g est continue en b. ☐

(3) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \big(g \circ f(x)\big)$ existe seulement si f et g sont continues respectivement en a et en b. ☐

(4) Ou bien $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \big(g \circ f(x)\big) = c$,
ou bien $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \big(g \circ f(x)\big) = g(b)$,
ou bien $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \big(g \circ f(x)\big)$ n'existe pas,
et les trois cas sont possibles. ☐

(5) Si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \big(g \circ f(x)\big)$ existe, alors ☐

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \big(g \circ f(x)\big) = g(b).$$

4. FONCTIONS CONVEXES. Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. Quelles sont les affirmations vraies ?

(1) La fonction f est strictement convexe ou concave sur $[a;b]$ si et seulement si l'intersection du graphe de f avec toute droite de $\mathbb{R}^2$ comporte exactement 0, 1 ou 2 points. ☐

(2) La fonction f est strictement convexe sur $[a;b]$ si et seulement si sa dérivée est strictement croissante. ☐

(3) La fonction f est convexe sur $[a;b]$ si et seulement si, pour tous x et $y \in [a;b]$, on a ☐

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\big(f(x) + f(y)\big)$$

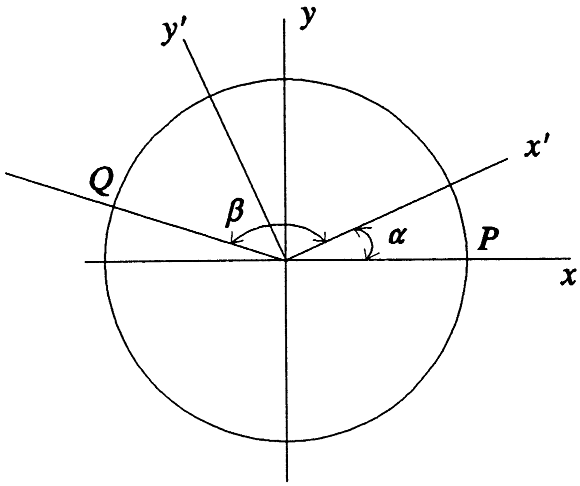
(4) La fonction f est convexe sur $[a;b]$ si et seulement si, pour tout entier $p \geq 2$, pour toute famille $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ de points distincts de $[a;b]$, et toute famille $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p}$ de réels tels que ☐

$0 < \lambda_i < 1$ et que $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$, on a

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i).$$

(5) La fonction f est convexe sur $[a;b]$ si et seulement si son hypographe $(= \{(x;y),\ x \in [a;b],\ y \leq f(x)\})$ est concave. ☐

5. TRIGO. Quelle formule de trigonométrie peut-on établir en calculant la distance PQ dans les deux repères de la figure ci-dessous ?



(1) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\, \cos\beta - \sin\alpha\, \sin\beta$ ☐

(2) $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$ ☐

(3) $\sin\alpha - \sin\beta = 2 \sin\dfrac{\alpha-\beta}{2} \cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ ☐

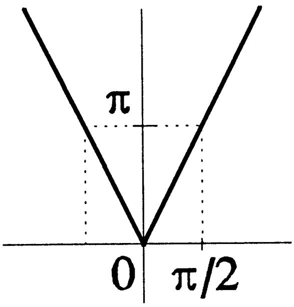
(4) $\tan\alpha + \tan\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\, \cos\beta}$ ☐

(5) $\operatorname{arctan}x + \operatorname{arccotan}x = \dfrac{\pi}{2}$ ☐

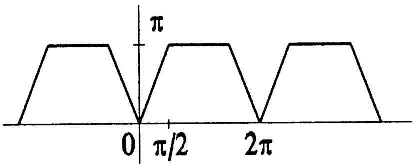
6. Quel graphe peut être celui de la fonction définie par

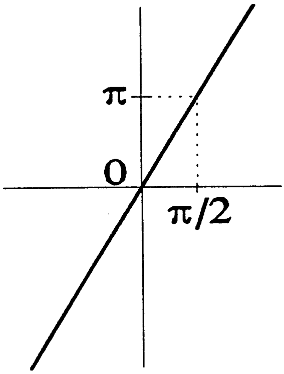
$$f(x) = \arccos(\cos(x)) + \frac{1}{2}\arccos(\cos(2x)) \ ?$$

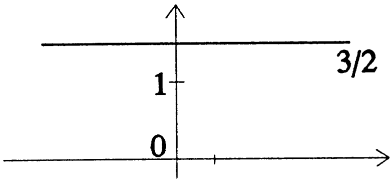
(1) ☐

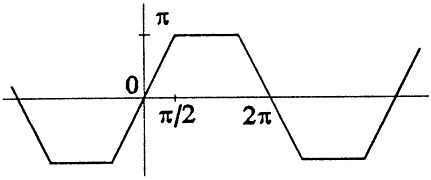


(2) ☐



(3)  ☐

(4)  ☐

(5)  ☐

7. Quelles sont les propriétés de la fonction f définie par

$f(x) = |x|^{\frac{1}{x-1}}$?

(1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. ☐

(2) f se prolonge par continuité en 1, en posant $f(1) = e$. ☐

(3) f est prolongeable par continuité en 1, et la fonction prolongée est dérivable en 1, de dérivée $\frac{1}{2}$. ☐

(4) f est dérivable sur son domaine de définition, et sa dérivée est donnée par ☐

$$f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2} |x|^{\frac{1}{x-1} - 1}$$

(5) f est décroissante sur son ensemble de définition. ☐

8. On considère la fonction f de la variable réelle x définie par $f(x) = \arcsin\sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{2\,(x^2+1)}}$. Les affirmations suivantes sont-elles exactes ?

(1) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. ☐

(2) La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. ☐

(3) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. ☐

(4) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{(x^2+1)^2}$. ☐

(5) La fonction $f +$ arctan a une dérivée nulle sur l'intervalle $]-1;1[$. ☐

9. Quelles sont les relations de comparaisons exactes au voisinage de $+\infty$ entre les fonctions suivantes, formées de puissances exponentielles itérées ?

(1) $\left(\left(x^x\right)^x\right)^x = \left(x^x\right)^{\left(x^x\right)} = \left(x^{\left(x^x\right)}\right)^x$
$= x^{\left(\left(x^x\right)^x\right)} = x^{\left(x^{\left(x^x\right)}\right)}$ ☐

(2) $\left(x^x\right)^{\left(x^x\right)} = \left(x^{\left(x^x\right)}\right)^x$ ☐

(3) $x^{\left(\left(x^x\right)^x\right)} = o\left(x^{\left(x^{\left(x^x\right)}\right)}\right)$ ☐

(4) $x^{\left(x^{\left(x^x\right)}\right)} = o\left(\left(\left(x^x\right)^x\right)^x\right)$ ☐

(5) $\left(\left(x^x\right)^x\right)^x = o\left(\left(x^x\right)^{\left(x^x\right)}\right)$ ☐

10. SOMMES ET PRODUITS TRIGONOMÉTRIQUES. Quelles sont les formules exactes pour tout entier n strictement positif, et tous réels x, y, z, où elles sont définies ?

(1) $$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^n\left(\frac{\pi k}{n}\right) = n$$ ☐

(2) $$\prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch} \frac{x}{2^k} = \frac{1}{2^n \operatorname{sh} \dfrac{x}{2^n}}$$ (les fonctions ch et sh sont définies par $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, et $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$). ☐

(3) $$\sum_{k=1}^{n} \sin^2 kx = \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)x \sin nx}{2 \sin x}$$ ☐

(4) $$\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{\cos 2^k x}\right) = \frac{\tan 2^{n-1} x}{\tan \dfrac{x}{2}}$$ ☐

(5) $$\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx} \sin(y + kz) = \frac{e^{(n+1)x} \sin(y + (n-1)z) - e^{nx} \sin(y + nz)}{e^{2x} - 2e^x \cos z + 1} + \frac{-e^x \sin(y - z) + \sin y}{e^{2x} - 2e^x \cos z + 1}$$ ☐

QCM n°6

Continuité, dérivabilité

(Résultats p. 160)

1. Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ?

(1) Si I est borné, alors f est bornée et atteint ses bornes sur I. ☐

(2) Si a et b sont deux éléments de I, et si $f(a) \leq y \leq f(b)$, alors il existe c entre a et b tel que $f(c) = y$. ☐

(3) Si I est ouvert, alors $f(I)$ est un intervalle ouvert. ☐

(4) Si I est fermé, alors $f(I)$ est un intervalle fermé. ☐

(5) Si I est fermé, alors f atteint ses bornes sur I. ☐

2. On considère une fonction f continue sur un intervalle I. Les propriétés ci-dessous sont-elles exactes ?

(1) La fonction f est bijective de I sur $f(I)$. ☐

(2) Si f est injective, alors f est strictement monotone sur I. ☐

(3) Si f est strictement monotone sur I, alors f est injective. ☐

(4) La fonction f est strictement monotone sur I si et seulement si elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $f(I)$. ☐

(5) Si f^{-1} existe et si f est croissante, alors f^{-1} est décroissante. ☐

3. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I, et soit a un point de I. On suppose que $f + g$ n'est pas continue en a. Que peut-on affirmer ?

(1) Que ni f ni g ne sont continues en a. ☐

(2) Que f et g sont soit simultanément continues, soit simultanément discontinues en a. ☐

(3) Que f et g ne sont pas simultanément continues en a. ☐

(4) Que f est discontinue en a ou que g est discontinue en a. ☐

(5) Que l'on a soit f continue et g discontinue en a, soit g continue et f discontinue en a. ☐

4. Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Qu'affirme le théorème des valeurs intermédiaires ?

(1) Que si a, $b \in I$, $a < b$, $f([a;b])$ est un intervalle. ☐

(2) Que si a, b, $c \in I$, $a < b < c$, il existe $y \in f([a;c])$ tel que $f(b) = y$. ☐

(3) Que si a, $b \in I$, $a < b$, si $c \in [f(a);f(b)]$, alors il existe $y \in [a;b]$ tel que $f(y) = c$. ☐

(4) Que $f(I)$ est un intervalle. ☐

(5) Que si $a < c < b$, avec a, b, $c \in I$, et si $f(c) = 0$, alors $f(a)\,f(b) < 0$. ☐

5. FONCTIONS PÉRIODIQUES. On s'intéresse ici aux propriétés collectives des fonctions périodiques. Les fonctions considérées dans cette question sont toutes définies sur $\mathbb{R}$. Quelles sont les affirmations vraies ?

(1) Si f et g sont deux fonctions périodiques, de périodes respectives λ et μ, $f + g$ est périodique, de période $\lambda\mu$. ☐

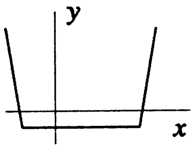
(2) L'ensemble des fonctions périodiques de période λ est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. ☐

(3) L'ensemble des fonctions périodiques est une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. ☐

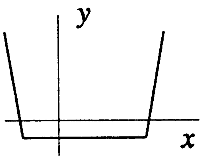
(4) Si f et g sont deux fonctions périodiques, de périodes respectives λ et μ, $f \circ g$ est périodique, de période μ. ☐

(5) Si f est une fonction périodique, de période λ, et si g est une fonction quelconque, $f \circ g$ est périodique, de période λ. ☐

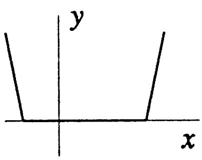
6. A QUOI RESSEMBLE UNE DÉRIVÉE ?
Lequel de ces graphes pourrait être celui de la dérivée (lorsqu'elle est définie) de la fonction dont le graphe est représenté ci-contre ?

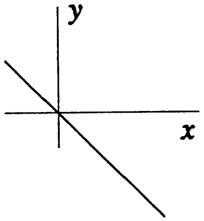


(1) ☐

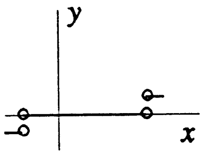


(2) ☐

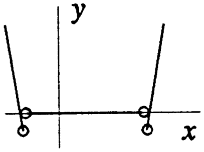


(3) 

☐

(4) 

☐

(5) 

☐

7. Soit f une fonction dérivable sur son ensemble de définition I. Les énoncés suivants sont-ils vérifiés ?

(1) La fonction f est continue. ☐

(2) Si f est paire, alors f' est paire. ☐

(3) Si f' est impaire, alors f est paire. ☐

(4) Si f' est positive sur I, alors f est croissante. ☐

(5) Si I est un intervalle, alors f est strictement croissante sur I si et seulement si f' est strictement positive sur I. ☐

8. DÉRIVABILITÉ ET MONOTONIE. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$. Quelles sont les affirmations correctes ?

(1) La fonction f est croissante sur $[a;b]$ seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in\ ]a;b[$. ☐

(2) La fonction f est croissante sur $[a;b]$ si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in\ ]a;b[$. ☐

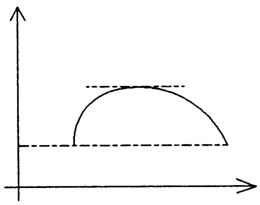
(3) La fonction f est strictement croissante sur $[a;b]$ seulement si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in\ ]a;b[$. ☐

(4) La fonction f est strictement croissante sur $[a;b]$ si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in\ ]a;b[$. ☐

(5) La fonction f est strictement croissante sur $[a;b]$ si et seulement si elle est strictement croissante sur $]a;b[$. ☐

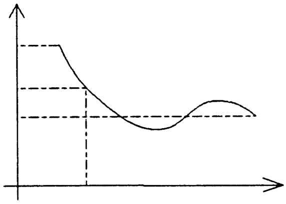
9. Laquelle de ces figures illustre le mieux le théorème des accroissements finis ?

(1)



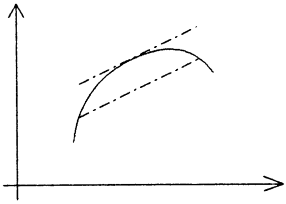
☐

(2)

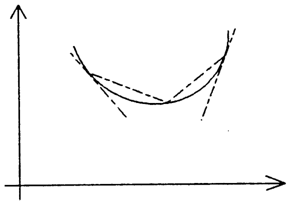


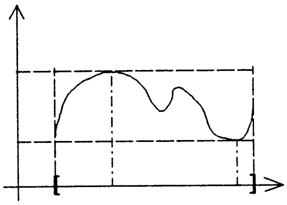
☐

(3)



☐

(4)  ☐

(5)  ☐

10. Soient $a \in \mathbb{R}$, et f la fonction définie par $f(x) = x^5 - 7x + a$. Quelles sont les affirmations exactes ?

(1) f est continue et dérivable en x si et seulement si $x \neq \sqrt[5]{7x - a}$. ☐

(2) f s'annule au plus une fois dans $[-1;1]$. ☐

(3) f' s'annule au moins une fois dans $[-1;1]$. ☐

(4) Si $|a| > 6$, f ne s'annule pas dans $[-1;1]$. ☐

(5) Si $|a| \leq 6$, f s'annule exactement une fois dans $[-1;1]$. ☐

QCM n°7

Intégration sur des intervalles compacts

(Résultats p. 166)

1. Soit f une fonction continue positive sur l'intervalle $[a;b]$. Que représente $\int_a^b f$?

(1) La longueur de la courbe $y = f(x)$ lorsque x décrit $[a;b]$. ☐

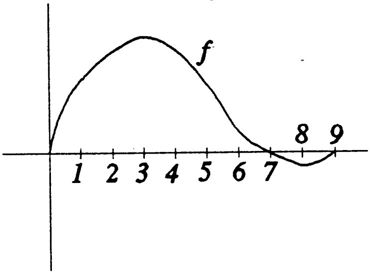
(2) L'aire de la région délimitée par l'axe des y, les droites $y = a$, $y = b$, et le graphe de f. ☐

(3) L'aire de la région délimitée par l'axe des x, les droites $x = a$, $x = b$, et le graphe de f. ☐

(4) $\dfrac{1}{2\pi}$ fois le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe des x de la surface délimitée par les droites $x = a$, $x = b$, et le graphe de f. ☐

(5) $\dfrac{1}{2\pi}$ fois le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe des y de la surface délimitée par les droites $y = a$, $y = b$, et le graphe de f. ☐

2. Soit f la fonction continue dont le graphe est représenté ci-contre, et soit F la fonction définie par



$F(x) = \int_0^x f.$

Où la fonction F atteint-elle son maximum et son minimum dans [0;9] ?

(1) Respectivement en 3 et en 8. ☐

(2) Respectivement en 7 et en 9. ☐

(3) Respectivement en 7 et en 0. ☐

(4) Respectivement en 3 et en 0. ☐

(5) Respectivement en 3 et en 9. ☐

3. EXEMPLES DE FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX. Les fonctions suivantes sont-elles continues par morceaux sur leur intervalle de définition (celui qui est indiqué dans la définition de la fonction) ?

(1) $f_1 : \begin{array}{l}]0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln x \end{array}$ ☐

(2) $f_2 : \begin{array}{l} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \ln x \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ ☐

(3) $f_3 : \begin{array}{l} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \sin \frac{1}{x} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ ☐

(4) $f_4 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lfloor x \rfloor \end{array}$ (la fonction partie entière) ☐

(5) $f_5 : \begin{array}{l} [0;100] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lfloor x \rfloor \end{array}$ (la fonction partie entière) ☐

4. PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX. Quelles sont les affirmations exactes ?

(1) La somme de deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle $[a;b] \subset \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux sur $[a;b]$. ☐

(2) Le produit de deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle $[a;b] \subset \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux sur $[a;b]$. ☐

(3) L'inverse d'une fonction continue par morceaux $f : [a;b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ est une fonction continue par morceaux sur $[a;b]$. ☐

(4) Si f est une fonction continue par morceaux $[a;b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et si g est une fonction continue par morceaux $f([a;b]) \to \mathbb{R}$, alors $g \circ f$ est une fonction continue par morceaux $[a;b] \to \mathbb{R}$. ☐

(5) Toute fonction monotone sur $[a;b] \subset \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur $[a;b]$. ☐

5. CALCULS DE PRIMITIVES. Les affirmations suivantes concernent des fonctions dont les primitives sont calculables par diverses méthodes, dont éventuellement l'intégration par parties et le changement de variable. Quelles sont les affirmations exactes ?

(1) Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{1 + \sin 2x}$ est la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x - \cos x$. ☐

(2) Une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction ☐

$$x \mapsto \frac{\arctan x}{x^2}$$

est la fonction

$$\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \dfrac{\arctan x}{x} \end{cases}$$

(3) Une primitive sur $]e;+\infty[$ de la fonction ☐

$$x \mapsto \frac{\ln x}{x\left(1 - \ln^2 x\right)}$$

est la fonction

$$\begin{cases}]e;+\infty[\to \mathbb{R} \\ \qquad x \mapsto -\frac{1}{2}\ln\left|1 - \ln^2 x\right| \end{cases}$$

(4) Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction ☐

$x \mapsto x^3 e^{2x}$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{4} x^4 e^{2x}$.

(5) Une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction ☐

$x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ est la fonction

$$x \mapsto \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

6. On considère la parabole d'équation

$$y = t(a - x)(x - b),$$

où a, b et t sont des constantes avec $b > a$. Soient

$$P \left| \begin{matrix} p \\ t(a-p)(p-b) \end{matrix} \right. \quad \text{et} \quad Q \left| \begin{matrix} q \\ t(a-q)(q-b) \end{matrix} \right.$$

deux points de cette parabole tels que $a \leq p < q \leq b$.

Quelle est l'aire de la région délimitée par la parabole et la corde PQ ?

(1) $q - p$. ☐

(2) $(q-p)^2$ ☐

(3) $(q-p)^3$ ☐

(4) $\frac{t}{6}(q-p)^3$ ☐

(5) $\frac{t}{6}(q^3-p^3)$ ☐

7. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_x^{x+1} f$. La fonction F est définie sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire de plus ?

(1) La fonction F est continue. ☐

(2) La fonction F est dérivable. ☐

(3) La fonction F est croissante si et seulement si f l'est. ☐

(4) La fonction F est constante si et seulement si f est périodique. ☐

(5) La fonction F est nulle en tout point seulement si f est périodique, de période 1. ☐

8. Un étudiant à qui l'on demandait de déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x \ln x}$ sur $]0;1[$ a fait le raisonnement suivant :

Décomposons la fraction $\dfrac{1}{x \quad \ln x}$ en fractions plus simples :
$\dfrac{1}{x \quad \ln x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{\ln x}$. Il faut $1 = A \ln x + B x$.
soit, en prenant $x = 1$, $B = 1$. Ainsi,
$\displaystyle\int \frac{dx}{x \quad \ln x} = \int \frac{dx}{\ln x} = \ln |\ln x|$.

Que peut-on dire de ce raisonnement ?

(1) Il est correct. ☐

(2) Il est incorrect, parce que la décomposition d'une fraction en somme de fractions plus simples n'est possible que pour les fractions rationnelles (c'est-à-dire pour les quotients de deux polynômes). ☐

(3) Il est incorrect parce que la décomposition trouvée n'est pas valide sur tout l'intervalle $[0;1]$. ☐

(4) Il est incorrect parce que $\ln(\ln x)$ n'est pas une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$. ☐

(5) Il est incorrect car l'étudiant aurait dû préciser $A = 0$. ☐

9. Soit f une fonction strictement croissante et continûment dérivable sur l'intervalle compact (=segment) $[a;b]$. Quelles sont les formules correctes ?

(1) $\int_a^b f = f'(b) - f'(a)$ ☐

(2) $\int_a^b f = bf(b) - af(a) - \int_a^b \left(x \mapsto xf'(x)\right)$ ☐

(3) $\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1} = \dfrac{1}{\int_a^b f}$ ☐

(4) $\int_a^b f = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}$ ☐

(5) $\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \frac{1}{f} = \int_a^b f$ ☐

10. Soient k et p deux entiers, $k \geq 1$, $p \geq 2$. On stocke dans un ordinateur les réels de $[0;1]$ écrits en base p, par blocs de k chiffres. A la suite d'une erreur de programmation, les deux premiers blocs de stockage sont intervertis. Ainsi, un nombre x s'écrivant $x = 0,$ $x_1\ x_2\ ..\ x_n\ ...$ en base p est envoyé sur le réel s'écrivant (toujours en base p)

$$0,\ x_{k+1}\ x_{k+2}\ \cdots\ x_{2k}\ x_1\ x_2\ \cdots\ x_k\ x_{2k+1}\ x_{2k+2}\ \cdots$$

On désigne par f la fonction qui, à x, associe ce nouveau réel. Quelles sont les propriétés de f ?

(1) f est continue sur $[0;1]$. ☐

(2) f est monotone par morceaux sur $[0;1]$. ☐

(3) f est continue par morceaux sur $[0;1]$. ☐

(4) L'intégrale de f sur $[0;1]$ existe, et $\int_0^1 f = \frac{1}{k^p}$. ☐

(5) L'intégrale de f sur $[0;1]$ existe, et $\int_0^1 f = \frac{1}{2}$. ☐

QCM n°8

Développements limités
Formules de Taylor

(Résultats p. 180)

1. DÉVELOPPEMENTS USUELS. Quels sont les développements corrects ?

(1) $\dfrac{1}{1+x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + o(x^n)$ ☐

(2) $\ln(1+x) = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + \dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$ ☐

(3) $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$ ☐

(4) $\sqrt{x} = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{2^2} + \ldots + \dfrac{x^n}{2^{n-1}} + o(x^n)$ ☐

(5) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^r \dfrac{x^{2r}}{2r} + o(x^{2r})$ ☐

2. FONCTIONS ET DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS. Soit f une fonction $[-1;1] \to \mathbb{R}$. Quelles sont les affirmations correctes ?

(1) Si f admet un développement limité d'ordre 0 en 0, alors f est continue en 0. ☐

(2) Si f admet un développement limité d'ordre 1 en 0, alors f est dérivable en 0. ☐

(3) Si f admet un développement limité d'ordre $n \geq 2$ en 0, alors f est n fois dérivable en 0. ☐

(4) Si f admet un développement limité d'ordre $n \geq 2$ en 0, alors f est bornée sur $[-1;1]$. ☐

(5) Si f est définie sur $[-1;+\infty[$, et si $x \mapsto x f\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un développement limité à droite d'ordre 2 en 0, alors (le graphe de) f possède une asymptote en $+\infty$. ☐

3. OPÉRATIONS SUR LES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I dont l'intérieur contient 0 (autrement dit, deux fonctions définies au voisinage de 0). Que peut-on dire des développements des fonctions que l'on peut construire à partir de f et de g ?

(1) Si $f+g$ admet un développement limité d'ordre n en 0, alors f et g admettent aussi un développement limité d'ordre n en 0. ☐

(2) Si f et g admettent un développement limité d'ordre n en 0, $f \circ g$ admet aussi un développement limité d'ordre n en 0. ☐

(3) Si f admet un développement limité d'ordre $n > 1$ en 0, alors f' admet un développement limité d'ordre $n-1$ en 0. ☐

(4) Si f est continue, et si f admet un développement limité d'ordre n en 0, alors toute primitive de f sur I admet un développement limité d'ordre $n+1$ en 0. ☐

(5) Si f admet un développement limité d'ordre $n \geq 1$ en 0, et si g admet un développement limité d'ordre $p \geq 1$ en 0, alors $f \times g$ admet un développement limité d'ordre $n+p$ en 0, obtenu en effectuant le produit des développements limités de f et de g. ☐

4. EXEMPLES DE DÉVELOPPEMENTS PAR CALCUL DIRECT. Quels développements limités en 0 sont exacts ?

(1) $$\tan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17}{45}x^7 + o(x^7)$$ ☐

(2) $$\frac{1}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} = 1 + (2\cos\alpha)x + (2\cos 2\alpha + 1)x^2 + o(x^2)$$ ☐

(3) $$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$ ☐

(4) $$\ln^3\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = -\frac{x^3}{4} + \frac{x^6}{8} - \frac{x^8}{16} + o(x^8)$$ ☐

(5) $\sqrt{\dfrac{x}{\tan x}} = 1 - \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{x^4}{40} + o(x^4)$ ☐

5. APPUYEZ SUR L'ACCÉLÉRATEUR. Si P est une approximation de π à 10^{-n} près, voici trois formules d'accélération qui donnent chacune une meilleure approximation de π.

$$P + \sin P \qquad (a)$$

$$P + 2\cos\frac{P}{2} \qquad (b)$$

$$P + \frac{(2\sin P - \tan P)}{3} \qquad (c)$$

Que peut-on dire de ces trois accélérations ?

(1) (a) est meilleure que (b) et (b) est meilleure que (c). ☐

(2) (a) est meilleure que (b) ou (b) est meilleure que (c). ☐

(3) (c) est la moyenne de (a) et (b). ☐

(4) Si P donne n décimales correctes de π, alors (a) et (b) en donnent chacune au moins $3n$. ☐

(5) Si P est une approximation de π à 10^{-5} près, (c) est une approximation de π à 10^{-40} près. ☐

6. ASYMPTOTES. Les graphes des fonctions qui suivent ont-ils bien les asymptotes indiquées ?

(1) $f_1 : x \mapsto x\left(1 + \frac{1}{3}\sin x\right)$ admet comme asymptote en $+\infty$, la droite d'équation $y = x + \frac{1}{3}$. ☐

(2) $f_2 : x \mapsto x\left(1 + \frac{1}{3}\sin\frac{1}{x}\right)$ admet comme asymptote en $+\infty$, la droite d'équation $y = x + \frac{1}{3}$. ☐

(3) $f_3 : x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$ admet comme asymptote en $+\infty$, la droite d'équation $y = x - 4$. ☐

(4) $f_4 : x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$ admet comme asymptote en $+\infty$, la droite d'équation $y = 1$. ☐

(5) $f_5 : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x\ln x}$ admet comme asymptote en $+\infty$, la droite d'équation $y = x$. ☐

7. APPROXIMATION DE LA FONCTION COSINUS. Quelle est la meilleure approximation, au voisinage de 0, de la fonction cosinus par une fonction de la forme $x \mapsto \dfrac{1 + ax^2}{1 + bx^2}$?

(1) Il n'y a pas unicité de la réponse. ☐

(2) $x \mapsto 1 - \dfrac{x^2}{2}$ ☐

(3) $x \mapsto \dfrac{1 - \dfrac{x^2}{2}}{1 - \dfrac{x^2}{24}}$ ☐

(4) $x \mapsto \dfrac{1 - \dfrac{5}{12}x^2}{1 - \dfrac{1}{12}x^2}$ ☐

(5) $x \mapsto \dfrac{1 - \dfrac{5}{12}x^2}{1 + \dfrac{1}{12}x^2}$ ☐

8. DÉVELOPPEMENT DE LA FONCTION INCONNUE. Si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, et si

$$\lim_{x \to 0} \frac{\exp(\tan^\alpha x) - \exp(x^\alpha)}{x^{\alpha+2}} = 1,$$

que vaut α ?

(1) Les hypothèses ne permettent pas de répondre à la question. ☐

(2) π ☐

(3) 3 ☐

(4) 4 ☐

(5) 5 ☐

9. LIMITES. Quelles sont les limites correctes ?

(1) ☐

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x^x - (\sin x)^x - \dfrac{x^3}{6}}{x^4 \ln x} = \frac{1}{12}$$

(2) ☐

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x^x - (\sin x)^{\sin x}}{x^3} = -\infty$$

(3) ☐

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x} = \frac{1}{e}$$

(4) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x} \right)^{x \ln x} = 1$$ ☐

(5) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left[(1+x)^{\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{x}} \right] (x \ln x)^2}{x^{\left(x^{\frac{1}{x}}\right)} - x} = 1$$ ☐

10. ENCADREMENTS ET DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS. Quels sont les encadrements exacts ?

(1) $\forall x \in]-1;0[, \quad \frac{1}{1+x} < \ln(1+x) < x$ ☐

(2) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < e^x$ ☐

(3) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ☐

(4) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k!} < e^{-1} < \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!}$ ☐

(5) $\frac{1}{3} < e^{-1} < \frac{3}{8}$ ☐

QCM n°9

Intégrales impropres

(Résultats p. 198)

1. Soit f une fonction dont le graphe est un demi-cercle d'extrémités $(a;0)$ et $(b;0)$, $a < b$. Que peut-on dire de l'intégrale $\int_a^b ff'$?

(1) Elle converge si le graphe est dans le demi-plan positif, et diverge sinon. ☐

(2) Elle diverge toujours. ☐

(3) Elle converge toujours. ☐

(4) Elle diverge parce que f' n'est pas définie. ☐

(5) L'intégrale peut diverger ou converger : le résultat dépend des valeurs de a et de b. ☐

2. Soient f et g deux fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Quelles sont les affirmations de convergence correctes [3] ?

(1) Si f est continue et impaire, elle est intégrable sur $\mathbb{R}$, et $\int_{-\infty}^{+\infty} f = 0$. ☐

---

[3] Voir p. 198 pour la terminologie.

(2) Si $f+g$ est intégrable sur $[a;+\infty]$, alors f et g sont intégrables sur $[a;+\infty]$ (autrement dit «si $\int_a^{+\infty}(f+g)$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_a^{+\infty} g$ convergent»). ☐

(3) Pour que f soit intégrable sur $[a;+\infty]$ (autrement dit, pour que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge), il est nécessaire que l'on ait $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. ☐

(4) Pour que f soit intégrable sur $[a;+\infty]$ (autrement dit, pour que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge), il est suffisant que l'on ait $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. ☐

(5) Si f est positive et décroissante sur $[a;+\infty]$, pour que f soit intégrable sur $[a;+\infty]$ (autrement dit, pour que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge), il est nécessaire que l'on ait $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. ☐

3. Soit f la fonction $\mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$.

Que peut-on dire de f ?

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} x f(x) = +\infty$ ☐

(2) $\lim\limits_{x \to 0} x f(x) = +\infty$ ☐

(3) f est intégrable sur $[0;1]$ (*i.e.* $\int_0^1 f$ converge). ☐

(4) f est intégrable sur $[1;+\infty]$ (*i.e.* $\int_1^{+\infty} f$ converge). ☐

(5) f est intégrable sur $[0;+\infty]$ (*i.e.* $\int_0^{+\infty} f$ converge). ☐

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{\sin nx}{\sin x}$. Que peut-on dire de $I_n = \int_0^{2\pi} f_n$?

(1) L'intégrale I_n converge car f coïncide, sauf en un nombre fini de points, avec une fonction continue par morceaux sur $[0;2\pi]$. ☐

(2) L'intégrale I_n converge si $n > 2$. ☐

(3) L'intégrale I_n converge seulement si $n > 2$. ☐

(4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = 0$. ☐

(5) Pour tout entier naturel impair n, $I_n = 2\pi$. ☐

5. Soit f une fonction continue strictement décroissante telle que $f(0) = 1$, et que $\int_0^{+\infty} f$ soit finie. Que peut-on dire de $\int_0^1 f^{-1}$, où f^{-1} désigne la fonction réciproque de f ?

(1) $\int_0^1 f^{-1}$ n'existe pas forcément. ☐

(2) $\int_0^1 f^{-1}$ existe et vérifie ☐

$$\int_0^1 f^{-1} \leq \int_0^{+\infty} f.$$

(3) $\int_0^1 f^{-1}$ existe et vérifie ☐

$$\int_0^1 f^{-1} = \int_0^{+\infty} f.$$

(4) $\int_0^1 f^{-1}$ existe et vérifie ☐

$$\int_0^1 f^{-1} \geq \int_0^{+\infty} f.$$

(5) $\int_0^1 f^{-1}$ existe et vérifie ☐

$$\int_0^1 f^{-1} = - \int_0^{+\infty} f.$$

6. Soit f une fonction continue périodique sur $\mathbb{R}$, de période T. Peut-on dire que

(1) $x \mapsto \int_x^{x+T} f$ est de période T ? ☐

(2) $x \mapsto \int_x^{x+T} f$ est une fonction constante ? ☐

(3) $\int_0^{+\infty} f$ converge ? ☐

(4) $f^2 = f \circ f$ est de période T^2 ? ☐

(5) $[f]^2 = f \cdot f$ est de période $2T$? ☐

7. DU VENT ! Dans certaines circonstances, la résistance de l'air peut prendre une forme en kv^a, avec $a > 1$; si v est la vitesse d'un corps en mouvement soumis à cette résistance, l'équation du mouvement, $\frac{dv}{dt} = g - kv^a$, montre que la vitesse finale, v_0, est donnée par $v_0 = \left(\frac{g}{k}\right)^{\frac{1}{a}}$, et est atteinte à l'instant

$$\int_0^{v_0} \left(v \mapsto \frac{1}{g - kv^a}\right) = \frac{v_0^{1-a}}{k} \int_0^1 \left(x \mapsto \frac{1}{1 - x^a}\right)$$

Afin de savoir si cette vitesse terminale est atteinte en un temps fini, on étudie la convergence de l'intégrale impropre

$$\int_0^1 \left(x \mapsto \frac{1}{1 - x^a}\right).$$

Quelles sont les affirmations exactes ?

(1) Cette intégrale converge si $a > 1$, diverge si $a \leq 1$. ☐

(2) Cette intégrale diverge pour tout $a > 0$. ☐

(3) Cette intégrale converge pour tout $a > 0$. ☐

(4) Si $a = 1/n$, $n \in \mathbb{N}^*$, une primitive sur $]0;1[$ de la fonction $]0;1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{1 - x^{\frac{1}{n}}}$ est la fonction $]0;1[\to \mathbb{R}$, ☐

$$x \mapsto -n\left[\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{n-1}}{n-1}\right]$$

(5) Si $a = n$, $n \in \mathbb{N}^*$, est pair, une primitive sur $]0;1[$ de la fonction $]0;1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{1 - x^{\frac{1}{n}}}$ est la fonction ☐

$]0;1[\to \mathbb{R}$,

$x \mapsto$

$$-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor} \cos\frac{2k\pi}{n}\ln\left(x^2 - 2\,x\cos\frac{2k\pi}{n} + 1\right)$$

$$+\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

8. CALCULS D'INTÉGRALES PAR DES MÉTHODES DIVERSES. Il n'y a pas que le calcul des primitives qui permette de calculer des intégrales définies. Les assertions suivantes proposent des méthodes diverses, et des valeurs pour des intégrales, impropres ou non. Quelles sont les assertions donnant à la fois une méthode permettant effectivement de calculer l'intégrale indiquée, et une valeur correcte de cette intégrale ?

(1) Le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - y$ permet d'obtenir ☐

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x \mapsto \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} \right) = \frac{\pi}{4}$$

(2) La fonction f ☐

$$\begin{cases} \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{(\cos x)^{\sin x}}{(\cos x)^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}} \end{cases}$$

vérifie $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$, de sorte que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f = \frac{\pi}{4}$.

(3) Le changement de variable $x = \pi - y$ permet d'obtenir ☐

$$I_3 = \int_0^{\pi} \left(x \mapsto \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} \right) = \frac{\pi^2}{2}$$

(4) En dérivant par rapport à y la fonction ☐

$$g : y \mapsto \int_0^{+\infty}\left(x \mapsto e^{-xy}\,\frac{\sin x}{x}\right)$$

puis en réintégrant le résultat, on calcule

$$g(y) = \int_0^{+\infty}\left(x \mapsto e^{-xy}\,\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan y$$

(5) Le changement de variable $y = \dfrac{1}{x}$ permet d'obtenir ☐

$$\int_1^{+\infty}\left(x \mapsto e^{x^2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

9. UNE FAMILLE DE FONCTIONS. Pour tout réel λ, soit f_λ la fonction définie par $f_\lambda(x) = \dfrac{1}{|\lambda - \sin x|^\lambda}$. Pour quelles valeurs de λ peut-on intégrer cette fonction sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$? (Autrement dit, pour quelles valeurs de λ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{|\lambda - \sin x|^\lambda}$ converge-t-elle ?)

(1) f_λ est intégrable sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ si et seulement si $\lambda \geq 0$. ☐

(2) f_λ est intégrable sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ si $\lambda \leq 0$. ☐

(3) f_λ est intégrable sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ si et seulement si $\lambda \in \left]0\,;1\right]$. ☐

(4) f_λ est intégrable sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ si et seulement si $\lambda \neq 1$. ☐

(5) Si f_λ n'est pas intégrable sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, alors $\lambda \in \left]0\,;1\right]$. ☐

10. EXEMPLES D'INTÉGRALES IMPROPRES. Quelles sont les fonctions qui sont intégrables sur $[0;+\infty]$? (Autrement dit, "pour chacune des fonctions f suivantes, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ converge-t-elle ?")

(1) $f_\alpha : x \mapsto \dfrac{\ln x \arctan x}{x^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. ☐

(2) $g : x \mapsto \dfrac{1}{1 + e^x \sin^2 x}$ ☐

(3) $h : x \mapsto \dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta}$, avec $\beta < 1$, et $\alpha < 0$. ☐

(4) $k : x \mapsto \dfrac{e^{-\frac{1}{2x^2}} - e^{-\frac{2}{x^2}}}{x}$ ☐

(5) $m : x \mapsto \dfrac{\cos 2x - \cos x}{x}$ ☐

QCM n°10

Algorithmes et méthodes numériques

(Résultats p. 218)

1. Dans le programme ci-dessous, la notation $p \leftarrow q$ signifie "affecter la valeur de q à la variable p". Quelle sera la seconde valeur enregistrée à la ligne 3 ?

```
1.    x ← 2, y ← 3
2.    z ← (x + y)
3.    Enregistrer la valeur de z.
4.    x ← (x + y)
5.    GOTO 2
```

(1) 5 ☐

(2) 7 ☐

(3) 8 ☐

(4) 10 ☐

(5) 12 ☐

2. Soient A, B et C trois ensembles. Que vaut

$$\left((A \cup B)^c \cap (A \cup B \cup C^c)^c\right) \cup \left(A \cap B \cap C \cap (A \cup C^c)^c\right) ?$$

(On aura intérêt à se servir d'une calculatrice programmable ou d'un ordinateur.)

(1) $A \cup B \cup C$ ☐

(2) $A \cap B \cap C$ ☐

(3) $A \setminus (B \cup C)$ ☐

(4) $B \setminus (A \cup C)$ ☐

(5) $C \setminus (A \cup B)$ ☐

3. Quel est le comportement de la suite définie par

$$u_0 \in \mathbb{R}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2 - u_n} ?$$

(1) Quel que soit u_0, la suite n'est pas définie pour tout n. ☐

(2) La suite est définie pour tout u_0 n'appartenant pas à $\left\{-1\,;0\,;\frac{1}{2}\,;1\,;2\right\}$. ☐

(3) Pour tout $u_0 \notin \left\{-1\,;0\,;\frac{1}{2}\,;1\,;2\right\}$, la suite (u_n) converge vers $\dfrac{\sqrt{19}-\sqrt{2}}{2}$. ☐

(4) Pour tout $u_0 \notin \left\{-1\,;0\,;\frac{1}{2}\,;1\,;2\right\}$, la suite (u_n) tend vers $+\infty$. ☐

(5) Pour tout $u_0 \notin \left\{-1\,;0\,;\frac{1}{2}\,;1\,;2\right\}$, la suite (u_n) est périodique. ☐

4. UNE ÉQUATION POLYNOMIALE. Sachant que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ en est une, que peut-on dire des racines du polynôme

$$x^6+3x^5-12x^4-30x^3+21x^2+3x-2\ ?$$

(1) $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ est racine du polynôme. ☐

(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ sont racines du polynôme. ☐

(3) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ sont racines du polynôme. ☐

(4) $-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ est racine du polynôme. ☐

(5) $\sqrt{2}+i\sqrt{3}$ est racine du polynôme. ☐

5. TRI. Voici la description d'un algorithme dont le but est de trier par ordre croissant n nombres constituant une liste A de n éléments, $A = \{ A[1], ..., A[n] \}$.

Première étape
Comparer d'abord $A[1]$ et $A[2]$, et classer ces deux éléments de la liste, de façon à avoir $A[1] \leq A[2]$. Comparer ensuite $A[2]$ et $A[3]$, et trier ces deux nombres, de façon à avoir $A[2] \leq A[3]$. Continuer ainsi jusqu'à avoir $A[n-1] \leq A[n]$.

Deuxième étape
Répéter la première étape avec la liste

$$\{A[1] \,;\, A[2] \,;\, ... \,;\, A[n-1]\}$$

Troisième étape
Répéter la première étape avec la liste

$$\{A[1] \,;\, A[2] \,;\, ... \,;\, A[n-2]\}$$

...

n–1-ième étape
Comparer $A[1]$ et $A[2]$, et classer ces deux éléments de la liste, de façon à avoir $A[1] \leq A[2]$.

Que peut-on dire de cet algorithme ?

(1) Cet algorithme ne peut pas fonctionner pour trier la liste. ☐

(2) Cet algorithme classe les éléments de la liste par ordre décroissant. ☐

(3) Cet algorithme classe bien les éléments de la liste par ordre croissant. ☐

(4) Le nombre de comparaisons à effectuer pour trier une liste de n éléments dépend de la configuration initiale de ces n éléments. ☐

(5) Le nombre de comparaisons à effectuer pour trier une liste de n éléments ne dépend pas de la configuration initiale de ces n éléments. ☐

6. TRI. Voici la description d'un algorithme dont le but est de trier par ordre croissant n nombres constituant une liste A de n éléments, $A = \{ A[1], ..., A[n] \}$.

> Le principe de l'algorithme est de trier successivement la liste $\{ A[1] \}$, puis la liste $\{ A[1] ; A[2] \}$, ..., jusqu'à la liste complète A.
>
> **Première étape**
> Pas de tri à effectuer : $A[1]$ est trivialement trié.
>
> **Deuxième étape**
> Placer $A[2]$ par rapport à $A[1]$, de façon à avoir $A[1] \leq A[2]$. Après la deuxième étape, la liste $\{ A[1] ; A[2] \}$ est triée.
>
> **Troisième étape**
> Insérer $A[3]$ dans la liste $\{A[1] ; A[2]\}$, en comparant d'abord $A[3]$ à $A[2]$, puis éventuellement à $A[1]$. Après la deuxième étape, la liste $\{ A[1] ; A[2] ; A[3] \}$ est triée.
>
> ...
>
> ***n*-ième étape**
> Insérer $A[n]$ dans la liste $A[1] ; A[2] ; .. ; A[n-1\}$, en comparant successivement $A[n]$ à $A[n-1]$, puis éventuellement à $A[n-1]$, etc., jusqu'à avoir une liste complètement triée.

Que peut-on dire de cet algorithme ?

(1) Cet algorithme ne peut pas fonctionner pour trier la liste. ☐

(2) Cet algorithme classe les éléments de la liste par ordre décroissant. ☐

(3) Cet algorithme classe bien les éléments de la liste par ordre croissant. ☐

(4) Le nombre de comparaisons à effectuer pour trier une liste de n éléments dépend de la configuration initiale de ces n éléments. ☐

(5) Le nombre de comparaisons à effectuer pour trier une liste de n éléments ne dépend pas de la configuration initiale de ces n éléments. ☐

7. EQUATION DU SECOND DEGRÉ. On cherche des algorithmes itératifs pour approcher les solutions complexes de l'équation du second degré

$$z^2 + az + 2a = 0,\ a \in \mathbb{R}.$$

Les algorithmes suivants convergent-ils dans les conditions indiquées ?

(1) Si $a = 4$, $z_{n+1} = \frac{1}{4}\left(-8 - z_n^2\right)$, avec z_0 nombre complexe quelconque. ☐

(2) Si $a = 4$, $z_{n+1} = \frac{-8}{z_n + 4}$, avec z_0 nombre complexe tel que la suite soit définie. ☐

(3) Si $a = 4$, $z_{n+1} = -4 - \frac{8}{z_n}$, avec z_0 nombre complexe tel que la suite soit définie. ☐

(4) Si $a = -1$, $z_{n+1} = \dfrac{2}{z_n - 1}$, avec z_0 nombre complexe tel que la suite soit définie. ☐

(5) Si $a = 3 + \sqrt{5}$, $z_{n+1} = \dfrac{-2a}{z_n + a}$, avec z_0 nombre complexe tel que la suite soit définie. ☐

8. PROBABILITÉS ET ALGORITHMES. "Quand on choisit au hasard une fraction, quelle est la probabilité pour qu'elle soit irréductible ?" Une question équivalente avait été posée en 1673 par Oldenburg ; Jacques Bernoulli n'avait pu la résoudre, et c'est finalement Leonhard Euler qui en vint à bout. Avec les outils dont on dispose maintenant, que peut-on dire de cette probabilité P ?

(1) La question n'a pas de sens, car il n'y a pas moyen de donner un sens à "prendre une fraction au hasard". ☐

(2) $P = \dfrac{1}{2}$ ☐

(3) $P = \dfrac{1}{4}$ ☐

(4) $P = \left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{5^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{7^2}\right)\ldots$ ☐

(5) On peut faire une évaluation numérique de P en répétant un grand nombre de fois l'expérience consistant à prendre deux nombres aléatoires grâce à la fonction RANDOM, qui donne un entier pris au hasard entre deux bornes fixées, et en comptant le nombre de fois où ces deux entiers sont premiers entre eux. ☐

9. NOMBRES PSEUDO-RATIONNELS. Voici, en français, la description d'un algorithme :

> Partant d'un réel x, on écrit $x = n_1 + d_1$, où n_1 est la partie entière de x, et où d_1 est la partie décimale de x. Si d_1 est non nul, on écrit $r_1 = 1/d_1 = n_2 + d_2$, où n_2 est la partie entière de $1/d_1$, et où d_2 est la partie décimale de ce nombre. On continue ainsi ; lorsque n_k et d_k ont été trouvés, si d_k est non nul, on décompose $1/d_k$ sous la forme $1/d_k = n_{k+1} + d_{k+1}$. On arrête l'algorithme lorsqu'on a calculé K nombres n_k et d_k, où K est un entier fixé au départ.

Que peut-on dire de cet algorithme ?

(1) Tel qu'il est décrit, l'algorithme ne peut pas être programmé. ☐

(2) Pour tout nombre réel x, l'algorithme s'arrête tout seul après un certain temps, sans qu'il soit nécessaire de donner une valeur à K. ☐

(3) Si l'on pose $y_1 = n_1$, $y_2 = n_1 + \dfrac{1}{n_2}$, □

$$y_3 = n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3}},$$

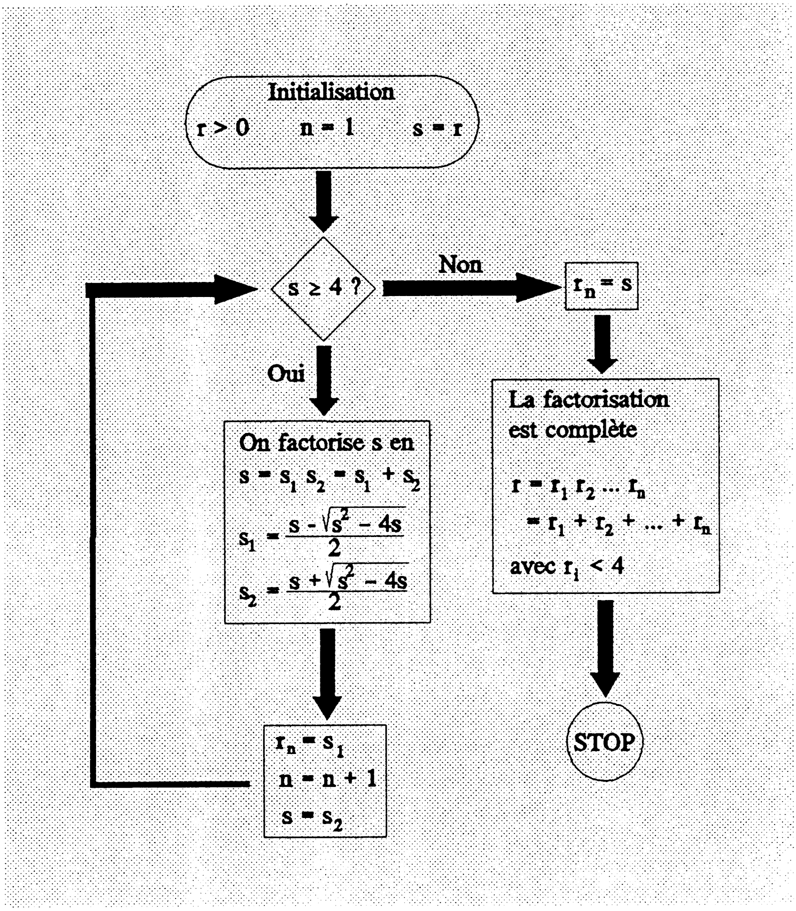
$$y_4 = n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{n_4}}}, \ldots, \text{ on obtient}$$

une suite de fractions qui converge vers x.

(4) S'il existe un entier k tel que $d_k = 0$, alors x est un nombre rationnel (*i.e.* $x \in \mathbf{Q}$). □

(5) Pour tout x, la suite (n_k) est périodique. □

10. FACTORISATION. Que fait l'algorithme dont voici l'organigramme ?



(1) Rien : il ne peut fonctionner si $r \geq 4$. ☐

(2) Il permet de décomposer tout nombre réel strictement positif r sous la forme ☐
$$r = r_1\, r_2 \ldots r_n = r_1 + r_2 + \ldots + r_n$$

(3) Il factorise les nombres réels strictement positifs en produit de facteurs premiers. ☐

(4) Il factorise les nombres entiers strictement positifs en produit de facteurs premiers. ☐

(5) Il décompose tout nombre entier strictement positif en une somme d'entiers premiers entre eux. ☐

QCM n°11

Récapitulatif

(Résultats p. 245)

1. UNE FONCTION ÉTUDIÉE PAR JENSEN. L'inégalité de Jensen compare les deux expressions $\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right]^{\frac{1}{p}}$ et $\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^q\right]^{\frac{1}{q}}$, où les a_i sont > 0, et où l'on a $0 < p < q$.
Pour établir cette inégalité, il suffit de trouver les variations de la fonction

$$F : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \left(a_1^x + \ldots + a_n^x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Quelle est l'expression de $\frac{d}{dx}\left(\ln F(x)\right)$, la dérivée de $\ln F$ au point x ?

(1) $$-\frac{a_1^{x-1} + \ldots + a_n^{x-1}}{x^2}$$ ☐

(2) $$-\frac{a_1^{x-1}\ln a_1^x + \ldots + a_n^{x-1}\ln a_n^x}{x^2}$$ ☐

(3) $$-\frac{a_1^{x-1}\ln a_1^x + \ldots + a_n^{x-1}\ln a_n^x}{x^2\left(a_1^x + \ldots + a_n^x\right)}$$ ☐

(4) $$\frac{1}{x^2\left(a_1^x + \ldots + a_n^x\right)} \times$$ ☐

$$\left(\begin{array}{l} a_1^{x-1} \ln a_1^x + \ldots + a_n^{x-1} \ln a_n^x \\ \qquad - \left(a_1^x + \ldots + a_n^x\right) \ln\left(a_1^x + \ldots + a_n^x\right) \end{array}\right)$$

(5) $$\frac{1}{x^2\left(a_1^x + \ldots + a_n^x\right)} \times$$ ☐

$$\left(\begin{array}{l} a_1^{x} \ln a_1^x + \ldots + a_n^{x} \ln a_n^x \\ \qquad - \left(a_1^x + \ldots + a_n^x\right) \ln\left(a_1^x + \ldots + a_n^x\right) \end{array}\right)$$

2. CONVEXITÉ ET SUITES. Soit (u_n) une suite réelle telle que, pour tous m et $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_{m+n} \leq u_m + u_n$. Que peut-on dire de la suite (u_n) ?

(1) Pour tout $\alpha > 1$, la suite $\left(\dfrac{u_n}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. ☐

(2) Pour tous n et $p \in \mathbb{N}^*$, on a l'inégalité $\dfrac{u_{np}}{np} \leq \dfrac{u_n}{n}$. ☐

(3) La suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si elle est bornée. ☐

(4) Si la suite (u_n) est à valeurs positives, la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. ☐

(5) La suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge seulement si la suite (u_n) est à valeurs positives. ☐

3. PASCAL. Que fait le programme suivant ?

```
PROGRAM AMBIGU
   VAR
    i,j:integer;
    A,B,C,D:ARRAY[1..3,1..3]  of integer;
BEGIN
   FOR i:=1 TO 3 DO
    BEGIN
   FOR j:=1 TO 3 DO
     BEGIN
    A[i,j]:=1;B[i,j]:=2;C[i,j]:=0;D[i,j]:=0;
     END;
    END;

   FOR i:=1 TO 3 DO
   FOR j:=1 TO 3 DO
    C[i,j]:=A[i,j]*B[i,j];
    D[i,j]:=A[i,j]*B[i,j];

   FOR i:=1 TO 3 DO
   writeln(C[1,i],'   ;',D[1,i]);{on imprime seulement la
     première ligne des matrices C et D}
END.
```

(1) Il affecte la valeur 2 à tous les coefficients des matrices C et D. ☐

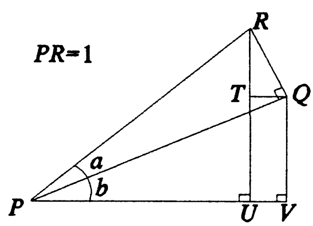
(2) Il affecte la valeur 0 à tous les coefficients de la matrice C, et la valeur 2 à tous les coefficients de D. ☐

(3) Il affecte la valeur 2 à tous les coefficients de la matrice C. ☐

(4) Il affecte la valeur 2 à tous les coefficients de la matrice D. ☐

(5) Il affecte la valeur 2 à au plus un coefficient de la matrice D, et la valeur 0 aux autres coefficients de D. ☐

4. Quelle est la formule de trigonométrie que l'on peut démontrer en s'aidant de cette figure ?



(1) $$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$ ☐

(2) $$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$ ☐

(3) $$\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}$$ ☐

(4) $$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$ ☐

(5) $$\cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$ ☐

5. COUPEZ ! On veut couper un fil de fer de longueur 1 pour faire avec les deux morceaux, un carré et un cercle (le fil marque le bord du carré et du cercle).

Comment faut-il couper le fil pour que l'aire totale du carré et du cercle soit minimale ?

(1) Il ne faut pas couper le fil et faire seulement un carré (cercle de diamètre nul). ☐

(2) Il ne faut pas couper le fil et faire seulement un cercle (carré de côté nul). ☐

(3) Il faut couper le fil en son milieu. ☐

(4) Il faut couper le fil en $x = \dfrac{4}{4+\pi}$, et faire le carré avec le morceau de longueur x. ☐

(5) Il faut couper le fil en $x = \dfrac{4}{4+\pi}$, et faire le cercle avec le morceau de longueur x. ☐

6. En passant aux fonctions réciproques, dans la formule

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

on obtient une formule permettant la sommation de certaines séries. Les assertions suivantes portent sur de telles séries.

Les sommes proposées sont-elles exactes ?

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{2}{1 + (2n+1)(2n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{2n^2} = \frac{\pi}{4}$$ ☐

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{n^2}{1 + n(n+1)} = \pi$$ ☐

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{n \cdot n!}{1 + n!\,(n+1)!} = \frac{\pi}{4}$$ ☐

(4) $$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{\ln n}{1 + \ln(n+1)} = \frac{3\pi}{2}$$ ☐

(5) $$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{1 + \ln n \ln(n+1)} = \frac{\pi}{2}$$ ☐

7. Deux réels a et b tels que $0 < a < b$ étant donnés, on définit deux suites numériques (u_n) et (v_n) par :

$$u_0 = a,\ v_0 = b \text{ et, pour } n \geq 0,$$
$$u_{n+1} = \frac{u_n v_n (u_n + v_n)}{u_n^2 + v_n^2},\quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Peut-on dire que :

(1) Pour tout $n \geq 0$, on a $v_n - u_n > 0$? ☐

(2) (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers α et β ? ☐

(3) $\alpha < \beta$? ☐

(4) (u_n) et (v_n) sont adjacentes ? ☐

(5) $\alpha = 1/a + 1/b$? ☐

8. Soient a, b, m et n quatre réels strictement positifs tels que $a < b$ et $m < n$. Quelles sont les inégalités reliant $(b^m - a^m)^n$ et $(b^n - a^n)^m$?

(1) $(b^m - a^m)^n < (b^n - a^n)^m$ ☐

(2) $(b^m - a^m)^n > (b^n - a^n)^m$ ☐

(3) $(b^m - a^m)^n = (b^n - a^n)^m$ ☐

(4) $(b^m - a^m)^n < (b^n - a^n)^m$ si et seulement si $b - a > 1$. ☐

(5) $(b^m - a^m)^n > (b^n - a^n)^m$ si et seulement si $b - a > 1$. ☐

9. BIG DEV... Ces développements limités à l'ordre 4 ou 5 au voisinage de 0 sont-ils exacts ?

(1) $$(\cos x)^{1+\sin x} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)$$ ☐

(2) $$(1+\arctan x)^{\frac{x}{\sin^2 x}} = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2}x + \frac{11\mathrm{e}}{24}x^2 - \frac{13\mathrm{e}}{48}x^3 + \frac{1\,583\,\mathrm{e}}{5\,760}x^4 + o(x^4)$$ ☐

(3) $$\arcsin(\pi \sin x) = \pi x + \frac{\pi^3 - \pi}{6}x^3 + \frac{9\pi^5 + \pi}{120}x^5 + o(x^5)$$ ☐

(4) Fonction réciproque, g, au voisinage de 0, de la fonction $x \mapsto \arcsin(\pi \sin x)$ ☐

$$g(x) = \frac{1}{\pi}x - \frac{(-1+\pi)(1+\pi)}{6\pi^3}x^3 + \frac{\pi^4 - 10\pi^2 + 9}{120\,\pi^5}x^5 + o(x^5)$$

(5) $$\mathrm{e}^{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})} = \mathrm{e} + \mathrm{ie}x - \mathrm{e}x^2 - \frac{5}{6}\mathrm{ie}x^3 + \frac{5}{8}\mathrm{e}x^4 + \frac{13}{30}\mathrm{ie}x^5 + o(x^5)$$ ☐

10. Soit $f : [0;+\infty[$ une fonction vérifiant la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x)\, e^{f(x)} = x.$$

Que peut-on dire ?

(1) Il n'existe pas de fonction f satisfaisant à cette condition. ☐

(2) Il n'existe pas de fonction f continue satisfaisant à cette condition. ☐

(3) Il n'existe qu'une fonction f satisfaisant à cette condition, qui est continue, strictement croissante, et vérifie ☐

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln x.$$

(4) Il n'existe qu'une fonction f satisfaisant à cette condition, qui est continue, strictement croissante, et vérifie ☐

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^x}{\ln x}.$$

(5) L'ensemble des fonctions continues qui satisfont à la condition est le sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions continues $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ engendré par la fonction $x \mapsto x \ln x$. ☐

11. UN THÉORÈME DE COURSE. Soit f une fonction continue $[0;1] \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = f(1)$. Soient p un entier ≥ 2, et g la fonction $\left[0\,;1-\dfrac{1}{p}\right]$ définie par $g(x) = f\left(x+\dfrac{1}{p}\right) - f(x)$. Que peut-on dire de f et de g ?

(1) Il existe $\alpha \in [0;1]$ tel que ☐
$$f(\alpha+1) = f(\alpha).$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} g\left(\frac{k}{p}\right) = 0$ ☐

(3) Il existe i et $j \in \{0;1;2;...;p-1\}$ tels que ☐
$$g\left(\frac{i}{p}\right) \times g\left(\frac{j}{p}\right) < 0.$$

(4) Pour tout $i \in \{0;1;...;p-1\}$, $g\left(\dfrac{i}{p}\right) = 0$. ☐

(5) Il existe $\alpha \in [0;1]$ tel que ☐
$$f\left(\alpha+\frac{1}{p}\right) = f(\alpha).$$

Résultats du QCM n°1
Raisonnement, notions de base

(Questions p. 7)

1.

(1) ■
(2) ■
(3) ■
(4) □
(5) □

Les trois premières assertions sont équivalentes à $p \Rightarrow q$. A la place des assertions (4) et (5), on aurait pu écrire :

(6) Pour que p, il est nécessaire que q.
(7) p seulement si q.

2.

(1) □
(2) ■
(3) □
(4) □
(5) □

Le *et* logique doit relier deux assertions distinctes. Lorsque Pierre et Paul déplacent la table, ils le font ensemble : la phrase ne peut se décomposer en : "Pierre déplace la table, et Paul déplace la table". En revanche, on peut raisonnablement penser qu'ils aiment Marie séparément. Dans l'assertion (3), le *et* n'est pas commutatif : les deux phrases "Ils se marièrent *et* ils eurent beaucoup d'enfants" et "ils eurent beaucoup d'enfants *et* ils se marièrent" ne sont pas équivalentes. Le *et* a ici une nuance de *puis*. L'assertion (4) ne peut se décomposer en "Il a été classé trente et il a été classé unième". Enfin, le *et* de l'assertion (5) exprime une idée de conséquence *et par conséquent*, qui ne saurait être commutative.

3.

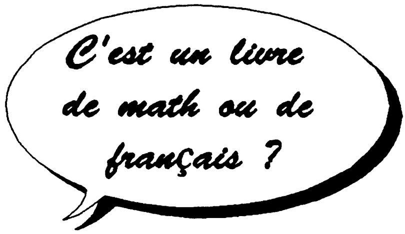
(1) ■
(2) □
(3) □
(4) □
(5) □

Le *ou* logique n'est pas exclusif. Dans la première phrase, le choc physique n'exclut pas l'émotion, tandis que dans la deuxième, il est exclu que le ministre et le secrétaire d'Etat président tous les deux. Les règles de français permettent de distinguer si un *ou* est exclusif ou non. Dans son LAROUSSE DES DIFFICULTÉS, A. V. Thomas explique : "Après deux noms au singulier unis

---

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

par *ou*, le verbe se met au singulier ou au pluriel, selon que l'un des termes exclut l'autre ou que la conjonction a un sens voisin de « et »." (Exercice : Les deux *ou* soulignés dans la phrase précédente peuvent-ils raisonnablement être assimilés à des *ou* logiques ?)



Dans la phrase (3), le *ou* ne relie pas des assertions discernables, et a plutôt le sens de "c'est-à-dire". La phrase (4) est incorrecte, puisque "l'emploi de *ou* hors du sens affirmatif est incorrect". Au niveau logique, le *ni* par lequel il faudrait le remplacer aurait le sens de *et*, reliant deux phrases négatives. Enfin, le *ou* de la phrase (5) est relié au *soit*. La forme classique "*soit ... ou*", équivalente à "*soit ... soit*", exprime une alternative, et a donc un sens exclusif, qui n'est pas celui du connecteur logique *ou*.

4.

(1) □
(2) □
(3) □
(4) ■
(5) □

Désignons par Q la proposition *"Pierre aime Marie"*, et par R la proposition *"Marie aime Pierre"*. Alors, P s'écrit $Q \wedge R$, c'est-à-dire "Q *et* R". Sa négation, $\neg P$, s'exprime donc sous la forme $\neg Q \vee \neg R$, c'est-à-dire "*non* Q *ou non* R" (le *ou* n'étant pas exclusif). C'est l'assertion (4) qui est la négation de P.

5.

(1) ■
(2) □
(3) □
(4) □
(5) ■

Les deux premières assertions ne posent pas de problème. L'ensemble des nombres pairs est une partie propre infinie de $\mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{R}_+$ des réels positifs est un ensemble ordonné ayant un plus petit élément, mais pas de plus grand élément. Ce n'est pas un ensemble dénombrable ; il ne peut donc pas être mis en bijection

---

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

avec $\mathbb{N}$. Enfin, le fait que tout élément de $\mathbb{N}$ admette un successeur est l'un des axiomes de définition de $\mathbb{N}$.

6.

(1) ■
(2) ■
(3) □
(4) □
(5) □

Le fait que $P(n_0)$ soit faux n'implique rien sur la véracité de $P(n)$, pour $n > n_0$. En revanche, il implique que $P(n)$ est faux, pour tout $n \leq n_0$. En effet, s'il existait un entier $n < n_0$ tel que $P(n)$ soit vrai, on aurait $P(n+1)$ vrai, et, par récurrence, $P(n_0)$ vrai. Si $P(n_0)$ était vrai, la situation serait inversée : cela impliquerait la véracité de $P(n)$, pour $n > n_0$, mais on ne pourrait rien affirmer sur $P(n)$, pour $n < n_0$.

7.

(1) ■
(2) ■
(3) □
(4) □
(5) □

Les paires d'ensembles des lignes (1) et (2) sont formées d'ensembles égaux. Les paires des lignes (3) et (4) ont été mélangées. Les égalités correctes sont les suivantes :

$$(A\backslash C) \setminus (B\backslash C) = (A\backslash B) \setminus C$$

et $(A\backslash B) \setminus (A\backslash C) = A \cap (C\backslash B)$

Les deux ensembles de la ligne (5) sont liés par la relation

$$(A\times C) \cup (B\times D) \subset (A\cup B) \times (C\cup D),$$

et l'on a

$$(A\cup B) \times (C\cup D) = (A\times C) \cup (B\times D) \cup (A\times D) \cup (B\times D).$$

8.

(1) ■
(2) □
(3) □
(4) ■
(5) ■

La fonction $x \mapsto x^2$ fournit un contre-exemple aux paires des lignes (2) et (3). Si $A = \mathbb{R}_+$, et si $B = \mathbb{R}_-$, on a d'une part $f(A\cap B) = f(\{0\}) = \{0\}$, d'autre part $f(A) = f(B) = \mathbb{R}_+$, et enfin $f^{-1}[f(A)] = \mathbb{R} \neq A$. Les relations correctes reliant les paires d'ensembles des lignes (2) et (3) sont $f(A\cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, et $A \subset f^{-1}(f(A))$. Les autres égalités s'établissent facilement.

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

9.

(1) □
(2) □
(3) ■
(4) □
(5) ■

L'assertion (1) exprime que f est une application. L'assertion (2) pourrait compléter la définition d'une application surjective, et l'assertion (4) celle d'une bijection. Les assertions équivalentes (3) et (5) définissent bien une application injective.

10.

(1) □
(2) □
(3) ■
(4) ■
(5) ■

Les notions de limite sup et de limite inf pour des ensembles ne doivent pas être confondues avec les notions semblables (hors programme) pour les suites. Avant de voir quelles sont les assertions correctes, prenons un exemple. Prenons $A_0 = \{0\}$, $A_1 = [0;1]$, $A_2 = [1;2]$, $A_3 = [0;1] \cup [2;3]$, $A_4 = [1;2] \cup [3;4]$, $A_5 = [0;1] \cup [2;3] \cup [4;5]$, $A_6 = [1;2] \cup [3;4] \cup [5;6]$, $A_7 = [0;1] \cup [2;3] \cup [4;5] \cup [6;7]$, etc. Alors, $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} A_n = \varnothing$,

$\underline{\lim}\, A_n = \mathbb{N}^*$, et $\overline{\lim}\, A_n = \mathbb{R}_+$.

Les deux premières assertions sont inversées : $\underline{\lim}\, A_n$ est l'ensemble des $x \in \Gamma$ qui appartiennent à tous les A_n, sauf un nombre fini, tandis que $\overline{\lim}\, A_n$ est l'ensemble des $x \in \Gamma$ qui appartiennent à une infinité de A_n. Une fois ces caractérisations établies, la vérification des trois dernières assertions ne pose pas de problèmes.

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

Résultats du QCM n°2
Nombres réels

(Questions p. 13)

1.

(1) ■
(2) □
(3) □
(4) □
(5) ■

La propriété (1) est la définition d'un intervalle. Les propriétés (2) et (3) expriment respectivement que les intervalles $[a;b]$ et $]a;b[$ sont inclus dans A. Au contraire, (4) exprime l'inclusion $A \subset\,]a;b[$. Enfin, (5) se traduit par $A = \,]a;b[$.

2.

(1) □
(2) □
(3) □
(4) □
(5) ■

L'assertion (1) est clairement fausse (prendre $a = b = 1$). Pour contredire les assertions (2), (3) et (4), considérer respectivement $a = b = -1$, $a = -1$, et $a = -b = 1$. Enfin, on peut écrire

$$\sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$$

$$= \sqrt{(a-1)+2\sqrt{a-1}+1} + \sqrt{(a-1)-2\sqrt{a-1}+1}$$

$$= |\sqrt{a-1}+1| + |\sqrt{a-1}-1|$$

$$= \begin{cases} 2 & \text{si } a \in [1;2] \\ 2\sqrt{a-1} & \text{si } a \in]2;+\infty[\end{cases}$$

3.

(1) □
(2) □
(3) ■
(4) □
(5) ■

Ce phénomène est connu sous le nom de *Paradoxe de Simpson*. Si l'on a $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ et $\frac{e}{f} < \frac{g}{h}$, où a, b, ..., h sont positifs, on peut très bien avoir $\frac{a+e}{b+f} > \frac{c+g}{d+h}$.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

Par exemple, on pourrait avoir le tableau de résultats suivant :

	Premières balles	M	G
1ère manche	Réussies	30	36
	Tentées	41	52
2ème manche	Réussies	35	26
	Tentées	63	45

On a $\dfrac{36}{52} < \dfrac{30}{41}$ et $\dfrac{26}{45} < \dfrac{35}{63}$, mais $\dfrac{62}{97} > \dfrac{65}{104}$. Si au contraire, on a le tableau de résultats suivants :

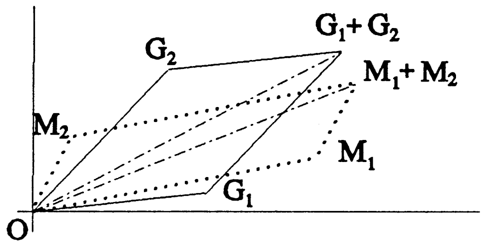
	Premières balles	M	G
1ère manche	Réussies	28	31
	Tentées	37	45
2ème manche	Réussies	34	26
	Tentées	53	49

On a $\dfrac{31}{45} < \dfrac{28}{37}$, $\dfrac{26}{49} < \dfrac{34}{53}$, et $\dfrac{57}{94} < \dfrac{62}{90}$.

Pour interpréter ceci géométriquement, considérons, dans $\mathbb{R}^2$ les points $G_1 = (b_1;a_1)$, $G_2 = (b_2;a_2)$, $M_1 = (d_1;c_1)$, $M_2 = (d_2;c_2)$, où a_i (resp. c_i) représente le nombre de premières balles réussies durant la manche i par Gabriella (resp. par Monica), et où b_i (resp. d_i) représente le nombre de premières balles tentées durant la manche i par Gabriella (resp. par Monica). Le

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

rapport $\dfrac{a_i}{b_i}$ représente la pente de la droite (OG_i), et $\dfrac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}$ celui de la diagonale du parallélogramme de sommets 0, G_1, $G_1 + G_2$, G_2. Lorsque les deux parallélogrammes se chevauchent, on peut avoir le phénomène.



4.

(1) ■
(2) ■
(3) □
(4) ■
(5) □

Clairement, $(a+b-c)(a+c-b) = a^2 - (b-c)^2 \leq a^2$, ce qui montre que l'inégalité (i) est vraie.

De même,

$$(b+c-a)(b+a-c) = b^2 - (c-a)^2 \leq b^2$$

et

$$(c+a-b)(c+b-a) = c^2 - (a-b)^2 \leq c^2$$

Si les trois termes $(a+b-c)$, $(b+c-a)$ et $(c+a-b)$ sont positifs, en multipliant membre à membre les trois dernières inégalités, on obtient le carré de (ii), donc (ii).

Il peut y avoir au plus un des trois termes $(a+b-c)$, $(b+c-a)$ et $(c+a-b)$ qui soit négatif. Dans ce cas, le premier membre de (ii) est négatif, tandis que le second est positif, de sorte que (ii) est toujours vraie.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

En remarquant que $b + c - a = 2s - 2a$, et en permutant a, b et c, on obtient l'inégalité (iii).

Finalement, les trois inégalités (i), (ii) et (iii) sont toujours vérifiées.

5.

(1) □
(2) □
(3) ■
(4) ■
(5) ■

Soient x et $y \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}$. On peut écrire $x = E(x) + \alpha$, $y = E(y) + \beta$, avec $0 \leq \alpha < 1$, et $0 \leq \beta < 1$. Cela étant, si $\alpha > 1/n$, on a $nx > nE(x) + 1$, et $E(nx) > nE(x)$; si $\alpha + \beta > 1$, on a $E(x+y) > E(x) + E(y)$. En outre,

$$E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E\left(\frac{nE(x) + E(n\alpha)}{n}\right)$$

$$= E\left(E(x) + \frac{E(n\alpha)}{n}\right) = E(x)$$

Si $\frac{p}{n} \leq \alpha < \frac{p+1}{n}$, avec $0 \leq p \leq n-1$, on a

$$E\left(x + \frac{k}{n}\right) = \begin{cases} E(x) & \text{si } k < n-p \\ E(x) + 1 & \text{si } k \geq n-p \end{cases}$$

et $$\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = nE(x) + p\ .$$

Comme par ailleurs

$$E(nx) = E\left(nE(x) + n\frac{p}{n} + n\left(\alpha - \frac{p}{n}\right)\right)$$
$$= nE(x) + p$$

on a bien $$\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx)\ .$$

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

Enfin, $E(-x) = E(-E(x) - \alpha) = E(-E(x)-1+(1-\alpha))$, et l'assertion (5) est correcte.

6.

(1) □
(2) □
(3) ■
(4) ■
(5) □

Dans $\mathbb{R}$, toute partie non vide majorée A admet une borne supérieure, a. Cette borne supérieure n'appartient pas forcément à l'ensemble. Lorsque c'est le cas, c'est le plus grand élément de l'ensemble. Quoi qu'il en soit, la borne supérieure de A est le plus petit des majorants de A (et non le plus grand des minorants, qui serait la borne inférieure d'un ensemble non vide minoré), ce qu'exprime l'assertion (4). C'est également un majorant dont tout voisinage contient un point de A (assertion (3)).

7.

(1) ■
(2) □
(3) ■
(4) □
(5) □

La réunion de deux ensembles non vides majorés est aussi un ensemble non vide majoré, mais leur intersection peut être vide. La somme étant continue et préservant l'ordre, la borne supérieure de la somme de deux ensembles majorés est égale à la somme des bornes supérieures de ces ensembles. Cela étant, considérons $A = [1;2]$, et $B = [-2;-1]$. On a alors $a = 2$, $b = -1$, $A - B = [2;4]$, $a - b = 3 \neq 4$, $A{\cdot}B = [-4;-1]$ et $a{\cdot}b = -2 \neq -1$.

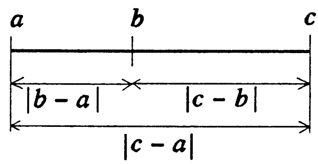
8.

(1) ■
(2) □
(3) ■
(4) □
(5) □

La relation (1) est une version de l'inégalité triangulaire :

$$|a - b| \leq |a - c| + |c - b|$$

où l'on a changé b en $-b$. L'inégalité (2) est inversée. La relation (3) exprime deux manières de compter la longueur totale de l'intervalle couvert par les



■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

trois points a, b et c (voir figure ci-contre). Si $a = c = 2$ et $b = -1$, on a

$$|a+b| + |a+c| + |b+c| = 6,$$

et $$|a+b+c| + |a| + |b| + |c| = 8,$$

ce qui contredit la relation (5).

9.

(1) ■
(2) ■
(3) ■
(4) ■
(5) □

L'encadrement $\sqrt{xy} \leq L(x;y) \leq \dfrac{x+y}{2}$ s'obtient facilement en divisant par $\max\{x;y\}$, et en montrant l'inégalité à l'aide d'études de fonctions d'une variable. On peut aussi utiliser la représentation intégrale $\dfrac{1}{L(x;y)} = \displaystyle\int_0^1 \left(u \mapsto \frac{1}{ux + (1-u)y}\right)$, qui permet de préserver la symétrie entre x et y. Les inégalités

$$\left(xy\right)^{\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2} \leq L(x;y) \quad \text{et} \quad L(x;y) \leq \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}\right)^2$$

se déduisent de l'encadrement précédent, en remplaçant x et y par respectivement $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$. La dernière inégalité est fausse, car la moyenne harmonique minore la moyenne géométrique, que majore la moyenne logarithmique.

10.

(1) □
(2) ■
(3) ■
(4) □
(5) ■

Les trois moyennes sont reliées par la relation

$$H(x_1;x_2;...;x_n) \leq G(x_1;x_2;...;x_n) \leq A(x_1;x_2;...;x_n)$$

Montrons d'abord $G(x_1;x_2;...;x_n) \leq A(x_1;x_2;...;x_n)$. Cela revient à montrer que $x_1x_2...x_n = 1$ implique $x_1+x_2+...+x_n \geq n$. Cela étant clair pour $n=1$, procédons par récurrence, et supposons le résultat démontré pour n. Soient x_1, ..., x_{n+1} tels que

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

$x_1x_2...x_{n+1} = 1$; quitte à changer les indices, supposons $x_1 \geq 1$ et $x_2 \leq 1$. On a alors $(x_1-1)(x_2-1) \leq 0$, ou $x_1x_2 + 1 \leq x_1 + x_2$. On en déduit

$$x_1+x_2+...+x_{n+1} \geq 1+x_1x_2+x_3+...+x_{n+1} \geq 1+n,$$

en appliquant la relation de récurrence aux n réels x_1x_2, x_3, ..., x_{n+1}. L'inégalité

$$H(x_1;x_2;...;x_n) \leq G(x_1;x_2;...;x_n)$$

se déduit de la précédente, en remarquant les deux relations

$$H(x_1;\cdots;x_n) = \frac{1}{A\left(\frac{1}{x_1};\cdots;\frac{1}{x_n}\right)}$$

et
$$G(x_1;\cdots;x_n) = \frac{1}{G\left(\frac{1}{x_1};\cdots;\frac{1}{x_n}\right)} .$$

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

Résultats du QCM n°3
Suites numériques

(Questions p. 21)

1.

(1) ■
(2) □
(3) ■
(4) □
(5) □

L'assertion (1) résulte de la définition de la convergence. La suite $u_n = (-1)^n$ contredit l'assertion (2). La continuité de la fonction valeur absolue fournit (3). La suite $(1/n)$ converge vers 0, bien que ses termes soient tous strictement positifs. La suite $(1/n)$ converge vers 0, mais il n'en est pas de même de la suite (e^n/n).

2.

(1) □
(2) □
(3) □
(4) ■
(5) ■

La suite $u_n = (-1)^n/n$ est un contre-exemple de l'assertion (1), et la suite $v_n = (-1)^n$ en est un autre pour les assertions (2) et (3). Les assertions (4) et (5) sont les énoncés de théorèmes fondamentaux sur les suites numériques.

3.

(1) □
(2) □
(3) ■
(4) ■
(5) □

La relation $\forall n \geq 1, \quad u_n^2 = \dfrac{u_{n-1}^2 + u_{n+1}^2}{2}$ montre que la suite des carrés est une suite arithmétique. Elle s'écrit donc

$$u_n^2 = u_0^2 + n\left(u_1^2 - u_0^2\right).$$

On en déduit que la suite (u_n) est définie si et seulement si $u_1^2 \geq u_0^2$. Elle est convergente si et seulement si $u_1^2 = u_0^2$. Si $u_1^2 > u_0^2$, la suite (u_n) tend vers $+\infty$, avec une croissance en $\sqrt{n}$. Comme $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ tend vers

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

0 lorsque n tend vers ∞, $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0 ; partant, si la suite (u_n) est à valeurs entières, elle est constante.

Suites arithmétiques – Suites géométriques

On appelle *suite arithmétique de raison* $r \in \mathbb{C}$ toute suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant à la relation de récurrence $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$. Une suite arithmétique est caractérisée par la relation de récurrence $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $u_n = (u_{n+1} + u_{n-1})/2$. Son terme général est donné par $u_n = u_0 + nr$. Une suite arithmétique converge si et seulement si sa raison est nulle, auquel cas c'est une suite constante. Une suite arithmétique réelle tend vers $-\infty$ si sa raison r (forcément réelle) vérifie $r < 0$, vers $+\infty$ si $r > 0$. Dans le plan complexe, tous les points d'une suite arithmétique sont alignés, sur une droite dont la direction est donnée par la raison.

On appelle *suite géométrique de raison* $k \in \mathbb{C}$ toute suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant à la relation de récurrence $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1} = k\, u_n$. Le terme général d'une suite géométrique est donné par la relation $u_n = k^n\, u_0$. Une suite géométrique non nulle (ne pas oublier ce "non nul" !) converge si et seulement si sa raison k vérifie ($k = 1$ ou $|k| < 1$). Si $k = 1$, la suite est constante. Si $|k| < 1$, la suite tend vers 0. Une suite géométrique est périodique si et seulement si sa raison est une racine de l'unité (*i.e.* un nombre complexe de la forme $k = e^{2ik\pi/n}$). Une suite géométrique non nulle de raison k de module 1 a tous ses points sur le cercle $|z| = |u_0|$. Si (u_n) est une suite géométrique dont la raison k vérifie $|k| > 1$, alors $|u_n|$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers ∞.

Une suite géométrique non nulle de raison $k \neq 0$ est un vecteur propre de l'opérateur de translation, T, pour la valeur propre k. Rappelons que l'opérateur de translation est l'application de l'ensemble des suites dans l'ensemble des suites qui, à une suite (u_n) associe la suite (v_n) telle que $v_n = u_{n+1}$. C'est pour cette raison que dans l'étude des suites récurrentes linéaires, on cherche les solutions sous la forme de suites géométriques (voir dans le volume 2 le chapitre sur la réduction des endomorphismes).

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

4.

(1) ☐ La relation

(2) ■

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+2} - u_{n+1} = \left(10u_{n+1} - 9u_n\right) - u_{n+1} \\ &= 9\left(u_{n+1} - u_n\right) = 9v_n \end{aligned}$$

(3) ☐

(4) ☐

(5) ■

montre que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 9. Comme $v_0 = u_1 - u_0 = 1$, on a $v_n = 9^n$. On peut en déduire l'expression de u_n, en effectuant une somme amalgamante

$$\begin{array}{rcl} & v_{n-1} = & u_n - u_{n-1} \\ + & & \\ & v_{n-2} = & u_{n-1} - u_{n-2} \\ + & & \\ & \cdots & \cdots \\ + & & \\ & v_1 = & u_2 - u_1 \\ + & & \\ & v_0 = & u_1 - u_0 \\ \hline & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} v_k = & u_n - u_0 \end{array}$$

Ainsi,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} 9^k = \frac{9^n - 1}{9 - 1} = \frac{9^n - 1}{8}$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} \frac{9^k - 1}{8} = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{n} \left(9^k - 1\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{9^{n+1} - 1}{8} - (n+1)\right) = \frac{1}{64}\left(9^{n+1} - 1 - 8(n+1)\right) \\ &= \frac{1}{64}\left(9^{n+1} - 8n - 9\right) \end{aligned}$$

■ *Réponse correcte*

☐ *Réponse fausse*

5.

(1) ☐
(2) ■
(3) ■
(4) ☐
(5) ☐

Détaillons la suite : $u_0 = 1$; $u_1 = 2$; $u_2 = \frac{5}{2} = 2{,}5$;

$u_3 = u_4 = \frac{8}{3} \approx 2{,}66$; $u_5 = \frac{13}{5} = 2{,}6$;

$u_6 = \frac{151}{60} \approx 2{,}52$. Ainsi, la suite n'est ni croissante ni décroissante. Plus généralement

$$u_n = \frac{1}{\binom{n}{0}} + \frac{1}{\binom{n}{1}} + \frac{1}{\binom{n}{2}} + \underbrace{\left[\frac{1}{\binom{n}{3}} + \dots + \frac{1}{\binom{n}{n-3}}\right]}_{n-5 \text{ termes}} + \frac{1}{\binom{n}{n-2}} + \frac{1}{\binom{n}{n-1}} + \frac{1}{\binom{n}{n}}$$

$$\leq 2 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n(n-1)} + (n-5)\,\frac{6}{n(n-1)(n-2)}$$
$$= 2 + \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Attention :
les équivalents ne s'additionnent pas. Par exemple, on n'a pas le droit d'écrire

$u_n \sim 2 + \frac{2}{n}$ et donc $u_n - 2 \sim \frac{2}{n}$

■ *Réponse correcte*
☐ *Réponse fausse*

On en déduit l'encadrement

$$\begin{aligned}\frac{2}{n} &\leq u_n - 2\\ &\leq \frac{2}{n} + \frac{4}{n(n-1)} + (n-5)\frac{6}{n(n-1)(n-2)}\\ &= \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc convergente, vérifie $\lim_{n\to\infty} u_n = 2$,

et $0 \leq v_n = u_n - 2 \sim \frac{2}{n}$.

• Comme la suite (u_n) n'est ni croissante ni décroissante, il en est de même de la suite (v_n). En avance sur le chapitre suivant, étudions la série Σv_n. C'est une série à termes positifs, dont le terme général est équivalent au terme général d'une série divergente ; c'est donc une série divergente (ne pas oublier d'invoquer le signe asymptotiquement constant).

6.

(1) ■
(2) □
(3) ■
(4) ■
(5) ■

La limite $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ est un résultat du cours. On peut le retrouver rapidement en minorant l'exponentielle $e^{n\ln a}$ par un seul terme de son développement, à savoir $\frac{(n\ln a)^{k+1}}{(k+1)!}$. On obtient en effet

$$\frac{n^k}{a^n} = \frac{n^k}{e^{n\ln a}} < \frac{(k+1)!}{n(\ln a)^{k+1}},$$

et le terme $\frac{(k+1)!}{n(\ln a)^{k+1}}$ tend vers 0 lorsque n tend vers ∞.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

En posant $t = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{k}}$ dans l'inégalité

$$\forall t \in]0;1[, \quad nt^n < 1 + t + ... + t^{n-1} < \frac{1}{1-t},$$

on obtient

$$n\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{n}{k}} < \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{k}}} = \frac{a^{\frac{1}{k}}}{a^{\frac{1}{k}} - 1}.$$

En élevant les deux membres à la puissance k, on en déduit l'inégalité

$$\frac{n^k}{a^n} \leq \frac{a}{\left(a^{\frac{1}{k}} - 1\right)^k}$$

Considérons la fonction $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^k a^{-x} \end{array}$. On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= kx^{k-1} a^{-x} + x^k a^{-x}(-\ln a) \\ &= x^{k-1} a^{-x}(k - x\ln a) \end{aligned}$$

de sorte que cette fonction est croissante puis décroissante, son maximum étant atteint en $\gamma = \frac{k}{\ln a}$.

On en déduit que le maximum de la suite $\left(\frac{n^k}{a^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est atteint soit en $\lfloor\gamma\rfloor$, soit en $\lfloor\gamma\rfloor + 1$, ce qui est l'assertion (4).

Enfin, la relation $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = +\infty$ est évidente.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

7.

(1) ☐
(2) ■
(3) ■
(4) ☐
(5) ☐

La suite (u_n) est strictement croissante et à valeurs dans $[0;2]$. L'assertion (3) s'obtient par majorations successives des termes de $u_m - u_n$. On peut montrer que la limite de (u_n) n'appartient pas à $\mathbb{Q}$ en raisonnant par l'absurde. Quant à l'équation fonctionnelle, elle est évidemment de nature fantaisiste.

8.

(1) ■
(2) ■
(3) ☐
(4) ■
(5) ☐

Si $z_0 \in \mathbb{R}_-^*$, $z_n = 0$ pour tout $n>0$. Si $z_0 \in \mathbb{R}_+$, la suite est constante. Si $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, la relation de récurrence de l'assertion (1) conduit à

$$\rho_{n+1} = \rho_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) = \rho_0 \prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)$$

et à
$$\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2} = \frac{\theta_0}{2^{n+1}}.$$

Pour évaluer $\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)$, on écrit

$$\begin{aligned}\sin\theta &= 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\\ &= 4\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\sin\frac{\theta}{4}\\ &= 8\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{8}\sin\frac{\theta}{8}\\ &= \dots\end{aligned}$$

ce qui conduit à $\rho_n = \rho_0 \dfrac{\sin\theta_0}{2^n \sin\dfrac{\theta_0}{2^n}}$, puis à

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = \lim_{n\to\infty} z_n = \rho_0 \frac{\sin\theta_0}{\theta_0}.$$

■ *Réponse correcte*

☐ *Réponse fausse*

Plan d'étude des suites récurrentes non linéaires

Soit (u_n) une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction à valeurs réelles définie sur une partie A de $\mathbb{R}$. Voici le plan d'étude de (u_n).

1) Faire une simulation de la suite sur calculatrice, afin de déterminer ce que l'étude va devoir établir. La suite du plan d'étude en dépend.

2a) Si la suite est périodique de période p, établir la relation $f^p = \mathrm{Id}$, en calculant les itérées successives de f (attention à l'ensemble de définition).

2b) Si la suite semble se promener sur tout un intervalle sans se rapprocher d'un ensemble fini, contrôler la simulation et vérifier l'énoncé. Si le phénomène est confirmé, chercher si f a un point de période 3 ($f(x) \neq x$, $f^2(x) \neq x$ et $f^3(x) = x$), car la suite serait alors chaotique (exemple improbable en HEC !).

2c) Si la suite semble converger vers un ensemble fini, le nombre de points de cet ensemble est de la forme 2^p. Faire l'étude de la fonction f, et déterminer des intervalles stables par cette fonction (I est stable par f si $f(I) \subset I$).

Poursuivre l'étude sur un intervalle stable I contenant u_0 (ou u_1 si l'on voit que u_1 appartient à un intervalle stable plus petit que celui de u_0). Si la fonction f est continue sur I, et si la suite (u_n) converge, la limite est forcément un point fixe de f, c'est-à-dire un point x tel que $f(x) = x$; si la suite semble converger vers un ensemble fini, les points de cet ensemble sont forcément des points périodiques de f (f continue). Par exemple, si les termes paires semblent converger vers y et si les termes impairs semblent converger vers z, les points y et z doivent être des points de période 2 de f, c'est-à-dire tels que $f^2(y) = y$ et $f^2(z) = z$. Ils doivent en outre vérifier $f(y) = z$ et $f(z) = y$, car il sont sur un même cycle. Les points de période 2 de f sont des points fixes de f^2, ce qui permet de se ramener à l'étude d'une suite convergente, en remplaçant f par f^2 (ou par f^{2^p} lorsque l'ensemble fini possède 2^p points).

3) On suppose que l'on s'est ramené à montrer la convergence vers un point fixe de f (en réalité f, f^2 ou même f^{2^p}), continue sur un intervalle I stable par f. Déterminer alors les points fixes et les variations de f sur cet intervalle. On suppose que f est monotone par morceaux (sinon, c'est très compliqué).

4a) Si f est croissante sur I, on est très content, car c'est le cas simple : la suite (u_n) est monotone (pas forcément croissante ; ne pas confondre les variations de la fonction et celles de la suite). La suite est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$. Elle l'est dans $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est bornée (c'est le cas si $I = [a;b]$), et la limite est l'un des points fixes déterminés à l'étape 3.

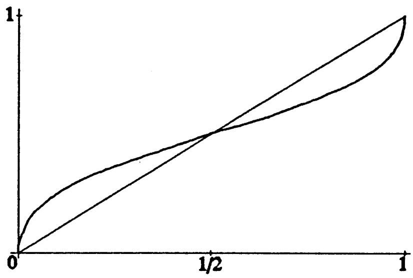
4b) Si f n'est pas monotone sur I, regarder sa monotonie au voisinage du point fixe, c, qui est la limite.

5a) Si f est croissante au voisinage de c, trouver un intervalle J contenant c, stable par f, sur lequel f est croissante ; démontrer qu'il existe un entier k tel que $u_k \in J$, et conclure comme en 4a.

5b) Si f est décroissante au voisinage de c, f^2 est croissante au voisinage de c. Etudier alors f^2, comme en 5a.

9.

(1) ■
(2) □
(3) □
(4) □
(5) ■



La fonction f est définie sur $[0;1]$. En tant que quotient de deux quantités positives, elle est positive ; et comme

$$\sqrt{x} \leq \sqrt{x} + \sqrt{1-x} ,$$

on a $f(x) \leq 1$. Ainsi, $f([0;1]) \subset [0;1]$ (autrement dit, $[0;1]$ est stable par f), et la suite (u_n) est définie pour tout $u_0 \in [0;1]$.

Cela étant, voyons les variations de f : si $x \neq 0$, on peut écrire $f(x) = \dfrac{1}{1 + \sqrt{\dfrac{1}{x} - 1}}$. Par composition, on en déduit les variations de f : on a en effet successivement

$\left(x \mapsto \dfrac{1}{x}\right) \searrow$, $\left(x \mapsto \sqrt{\dfrac{1}{x} - 1}\right) \searrow$ et $f \nearrow$. Croissante sur $]0;1]$ et continue sur $[0;1]$, f est croissante sur $[0;1]$.

Pour les points fixes de f, on voit immédiatement que 0 et 1 sont deux points fixes, et par symétrie, ou par calcul, on montre que $\dfrac{1}{2}$ est le troisième (et dernier).

Comme f est croissante, les intervalles $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ et $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$ sont stables par f, en sorte que si u_0 appartient à l'un de ces deux intervalles, la suite tout entière est incluse dans celui-ci. En outre, le signe de $f(x) - x$ est constant sur chacun des intervalles $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ et $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$. En effet, s'il

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

Noter l'importance des parties stables par la fonction. Les raisonnements permettant d'établir l'existence de la suite, puis sa monotonie ne sont valides que sur des parties stables par f. Les points fixes de f sont aussi essentiels pour l'étude. Ce sont les seules limites possibles lorsque la fonction est continue.

changeait, f aurait un point fixe à l'intérieur, et l'on a vu que ce n'est pas le cas. Un test sur calculatrice montre que l'on a $f\left(\frac{1}{4}\right) \approx 0{,}36 > \frac{1}{4}$, et $f\left(\frac{3}{4}\right) \approx 0{,}63 < \frac{3}{4}$.

Résumons :

— L'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ est stable par f, et $f(x) \geq x$ sur cet intervalle. La suite (u_n) est donc croissante si $u_0 \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

— L'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right]$ est stable par f, et $f(x) \leq x$ sur cet intervalle. La suite (u_n) est donc décroissante si $u_0 \in \left[\frac{1}{2};1\right]$.

> *Ne pas confondre la monotonie de f et celle de la suite : par exemple, la fonction peut être croissante, et la suite décroissante.*

Dans tous les cas, la suite (u_n) est monotone et bornée ; elle est donc convergente. Si $u_0 = 0$, la suite est constante et converge vers 0 ; si $u_0 = 1$, la suite est constante, et converge vers 1 ; dans tous les autres cas, la suite converge vers un point fixe de f, et la limite ne peut être que $\frac{1}{2}$.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

10.

(1) ■
(2) ■
(3) □
(4) ■
(5) □

Des trois conditions

$$\begin{cases} D_n = -ap_n + b \\ S_{n+1} = cp_n + d \\ S_{n+1} = D_{n+1} \end{cases}$$

on déduit

$$cp_n + d = -ap_{n+1} + b$$

soit, en posant $A = -\frac{a}{c}$

et

$$B = \frac{b-d}{a},$$

$$p_{n+1} = Ap_n + B.$$

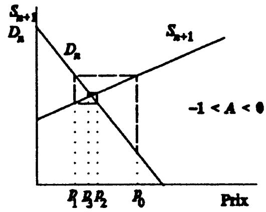
En écrivant la relation pour p_n,

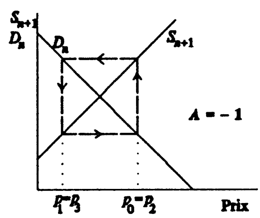
$$p_n = Ap_{n-1} + B,$$

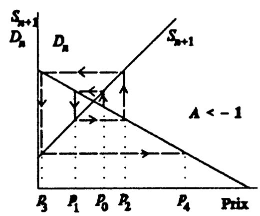
et en soustrayant ces deux équations, on obtient

$$p_{n+1} - (A+1)\,p_n + A\,p_{n-1} = 0$$

qui est bien une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.







La convergence d'une suite affine est simple : comme A est négatif, la suite n'est pas monotone ; elle converge si et seulement si $-1 < A < 0$; si $A = -1$, elle est de période 2, et si $A < -1$, elle diverge. Lorsqu'elle converge, c'est vers le point d'équilibre, qui est le point d'intersection des courbes de demande et d'offre.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

L'exemple des fonctions d'offre et de demande sous forme de fonctions affines est simple (les économistes disent même simpliste...) ; il présente surtout l'avantage de pouvoir être résolu explicitement. C'est Leontief qui étudia en premier le cas non linéaire, en 1934. Samuelson approfondit ceci en 1948. C'est Goodwin qui posa le premier la question de l'apprentissage, en 1947 : instruit par leur expérience antérieure, les fermiers anticipent les cycles, et adaptent en fonction leur production.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

Résultats du QCM n°4
Séries à termes réels

(Questions p. 30)

1.

(1) ■
(2) □
(3) ■
(4) □
(5) □

Voyons simplement des contre-exemples pour les assertions qui sont fausses. La suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ tend vers 0, mais la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge. La série nulle, $\sum 0 = \sum \left(\frac{1}{n} + \frac{-1}{n}\right)$, converge, mais la série harmonique, $\sum \frac{1}{n}$, (encore elle !) diverge, de même que son opposée, $\sum \frac{-1}{n}$. Ce contre-exemple sert à la fois pour l'assertion (4) et pour l'assertion (5).

2.

(1) ■
(2) □
(3) □
(4) ■
(5) □

► La série géométrique $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ converge si et seulement si sa raison, x, est strictement inférieure à 1.

► Sa série "intégrée", c'est-à-dire la série dont chaque terme est une primitive nulle en 0 du terme général de la série initiale, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, converge elle aussi lorsque $|x| < 1$, mais également lorsque $x = -1$. Montrons-le :

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

Si $|x| > 1$, la série diverge car son terme général ne tend pas vers 0. Si $|x| < 1$, la série converge car elle est majorée, en valeur absolue, par une série géométrique convergente. Pour $x = 1$, on a affaire à la série harmonique, qui diverge. Reste le cas $x = -1$. Le test de convergence des séries alternées n'étant pas au programme, on se ramène à une série absolument convergente en regroupant les termes deux par deux : posons $u_n = \frac{(-1)^{2n}}{2n} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}$; comme le terme général de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ tend vers 0, la convergence de cette série équivaut à celle de la série $\sum u_n$. Or cette dernière est à termes de signe constant, et son terme général est équivalent au terme général d'une série convergente, du fait de la relation

$$u_n = \frac{(-1)^{2n}}{2n} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2n(2n+1)} \sim \frac{1}{4n^2}.$$

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge donc, et la série réelle $\sum \frac{x^n}{n}$ converge si et seulement si $x \in [-1;1[$.

► La série exponentielle, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, converge pour tout réel x. Sa somme vaut e^x.

► La série de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

► La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ est un cas particulier des séries de Bertrand, qui sont les séries de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$. Pour une telle série, les différents cas sont les suivants :

— Si $\alpha < 1$, la série diverge.
— Si $\alpha = 1$, la série converge si et seulement si $\beta > 1$.
— Si $\alpha > 1$, la série converge.

3.

(1) □
(2) □
(3) □
(4) ■
(5) ■

Quand on développe $\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$, les termes en $\sqrt{3}$ disparaissent, de sorte que ce terme est un entier.

Par suite, $u_n = \sin\left[\pi\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right)\right]$ est nul, et la série correspondante converge.

La série de terme général $v'_n = \pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n$ est bien une série géométrique de raison < 1. Mais il n'en est pas de même de la série de terme général $v_n = \sin\left[\pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right]$: ce n'est pas une série géométrique. Néanmoins, la convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} v'_n$ implique celle de la série $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$. En effet,

---

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

lorsque $n \to \infty$, on a $|v_n| \sim |v'_n|$, de sorte que la série $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ est absolument convergente, donc convergente.

La série de terme général $w_n = \sin\left[\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right]$ n'est pas une série géométrique. C'est tout de même une série absolument convergente. En effet, on a vu plus haut que $\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$ est un entier, disons $k(n)$. On a donc

$$\begin{aligned} w_n &= \sin\left[\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right] \\ &= \sin\left[\pi\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right)\right] \\ &= \sin\left[\pi\left(k(n) - \left(2-\sqrt{3}\right)\right)^n\right] \\ &= \pm\sin\left[\pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right] \end{aligned}$$

c'est-à-dire $w_n = \pm\, v_n$. La série $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ étant absolument convergente, il en est de même de la série $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$.

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

4.

(1) ■
(2) □
(3) □
(4) □
(5) ■

- Comme $\dfrac{n}{3n-1} > 0$, on peut écrire

$$\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$$

$$= \exp\left[(2n-1)\ln\frac{n}{3n-1}\right]$$

$$= \exp\left[(2n-1)\ln\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3n}}\right)\right]$$

$$= \exp\left[(2n-1)\left\{\ln\frac{1}{3} - \ln\left(1-\frac{1}{3n}\right)\right\}\right]$$

$$= \exp\left[(2n-1)\left\{\ln\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3n} - \frac{1}{2}\times\frac{1}{9n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right\}\right]$$

$$= \exp\left[(2n-1)\left\{\ln\frac{1}{3} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{18n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}\right]$$

$$= \exp\left[-(2n-1)\ln 3 + \frac{2n-1}{3n} + \frac{2n-1}{18n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \exp[-2n\ln 3]\,\exp\left[\ln 3 + \frac{2n-1}{3n} + \frac{2n-1}{18\,n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \underbrace{\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}\right\}}_{\text{série géométrique}} \times \underbrace{\left\{\exp\left[\ln 3 + \frac{2n-1}{3n} + \frac{2n-1}{18\,n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right\}}_{\text{terme borné}}$$

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

et la série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$ converge.

- Du fait de l'inégalité $2 + n^p > 1 + n^p$, on a $\ln\left(\frac{2+n^p}{1+n^p}\right) > 0$. On peut donc rechercher un équivalent de $\ln\left(\frac{2+n^p}{1+n^p}\right)$. Pour cela, on effectue un développement limité :

$$\ln\left(\frac{n^p+2}{n^p+1}\right) = \ln\left(\frac{1+\frac{2}{n^p}}{1+\frac{1}{n^p}}\right)$$

$$= \ln\left(1+\frac{2}{n^p}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$$

$$= \frac{2}{n^p} + o\left(\frac{1}{n^p}\right) - \left[\frac{1}{n^p} + o\left(\frac{1}{n^p}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n^p} + o\left(\frac{1}{n^p}\right)$$

$$\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^p}$$

ce qui montre que la série $\sum_{n=0}^{\infty}\ln\left(\frac{2+n^p}{1+n^p}\right)$ converge si et seulement si $p > 1$. On notera que l'**on n'a pas écrit**

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

$$\ln\left(\frac{n^p+2}{n^p+1}\right) = \ln\left(1+\frac{2}{n^p}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$$

$$\sim \frac{2}{n^p} - \frac{1}{n^p} = \frac{1}{n^p}$$

car on aurait alors effectué une addition d'équivalents, ce qui est **strictement interdit.**

• La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+...+n}{1^2+2^2+...+n^2}$ est à termes de signe constant ce qui rend légitime l'usage des équivalents. La relation

$$\frac{1+2+...+n}{1^2+2^2+...+n^2} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$= \frac{3}{2n+1)}$$

$$\sim \frac{3}{2n}$$

montre que cette série diverge.

• Notons d'abord que l'on a

$$\frac{x^n}{1+2+...n} = \frac{2\,x^n}{n(n+1)}$$

Si $x = 0$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+2+...n}$ est convergente, car son terme général est toujours nul. Lorsque x est non nul, on peut écrire $\left|\frac{x^n}{1+2+...n}\right| \sim 2\left|\frac{x^n}{n^2}\right|$. La

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

comparaison des suites x^n et n^α montre que $\dfrac{x^n}{1+2+\dots n}$ ne tend pas vers 0 lorsque $|x| > 1$. La série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1+2+\dots n}$ est alors divergente. Lorsque $|x| = 1$, on a $\left|\dfrac{x^n}{1+2+\dots n}\right| \sim \dfrac{2}{n^2}$, de sorte que la série est absolument convergente, donc convergente. Enfin, lorsque $|x| < 1$, la série est majorée, en valeur absolue, par la série géométrique convergente de terme général x^n ; elle est donc convergente.

- L'inégalité $n^2+2n < n^2+2n+1$ montre $\ln\left(\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right) < 0$ pour tout $n > 0$. La série $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)$ est donc de signe constant, ce qui rend légitime l'emploi des équivalents. Dès lors, la relation

$$\ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1}\right)$$

$$= \ln\left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)$$

$$\sim -\frac{1}{n^2}$$

montre que la série est convergente.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

5.

(1) ☐ (2) ■ (3) ☐ (4) ☐ (5) ■

La méthode des séries amalgamantes est utilisable pour les séries de la forme $\Sigma_k u_k$, où u_k est une fraction rationnelle de la forme $u_k = \dfrac{f(k)}{g(k)}$, avec $d^\circ(g) = d^\circ(f) + 2$, où les racines de g sont simples, et où la différence de deux racines quelconques de g est un nombre entier. Il est alors possible de trouver une fonction F telle que

$$\begin{cases} \forall k, \ \dfrac{f(k)}{g(k)} = F(k) - F(k+1) \\ \lim\limits_{k \to \infty} F(k) = 0 \end{cases}$$

La relation $d^\circ(g) = d^\circ(f) + 2$ assure la convergence de la série ; la relation $\forall k, \ \dfrac{f(k)}{g(k)} = F(k) - F(k+1)$ permet d'amalgamer les sommes partielles, tandis que la formule $\lim\limits_{k \to \infty} F(k) = 0$ permet de passer à la limite pour calculer la somme de la série.

La décomposition de l'assertion (1) est fausse. Il faut en réalité écrire

$$\frac{(-1)^k}{k^2 - 1} = \frac{(-1)^k}{2(k-1)} - \frac{(-1)^k}{2(k+1)}$$

et l'on obtient alors

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 - 1} = \frac{1}{4}$$

Pour l'assertion (2), la décomposition est correcte, et conduit à

■ *Réponse correcte*

☐ *Réponse fausse*

$$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2-4} = \frac{13}{240}$$

Les décompositions des assertions (3) et (4) sont correctes, mais elles ne permettent pas de calculer la somme des séries correspondantes, qui ne sont d'ailleurs pas du type indiqué plus haut : pour la série (3), la condition de degré n'est pas vérifiée, tandis que les différences des racines du dénominateur de la série (4) ne sont pas entières.

Pour la série de l'assertion (5), on obtient

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(2k+1)(2k-1)(2k-5)} = -\frac{7}{72}.$$

6.

(1) ☐
(2) ■
(3) ☐
(4) ☐
(5) ☐

La série considérée est un cas particulier des séries de Cantor, qui permettent de représenter n'importe quel nombre réel, lorsque la condition d'encadrement des b_n est affaiblie. Avec cette condition de majoration, la série est toujours convergente. En effet, on a

$$S_N = \sum_{N+1}^{\infty} \frac{b_n}{n!} \leq \sum_{N+1}^{\infty} \frac{n-1}{n!} = \sum_{N+1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right] = \frac{1}{N!}$$

ce qui montre que le reste R_N de la série tend vers 0 lorsque N tend vers ∞, c'est-à-dire que la série converge.

On peut préciser la nature de la somme S de cette série : c'est un nombre *irrationnel*, c'est-à-dire un nombre réel que l'on ne peut écrire sous la forme $S = \frac{p}{q}$, où p et q seraient des entiers premiers entre eux. Raisonnons par l'absurde en supposant que l'on ait cette égalité, $S = \frac{p}{q}$. On aurait alors

■ *Réponse correcte*
☐ *Réponse fausse*

$$(q-1)!\,p = q!\,S = \text{un entier} + r\ ,$$

où r serait un entier valant $r = q! \sum_{q+1}^{\infty} \frac{b_n}{n!}$. Or,

$$0 < r < q! \sum_{q+1}^{\infty} \frac{n-1}{n!} = 1\ ,\ \text{d'où la contradiction.}$$

7.

(1) ☐
(2) ☐
(3) ■
(4) ☐
(5) ☐

Finissons le calcul de Newton. Il reconnaît la somme d'une série géométrique

$$\frac{1}{1+x^4} = 1 - x^4 + x^8 - x^{12} + \ldots$$

et cela lui permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4} + \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^4}\,dx \\
&= \int_0^1 \left(1 - x^4 + x^8 - x^{12} + \ldots\right) dx \\
&\quad + \int_0^1 \left(x^2 - x^6 + x^{10} - x^{14} + \ldots\right) dx \\
&= \left[x - \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{13}}{13} + \ldots\right]_0^1 \\
&\quad + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^{11}}{11} - \frac{x^{15}}{15} + \ldots\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \ldots \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

La somme de la série de l'assertion (1) fut trouvée par Leibniz, grâce à une évaluation de l'aire d'un quart de cercle, à partir d'une intégrale et du *théorème de transmutation* (un ancêtre du théorème d'intégration par parties dont le nom évoque l'alchimie).

■ *Réponse correcte*

☐ *Réponse fausse*

On calcule maintenant les séries des assertions (2), (4) et (5) en faisant appel à une autre théorie (hors programme), dite "des séries de Fourier". Pour mémoire, voici les sommes des cinq séries :

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4}$$

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \dots = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90}$$

8.

(1) □
(2) □
(3) ■
(4) □
(5) □

```
1
1  1
1  2  1
1  3  3   1
1  4  6   4   1
1  5  10  10  5  1
```

Considérons le développement exprimant la somme d'une série géométrique :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Il est valide pour $|x| < 1$, et fournit la première colonne du triangle de Pascal.

En dérivant ce développement, on obtient

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

et cela fournit la deuxième colonne du triangle de Pascal. Plus généralement, la i-ième colonne de ce triangle est obtenue en considérant les coefficients des x^k

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

dans le développement de $\dfrac{1}{(1-x)^i}$. Pour établir ceci, on peut procéder par récurrence, en utilisant au choix l'une ou l'autre des deux relations de récurrence suivantes liant les coefficients binomiaux (voir volume 2) (p. ? et ?) :
"Pour tout entier $n > 0$, et tout entier p, $1 \leq p \leq n$,

$$p\binom{n}{p}x^{n-p} = \frac{d}{dx}\left[\binom{n}{p-1}x^{n-p+1}\right]"$$

et
"Pour tout entier $n > 1$, et tout entier $p \in [1;n]$,

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}"$$

9.

(1) ■
(2) ■
(3) □
(4) ■
(5) □

On peut écrire

$$u_n = \left[\frac{\ln(1+n)}{\ln n}\right]^n = \exp\left[n\ln\left(\frac{\ln(1+n)}{\ln n}\right)\right]$$

$$= \exp\left[n\ln\left(\frac{\ln n + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)\right]$$

$$= \exp\left[n\ln\left(1 + \frac{1}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)\right]$$

$$= \exp\left[\frac{1}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n}\ln n\right)\right]$$

$$u_n = 1 + \frac{1}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)$$

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

On en déduit immédiatement que u_n tend vers 1 lorsque n tend vers ∞, que la série $\Sigma\, u_n$ est divergente, et que la série de terme général

$$u_n - \lim_{n\to\infty} u_n = u_n - 1$$

est divergente. C'est en effet une série à termes strictement positifs dont le terme général est équivalent au terme général d'une série divergente, à savoir la série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

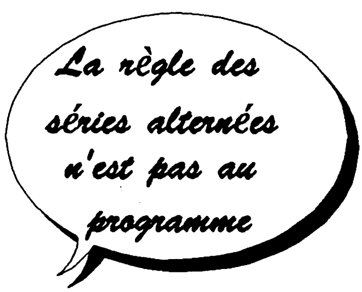
Séries équivalentes

Si Σu_n et Σv_n sont deux séries à termes réels asymptotiquement non nuls, de signe constant, et équivalents, alors ces deux séries sont de même nature, c'est-à-dire soit toutes deux convergentes, soit toutes deux divergentes.
L'hypothèse à ne pas oublier : au-delà d'un certain rang, le signe de u_n et de v_n doit être constant, soit toujours positif, soit toujours négatif.

10.

(1) ☐
(2) ☐
(3) ☐
(4) ■
(5) ■

Pour tout n et tout k, posons $u_{k,n} = \dfrac{(-1)^{k+1}}{nk+1}$. Alors, pour tout $n > 0$, $\lim_{k\to\infty} u_{n,k} = 0$. On peut donc regrouper les termes par 2 ; la convergence de la série aux termes regroupés est équivalente à la convergence de la série initiale.
On obtient :



■ *Réponse correcte*
☐ *Réponse fausse*

$$u_{n,2p+1} + u_{n,2p+2} = \frac{1}{2np+n+1} - \frac{1}{2np+2n+1}$$

$$= \frac{n}{(2np+n+1)(2np+2n+1)}$$

$$\underset{p \to \infty}{\sim} \frac{1}{4np^2}$$

Les termes de cette série étant de signe constant, équivalents à ceux d'une série convergente, la série est convergente. En outre, cette relation implique $\lim_{n \to \infty} w_n = 0$.

De l'identité remarquable

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{1+x}$$

on déduit

$$\frac{1}{1+\frac{1}{kn}} = 1 - \frac{1}{kn} + \frac{1}{k^2 n^2\left(1+\frac{1}{kn}\right)}$$

puis

$$\frac{1}{kn+1} = \frac{1}{kn} \times \frac{1}{1+\frac{1}{kn}}$$

$$= \frac{1}{kn} - \frac{1}{k^2 n^2} + \frac{1}{k^3 n^3 + k^2 n^2}$$

En remplaçant dans la série, on obtient

$$w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3 n^3 + k^2 n^2}$$

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

l'égalité étant justifiée par la convergence de chacune des trois séries. On en déduit que l'assertion (3) est fausse. On en déduit également le développement limité de w_n.

Comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$, et que $\displaystyle\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^2} = \frac{\pi^2}{6}$, on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2}$$

$$= \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}$$

Pour le terme $\displaystyle R_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3 n^3 + k^2 n^2}$, on peut écrire

$$|R_n| = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3 + \dfrac{k^2}{n^2}}$$

$$\leq \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

ce qui montre $|R_n| = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Le développement limité de w_n en ∞ s'en déduit.

Résultats du QCM n°5
Fonctions usuelles

(Questions p. 42)

1.

(1) □
(2) □ Si $\log_x 16 = \frac{2}{3}$, alors $x^{\frac{2}{3}} = 16$, et par suite
(3) ■
(4) □ $x = 16^{\frac{3}{2}} = 4^3 = 64$.
(5) □

2.

(1) □
(2) ■ Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, et que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, on a
(3) ■ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, et non $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$. Si l'on prolonge
(4) ■
(5) ■ f à $\mathbb{R}_+$ en posant $f(0) = 0$, on obtient une fonction dérivable à droite en 0, de dérivée à droite en 0 nulle. Pour démontrer ceci, on peut utiliser le théorème de prolongement par continuité des dérivées : ***Si f est continue sur [a;b], de classe C^1 sur]a;b], et si f' admet une limite finie au point a, alors f est de classe C^1 sur [a;b].*** Sur $\mathbb{R}_+^*$, on a en effet

$f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$, et la limite $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ résulte de la comparaison des fonctions polynômes et des fonctions exponentielles. Par récurrence, on montre, avec les mêmes arguments, que f est C^∞ sur $\mathbb{R}_+$, et que les dérivées à droite successives en 0 sont toutes nulles.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ étant décroissante, la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est croissante, et il en est de même de f, qui est la composée de deux fonctions croissantes (la fonction exponentielle est croissante).

Enfin, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

3.

(1) ☐
(2) ☐
(3) ☐
(4) ■
(5) ☐

Avant de passer à la démonstration formelle, prenons quelques exemples, en considérant les fonctions

$\theta : x \mapsto 0, \quad \alpha : x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ et $\beta : x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$.

Alors, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \alpha(x) = 1$, tandis que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \big(\alpha \circ \theta\,(x)\big) = 0$.

Cela contredit les assertions (1) (2) et (3), et montre que la deuxième proposition de l'assertion (4) est possible.

La fonction $\alpha \circ \beta$ n'admet pas de limite en 0 ce qui montre que la troisième proposition de l'assertion (4) est possible. Comme les fonctions continues vérifient la première proposition, on voit que ces trois propositions sont possibles. Enfin, comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \big(\alpha \circ Id\,(x)\big) = 1$, l'assertion (5) est fausse.

Soit $\epsilon > 0$. Par définition des limites, il existe $\gamma > 0$ et $\delta > 0$ tels que $|g(x) - c| < \epsilon$ si $0 < |x - b| < \gamma$, et que $|f(x) - b| < \gamma$ si $0 < |x - a| < \delta$. S'il existe un voisinage V de a tel que $f(x) \neq b$ si $x \in V \backslash \{a\}$, soit $\delta_1 \in\,]0;\delta]$ tel que $]a-\delta_1; a+\delta_1[\, \subset V$. Alors, $0 < |f(x) - b| < \gamma$ dès que $0 < |x - a| < \delta_1$, ce qui

■ *Réponse correcte*
☐ *Réponse fausse*

montre $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \left(g \circ f(x)\right) = c$. Si tout voisinage V de a contient un point $x \in V \backslash \{a\}$ tel que $f(x) = b$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in]a-1/n;a[\cup]a;a+1/n[$ tel que $f(x_n) = b$; la suite (x_n) converge vers a, et si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \left(g \circ f(x)\right)$ existe, on doit avoir $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \left(g \circ f(x)\right) = g(b)$.

Tout ceci montre que l'assertion (4) est la seule correcte.

4.

(1) ■
(2) □
(3) ■
(4) ■
(5) □

Les assertions (3) et (4) sont des caractérisations des fonctions convexes. L'assertion (3) donne une condition plus faible que la définition usuelle. L'assertion (4) est très utile pour les inégalités liées aux fonctions convexes. L'assertion (1) caractérise les fonctions soit concaves, soit convexes, et se démontre à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires. L'assertion (2) est fausse parce qu'une fonction convexe n'est pas forcément dérivable. Les résultats à connaître sont les suivants :

— Une fonction f convexe sur $[a;b]$ est dérivable à droite sur $[a;b[$, à gauche sur $]a;b]$; en outre, l'ensemble des points où f n'est pas dérivable est dénombrable, et pour tous x et $y \in]a;b[$, $x < y$, on a : $f_d'(x) \leq \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f_g'(y)$.

— Une fonction f continue sur l'intervalle $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ est convexe (resp. strictement convexe) sur $[a;b]$ si et seulement si sa dérivée est croissante (resp. strictement croissante).

L'assertion (5) n'a tout simplement pas de sens : si l'on peut définir des fonctions convexes et des fonctions concaves, on ne parle que d'ensembles convexes, pas d'ensembles concaves.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

5.

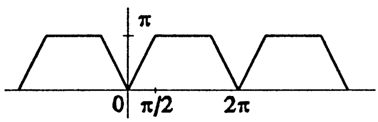
(1) ■ Exprimons les points P et Q dans les deux repères Oxy
(2) □
(3) □ et $Ox'y'$. Dans le repère Oxy : $P\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $Q\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta)\\\sin(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$;
(4) □
(5) □

et dans le repère $Ox'y'$: $P\begin{pmatrix}\cos(-\alpha)\\\sin(-\alpha)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\-\sin\alpha\end{pmatrix}$,

$Q\begin{pmatrix}\cos\beta\\\sin\beta\end{pmatrix}$. Dans le repère Oxy, la distance PQ vaut $2 - 2\cos(\alpha+\beta)$, et dans le repère $Ox'y'$, elle vaut $2 - 2\cos\alpha\cos\beta + 2\sin\alpha\sin\beta$. En identifiant, on retrouve la première formule.

6.

(1) □
(2) ■
(3) □
(4) □
(5) □



La fonction définie par

$$f(x) = \arccos(\cos(x)) + \frac{1}{2}\arccos(\cos(2x))$$

est paire et périodique, comme composée de fonctions paires, et périodiques.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

Dérivées et variations de fonctions

Une fonction réelle d'une variable réelle f est dite ***croissante*** (resp. ***strictement croissante***) sur un ensemble E si, pour tous x et $y \in E$, la relation $x < y$ implique $f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) < f(y)$). On définit de même les fonctions ***décroissantes* sur un ensemble.** La notion de croissance ou de décroissance est liée à un ensemble, et cela n'a pas de sens de parler de "fonction croissante en un point".

Voici les énoncés sur les fonctions croissantes qu'il faut absolument connaître :

☛ Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, croissante (resp. strictement croissante) sur $]a;b[$, alors f est croissante (resp. strictement croissante) sur $[a;b]$.

☛ Si f est une fonction dérivable sur son ensemble de définition, de dérivée positive en chaque point de cet ensemble, alors f est croissante **sur chacun des intervalles de son ensemble de définition** (ne pas omettre la fin de la phrase).

☛ Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I. Alors, une condition nécessaire et suffisante pour que f soit croissante sur I est que l'on ait $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit strictement croissante sur I est que l'on ait $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, et que, sur chaque sous-intervalle J de I, il existe $y \in J$ tel que $f'(y) > 0$.

On notera en particulier que la condition $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, est une condition suffisante pour que f soit strictement croissante sur I, mais qu'elle n'est pas nécessaire. (Attention : la caractérisation des fonctions strictement croissantes est au programme des prépa HEC, mais elle est source fréquente d'erreurs.)

7.

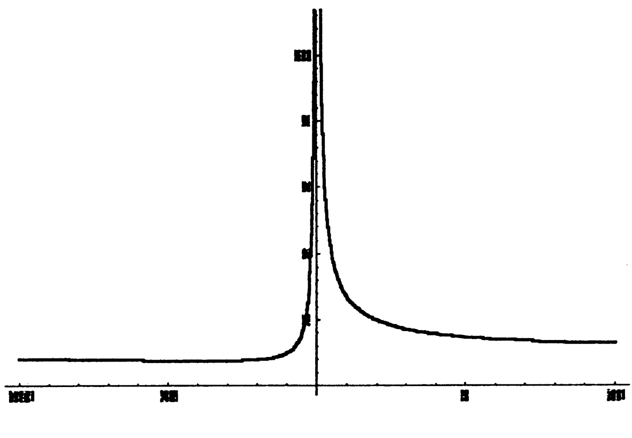
(1) □ $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0;1\}$, car la fonction f peut également s'écrire
(2) ■
(3) □ $f(x) = e^{\frac{\ln|x|}{x-1}}$. Sous cette forme, on peut étudier la
(4) □ fonction au voisinage de 1 :
(5) □

$$f(1+h) = e^{\frac{\ln(1+h)}{h}} = e^{\frac{h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+o(h^3)}{h}}$$

$$= e^{1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{3}+o(h^2)} = e \times e^{-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{3}+o(h^2)}$$

$$= e \times \left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + \frac{h^2}{8} + o(h^2)\right)$$

$$= e \times \left(1 - \frac{h}{2} + \frac{11}{24}h^2 + o(h^2)\right)$$



On en déduit que f se prolonge par continuité en 1 si l'on pose $f(1) = \mathrm{e}$, que la fonction ainsi prolongée est dérivable en 1, de dérivée $-\frac{e}{2}$, et que le graphe de f est

---

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

localement au-dessus de sa tangente en 1 (le coefficient de h^2 est positif). Toujours en écrivant f sous la forme

$f(x) = e^{\frac{\ln|x|}{x-1}}$, on peut calculer sa dérivée :

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln|x|}{x-1}\right) \times e^{\frac{\ln|x|}{x-1}} = \frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}\, e^{\frac{\ln|x|}{x-1}}$$
$$= \frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}\, |x|^{\frac{1}{x-1}}$$

La fonction exponentielle étant croissante sur $\mathbb{R}$, les variations de f sont données par celles de la fonction

$g : x \mapsto \dfrac{\ln|x|}{x-1}$, que l'on peut déterminer par sa dérivée,

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln|x|}{x-1}\right) = \frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}$$

Il existe un réel $\alpha \in]-4;-3[$ annulant cette dérivée. Le tableau de variations de f est le suivant

x	$-\infty$		α		0			1		$+\infty$
f	1	$\searrow$	m	$\nearrow +\infty$ ||	$+\infty$	$\searrow$	e ||	e	$\searrow$	1

8.

(1) ■ La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur
(2) □ $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$. Elle vérifie en outre
(3) □
$$f'(x) = \frac{1}{|x^2-1|}\,\frac{x^2-1}{x^2+1}.$$
(4) □
(5) ■ Il en résulte que, si $|x| < 1$, on a $(f + \arctan)' = 0$.

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

9.

(1) □
(2) ■
(3) ■
(4) □
(5) ■

La relation de base est fournie par l'égalité $\left(x^a\right)^b = x^{ab}$. En utilisant cette relation, on établit les relations de comparaison suivantes :

$$\begin{aligned}\left(\left(x^x\right)^x\right)^x = x^{\left(x^3\right)} &\prec \left(x^x\right)^{\left(x^x\right)} = \left(x^{\left(x^x\right)}\right)^x = x^{\left(x^{x+1}\right)} \\ &\prec x^{\left(\left(x^x\right)^x\right)} = x^{\left(x^{\left(x^2\right)}\right)} \\ &\prec x^{\left(x^{\left(x^x\right)}\right)}\end{aligned}$$

10.

(1) □
(2) □
(3) ■
(4) ■
(5) ■

Toutes ces formules se démontrent en passant aux exponentielles, éventuellement complexes.

► La formule de l'assertion (1) doit être modifiée ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^n\left(\frac{\pi k}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Voici comment la démontrer :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^n\left(\frac{\pi k}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{\left(e^{\frac{i\pi k}{n}} + e^{\frac{-i\pi k}{n}}\right)^n}{2^n} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2^n} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} e^{\frac{ik\pi}{n}(2p-n)} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k e^{-ik\pi} \left(e^{\frac{2ip\pi}{n}}\right)^k \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 - e^{2ip\pi}}{1 - e^{\frac{2ip\pi}{n}}} + n \right) \\ &= \frac{n}{2^{n-1}}\end{aligned}$$

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

▶ La formule correcte pour l'assertion (2) est

$$\prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch} \frac{x}{2^k} = \frac{\operatorname{sh} x}{2^n \operatorname{sh} \frac{x}{2^n}} .$$

Pour l'établir, on part de la relation

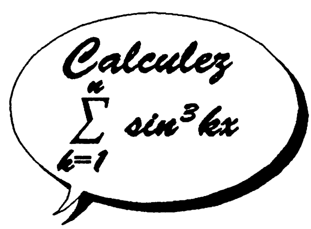
$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= 2\left(\frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{2}\right)\left(\frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{2}\right) \\ &= 2 \operatorname{sh} \frac{x}{2} \operatorname{ch} \frac{x}{2} \end{aligned}$$

qui s'écrit aussi

$$\operatorname{ch} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sh} x}{2 \operatorname{sh} \frac{x}{2}} .$$

En appliquant cette dernière relation à chacun des termes $\operatorname{ch} \frac{x}{2^k}$, on obtient un produit amalgamant, puis le résultat annoncé.

▶ La formule (3) s'obtient en passant aux exponentielles complexes, puis en sommant la suite géométrique obtenue. On déduit de cette formule la valeur de la somme des carrés des



■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

n premiers entiers naturels : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

► Pour l'assertion (4), on peut éviter les exponentielles complexes et utiliser la relation trigonométrique

$$1 + \frac{1}{\cos 2x} = \frac{\tan 2x}{\tan x} \ ;$$

on obtient un produit amalgamant qui donne le résultat annoncé.

► Enfin, la formule (5) s'obtient en passant aux exponentielles complexes.

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

Résultats du QCM n°6
Continuité, dérivabilité

(Questions p. 53)

1.

(1) □
(2) ■
(3) □
(4) □
(5) □

Le contre-exemple suivant : $I =]0;1]$, $f(x) = 1/x$ montre que l'assertion (1) n'est vraie que si I est fermé. L'assertion (2) n'est autre que l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires. En prenant $I =]0;1[$ et $f(x) = \text{cste}$, on prouve que $f(I)$ n'est pas un intervalle ouvert. De même, si $I = \mathbb{R}$ et si $f(x) = \arctan x$, alors

$f(I) = \left]\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$; ce n'est pas un intervalle fermé, et f n'atteint pas ses bornes ; cela contredit les assertions (4) et (5).

2.

(1) □
(2) ■
(3) ■
(4) ■
(5) □

Il est clair qu'une fonction continue n'est pas forcément bijective ; il suffit de considérer les fonctions constantes. Les assertions (2) et (3) caractérisent les fonctions continues injectives. L'assertion (4) est un critère d'existence des fonctions réciproques. Quand elle existe sur l'intervalle $f(I)$, f^{-1} suit la monotonie de f.

3.

(1) □
(2) □
(3) ■
(4) ■
(5) □

Le seul théorème positif affirme que la somme de deux fonctions continues est continue. La somme de deux fonctions discontinues peut être continue ($f + (-f)$, où f est discontinue), ou être discontinue ($f + (2f)$, où f est discontinue). Ainsi, le fait que $f + g$ soit discontinue permet seulement d'affirmer que l'une au moins des deux fonctions est discontinue.

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

4.

(1) ■
(2) □
(3) ■
(4) ■
(5) □

Le théorème des valeurs intermédiaires affirme que l'image, par une application continue d'un intervalle est un intervalle. On dit qu'une fonction ayant cette propriété est une *fonction de Darboux.* Il y a des fonctions de Darboux qui ne sont pas continues, par exemple les dérivées. (Exercice : montrer que la dérivée de la fonction $[-1;1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ est une fonction de Darboux qui n'est pas continue en 0.) Pour les exercices, la version du théorème des valeurs intermédiaires qui est la plus efficace est celle de l'assertion (3). La version "signe" : «*Si f est une application continue sur $[a;b]$, et si $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f(c) = 0$*», semble, à l'usage moins pratique, et source de nombreuses erreurs.

5.

(1) □
(2) ■
(3) □
(4) ■
(5) □

En général, la somme de deux fonctions périodiques n'est pas périodique. Cela peut toutefois se produire lorsque les périodes respectives des deux fonctions sont des multiples d'un même réel. C'est d'ailleurs pour cette raison que l'ensemble des fonctions périodiques n'est pas une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Du point de vue de la composition, si f est une fonction périodique, de période λ, et si g est une fonction quelconque, $g \circ f$ est une fonction périodique, de période λ, mais $f \circ g$ n'est généralement pas périodique.

6.

(1) □
(2) □
(3) □
(4) ■
(5) □

La fonction de la question est affine par morceaux. Elle est donc dérivable sauf en un nombre fini de points, et sa dérivée est localement constante.

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

7.

(1) ■ (2) □ (3) □ (4) □ (5) □

Toute fonction dérivable est continue. Le contre-exemple $f(x) = x^2$ met en défaut l'assertion (2). Il est en revanche exact qu'une fonction dérivable paire (resp. impaire) admette une dérivée impaire (resp. paire). Mais attention ! La réciproque est fausse si l'ensemble de définition n'est pas un intervalle. Le contre-exemple suivant : $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = x^4 + 1$ si $x > 0, f(x) = x^4$ si $x < 0$, montre que l'assertion (3) est fausse. Quant à l'assertion (4), elle serait vraie si I était un intervalle, ce qui n'a pas été supposé ici. La fonction $f(x) = 1/x$ en est l'illustration. D'autre part, une fonction dérivable peut être strictement croissante sans que sa dérivée soit strictement positive. Il suffit de considérer, par exemple, la fonction $f(x) = x^3$.

8.

(1) ■ (2) ■ (3) □ (4) ■ (5) ■

Voici les trois énoncés à connaître sur la monotonie des fonctions :

— Une fonction f continue sur $[a;b]$ est strictement croissante (resp. croissante) sur $[a;b]$ si et seulement si elle est strictement croissante (resp. croissante) sur $]a;b[$.

— Une fonction f continue sur l'intervalle $[a;b]$, et dérivable sur $]a;b[$ est croissante sur $[a;b]$ si et seulement si $f'(x) \geq 0$, pour tout $x \in]a;b[$.

— Une fonction f continue sur l'intervalle $[a;b]$, et dérivable sur $]a;b[$ est strictement croissante sur $[a;b]$ si et seulement si $f'(x) \geq 0$, pour tout $x \in]a;b[$, et si, pour tout sous-intervalle ouvert J de $]a;b[$,

$$\{x \in]a;b[\; : f'(x) > 0\} \cap J \neq \emptyset.$$

(Une partie A de $]a;b[$ qui est telle que $A \cap J \neq \emptyset$ pour tout sous-intervalle ouvert J de $]a;b[$ est dite *dense* dans $[a;b]$.)

En particulier, une fonction peut être strictement croissante sur $[a;b]$ bien que f' s'annule une infinité de fois sur cet intervalle.

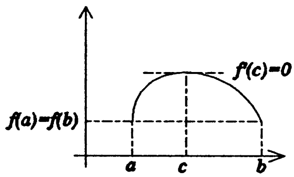
■ ***Réponse correcte***

□ ***Réponse fausse***

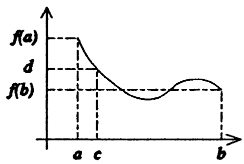
9.

(1) ☐
(2) ☐
(3) ■
(4) ☐
(5) ☐

La figure 1 illustre le THÉORÈME DE ROLLE : **Si f est une fonction continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$, et si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.**



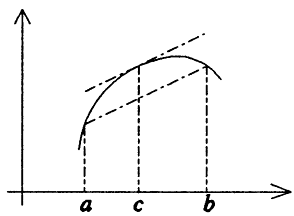
La figure de l'assertion (2) illustre le THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES : **Si f est continue sur $[a;b]$ et si $f(a) < d < f(b)$, il existe $c \in]a;b[$ tel que $f(c) = d$.**



Si $f(b) \leq d \leq f(a)$, il existe $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = d$

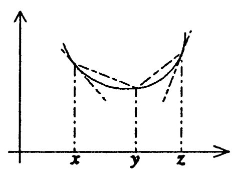
La figure de l'assertion (3) est celle qui illustre le THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS : **Si f est continue sur $[a;b]$, et dérivable sur $]a;b[$, il existe $c \in]a;b[$ tel que**

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c).$$



$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La figure de l'assertion (4) illustre une propriété des fonctions convexes dérivables : **Si f est une fonction convexe dérivable sur un intervalle I, et si x, y, z sont trois réels de l'intérieur de I, vérifiant $x < y < z$, alors**



Si f est convexe et dérivable, et si $x < y < z$, alors

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y} \leq f'(z)$$

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y) \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

■ *Réponse correcte*

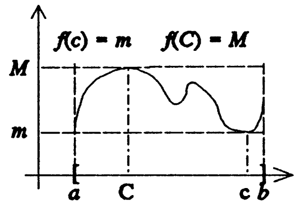
☐ *Réponse fausse*

La figure de l'assertion (5) illustre une propriété des fonctions continues sur un intervalle compact (= un segment) : Si f est continue sur $[a;b]$, il existe c et $C \in [a;b]$ tels que

$$f(c) = \inf\{f(x) : x \in [a;b]\}$$

et que

$$f(C) = \sup\{f(x) : x \in [a;b]\}$$



Toute fonction continue sur un intervalle compact est bornée et atteint ses bornes

10.

(1) □
(2) ■
(3) □
(4) ■
(5) ■

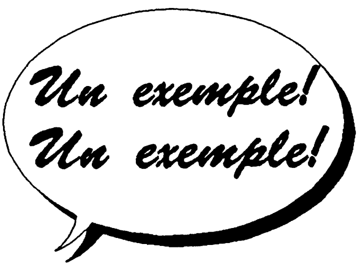
Polynôme, f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Supposons que l'assertion (2) soit fausse, et que f ait deux racines x_1 et x_2 dans $[-1;1]$. D'après le théorème de Rolle, il existerait alors $c \in]x_1;x_2[$, tel que $f'(c) = 0$. Or $f'(x) = 5x^4 - 7$, de sorte que $|f'(x)| \geq 2$ si $|x| \leq 1$. Ainsi, l'assertion (2) est vraie, tandis que l'assertion (3) est fausse. Puisque $f'(x) \leq -2$ si $|x| \leq 1$, la fonction f est strictement décroissante sur $[-1;1]$. Pour établir qu'elle ne s'annule pas sur cet intervalle, il suffit donc d'établir soit $f(-1) < 0$, soit $f(1) > 0$. Or, si $a < -6$, on a $f(-1) = 6+a < 0$, et si $a > 6$, on a $f(1) = -6+a > 0$. L'assertion (4) est donc vraie. Toujours en raison de la décroissance de f sur $[-1;1]$, pour établir l'existence d'un zéro de f dans cet intervalle, il suffit d'établir $f(-1) \geq 0$ et $f(1) \leq 0$. L'unicité résulte de la décroissance stricte de f. Or si $|a| \leq 6$, on a $f(-1) = 6+a \geq 0$, et $f(1) = -6+a \leq 0$. L'assertion (5) est donc vraie.

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

Pour calculer la dérivée d'une fonction compliquée, voici quelle est la formule magique :

La dérivée d'une expression faisant intervenir la variable plusieurs fois est la somme des dérivées de l'expression par rapport à chacune des occurrences de la variable.



$$
\begin{aligned}
D_x\left(\frac{x\,e^x}{\sin x}\right) &= D_x\left(\frac{x\,e^c}{\sin c}\right) + D_x\left(\frac{c\,e^x}{\sin c}\right) \\
&\quad + D_x\left(\frac{c\,e^c}{\sin x}\right) \\
&= \frac{e^c}{\sin c} + \frac{c\,e^x}{\sin c} \\
&\quad + \frac{\left(c\,e^c\right)\left(-\cos x\right)}{\sin^2 x} \\
&= \frac{e^x}{\sin x} + \frac{x\,e^x}{\sin x} \\
&\quad - \frac{x \cos x\, e^x}{\sin^2 x}
\end{aligned}
$$

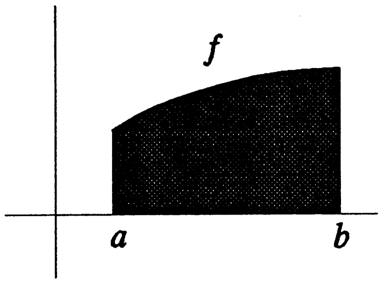
$$
\begin{aligned}
D_x\left(x^{x^x}\right) &= D_x\left(x^{c^c}\right) + D_x\left(c^{x^c}\right) + D_x\left(c^{c^x}\right) \\
&= c^c\, x^{c^c-1} + (\ln c)\, c^{x^c}\, c x^{c-1} + (\ln c)(\ln c\; c^x)\, c^{c^x} \\
&= x^x\, x^{x^x-1} + x^x\, x^{x^x} \ln x + x^x\, x^{x^x} \ln^2 x
\end{aligned}
$$

Résultats du QCM n°7 Intégration sur des intervalles compacts

(Questions p. 61)

1.

(1) □
(2) □
(3) ■
(4) □
(5) □



Les conditions décrites dans les assertions (2) et (5) ne décrivent en général pas de région. Si f est dérivable, (continûment dans le cas d'une intégrale au sens de Riemann), la longueur du graphe de f est donnée par

$$\int_a^b \sqrt{1+f'^2}\ .$$

L'assertion (4) est une version approximative (fausse) du deuxième théorème de Guldin dont voici l'énoncé (vrai) : "Le volume V d'un solide de révolution est donné par $V = 2\pi a S$, où S est l'aire de la demi-méridienne qui engendre le volume, et où a est la distance à l'axe du centre d'inertie de cette aire supposée homogène." Cela permet par exemple de calculer le volume d'un tore (= pneu).

2.

(1) □
(2) □
(3) ■
(4) □
(5) □

Puisque la fonction f est continue, la fonction F est dérivable, et f est la dérivée de F. La fonction F est donc croissante lorsque f est positive, décroissante lorsque f est négative. Le maximum de F est donc atteint en 7 et le minimum est soit en 0, soit en 9. Comme l'aire géométrique située entre le graphe de f et

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

l'axe des x est visiblement plus petit entre 7 et 9 qu'entre 0 et 7, le minimum de F est atteint en 0.

3.

(1) ■ (2) □ (3) □ (4) □ (5) ■

Utilisons la définition rappelée dans l'encadré sur les fonctions continues par morceaux.

La fonction logarithme népérien est continue sur $]0;1]$, donc continue par morceaux sur cet intervalle ; elle n'est pas continue par morceaux sur $[0;1]$, car elle n'admet pas de limite finie en 0. Pour la même raison, f_3 n'est pas continue par morceaux sur $[0;1]$. Sur $\mathbb{R}$, la fonction partie entière a une infinité de points de discontinuité ; elle n'est donc pas continue par morceaux sur cet intervalle, tandis qu'elle l'est sur tout sous-intervalle propre.

4.

(1) ■ (2) ■ (3) □ (4) □ (5) □

Les deux premières assertions sont claires.

La fonction $f : \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x \text{ si } x > 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$ fournit un contre-exemple à l'assertion (3).

L'assertion (4) est une source fréquente d'erreurs : la composée de deux fonctions continues par morceaux n'est pas forcément continue par morceaux, tout comme la composée de deux fonctions intégrables n'est pas forcément une fonction intégrable.

(Suite p. 169)

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

Fonctions continues par morceaux

Rappelons d'abord la définition d'une fonction continue par morceaux :

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur I s'il existe une subdivision finie $S = (x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n)$ d'éléments de I telle que f soit, sur chacun des sous-intervalles ouverts $]x_i;x_{i+1}[$ de I définis par S, la restriction d'une fonction continue sur un des sous-intervalles fermés de I définis par S.

Pour bien comprendre cette définition, voyons trois cas particuliers importants d'intervalles.

☛ Si $I = [a;b]$, une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur I s'il existe une subdivision $S = (x_0 = a \le x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n = b)$ telle que, pour tout k, $1 \le k \le n$, il existe une fonction continue $f_k : [x_{k-1};x_k] \to \mathbb{R}$ avec laquelle f coïncide sur $]x_{k-1};x_k[$.

☛ Si $I =]a;b]$, une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur I s'il existe une subdivision $S = (x_0 = a \le x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n = b)$ telle que

— il existe une fonction continue $f_1 :]a;x_1] \to \mathbb{R}$ avec laquelle f coïncide sur $]a;x_1[$,

et que

— pour tout k, $2 \le k \le n$, il existe une fonction continue $f_k : [x_{k-1};x_k] \to \mathbb{R}$ avec laquelle f coïncide sur $]x_{k-1};x_k[$.

☛ Si $I = \mathbb{R}$, une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur I s'il existe une subdivision $S = (x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n)$ telle que

— il existe une fonction continue $f_1 :]-\infty;x_1] \to \mathbb{R}$ avec laquelle f coïncide sur $]-\infty;x_1[$,

— pour tout k, $2 \le k \le n$, il existe une fonction continue $f_k : [x_{k-1};x_k] \to \mathbb{R}$ avec laquelle f coïncide sur $]x_{k-1};x_k[$.

— il existe une fonction continue $f_{n+1} : [x_n;+\infty[\to \mathbb{R}$ avec laquelle f coïncide sur $]x_n;+\infty[$.

Primitives et intégrales

Rappelons d'abord la définition d'une primitive sur un intervalle ouvert, et celle d'une primitive sur un intervalle fermé : ***Si f est une fonction $]a;b[\to \mathbb{R}$, on dit qu'une fonction F est une primitive de f sur $]a;b[$ si F est définie et dérivable sur $]a;b[$ et si, pour tout $x \in]a;b[$, on a $F'(x) = f(x)$; on dit que F est une primitive de f sur $[a;b]$ si F est définie et continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ et si, pour tout $x \in]a;b[$, on a $F'(x) = f(x)$.*** On notera que la notion de primitive est plus simple que la notion d'intégrale, et qu'elle en est indépendante. Le lien est donné par le théorème suivant :

Une fonction f continue sur un intervalle $[a;b]$ est
— intégrable sur tout sous-intervalle de $[a;b]$,
— primitivable sur $[a;b]$,

et une primitive de f sur $[a;b]$ est la fonction $x \mapsto \int_a^x f$.

Grâce à ce théorème, on peut utiliser les formules d'intégration pour déterminer les primitives des fonctions continues, et inversement, utiliser les primitives pour calculer certaines intégrales. A remarquer quand même : le théorème précédent n'est pas aussi universel qu'il le paraît, car en général, on ne sait pas exprimer les primitives à l'aide de formules directes, ne faisant appel qu'aux fonctions usuelles. L'exemple le plus connu de réaction à cette impossibilité est celui de la fonction logarithme : ne pouvant pas exprimer de primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, à l'aide des fonctions usuelles que sont les fractions rationnelles et les fonctions trigonométriques, on introduisit la fonction logarithme que l'on ajouta à l'ensemble des fonctions considérées comme usuelles.

La notion de primitive étant indépendante de celle d'intégrale, il vaut mieux, si l'on veut rester à un niveau aussi élémentaire que possible, éviter de se servir des notations de cette théorie pour n'utiliser que des notations conformes à celles des dérivées. On note donc $'f$, ou $f^{(-1)}$, une primitive de f sur un intervalle, en faisant attention au fait qu'elle n'est définie qu'à une constante près. Avec cette convention, le théorème d'intégration par parties devient le *théorème de primitivation par parties*, qui s'écrit :

Si u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur $[a;b]$, une primitive de uv' sur cet intervalle est donnée par

$$'(u\,v') = uv - '(u'\,v)$$

(Ne pas oublier que ceci est vrai *à une constante près*, et ne pas réduire ce théorème à une formule ; il y a des hypothèses à vérifier.)

Exprimé dans ses deux versions, le théorème de changement de variable s'écrit :

Soient g une fonction C^1 sur un intervalle $[a;b]$, et f une fonction continue sur un intervalle contenant $g([a;b])$. Alors, $f \circ g\, g'$ est primitivable et intégrable sur $[a;b]$, f est intégrable sur $[g(a);g(b)]$, et l'on a

$$'((f' \circ g)\, g') = f \circ g \quad et \quad \int_a^b \left((f\circ g)\times g'\right) = \int_{g(a)}^{g(b)} f$$

En changeant f' en f, la formule $'((f' \circ g)\, g') = f \circ g$ s'écrit

$$'((f \circ g)\, g') = {}'f \circ g.$$

Cette dernière formule est très utilisée.

Considérons par exemple la fonction

$$f : \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases},$$

qui est continue sur $[0;1]$, et la fonction

$$g : \begin{cases} [-1;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{cases},$$

qui est continue par morceaux sur $[-1;1]$. La fonction composée est

$$g \circ f : \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin \left\{\dfrac{1}{n} \,;\, n \in \mathbb{N}^*\right\} \\ 1 \text{ si } x = \dfrac{1}{n},\ \ n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \end{cases}$$

et cette fonction n'est pas continue par morceaux sur $[0;1]$, car elle a une infinité de points de discontinuité.

Enfin, une fonction monotone sur un intervalle peut aussi avoir une infinité de points de discontinuité.

5.

(1) □
(2) ■
(3) ■
(4) □
(5) □

► La fonction $x \mapsto \sqrt{1+\sin 2x}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, elle est primitivable sur cet ensemble. Par ailleurs, la relation

$$\begin{aligned} 1+\sin 2x &= \cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x \cos x \\ &= (\sin x + \cos x)^2 \end{aligned}$$

permet d'écrire

$$\sqrt{1+\sin 2x} = |\sin x + \cos x|$$

soit, en précisant les points où $\sin x + \cos x$ change de signe,

$$\sqrt{1+\sin 2x} = \begin{cases} \sin x + \cos x & \text{si } x \in \left[-\dfrac{\pi}{4} ; 3\dfrac{\pi}{4}\right] + 2k\pi,\ k \in Z \\ -\sin x - \cos x & \text{si } x \in \left[3\dfrac{\pi}{4} ; 7\dfrac{\pi}{4}\right] + 2k\pi,\ k \in Z \end{cases}$$

On en déduit la forme des primitives cherchées

$${}'\left(\sqrt{1+\sin 2x}\right) = \begin{cases} \sin x - \cos x + C_k \text{ si } x \in \left[-\dfrac{\pi}{4} ; 3\dfrac{\pi}{4}\right] + 2k\pi, \\ \qquad k \in Z \\ -\sin x + \cos x + D_k \text{ si } x \in \left[3\dfrac{\pi}{4} ; 7\dfrac{\pi}{4}\right] + 2k\pi, \\ \qquad k \in Z \end{cases}$$

et l'on détermine les constantes C_k et D_k grâce à la périodicité de la fonction, et par les égalités

---

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

$$[\sin x - \cos x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = [\cos x - \sin x]_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} = 2\sqrt{2}$$

On obtient finalement une primitive,

$$'\left(\sqrt{1+\sin 2x}\right)$$

$$= \begin{cases} \sin x - \cos x + 4k\sqrt{2} & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi ; 3\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right[, \; k \in \mathbb{Z} \\ -\sin x + \cos x + (4k+2)\sqrt{2} & \text{si } x \in \left[3\frac{\pi}{4} + 2k\pi ; 7\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right[, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

les autres s'en déduisant par ajout d'une constante.

► La fonction $x \mapsto \dfrac{\arctan x}{x^2}$ étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est primitivable sur cet intervalle. Par ailleurs, on peut procéder à une primitivation par parties :

$$'\left(\frac{\arctan x}{x^2}\right) = \,'\left(\arctan x \times \left(-\frac{1}{x}\right)'\right)$$

$$= \left(-\frac{\arctan x}{x}\right) - \,'\left(-\frac{1}{x(1+x^2)}\right)$$

$$= \left(-\frac{\arctan x}{x}\right) + \,'\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \frac{\arctan x}{x}$$

► La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x(1-\ln^2 x)}$ est continue sur $]e;+\infty[$, donc primitivable sur cet intervalle. Cela étant, l'écriture

$$\frac{\ln x}{x\left(1-\ln^2 x\right)} = \frac{\ln x}{1-\ln^2 x} \times \left(\ln x\right)'$$

montre que l'on a affaire à une fonction composée, et que l'on peut appliquer la formule de changement de variable, ${}'(f \circ g\; g') = {}'f \circ g$, avec $g : x \mapsto \ln x$, et $f : x \mapsto \dfrac{x}{1-x^2}$. La fonction f est de la forme $-\dfrac{1}{2}\,\dfrac{u'}{u}$,

avec $u : x \mapsto 1 - x^2$; on a donc ${}'f = -\dfrac{1}{2}\ln|\,u|$, soit

${}'f : x \mapsto -\dfrac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right|$, et enfin

$${}'\left(x \mapsto \frac{\ln x}{x\left(1-\ln^2 x\right)}\right) : x \mapsto -\frac{1}{2}\ln\left|1-\ln^2 x\right|$$

► La fonction $x \mapsto x^3 e^{2x}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc primitivable sur cet intervalle. Cette fonction est d'un type connu ; c'est une fonction "exponentielle-polynôme". Pour ce type de fonction, comme pour les "exponentielles-fonctions trigonométriques", les deux principales méthodes sont

— l'identification,

— la primitivation par parties multiple, à un ordre égal au degré du polynôme.

Voyons la méthode d'identification. *A priori*, une primitive de $x \mapsto x^3 e^{2x}$ est de la forme (*Attention : UNE* primitive, et non *les*)

$$f : x \mapsto \left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)e^{2x} ,$$

ce qui conduit à l'identification

$$x^3 e^{2x} = \left(2ax^3 + (3a+2b)\,x^2 + (2b+2c)\,x + (c+2d)\right)e^{2x}$$

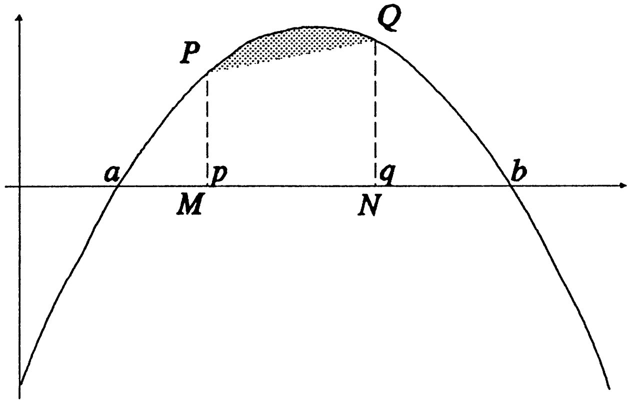
puis à la solution

$$x \mapsto \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}\right)e^{2x}$$

► Quant à l'assertion (5), inutile de chercher : on a montré que les primitives de la fonction $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ ne peuvent s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles.

6.

(1) □
(2) □
(3) □
(4) ■
(5) □



Soient $M\left|\begin{matrix} p \\ 0 \end{matrix}\right.$, et $N\left|\begin{matrix} q \\ 0 \end{matrix}\right.$. Soient A l'aire cherchée, B l'aire du trapèze $MNQP$, et $C = \int_p^q f$, où f est la fonction $x \mapsto t(a - x)(x - b)$. On a $A = C - B$. Calculons donc B et C.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

$$B = \frac{1}{2}(MP + NQ) \times MN$$

$$= \frac{1}{2}\left[t\,(a-p)\,(p-b) + t(a-q)\,(q-b)\right](q-p)$$

$$= \left[\frac{t}{2}\,(q-p)\right]\left[-(p^2+q^2) + (p+q)(a+b) - 2ab\right]$$

$$= \left[\frac{t}{6}\,(q-p)\right]\left[-3\,(p^2+q^2) + 3(p+q)(a+b) - 6ab\right]$$

$$C = t\int_p^q \big(x \mapsto (a-x)(x-b)\big)$$

$$= -t\int_p^q \big(x \mapsto x^2 - (a+b)\,x + ab\big)$$

$$= -t\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(a+b)\,x^2 + abx\right]_p^q$$

$$= -t\left[\frac{1}{3}(q^3-p^3) - \frac{1}{2}(a+b)\,(q^2-p^2) + ab(q-p)\right]$$

$$= -\left[\frac{t}{6}(q-p)\,\big(2\,(q^2+pq+p^2) - 3\,(a+b)(q+p) + 6ab\big)\right]$$

d'où, en effectuant la différence,

$$A = \frac{t}{6}(q-p)^3$$

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

7.

(1) ■
(2) ■
(3) □
(4) □
(5) ■

La fonction F est continue. C'est une propriété générale des intégrales fonctions des bornes. Pour toute fonction intégrable f, la fonction F est continue (elle a même des propriétés plus fortes, qui dépendent de la théorie de l'intégrale utilisée, mais nous n'entrerons pas ici dans ces considérations). Ici, la fonction f est supposée continue ; cela implique que F soit dérivable et vérifie $F'(x) = f(x+1) - f(x)$. Grâce à cette relation, on peut contrôler la véracité des assertions (3) à (5). La fonction F est croissante si et seulement si sa dérivée est positive, c'est-à-dire si et seulement si $f(x+1) \geq f(x)$; cette dernière condition n'implique pas la croissance de f, et l'assertion (3) est fausse. La fonction F est constante si et seulement si sa dérivée est nulle, c'est-à-dire si et seulement si pour tout réel x, $f(x+1) = f(x)$. Cela implique que f soit de période 1 ; mais si f est de période 4/3, sans être de période 1, cette relation n'est pas vérifiée. Ainsi, l'affirmation (4) est fausse. On a vu que F est constante si et seulement si f est de période 1. Cela n'implique pas que F soit constamment nulle.

8.

(1) □
(2) □
(3) ■
(4) ■
(5) □

Le raisonnement comporte une double faute :

► La première erreur se développe progressivement : l'écriture $\dfrac{1}{x\ln x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{\ln x}$ n'est pas fautive tant que l'on ne dit pas ce que sont A et B, c'est-à-dire si ce sont des constantes ou des fonctions. Lorsqu'on écrit $B = 1$ à partir de la valeur en 1 (en dehors du domaine), on précise ce qui était ambigu dans l'écriture de la décomposition : il ne s'agit pas de fonctions, mais de réels. Or la décomposition est fausse si l'on impose $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$. En soi, le fait de chercher une décomposition plus simple n'est pas une faute. La faute est dans la forme imposée pour la décomposition. On peut penser que l'étudiant a voulu appliquer la méthode

---

■ ***Réponse correcte***

□ ***Réponse fausse***

(hors programme) dite "de décomposition en éléments simples des fractions rationnelles" : par exemple, la fraction rationnelle $\dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$ admet une décomposition sous la forme

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b},$$

où α et β sont des réels. Le fait que les fractions rationnelles admettent une certaine forme de décomposition, n'affirme rien sur les décompositions éventuelles des autres types de fonctions. Ni que d'autres fonctions peuvent se décomposer, ni qu'elles ne le peuvent pas. Ce dernier point explique pourquoi la réponse (2) est fausse.

▶ La deuxième erreur est dans la primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\ln x}$. La fonction $x \mapsto \ln|\ln x|$ n'en est pas une.

9.

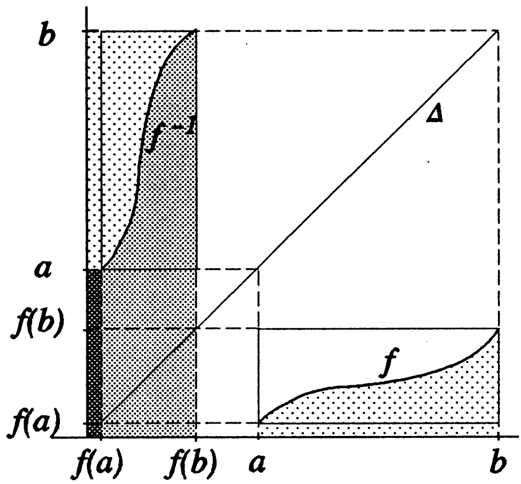
(1) □
(2) ■
(3) □
(4) ■
(5) □

Dans la formule (1), les fonctions f et f' ont été inversées. La formule (2) est simplement la formule d'intégration par parties appliquée à $f = 1 \cdot f$. La formule (4) se déduit de (2) par un changement de variable : $y = f(x)$, ou $x = f^{-1}(y)$. Les formules (3) et (5) sont fantaisistes. Revenons sur (4). Cette formule est encore vraie si l'on suppose seulement f strictement croissante sur $[a;b]$. Son interprétation physique est simple : elle traduit en termes d'aires le fait que le

---

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

graphe de f^{-1} soit le symétrique du graphe de f par rapport à la diagonale.



10.

(1) ☐ (2) ■ (3) ■ (4) ☐ (5) ■

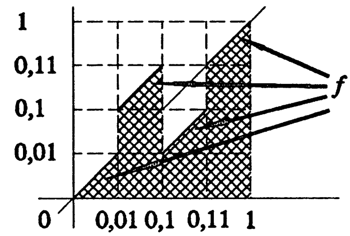
Prenons d'abord un exemple, avec $p = 2$, et $k = 1$. En base deux, 0 s'écrit 0 (qui l'eût cru ?), tandis que $\frac{1}{4}$ s'écrit 0,01 que $\frac{1}{2}$ s'écrit 0,1, que $\frac{3}{4}$ s'écrit 0,11, et que 1 s'écrit 1 (mais oui!). Un réel x de $\left[0;\frac{1}{4}\right]$ s'écrit donc $0{,}00x_3x_4x_5\ldots$ en base deux. Les réels $y = x + \frac{1}{4}$, $z = x + \frac{1}{2}$ et $t = x + \frac{3}{4}$ s'écrivent alors respectivement

---

■ *Réponse correcte*

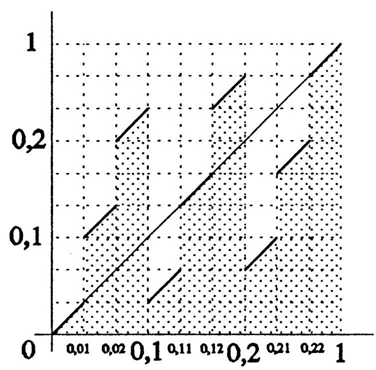
☐ *Réponse fausse*

0,01$x_3x_4x_5$..., 0,10$x_3x_4x_5$..., et 0,11$x_3x_4x_5$... Par l'application f, on obtient $f(x) = x$, $f(y) = z$, $f(z) = y$, et $f(t) = t$. Le graphe de f est donc le suivant



$k=1 \quad p=2$

D'une manière générale, la fonction f est affine par morceaux, de pente égale à 1 sur chacun des morceaux. Elle réalise en outre une bijection de [0;1] sur [0;1]. Son intégrale est donc celle de la fonction identité, à savoir $\frac{1}{2}$.



$k = 1 \quad p = 3$

Résultats du QCM n°8
Développements limités
Formule de Taylor

(Questions p. 70)

Développements limités usuels, au voisinage de 0

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
Cas particulier :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + o(x^3)$$

ATTENTION : Pour développer une fonction de la forme $x \mapsto (1+x)^{u(x)}$, écrire $(1+x)^{u(x)} = e^{u(x)\ln(1+x)}$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^r\frac{x^{2r}}{(2r)!} + o(x^{2r})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^r\frac{x^{2r+1}}{(2r+1)!} + o(x^{2r+1})$$

1.

(1) ☐ Les développements corrects sont donnés dans l'encadré
(2) ☐ de la page 179.
(3) ■ La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'y figure pas, parce qu'elle
(4) ☐ n'admet de développement limité en 0 : il serait
(5) ☐ d'ailleurs impossible d'appliquer à cette fonction la formule de Taylor en 0, car elle n'est pas dérivable en 0.

2.

(1) ■
(2) ■
(3) ☐
(4) ☐
(5) ■

Si f admet un développement limité d'ordre 0 en 0, on peut écrire $f(x) = a_0 + o(1)$, avec $a_0 \in \mathbb{R}$. Alors $f(0) = a_0$, et $\lim_{x \to 0} f(x) = a_0 = f(0)$, et f est continue en 0. A noter que dans la définition de la limite, comme on a supposé que f est définie en 0, l'écriture $\lim_{x \to 0} f(x)$ n'exclut pas le point 0. Si l'on utilise des limites "épointées" (c'est-à-dire où l'on a ôté le point où la limite est considérée), on ne peut conclure qu'au fait que f se prolonge par continuité en 0.

Si f admet un développement limité d'ordre 1 en 0, on peut écrire $f(x) = a_0 + a_1 x + o(x)$, avec a_0 et $a_1 \in \mathbb{R}$. La fonction f est différentiable en 0, donc dérivable en 0.

La fonction $f : x \mapsto x^3 \chi_Q$ prend la valeur x^3 lorsque $x \in \mathbb{Q}$, 0 lorsque $x \notin \mathbb{Q}$; elle admet un développement limité d'ordre 2 en 0, nul. Comme elle n'est continue qu'en 0, elle ne peut être dérivable ailleurs qu'en 0, et la dérivée seconde n'est pas définie en 0 : comment

---

■ *Réponse correcte*
☐ *Réponse fausse*

pourrait-on étudier $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x}$ si f' n'est pas définie ?

Un développement limité est un objet *local*. Il décrit le comportement d'une fonction à proximité immédiate du point où le développement est effectué. Il ne dit rien de ce qui se passe plus loin. Cette idée de voisinage est bien rendue mathématiquement par la notion de limite, et cela dépend essentiellement de la fonction. Prenons par exemple les fonctions f_n définies ainsi :

$$f_n \;:\; \begin{array}{l} [-1\,;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \left[-1\,;\dfrac{1}{n}\right] \\ \dfrac{1}{1-x} & \text{si } x \in \left]\dfrac{1}{n}\,;1\right[\\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{array}$$

Toutes ces fonctions admettent un développement limité d'ordre quelconque en 0, nul. Mais l'intervalle sur lequel ce développement limité représente bien la fonction dépend de n : pour la fonction f_n, c'est l'intervalle $\left[-1\,;\dfrac{1}{n}\right]$. Aucune de ces fonctions n'est bornée sur $[-1;1]$.

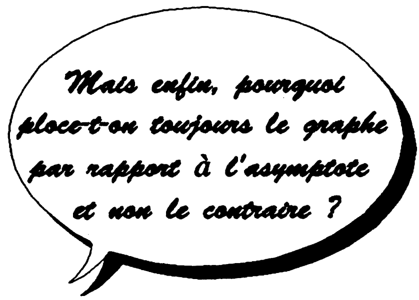
Si f est définie sur $[-1;+\infty[$, et si $x \mapsto x f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ admet un développement limité à droite d'ordre 2 en 0, alors on peut écrire

$$x f\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2)$$

soit, en posant $u = \dfrac{1}{x}$,

$$f(u) \underset{+\infty}{=} a_0 u + a_1 + \frac{a_2}{u} + o\left(\frac{1}{u}\right)$$

ce qui montre que le graphe de f possède une asymptote. On voit en outre qu'un développement d'ordre 1 suffit à assurer de l'existence de cette asymptote, le terme d'ordre 2 servant seulement à préciser la position de l'asymptote par rapport au graphe.



3.

(1) □
(2) □
(3) □
(4) ■
(5) □

• Si f est une fonction n'admettant pas de développement limité en 0, et si $g = -f$, alors $f+g$ est la fonction nulle qui admet un développement limité de tout ordre ; l'assertion (1) est donc fausse.

• Si f et g admettent un développement limité d'ordre n en 0, $f \circ g$ n'est pas forcément définie, et l'assertion (2) est fausse. En revanche, si les hypothèses de l'assertion (2) sont vérifiées, et si en outre $f \circ g$ est définie, et si $g(0) = 0$, alors $f \circ g$ admet aussi un développement limité d'ordre n en 0.

• Une fonction peut admettre un développement limité d'ordre $n > 1$ en 0 sans être pour autant n fois dérivable en 0 (*cf.* p. 181). On ne peut donc pas dériver les développements limités.

• En revanche, on peut les intégrer. En effet, si f est continue sur l'intervalle I contenant 0, elle est primitivable sur I, et une primitive de f sur I est la

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

fonction $x \mapsto \int_0^x f$ (les autres primitives de f sur I se déduisent de celle-ci par ajout d'une constante). Les inégalités usuelles sur les intégrales permettent alors de montrer l'existence du développement limité de cette primitive (Attention : c'est parce que f est continue que l'on peut identifier une primitive de f et son intégrale indéfinie ; une dérivée, c'est-à-dire une fonction qui est une dérivée admet par définition une primitive, mais n'est pas forcément intégrable, et inversement, une fonction admettant une intégrale indéfinie, par exemple une fonction continue par morceaux non continue, n'est en général pas une dérivée et n'admet donc pas de primitive).

- Pour comprendre pourquoi l'assertion (5) est fausse, considérons par exemple $f = g : x \mapsto 1 + x^2$. Le développement limité à l'ordre 1 en 0 de f et de g est donné par $f(x) = g(x) = 1 + o(x)$. Le produit de ces deux développements limités donne 1, tandis que le produit de f et de g s'écrit $1 + 2x^2 + x^4$; le développement limité à l'ordre 2 de fg s'écrit donc $1 + 2x^2$, et ce n'est pas le produit des développements.

☞ **Attention : le produit d'un développement limité d'ordre n et d'un développement limité d'ordre p donne généralement un polynôme de degré $n+p$, mais ce polynôme n'est pas le développement limité à l'ordre $n+p$ du produit des deux fonctions dont on a multiplié les développements.** ☜

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

4.

(1) ☐
(2) ■
(3) ☐
(4) ☐
(5) ■

► Pour le développement de la fonction tangente en 0, il existe de nombreuses méthodes. La plus courante consiste à faire le quotient du développement de la fonction sinus par le développement de la fonction cosinus. Voici une autre méthode, découlant directement de la formule de Taylor. La disposition permet de limiter les risques d'erreur. On fait un tableau de 5 colonnes dont l'explication est donnée ci-après :

n	$f^{(n)}$	$f^{(n)}(0)$	$n!$	$f^{(n)}(0)/n!$
0	t	0	1	0
1	$1+t^2$	1	1	1
2	$2tt'$	0	2	0
3	$2t^2 + 2tt''$	2	6	1/3
4	$6t't'' + 2tt'''$	0	24	0
5	$6t''^2 + 8t't''' + 2tt^{iv}$	16	5×24	2/15
6	$20t''t''' + 10t't^{iv} + 2tt^{v}$	0	$6\times5\times24$	0
7	$20(t''')^2 + 30t''t^{iv} + 12t't^{v} + 2tt^{vi}$	272	$7\times5\times9\times16$	17/315

— La première colonne indique l'ordre de la ligne (0 pour la fonction, 1 pour la dérivée, etc.)
— Dans la deuxième colonne, on exprime la dérivée ; pour la fonction tangente, si l'on pose

■ *Réponse correcte*
☐ *Réponse fausse*

$t = \tan x$, on a $\dfrac{d}{dx}\tan x = 1 + \tan^2 x$, de sorte que l'on va exprimer les dérivées successives en fonction des précédentes, exprimées simplement à l'aide de t.

— La troisième colonne donne la valeur de la dérivée en 0.

— La quatrième colonne rappelle les factorielles.

— La cinquième colonne donne le coefficient figurant dans le développement limité, qui est donc le quotient des termes de la troisième et de la quatrième colonne.

Finalement, le développement cherché est

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7)$$

On remarquera que les termes d'ordre pair sont nuls, ce qui est normal, puisque la fonction tangente est impaire.

► Posons $f_\alpha(x) = \dfrac{1}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$. On a les relations $f_{-\alpha} = f_\alpha$, et $f_{\alpha+2\pi} = f_\alpha$. On peut donc ne considérer que le cas $\alpha \in [0;\pi]$. Si $\alpha = 0$, on a directement

$$f_0(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + o(x^2)$$

et si $\alpha = \pi$

$$f_\pi(x) = \frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 + o(x^2)$$

Dans les autres cas, on a intérêt à passer en nombres complexes pour se ramener à des développements usuels.

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{(e^{i\alpha} - x)(e^{-i\alpha} - x)}$$

$$= \frac{1}{2i\sin\alpha}\left(\frac{1}{e^{-i\alpha} - x} - \frac{1}{e^{i\alpha} - x}\right)$$

$$= \frac{1}{2i\sin\alpha}\left(\sum_{k=0}^{2}\left(e^{(k+1)i\alpha} - e^{-(k+1)i\alpha}\right)x^k + o(x^2)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{2}\frac{\sin\big((k+1)\alpha\big)}{\sin\alpha}x^k + o(x^2)$$

En utilisant les formules usuelles de trigonométrie,

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$2\cos^2\alpha = \cos 2\alpha + 1$$

on arrive au développement annoncé.

▶ La fonction $x \mapsto \ln\cos x$ est une fonction composée exprimée à l'aide des fonctions usuelles. Comme on connaît les développements des fonctions utilisées, on peut calculer directement le développement limité cherché. **On procède de l'intérieur vers l'extérieur.** On obtient successivement

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$\ln(\cos x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)$$

$$= \ln\left(1 + \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right]\right)$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right] - \frac{1}{2}\left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right]^2 + o(x^4)$$

$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

Une autre méthode pour le calcul du développement de $x \mapsto \ln\cos x$ est de remarquer que la dérivée de cette fonction est la fonction tangente dont le développement a été obtenu plus haut. On obtient donc le développement cherché en primitivant le développement de la fonction tangente, et en remarquant que $\ln\cos 0 = 0$.

► De même, on peut déduire le développement limité de la fonction $x \mapsto \ln^3\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \left(\ln\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\right)^3$ de celui de la fonction $x \mapsto \ln\cos x$. En effet, on a la relation $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cos ix$. On en déduit immédiatement

$$\begin{aligned}
\ln\frac{e^x + e^{-x}}{2} &= \ln\cos ix \\
&= -\frac{(ix)^2}{2} - \frac{(ix)^4}{12} + o(x^4) \\
&= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)
\end{aligned}$$

puis, en prenant le cube,

$$\begin{aligned}
\left(\ln\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^3 &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)\right)^3 \\
&= \frac{x^6}{8} - 3\,\frac{1}{12}\left(\frac{1}{2}\right)^2 x^8 + o(x^8) \\
&= \frac{x^6}{8} - \frac{x^8}{16} + o(x^8)
\end{aligned}$$

► En 0, on a $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$, d'où

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\tan x} &= \frac{x}{x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)} = \frac{1}{1 + \dfrac{x^2}{3} + o(x^2)} \\
&= 1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)
\end{aligned}$$

On en déduit que la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\tan x}$ est définie, positive et continûment dérivable au voisinage de 0 lorsqu'on la prolonge par 1 en 0, puis que $x \mapsto \sqrt{\dfrac{x}{\tan x}}$ a ces mêmes propriétés. Il est donc légitime de chercher un développement limité de cette fonction. Pour cela, on procède de la manière habituelle, de l'intérieur vers l'extérieur. Le développement de la fonction tangente est connu, de même que ceux des fonctions $u \mapsto \dfrac{1}{1+u}$ et $u \mapsto \sqrt{1+u}$. On obtient successivement

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\tan x} &= \frac{x}{x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + o(x^5)} \\
&= \frac{1}{1 + \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{2}{15}x^4 + o(x^4)} \\
&= 1 - \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^4\right) + \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^4\right)^2 + o(x^4) \\
&= 1 - \frac{1}{3}x^2 + \left(-\frac{2}{15} + \frac{1}{9}\right)x^4 + o(x^4) \\
&= 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{x}{\tan x}} &= \sqrt{1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 + o(x^4)} \\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4\right)^2 + o(x^4) \\
&= 1 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{40}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

5.

(1) ☐ (2) ☐ (3) ☐ (4) ■ (5) ☐

Rappelons l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\left| f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right|$$

$$\leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in]a;x[} \left| f^{(n+1)}(t) \right|$$

Appliquons cette inégalité à la fonction sinus :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + R_6 ,$$

avec $|R_6| \leq \frac{|x|^7}{5040} \leq \frac{|x|^5}{120}$ si $|x| < 1$.

Appliquons ceci à l'accélération (a) ; si $P = \pi + x$, il vient

$$\begin{aligned} P + \sin P &= \pi + x + \sin(\pi + x) \\ &= \pi + x - \sin(x) \\ &= \pi + \frac{x^3}{6} - R_4 \end{aligned}$$

d'où

$$|P + \sin P - \pi| = \left| \frac{x^3}{6} - R_4 \right| \leq \left| \frac{x^3}{6} \right|$$

car $R_4 = \frac{x^5}{120} + R_6$ est du signe de x et vérifie

$|R_4| \leq \left| \frac{x^3}{6} \right|$. Ainsi, lorsque P donne n décimales de π, (a) en donne $3n$.

Un calcul semblable montre que si x est l'erreur de P, comme approximation de π, (b) fournit une

■ *Réponse correcte*

☐ *Réponse fausse*

approximation de π de l'ordre de $\frac{x^3}{24}$, donc une meilleure approximation que (*a*). De même, l'erreur de (*c*) est de l'ordre de $-\frac{1}{15}x^5$; c'est donc une approximation encore meilleure. En particulier, (*c*) n'est pas la moyenne de (*a*) et (*b*). Si P est une approximation de π à 10^{-5} près, (*c*) est une approximation de π à 10^{-25} près, mais en général pas une approximation à 10^{-40} près.

Recherche des asymptotes

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;+\infty[$. On dit qu'une droite d'équation $y = ax + b$ est ***asymptote au graphe de f***, ou plus simplement asymptote de f en $+\infty$, si $f(x) - ax - b$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
Pour chercher si le graphe d'une fonction f admet une asymptote en $+\infty$, on effectue un développement de f de manière à obtenir une expression de la forme $f(x) = ax + b + \epsilon(x)$, où ϵ est une fonction tendant vers 0 en $+\infty$. En procédant ainsi, il n'y a qu'une étape dans la recherche de l'asymptote. On évitera d'utiliser les méthodes plus longues, en particulier celle consistant à chercher, dans une première étape la limite de $f(x)/x$, lorsque x tend vers $+\infty$.

Pour la recherche d'une asymptote en $-\infty$, on procède de la même façon, mais en $-\infty$. Pour les asymptotes verticales, les méthodes sont différentes. Dans le cas le plus simple, on cherche si $f(x)$ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ lorsque x tend vers une valeur finie, a. Si tel est le cas, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale du graphe de f. Lorsque la fonction oscille, la situation est plus compliquée.

6.

(1) ☐ ▶ Le graphe de f_1 n'admet pas d'asymptote en $+\infty$.

(2) ■ ▶ En revanche, pour f_2, on peut écrire, grâce au

(3) ■ développement de sinus en 0,

(4) ■

(5) ☐

$$f_2(x) = x\left(1 + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]\right)$$

$$= x + \frac{1}{3} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

ce qui montre que la droite d'équation $y = x + \dfrac{1}{3}$ est asymptote au graphe de f_2.

▶ Pour f_3, qui est une fraction rationnelle, on extrait d'abord du numérateur et du dénominateur la partie principale que l'on met en facteur. On développe ensuite le reste. Cela donne

$$f_3(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} = \frac{x^2\left(1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)}{x\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)}$$

$$= x\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= x - 3 - 1 + o(1)$$

$$= x - 4 + o(1)$$

▶ Pour la fonction f_4, la technique est la même : on met en facteur le terme principal de chacune des racines, puis on fait un développement limité de ce qui reste. On obtient

■ *Réponse correcte*

☐ *Réponse fausse*

$$\begin{aligned} f_4(x) &= \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} \\ &= x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - \sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) \\ &= x\left[\left(1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) - \left(1-\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right] \\ &= 1+o(1) \end{aligned}$$

► La fonction f_5 tend vers $+\infty$ en $+\infty$ mais elle est équivalente à $\dfrac{x}{\ln x}$; elle n'admet donc pas d'asymptote.

7.

(1) □
(2) □
(3) □
(4) ■
(5) □

La meilleure approximation, au voisinage de 0, de la fonction cosinus par une fonction de la forme $x \mapsto \dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$ est celle qui donne un développement limité de $\cos x - \dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$ dont le premier terme non nul est d'un ordre aussi élevé que possible. Pour déterminer cette meilleure approximation, on calcule donc le développement limité de cette fonction :

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

$$\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)$$
$$- \left(1 + (a-b)x^2 - b(a-b)x^4 + b^2(a-b)x^6 + o(x^6)\right)$$
$$= -\left(a - b + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(b(a-b) + \frac{1}{24}\right)x^4$$
$$- \left(b^2(a-b) + \frac{1}{720}\right)x^6 + o(x^6)$$

Cela donne le système

$$\begin{cases} a - b = -\dfrac{1}{2} \\ b(a-b) = -\dfrac{1}{24} \end{cases}$$

qui se résout en

$$\begin{cases} a = -\dfrac{5}{12} \\ b = \dfrac{1}{12} \end{cases}$$

Le développement de $\cos x - \dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$ s'écrit alors

$$\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2} = \frac{3}{1440}x^6 + o(x^6)$$

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

8.

(1) □
(2) □
(3) ■
(4) □
(5) □

Bien que l'on ne connaisse pas α, effectuons un développement limité ; tout le problème, c'est de contrôler le reste. On obtient successivement

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$$

$$\tan^\alpha x = x^\alpha\left(1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^3)\right)^\alpha$$

$$= x^\alpha\left(1 + \frac{1}{3}\alpha x^2 + o(x^3)\right)$$

$$\exp(\tan^\alpha x) = e^{x^\alpha\left(1 + \frac{1}{3}\alpha x^2 + o(x^3)\right)}$$

$$= e^{x^\alpha}\left(1 + \frac{\alpha}{3}x^{\alpha+2} + o(x^{\alpha+3})\right)$$

$$\exp(\tan^\alpha x) - \exp(x^\alpha) = e^{x^\alpha}\left(\frac{\alpha}{3}x^{\alpha+2} + o(x^{\alpha+3})\right)$$

Comme e^{x^α} tend vers 1 lorsque x tend vers 0, on en déduit que la limite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\exp(\tan^\alpha x) - \exp(x^\alpha)}{x^{\alpha+2}}$ existe et vaut 1 si et seulement si $\alpha = 3$.

9.

(1) □
(2) ■
(3) ■
(4) □
(5) ■

Voici les réponses correctes :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x^x - (\sin x)^x - \dfrac{x^3}{6}}{x^4 \ln x} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x^x - (\sin x)^{\sin x}}{x^3} = -\infty$$

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(1 + x)}{\ln x} \right)^{x \ln x} = e$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left[(1 + x)^{\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{x}}\right](x \ln x)^2}{x^{\left(x^{\frac{1}{x}}\right)} - x} = 1$$

10.

(1) ■ • Appliquons en 0 la formule de Taylor-Lagrange
(2) □ d'ordre 1 à la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + x)$. Pour tout
(3) ■ $x \in]-1;0[$, il existe $\theta \in]0;1[$ tel que
(4) ■
(5) ■

$$f(x) = f(0) + x f'(\theta x) = \frac{x}{1 + \theta x}$$

Comme la fonction $t \mapsto \dfrac{x}{1 + tx}$ est décroissante sur $[0;1]$, on en déduit l'encadrement voulu,

$$\forall x \in]-1;0[, \quad \frac{1}{1 + x} < \ln(1 + x) < x$$

• Si n est impair, lorsque x tend vers $-\infty$, la fonction $x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{(n + 1)!}$ tend vers $+\infty$ tandis que e^x tend vers 0. On ne saurait donc avoir l'inégalité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{x^{n+1}}{(n + 1)!} < e^x$$

Si on la restreint aux $x > 0$, elle devient correcte, car d'après la formule de Taylor appliquée à l'ordre n+1 en 0, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, il existe $\theta \in]0;1[$ tel que

---

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{\theta x}.$$

• En prenant $x = \dfrac{1}{n}$ dans l'inégalité

$$\forall x \in]-1;0[,\quad \frac{1}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

de l'assertion (1), on obtient

$$\frac{n}{n+1} < n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1,$$

puis

$$\frac{n+1}{n} > \frac{1}{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} > 1$$

et enfin

$$(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 1 > n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

La fonction exponentielle étant croissante, on peut prendre les exponentielles des trois termes sans changer l'ordre des inégalités. On obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

• Appliquons en 0 la formule de Taylor-Lagrange à la fonction exponentielle, d'abord à l'ordre $2n$, puis à l'ordre $2n+1$. On obtient d'une part

$$\begin{aligned} e^{-1} &= \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!}\, e^{-\theta} \\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + \frac{1}{(2n)!}\, e^{-\theta} \\ &> \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} e^{-1} &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!} + \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}\, e^{-\theta} \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!} - \frac{1}{(2n+1)!}\, e^{-\theta} \\ &< \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!} \end{aligned}$$

d'où l'on déduit l'encadrement

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k!} < e^{-1} < \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

- En appliquant ce dernier encadrement avec $n = 2$, on trouve

$$\frac{1}{3} < e^{-1} < \frac{3}{8}\,.$$

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

Résultats du QCM n°9
Intégrales impropres

(Questions p. 78)

Vocabulaire

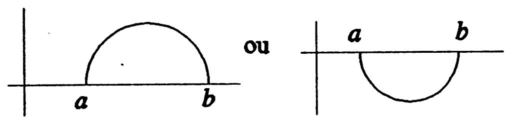
Certains examinateurs sont très attentifs au langage et à la rigueur. C'est ainsi que beaucoup d'entre eux sanctionnent une étude de limite commençant par " $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ldots$ ", sans que l'existence de la limite ait été démontrée. Dans le même esprit, ils sanctionnent une étude d'intégrale commençant par $\int_a^b f = \ldots$ avant que l'existence de l'intégrale ait été démontrée. Une expression comme "*l'intégrale* $\int_a^{+\infty} f$ *diverge*" les gène aussi, car elle fait intervenir *l'intégrale* $\int_a^{+\infty} f$ qui justement n'existe pas. Pour éviter tout problème, mieux vaut remplacer l'expression «*l'intégrale* $\int_a^{+\infty} f$ *diverge*» par «f n'est pas intégrable sur $[a;+\infty]$», et l'expression «*l'intégrale* $\int_a^{+\infty} f$ *converge*» par «f est intégrable sur $[a;+\infty]$».

Comme le premier type d'expression est très répandu, et que finalement tout le monde comprend bien cet abus de langage, nous avons utilisé indifféremment dans ce chapitre les deux formulations.

Dans l'expression «f est intégrable sur $[a;+\infty]$», on notera la borne fermée en $+\infty$: l'avantage d'une borne fermée est d'invoquer automatiquement la notion de ***primitive sur un intervalle fermé***, qui permet d'établir en une seule opération à la fois l'existence d'une intégrale, et le calcul de sa valeur (la fonction à intégrer n'étant pas nécessairement définie aux bornes de l'intervalle).

1.

(1) □
(2) □
(3) ■
(4) □
(5) □



L'intégrale converge. En effet, la fonction à intégrer, $f' \cdot f$, est une dérivée sur $[a;b]$, et $\frac{1}{2}f^2$ en est une primitive (voir l'encadré de la page 205). L'intégrale existe donc, et elle est nulle.

2.

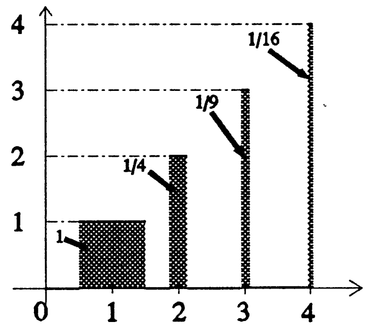
(1) □
(2) □
(3) □
(4) □
(5) ■

Sur un intervalle non borné, une fonction continue n'est pas forcément intégrable. C'est l'une des différences entre les intégrales ordinaires et les intégrales impropres : si f est continue sur l'intervalle compact (*i.e.* fermé borné) $[a;b]$, alors cette fonction est intégrable sur $[a;b]$ (c'est-à-dire l'intégrale $\int_a^b f$ existe) ; si f est continue sur l'intervalle non borné $[a;+\infty[$ (ou $]-\infty;a]$, ou $]-\infty;+\infty[$), elle n'est pas forcément intégrable sur l'intervalle $[a;+\infty]$, c'est-à-dire que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ n'existe pas forcément (on dit parfois que cette intégrale "ne converge pas"). C'est justement la théorie des intégrales impropres qui permet de décider si cette intégrale existe ou non. Dans le cas d'une fonction impaire, si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ existe, alors elle est nulle ; mais elle n'existe pas forcément, même si la fonction impaire est continue.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

Si $f = -g$, $f+g$ est la fonction nulle, dont l'intégrale converge sur tout intervalle.

Pour que f soit intégrable sur $[a;+\infty]$ (autrement dit, pour que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge), il n'est ni nécessaire ni suffisant que l'on ait $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Par exemple, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ tend vers 0 en $+\infty$, mais n'est pas intégrable sur $[1;+\infty]$.



Inversement, la fonction

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} n \text{ si } x \in \left[n - \frac{1}{2n^3} ; n + \frac{1}{2n^3}\right], & n \in \mathbb{N}^* \\ 0 \text{ si } x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[n - \frac{1}{2n^3} ; n + \frac{1}{2n^3}\right] \end{cases} \end{array}$$

n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$, mais elle est intégrable sur $[0;+\infty]$, car la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

Cela n'est plus vrai si f est positive et décroissante sur $[a;+\infty]$. Dans ce cas, pour que f soit intégrable sur $[a;+\infty]$, il est nécessaire (mais non suffisant) que l'on ait $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3.

(1) □
(2) □
(3) ■
(4) ■
(5) ■

Lorsque x tend vers $+\infty$, $1/x^2$ tend vers 0, ce qui permet de faire un développement limité de f : $f(x) \underset{+\infty}{=} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, d'où $\lim_{x\to+\infty} x f(x) = 0$. En 0, on peut écrire

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = x\ln\left(\frac{1}{x^2}\left(1+x^2\right)\right) = x\ln\frac{1}{x^2} + x\ln\left(1+x^2\right)$$
$$= -2x\ln x + x^3 + o(x^3) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Enfin, la fonction f peut être primitivée par parties (voir p. 169 pour les notations), en écrivant

$${}'\left(\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) = x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - {}'\left(x\frac{-2/x^3}{1+1/x^2}\right)$$

$$= x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + 2\,{}'\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$= x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + 2\arctan x$$

Comme $\lim_{x\to 0}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + 2\arctan x\right) = 0$

et que $\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + 2\arctan x\right) = \pi$,

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

la fonction $x \mapsto x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) + 2 \arctan x$ prolongée par 0 en 0 et par π en $+\infty$ est une primitive de f sur $[0;+\infty]$; f est donc intégrable sur cet intervalle, et $\int_0^{+\infty} f = \pi$.
En outre, f est intégrable sur tout sous-intervalle fermé de $[0;+\infty]$, en particulier sur $[0;1]$ et sur $[1;+\infty]$.

4.

(1) ■
(2) ■
(3) □
(4) □
(5) ■

La fonction f_n se prolonge par continuité sur $[0;2\pi]$. En effet, l'écriture complexe des sinus permet de simplifier le dénominateur de f_n, en écrivant

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin nx}{\sin x} &= \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{e^{ix} - e^{-ix}} \\
&= e^{i(n-1)x} + e^{i(n-2)x}\, e^{-ix} + e^{i(n-3)x}\, e^{-2ix} + \dots \\
&\quad + e^{2ix}\, e^{-i(n-3)x} + e^{ix}\, e^{-i(n-2)x} + e^{-i(n-1)x} \\
&= e^{i(n-1)x} + e^{i(n-3)x} + e^{i(n-5)x} + \dots \\
&\quad + e^{-i(n-3)x} + e^{-i(n-1)x}
\end{aligned}
$$

La fonction g_n :

$$
\begin{aligned}
x \mapsto\ & e^{i(n-1)x} + e^{i(n-3)x} + e^{i(n-5)x} + \dots + e^{-i(n-3)x} + e^{-i(n-1)x} \\
&= 2\left[\cos((n-1)x) + \cos((n-3)x) + \dots\right]
\end{aligned}
$$

est continue sur $[0;2\pi]$, et coïncide avec f_n sur $]0;\pi[\cup]\pi;2\pi[$. Contrairement à ce que pourrait laisser croire l'écriture initiale de f_n, avec un dénominateur qui s'annule, l'intégrale I_n est une intégrale ordinaire, et il est inutile d'invoquer la théorie des intégrales impropres (si l'on veut être précis, on parle de la *théorie de l'intégrale de Riemann-Cauchy,* plutôt que de la *théorie des intégrales impropres*). Rappelons que si g est une fonction intégrable sur un intervalle $[a;b]$, et si f est une fonction qui coïncide avec g sauf en un nombre fini de points de $[a;b]$, alors f est intégrable sur $[a;b]$, et

---

■ ***Réponse correcte***
□ ***Réponse fausse***

$\int_a^b g = \int_a^b f$. Cet énoncé est vrai aussi bien pour les intégrales ordinaires que pour les intégrales impropres.

☛ On notera au passage

— qu'il est préférable de dire "f est intégrable sur $[a;b]$" , plutôt que "l'intégrale $\int_a^b f$ converge", ceci pour éviter d'écrire et de manipuler des objets mathématiques n'existant pas,

— que l'on parle de fonction intégrable sur $[a;b]$ (l'intervalle fermé), bien que la fonction ne soit pas forcément définie sur tout cet intervalle.

Cela étant, en appliquant le résultat ci-dessus à notre exemple, on voit que, pour tout entier $n > 0$, la fonction f_n est intégrable sur $[0;2\pi]$, et vérifie $\int_0^{2\pi} f_n = \int_0^{2\pi} g_n$.

La valeur de $\int_0^{2\pi} g_n$ dépend de la parité de n :

— si n est pair, g_n s'écrit

$$g_n : x \mapsto 2\Big[\cos\big((n-1)x\big) + \cos\big((n-3)x\big) + \dots + \cos(x)\Big] ,$$

et $\int_0^{2\pi} g_n = 0$;

— si n est impair, g_n s'écrit

$$g_n : x \mapsto 2\left[\cos\big((n-1)x\big) + \cos\big((n-3)x\big) + \dots + \cos(2x) + \frac{1}{2},\right]$$

et $\int_0^{2\pi} g_n = 2\pi$.

Pour les assertions (2) et (3), on notera la distinction entre *si* et *seulement si*.

Faut-il démontrer la convergence des intégrales impropres ?

Lorsqu'on veut étudier une intégrale impropre et en calculer éventuellement la valeur, il est souvent possible de regrouper en une seule étape la démonstration de la convergence de l'intégrale et le calcul de sa valeur. Il suffit pour cela d'énoncer correctement les théorèmes.

Le cas le plus fréquent est celui d'une intégrale que l'on va étudier en se servant d'une primitive. Le lien entre intégration et primitivation est donné par ce que l'on appelle le théorème fondamental du calcul intégral, qui caractérise chaque théorie de l'intégrale. Pour les intégrales impropres, la bonne manière d'énoncer ce théorème est liée à une bonne définition des primitives.

Si f est une fonction $]a;b[\to \mathbb{R}$, a, $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty;+\infty\}$, on dit qu'une fonction F est une primitive de f sur $]a;b[$ si F est définie et dérivable sur $]a;b[$ et si, pour tout $x \in]a;b[$, on a $F'(x) = f(x)$; on dit que F est une primitive de f sur $[a;b]$ si F est définie et continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ et si, pour tout $x \in]a;b[$, on a $F'(x) = f(x)$.

Avec cette définition des primitives, qui distingue les primitives sur les intervalles fermés (éventuellement $[-\infty\,;+\infty]$) des primitives sur les intervalles ouverts, le théorème fondamental du calcul des intégrales impropres s'énonce ainsi :

Soient a et $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty;+\infty\}$, et f une fonction continue $]a;b[\to \mathbb{R}$ admettant une primitive F sur $[a;b]$. Alors,

— f est intégrable sur $[a;b]$ (on dit souvent que $\int_a^b f$ converge), et

— $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

On notera que si F est une primitive de f sur $[a;b]$, alors F est définie sur $[a;b]$, même si f n'est définie que sur $]a;b[$. Par exemple, $x \mapsto 2\sqrt{x}$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[0;1]$ (mais $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ n'est définie que sur $]0;1]$) ; donc la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $[0;1]$, et

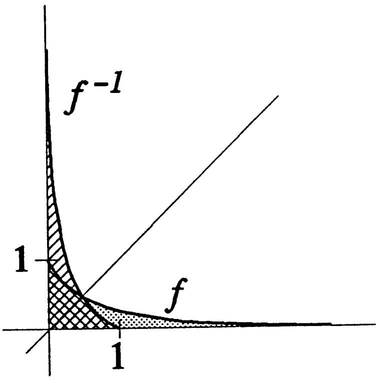
$$\int_0^1 \left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2 .$$

Le théorème d'intégration par parties (ou de primitivation par parties), et le théorème de changement de variable sont encore vrais sous réserve que l'on utilise la notion de primitive sur un intervalle fermé. Là encore, un énoncé correct doit affirmer d'une part l'existence de l'intégrale, d'autre part la valeur de cette intégrale. C'est pour éviter de réduire ces deux énoncés aux formules qu'il est préférable de parler de *théorème* d'intégration par parties, de *théorème* de changement de variable, plutôt que de *formule* d'intégration par parties ou de *formule* de changement de variable.

5.

(1) ☐
(2) ■
(3) ■
(4) ■
(5) ☐

Les aires correspondant aux deux intégrales $\int_0^{+\infty} f$ et $\int_0^1 f^{-1}$ sont symétriques par rapport à la diagonale, donc égales.



■ *Réponse correcte*

☐ *Réponse fausse*

6.

(1) ■
(2) ■
(3) □
(4) □
(5) ■

La fonction $x \mapsto \int_x^{x+T} f$ est constante ; elle est donc périodique, de période quelconque, T si l'on veut. L'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ ne peut converger que si f est la fonction nulle. Enfin, les fonctions $f^2 = f \circ f$ et $[f]^2 = f \cdot f$ sont toutes deux de période T. La fonction $[f]^2$ est donc de période nT pour tout entier $n > 0$, en particulier $2T$.

7.

(1) □
(2) ■
(3) □
(4) ■
(5) □

La valeur de a pour la résistance de l'air est 0,4. Cela dit, revenons au problème posé, avec $a > 0$. L'intégrale diverge toujours. Si $0 \leq x \leq 1$, on a

$$1 - x^a \leq \begin{cases} 1 - x & \text{si } 0 < a \leq 1 \\ a(1 - x) & \text{si } 1 \leq a \end{cases}.$$

La première inégalité est évidente, et la seconde peut s'établir en étudiant la fonction f définie par $f(x) = a(1 - x) - (1 - x^a)$; cette fonction est décroissante sur $[0;1]$, et vérifie $f(1) = 0$. A partir de ces inégalités, on obtient

$$\int_0^{1-\varepsilon} \left(x \mapsto \frac{1}{1 - x^a}\right) \geq \begin{cases} \displaystyle\int_0^{1-\varepsilon} \left(x \mapsto \frac{1}{1 - x}\right) = \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) & \text{si } 0 < a \leq 1 \\ \displaystyle\frac{1}{a} \int_0^{1-\varepsilon} \left(x \mapsto \frac{1}{1 - x}\right) = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) & \text{si } 1 \leq a \end{cases}$$

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

Si $a = 1/n$, $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_a^b \left(x \mapsto \frac{1}{1 - x^{\frac{1}{n}}} \right) = n \int_{a^{\frac{1}{n}}}^{b^{\frac{1}{n}}} \left(u \mapsto \frac{u^{n-1}}{1-u} \right)$$

$$= n \int_{a^{\frac{1}{n}}}^{b^{\frac{1}{n}}} \left(u \mapsto \frac{1}{1-u} - \left[1 + u + \ldots + u^{n-2}\right] \right)$$

d'où la primitive donnée dans l'assertion (4).

Enfin, lorsque a est un entier, on peut effectivement calculer une primitive de la fonction $]0;1[\to \mathbb{R}$,

$x \mapsto \dfrac{1}{1 - x^{\frac{1}{n}}}$, mais le résultat est encore plus compliqué que la formule proposée à l'assertion (5).

8.

(1) ■
(2) ■
(3) □
(4) ■
(5) □

• Le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - y$ conduit à

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x \mapsto \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} \right).$$

On en déduit

$$I_1 + I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x \mapsto \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} + \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} \right)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \mapsto 1)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

soit $I_1 = \dfrac{\pi}{4}$.

• La fonction $f : \left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{(\cos x)^{\sin x}}{(\cos x)^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}}$

vérifie bien $f(x) + f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = 1$, de sorte que

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \mapsto 1) = \frac{\pi}{2}$$

et que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f = \frac{\pi}{4}$$

• Le changement de variable $x = \pi - y$ conduit à

$$I_3 = \int_0^{\pi} \left(x \mapsto \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\right)$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \left(y \mapsto \frac{\sin y}{1 + \cos^2 y}\right) - I_3$$

$$= -\pi \int_0^{\pi} \left(y \mapsto \frac{\frac{d}{dy}(\cos y)}{1 + \cos^2 y}\right) - I_3$$

$$= \frac{\pi^2}{2} - I_3$$

puis à

$$I_3 = \int_0^{\pi} \left(x \mapsto \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\right) = \frac{\pi^2}{4}$$

• En dérivant par rapport à y la fonction

$$g : y \mapsto \int_0^{\infty} \left(x \mapsto e^{-xy} \frac{\sin x}{x}\right)$$

on obtient

$$g'(y) = \int_0^{\infty}\left(x \mapsto e^{-xy}\sin x\right)$$

$$= \int_0^{\infty}\left(x \mapsto \Im\left(e^{-xy+ix}\right)\right)$$

$$g'(y) = \Im\left(\int_0^{\infty}\left(x \mapsto e^{(-y+i)x}\right)\right)$$

$$= \Im\left(\left[\frac{e^{(-y+i)x}}{-y+i}\right]_0^{\infty}\right)$$

$$= \frac{-1}{1+y^2}$$

d'où $g(y) = -\arctan y + C$. La constante d'intégration se calcule en remarquant que g tend vers 0 en $+\infty$. On obtient finalement

$$g(y) = \int_0^{\infty}\left(x \mapsto e^{-xy}\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan y$$

- L'intégrale de l'assertion (5) ne converge pas.

9.

(1) □
(2) ■
(3) □
(4) ■
(5) □

Si $\lambda \leq 0$, le terme $|\lambda - \sin x|$ intervenant dans l'expression de f_λ est affecté d'un exposant positif ; si $\lambda > 1$, $|\lambda - \sin x|$ ne s'annule pas $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Dans ces deux cas, la fonction f_λ est continue sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, donc intégrable sur cet intervalle. On a affaire à une intégrale impropre seulement lorsque $\lambda \in]0\,;1]$.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

Si tel est le cas, il existe $t_0 \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin t_0 = \lambda$. D'après le théorème de Chasles, la fonction f est intégrable sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ si et seulement si elle est intégrable sur $[0 ; t_0]$ et sur $\left[t_0 ; \frac{\pi}{2}\right]$. La fonction f_λ étant continue sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{t_0\}$, il suffit d'étudier cette fonction au voisinage de t_0. Et comme cette fonction est de signe constant, on peut conclure avec un équivalent. Posons donc $t = t_0 + h$. On obtient

$$\begin{aligned}|\lambda - \sin t| &= |\lambda - \sin(t_0 + h)| \\ &= \left|\lambda - \left[\sin t_0 + h\cos t_0 + o(h)\right]\right| \\ &= |-h\cos t_0 + o(h)|\end{aligned}$$

Si $\cos t_0 \neq 0$, *i.e.* si $t_0 \neq \frac{\pi}{2}$, soit si $\lambda \neq 1$, un équivalent de $f_\lambda(t)$ au voisinage de t_0 est $\dfrac{1}{|\cos t_0|^\lambda} \times \dfrac{1}{|(t - t_0)|^\lambda}$.

Cette dernière fonction est intégrable au voisinage de t_0 si et seulement si $\lambda < 1$. Si $\lambda = 1$, on doit pousser le développement limité un cran plus loin pour pouvoir conclure :

(suite p. 212)

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

Le théorème de Chasles

Le théorème de Chasles est très souvent réduit à une simple formule. Ce qu'affirme ce théorème est en réalité beaucoup plus fort, et doit être invoqué dans de nombreux exercices ; pour en tirer le meilleur parti, voici comment on doit l'énoncer :

Soient a, b, c, d quatre réels vérifiant $a \leq c < d \leq b$.

1) **Si f est intégrable sur $[a;b]$, alors f est intégrable sur $[c;d]$.**

2) **Si $a < c$ et si f est intégrable sur $[a;c]$ et sur $[c;b]$, alors f est intégrable sur $[a;b]$, et**

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

(Relation de Chasles)

Ce qu'il faut retenir du théorème de Chasles, c'est d'abord le lien qu'il établit entre l'intégrabilité d'une fonction sur un intervalle, et l'intégrabilité de cette fonction sur les sous-intervalles ; la formule de Chasles n'intervient qu'accessoirement. Oubliant la formule, on peut également formuler ainsi ce théorème :

Soient a et $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty;+\infty\}$, $a \neq b$, et f une fonction définie sur $[a;b]$, sauf peut-être en un nombre fini de points de cet intervalle. Les assertions suivantes sont équivalentes

(i) **f est intégrable sur $[a;b]$.**

(ii) **Pour tous c et d vérifiant $a \leq c < d \leq b$, la fonction f est intégrable sur $[a;c]$ et sur $[c;b]$.**

(iii) **Il existe c et d vérifiant $a \leq c < d \leq b$, tels que la fonction f soit intégrable sur $[a;c]$ et sur $[c;b]$.**

Formulé ainsi, le théorème est vrai aussi bien pour les intégrales de Riemann ordinaires que pour les intégrales impropres (cela économise l'apprentissage d'un énoncé).

$$\begin{aligned}|1-\sin t| &= \left|1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)\right| \\ &= |1-\cos h| \\ &= \frac{h^2}{2}+o(h^2)\end{aligned}$$

Ainsi, un équivalent de $f_1(t)$ au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ est $\frac{1}{\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2}$. Cette dernière fonction n'étant pas intégrable sur un voisinage de $\frac{\pi}{2}$, f_1 n'est pas intégrable sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

En résumé, il n'y a que f_1 qui ne soit pas intégrable sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

10.

(1) □
(2) ■
(3) ■
(4) ■
(5) ■

• La fonction f_α est continue et positive sur $]0;+\infty[$. On peut tester son intégrabilité sur $[0;1]$, en cherchant un équivalent au voisinage de 0. On a $\frac{\ln x \arctan x}{x^\alpha} \underset{0}{\sim} \frac{\ln x}{x^{\alpha-1}}$, de sorte que la fonction f_α est intégrable sur $[0;1]$ si et seulement si $\alpha < 2$. Cela suffit pour répondre à la question : l'assertion (1) est fausse. Continuons quand même pour déterminer exactement quand la fonction f_α est intégrable sur $[1;+\infty]$. En $+\infty$,

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

on a $\dfrac{\ln x \arctan x}{x^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}$, de sorte que f_α est intégrable sur $[1;+\infty]$ si et seulement si $\alpha > 1$.

> *Il ne faut pas confondre "comparaison d'une série et d'une intégrale" et "transformation d'une intégrale en série d'intégrales".*

• La fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{1 + e^x \sin^2 x}$ est continue et positive sur $[0;+\infty[$. Elle prend la valeur 1 en tout point x où $\sin x$ s'annule, ce qui rend sans espoir la recherche d'un équivalent. Néanmoins, puisqu'il s'agit d'une fonction positive, on peut transformer l'intégrale en série d'intégrales : si (u_n) est une suite positive strictement croissante tendant vers $+\infty$, la fonction g est intégrable sur $[0;+\infty]$ si et seulement si la série Σv_n, de terme général $v_n = \displaystyle\int_{u_n}^{u_{n+1}} g$ converge.

Prenons $u_n = n\pi$, et estimons l'intégrale $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} g$. Des deux inégalités $e^x \geq e^{n\pi}$ si $x \in \left[n\pi;\ (n+1)\pi\right]$, et $0 \leq \dfrac{2x}{\pi} \leq \sin x$ pour tout $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, on déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

---

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

$$\begin{aligned}
0 \le v_n &\le \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left(x \mapsto \frac{1}{1 + e^{n\pi} \sin^2 x} \right) \\
&= e^{-n\pi} \int_0^{\pi} \left(x \mapsto \frac{1}{e^{-n\pi} + \sin^2 x} \right) \\
&= 2\, e^{-n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x \mapsto \frac{1}{e^{-n\pi} + \sin^2 x} \right) \\
&\le 2\, e^{-n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x \mapsto \frac{1}{e^{-n\pi} + \left(\frac{2}{\pi} x\right)^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 \le v_n &\le 2\, e^{-n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x \mapsto \frac{1}{e^{-n\pi} + \left(\frac{2}{\pi} x\right)^2} \right) \\
&= \frac{\pi^2}{2}\, e^{-n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x \mapsto \frac{1}{\frac{\pi^2 e^{-n\pi}}{4} + x^2} \right) \\
&= \frac{\pi^2}{2}\, e^{-n\pi} \left[\frac{2}{\pi\, e^{-n\pi/2}} \arctan\left(\frac{2x}{\pi\, e^{-n\pi/2}} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \pi\, e^{-n\pi/2} \arctan\left(e^{n\pi/2}\right)
\end{aligned}$$

La série de terme général $e^{-n\pi/2}$ est une série géométrique convergente. Il s'ensuit que la série Σv_n est convergente, et que la fonction g est intégrable sur $[0;+\infty]$.

• La fonction h est continue et strictement positive sur $]0;+\infty[$. Etant continue, elle est intégrable sur tout intervalle compact (= fermé et borné) inclus dans $]0;+\infty[$, et son intégrabilité sur $[0;+\infty]$ dépend seulement de son comportement au voisinage de 0, et de $+\infty$ (c'est ce que l'on traduit parfois par une phrase comme "les problèmes sont en 0 et $+\infty$" ; mais une telle expression n'est pas vraiment ce que l'on peut appeler un argument mathématique !). D'après le théorème de Chasles, h est intégrable sur $[0;+\infty]$ si et seulement si elle est intégra ble sur $[0;1]$ et sur $[1;+\infty]$. La positivité autorise l'emploi des équivalents, que l'on recherche au voisinage de 0 pour la première intégrale. Puisque $e^{\alpha x} \underset{x \to 0}{\sim} 1$, on a l'équivalent $h(x) \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^\beta}$, qui est une fonction intégrable sur $[0;1]$ si et seulement si $\beta < 1$. Pour la deuxième intégrale, l'encadrement $0 < h(x) \leq e^{\alpha x}$ pour tout $x \in [1;+\infty[$ montre l'intégrabilité de h sur $[1;+\infty]$. Lorsque α est strictement négatif, la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \text{ si } x \in [1;+\infty[\\ 0 \qquad \text{ si } x = +\infty \end{cases}$$

est en effet une primitive de $x \mapsto e^{\alpha x}$ sur $[1;+\infty]$; continue sur $[1;+\infty[$, cette dernière fonction est donc intégrable sur $[1;+\infty]$, et il en est de même de h.

• La fonction k est clairement continue sur $]0;+\infty[$, et elle se prolonge par continuité en 0, en posant $k(0) = 0$. Elle est donc intégrable sur tout intervalle compact inclus dans $[0;+\infty[$, et son intégrabilité sur $[0;+\infty]$ ne dépend que de son comportement au voisinage de $+\infty$. Dans un tel voisinage, elle est de signe constant, à savoir négative, et le développement limité

$$e^{-\frac{1}{2x^2}} = 1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

conduit à l'équivalent $k(x) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{3}{2x^3}$, et donc à l'intégrabilité de k sur $[0;+\infty]$ (Attention : on peut additionner les développements limités, pas les équivalents).

• La fonction m est continue sur $]0;+\infty[$, et elle se prolonge par continuité en 0, en posant $m(0) = 0$. Au voisinage de $+\infty$, elle change de signe une infinité de fois, ce qui exclut l'utilisation des équivalents. Elle est

---

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

majorée par une fonction de la forme $1/x$, ce qui rend délicat l'encadrement de m entre deux fonctions intégrables. Toutefois, on remarque que chacune des fonctions $x \mapsto \dfrac{\cos 2x}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{\cos x}{x}$ est intégrable sur $[1;+\infty]$ (intégrer par parties, par exemple), de sorte que, sur cet intervalle, m est intégrable. Le théorème de Chasles (encore lui !) permet de conclure.

Résultats du QCM n°10 Algorithmes et méthodes numériques

(Questions p. 87)

1.

(1) ☐
(2) ☐
(3) ■
(4) ☐
(5) ☐

Considérons les calculs effectués par le programme :

1	$x \leftarrow 2,\ y \leftarrow 3$	
2	$z \leftarrow 5$	$z \leftarrow 8$
3	Enregistrement de $z = 5$.	Enregistrement de $z = 8$.
4	$x \leftarrow 5$	
5	GOTO 2	

2.

(1) ☐
(2) ☐
(3) ☐
(4) ☐
(5) ■

Lorsqu'on veut évaluer un ensemble dont l'expression est aussi compliquée, mieux vaut se servir d'un ordinateur ou au moins d'une calculatrice programmable. Ici, on a affaire à trois ensembles, A, B et C. Ils déterminent $2^3 = 8$ sous-ensembles, que l'on peut coder par un triplet formé d'éléments de $\{0;1\}$ correspondant aux fonctions indicatrices de A, B et C. Par exemple, les triplets (1;1;1) et (0;1;0) correspondent respectivement aux éléments qui appartiennent à la fois à A, B et C, et aux éléments qui appartiennent à B,

■ *Réponse correcte*
☐ *Réponse fausse*

mais pas à A ni à C. Un tel codage par des 0 et des 1 est bien rendu par les fonctions logiques des ordinateurs. Un 0 correspond à la valeur logique "faux", et un 1 à "vrai". La méthode informatique pour évaluer l'ensemble consiste donc à coder en termes logiques l'ensemble, et à comparer le résultat en injectant les 8 triplets possibles.

Le codage logique de l'ensemble considéré est le suivant (on garde les notations anglaises, plus proches des langages de programmation) :

```
(   NOT (A OR B)
AND
    NOT (A OR B OR NOT C)
)
OR
(
A AND B AND C AND NOT (A OR NOT C)
)
```

N'importe quel programme ou langage de programmation comportant des opérateurs logiques peut convenir. Voici un exemple de programme que chacun pourra traduire en Basic, en Turbo-Pascal, ou dans le langage machine de sa calculatrice.

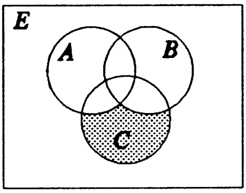
```
FOR A = 0 TO 1
FOR B = 0 TO 1
FOR C = 0 TO 1
        PRINT A; B; C; " ";
        PRINT   (NOT (A OR B) AND NOT (A OR
                B OR NOT C)) OR (A AND B
                AND C AND NOT (A OR NOT C))
NEXT: NEXT: NEXT
```

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

Voici un exemple de résultat produit par un tel programme

0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0



Les trois premières colonnes correspondent respectivement à A, B et C ; la quatrième à l'ensemble cherché. La seule ligne où l'on voit apparaître un 1 en quatrième colonne correspond à (0;0;1), c'est-à-dire aux éléments qui appartiennent à C, mais pas à A ni à B.

Les langages de programmation étant destinés à disparaître au profit de programmes généralistes ou de langages manipulant directement des objets évolués (on parle des *primitives* du langage), tels MAPLE ou MATHEMATICA, voici un exemple de calcul sur un tableur, LOTUS.

On dispose dans les colonnes 1, 2 et 3 les triplets de 0 et de 1. La colonne 1 correspond à l'ensemble A, etc. En colonne 4, on place la formule logique selon le principe suivant :

@SI("*condition logique*", 1, 0).

"@SI" est la commande de "*si logique*". Si la condition logique est vérifiée, LOTUS retourne la valeur 1 dans la

cellule de la formule ; sinon, il retourne la valeur 0. D'un point de vue pratique, on écrit seulement une fois la formule, sur la première ligne. On la copie ensuite sur le reste de la colonne ; grâce à la notion *d'adresse relative*, les adresses de la formule sont automatiquement adaptées. Pour l'écriture de la condition logique, on utilise les opérateurs #ET#, #NON#, et #OU# (#AND#, #NOT# et #OR# si l'on utilise une version américaine) ; les ensembles A, B et C sont remplacés par les adresses des cellules correspondantes : colonne 1 pour A, 2 pour B, et 3 pour C.
Voici la formule utilisée, écrite en D1

```
@IF(#NOT#(A1#OR#B1)#AND##NOT#(A1#
OR#B1#OR##NOT#C1)#OR#(A1#AND#B1
#AND#C1#AND##NOT#(A1#OR##NOT#C
1))=1,1,0)
```

Cette formule a produit le même tableau que celui qui est ci-dessus.

Composition des fonctions homographiques

Soient φ et ψ les deux fonctions homographiques définies par $\varphi(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ et $\psi(x) = \dfrac{ex+f}{gx+h}$. La composée $\varphi \circ \psi$ est définie par

$$\varphi \circ \psi(x) = \frac{a\dfrac{ex+f}{gx+h}+b}{c\dfrac{ex+f}{gx+h}+d} = \frac{aex+af+bgx+bh}{cex+cf+dgx+dh}$$

$$= \frac{(ae+bg)x+(af+bh)}{(ce+dg)x+(cf+dh)}$$

Si l'on note M_φ une matrice associée à φ, définie par $M_\varphi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on voit que l'on a

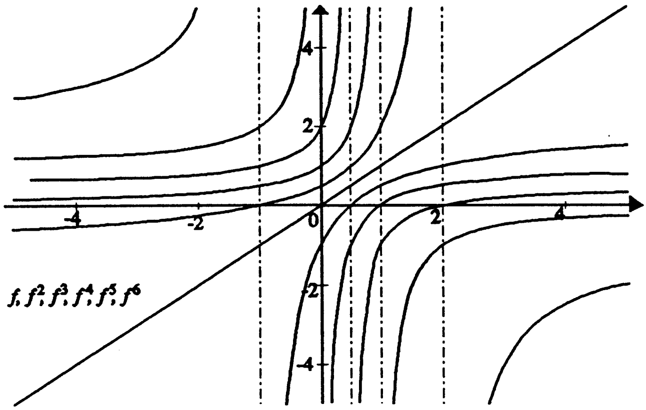
$$M_{\varphi \circ \psi} = \begin{pmatrix} ac+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = M_\varphi \cdot M_\psi$$

On remarquera qu'il n'y a pas unicité de la matrice associée à une fonction homographique. Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ sont deux matrices correspondant à la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{1-x}$; si M_φ est une matrice associée à φ, pour tout $\lambda \neq 0$, λM_φ est aussi une matrice associée à φ.

Grâce à la formule ci-dessus, le calcul des itérées d'une fonction homographique φ se ramène à celui des puissances d'une matrice. Cette méthode est importante lorsqu'on étudie une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = \dfrac{au_n+b}{cu_n+d}$.

3.

(1) □
(2) ■
(3) □
(4) □
(5) ■



Une simulation de la suite sur ordinateur (ou sur calculatrice) montre qu'elle est périodique, de période 6. Ceci ayant été trouvé grâce à l'ordinateur, reste à démontrer le résultat. Pour cela, on considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{-x+2}$. Il s'agit de vérifier que l'on a $f^6 = \mathrm{Id}$, sur l'ensemble de définition de la suite. On peut soit calculer directement f^6, soit calculer M_f^6, où M_f est une matrice associée à la fonction homographique f. Effectuons ce dernier calcul, en remarquant que, pour calculer M_f^6, il est inutile de calculer toutes les puissances successives de M_f. Il suffit de calculer M_f^2, $M_f^3 = M_f^2 \cdot M_f$, puis $M_f^6 = \left(M_f^3\right)^2$, ou M_f^2, $M_f^4 = \left(M_f^2\right)^2$ puis $M_f^6 = M_f^4 \cdot M_f^2$. (Exercice : combien de multiplications doit-on effectuer pour calculer

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

M_f^n ?) On trouve $M_f^2 = 3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_f^4 = 9\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

et enfin $M_f^6 = -27\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui montre bien $f^6 = \mathrm{Id}$.
L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$ privé de l'orbite de 2 (l'ensemble des images successives de 2, ou plutôt de ∞) dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Comme on a le cycle

$$2 \to \infty \to -1 \to 0 \to \frac{1}{2} \to 1 \to 2$$

l'ensemble de définition de la suite est

$\mathbb{R} \setminus \left\{-1; 0; \frac{1}{2}; 1; 2\right\}$.

4.

(1) □
(2) □
(3) ■
(4) ■
(5) □

En cherchant numériquement les racines de P, on trouve $-3{,}561$, $-3{,}146$, $-0{,}317$, $0{,}317$, $0{,}561$, $3{,}146$. Sachant que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est une racine de P, on peut identifier mathématiquement 4 des 6 racines :

$$\sqrt{3}+\sqrt{2} = -\left(-\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) \approx 3{,}146 ,$$

$$\sqrt{3}-\sqrt{2} = -\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right) \approx 0{,}317 .$$

Pour montrer que ce sont bien là 4 des racines, faisons semblant de faire le calcul de $P\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$. On va avoir quatre types de termes : des entiers, des termes en

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

$\sqrt{2}$, des termes en $\sqrt{3}$, et enfin des termes en $\sqrt{6}$.

Autrement dit, $P(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ s'écrit

$$P(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \ ,$$

avec a, b, c et $d \in \mathbf{Z}$. Pour avoir $P(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = 0$, on doit avoir $a = b = c = d = 0$. Considérons à présent $P(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. Il s'écrit

$$P(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2} + c\sqrt{3} - d\sqrt{6} \ ,$$

et l'on a donc également $P(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 0$. De même pour $P(-\sqrt{3}-\sqrt{2})$ et $P(-\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

Connaissant 4 des 6 racines, une division de polynôme fournit le dernier facteur,

$$(x^2+3x-2) = \left(x - \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x - \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right).$$

5.

(1) □
(2) □
(3) ■
(4) □
(5) ■

L'algorithme de tri décrit dans cette question est appelé *tri bulle.* C'est l'un des plus simples. Pour mieux en comprendre le fonctionnement, prenons un exemple.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

Dans le tableau suivant, chaque ligne correspond à une comparaison de deux termes (ceux qui sont soulignés)

Liste initiale	5	10	3	1	2
Première étape	$\underline{5}$	$\underline{10}$	3	1	2
	5	$\underline{3}$	$\underline{10}$	1	2
	5	3	$\underline{1}$	$\underline{10}$	2
	5	3	1	$\underline{2}$	$\underline{10}$
Deuxième étape	$\underline{3}$	$\underline{5}$	1	2	10
	3	$\underline{1}$	$\underline{5}$	2	10
	3	1	$\underline{2}$	$\underline{5}$	10
Troisième étape	$\underline{1}$	$\underline{3}$	2	5	10
	1	$\underline{2}$	$\underline{3}$	5	10
Quatrième étape	$\underline{1}$	$\underline{2}$	3	5	10

Pour le tri bulle, le nombre de comparaisons est indépendant de l'ordre initial des données. Pour trier une liste de n éléments, il faut $\dfrac{n(n-1)}{2}$ comparaisons.

Voici un exemple de programmation de cet algorithme en TURBO-PASCAL.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

```
PROGRAM TRIBULLE;
{classe une liste de réels par ordre croissant selon
    "le tri à bulles"}

   CONST
    Max=1000;{nombre max de nombres pour la liste}

   TYPE
    Liste=Array[1..Max] of real;

   VAR
    A:Liste;
    n:integer;{nombre d'éléments de la liste}

   PROCEDURE ENTREE;
    VAR
     k:integer;
    BEGIN
     Writeln('entrez les valeurs à classer');
     FOR k:=1 TO n DO
       BEGIN
        write('A[',k,']=');
        readln(A[k]);
       END;
    END;

   PROCEDURE TRI;
    VAR
     j,k:integer;
     tampon:real;{sert à garder provisoirement les
     valeurs échangées}
    BEGIN
     FOR j:= n DOWNTO 1 DO
       BEGIN
        FOR k:=1 TO j-1 DO
          BEGIN
           IF A[k] > A[k+1] THEN
             BEGIN
           tampon:=A[k];A[k]:=A[k+1];A[k+1]:=tampon;
             END;
          END;
       END;
    END;
```

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

```
PROCEDURE SORTIE;{sort les valeurs triées}
  VAR
    k:integer;
  BEGIN
    FOR k:= 1 TO n DO
      writeln('A[',k,']=',A[k]);
  END;

BEGIN
  write('entrez le nombre n (n < 1001 ) de données
    à classer;n=');
  readln(n);
  ENTREE;
  TRI;
  SORTIE;
END.
```

6.

(1) ☐
(2) ☐
(3) ■
(4) ■
(5) ☐

Pour bien comprendre comment fonctionne cet algorithme, voici ce qui se passe, sur le même exemple que celui utilisé pour illustrer l'algorithme de tri bulle.

L'algorithme décrit est dit de *tri insertion.* C'est un algorithme simple, qui est en général meilleur que l'algorithme de tri bulle. Le nombre de comparaisons dépend de la disposition initiale des données. Au pire, le nombre de comparaisons est le même que pour le tri bulle, à savoir, $\frac{n(n-1)}{2}$. En supposant que toutes les dispositions initiales soient équiprobables, l'espérance du nombre de comparaisons vaut $\frac{n(n-1)}{4}$.

■ *Réponse correcte*
☐ *Réponse fausse*

Liste initiale = première étape	5	10	3	1	2
Deuxième étape	5	10	3	1	2
Troisième étape	5	3	10	1	2
	3	5	10	1	2
Quatrième étape	3	5	1	10	2
	3	1	5	10	2
	1	3	5	10	2
Cinquième étape	1	3	5	2	10
	1	3	2	5	10
	1	2	3	5	10
	1	2	3	5	10

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

Voici un exemple de programmation en TURBO-PASCAL de l'algorithme de tri-insertion :

```
PROGRAM TRI_INSERTION;
{classe une liste de réels par ordre croissant selon
"le tri à insertion"}
   CONST
    Max=1000;{nombre max de nombres pour la liste}
   TYPE
    Liste=Array[1..Max] of real;
   VAR
    A:Liste;
    n:integer;{nombre d'éléments de la liste}
   PROCEDURE ENTREE;
    VAR
    k:integer;
    BEGIN
     Writeln('entrez les valeurs à classer');
     FOR k:=1 TO n DO
      BEGIN
       write('A[',k,']=');
       readln(A[k]);
      END;
    END;
   PROCEDURE TRI;
    VAR
     i,j,k:integer;
     tampon:real;{sert à garder provisoirement les
      valeurs échangées}
    BEGIN
     FOR i:= 2 TO n DO
     BEGIN
```

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

```
        k:=i-1;
        WHILE (A[k] > A[i]) AND (k>0) DO k:=k-1;
        IF k<i-1 THEN
          BEGIN
            FOR j:=k+1 TO i DO
              BEGIN
        tampon:=A[j];A[j]:=A[i];A[i]:=tampon;
        {insertion de A[i]}
              END;
          END;
      END;
    END;

  PROCEDURE SORTIE;{sort les valeurs triées}
    VAR
     k:integer;
    BEGIN
      FOR k:= 1 TO n DO
       writeln('A[',k,']=',A[k]);
    END;

  BEGIN
    write('entrez le nombre n (n < 1001 ) de données
          à classer;n=');
    readln(n);
    ENTREE;
    TRI;
    SORTIE;
  END.
```

7.

(1) ☐
(2) ☐
(3) ☐
(4) ■
(5) ☐

Pour tester les algorithmes, il faut les implanter sur une machine, et les essayer.

► L'algorithme (1) diverge visiblement si z_0 est réel assez grand en module (la suite est alors réelle décroissante, de module tendant vers $+\infty$).

Voici un exemple d'implantation de cet algorithme en TURBO-PASCAL :

■ *Réponse correcte*

☐ *Réponse fausse*

```
PROGRAM ITERATION1;

  VAR
   n,k:integer;
   x,y,tampon:real;

  BEGIN
  write('entrez la partie réelle de votre nombre de
  départ z0;x[0]=');
  readln(x);
  write('entrez la partie imaginaire de votre nombre
     de départ z0;y[0]=');
  readln(y);
  write('entrez le nombre k d"itérations
     voulues;k=');
  readln(k);
  FOR n:=1 TO k DO
   BEGIN
    tampon:=x;{on sauvegarde l'ancienne valeur de
       x pour le calcul de y}
    x:=-2.0+(x*x-y*y)/4.0;
    y:=(-tampon)*y/2.0;
    writeln('x[',n,']=',x,';   y[',n,']=',y);
   END;
  END.
```

▶ L'algorithme (2) est périodique, de période 4. Voici un programme en TURBO-PASCAL le mettant en œuvre

```
PROGRAM ITERATION2;

  VAR
   n,k:integer;
   x,y,tampon:real;

  BEGIN
  write('entrez la partie réelle de votre nombre de
     départ z0;x[0]=');
  readln(x);
  write('entrez la partie imaginaire de votre nombre
     de départ z0;y[0]=');
  readln(y);
  write('entrez le nombre k d"itérations
```

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

```
    voulues;k=');
  readln(k);
  FOR n:=1 TO k DO
   BEGIN
    tampon:=sqr(x+4.0)+y*y;{on conserve ce module
    pour le calcul de x et y}
    x:=-8.0*(x+4)/tampon;
    y:=8.0*y/tampon;
    writeln('x[',n,']=',x,';    y[',n,']=',y);
   END;
  END.
```

► L'algorithme (3) est aussi périodique, de période 4. Le programme suivant le met en œuvre :

```
PROGRAM ITERATION3;

  VAR
   n,k:integer;
   x,y,tampon:real;

  BEGIN
  write('entrez la partie réelle de votre nombre de
     départ z0;x[0]=');
  readln(x);
  write('entrez la partie imaginaire de votre nombre
     de départ z0;y[0]=');
  readln(y);
  write('entrez le nombre k d''itérations
     voulues;k=');
  readln(k);
  FOR n:=1 TO k DO
   BEGIN
    tampon:=x*x+y*y;{on conserve ce module pour le
    calcul de x et y}
    x:=-4.0-8.0*x/tampon;
    y:=8.0*y/tampon;
    writeln('x[',n,']=',x,';    y[',n,']=',y);
   END;
  END.
```

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

▶ L'algorithme (4) converge vers l'un des points fixes de l'application $z \mapsto \frac{2}{z-1}$, à savoir $u = 2$ et $v = -1$ (lequel ?). Pour comprendre pourquoi, poser $w_n = \frac{z_n - u}{z_n - v}$; on obtient une suite géométrique dont la convergence est fonction de la raison (sur l'exemple, la raison vaut –2, et la suite géométrique est donc divergente, ce qui signifie que la suite (z_n) converge vers –1).

```
PROGRAM ITERATION4;

   VAR
     n,k:integer;
     x,y,tampon:real;

   BEGIN
   write('entrez la partie réelle de votre nombre de
      départ z0;x[0]=');
   readln(x);
   write('entrez la partie imaginaire de votre nombre
      de départ z0;y[0]=');
   readln(y);
   write('entrez le nombre k d"itérations
      voulues;k=');
   readln(k);
   FOR n:=1 TO k DO
     BEGIN
       tampon:=sqr(x-1)+y*y;{on conserve ce module
         pour le calcul de x et y}
       x:=2.0*(x-1.0)/tampon;
       y:=2.0*y/tampon;
       writeln('x[',n,']=',x,';    y[',n,']=',y);
     END;
   END.
```

▶ L'algorithme (5) est aussi périodique, de période 5. Pour le voir, procéder comme pour l'algorithme (4). On

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

obtient une suite géométrique dont la raison est une racine cinquième de l'unité, donc une suite géométrique périodique. Voici un programme en Turbo-Pascal :

```
PROGRAM ITERATION5;

   VAR
       n,k:integer;
       x,y,tampon,a:real;

   BEGIN
   write('entrez la partie réelle de votre nombre de
      départ z0;x[0]=');
   readln(x);
   write('entrez la partie imaginaire de votre nombre
      de départ z0;y[0]=');
   readln(y);
   write('entrez le nombre k d"itérations
      voulues;k=');
   readln(k);
   a:=3.0+sqrt(5.0);{on aurait pu aussi le faire
      lire...}
   FOR n:=1 TO k DO
     BEGIN
      tampon:=sqr(x+a)+y*y;{on conserve ce module
        pour le calcul de x et y}
      x:=-2.0*a*(x+a)/tampon;
      y:=2.0*a*y/tampon;
      writeln('x[',n,']=',x,';   y[',n,']=',y);
     END;
   END.
```

8.

(1) □
(2) □
(3) □
(4) ■
(5) ■

La définition de P peut effectivement poser un problème : il est impossible de définir sur un ensemble infini dénombrable une probabilité donnant une probabilité identique non nulle à chaque élément de l'ensemble : une fraction toute seule devrait avoir une probabilité nulle, et la probabilité totale de l'ensemble ne pourrait être égale à 1. Les deux ensembles auxquels on veut assigner une probabilité sont celui des couples

---

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

d'entiers premiers entre eux, et son complémentaire. Un moyen de procéder est de considérer, pour tout entier n, l'ensemble A_n des fractions dont le numérateur et le dénominateur sont entre 1 et n. Cet ensemble est fini, de cardinal n^2, et l'on peut assigner à chaque fraction la probabilité $\frac{1}{n^2}$. Dans A_n, l'ensemble B_n des fractions réduites de A_n a une probabilité, p_n. On peut définir P comme $P = \lim\limits_{n \to \infty} p_n$.

Le calcul mathématique de P est à la fois simple et compliqué : une fraction est réduite si le dénominateur et le numérateur ne sont pas divisibles simultanément par 2, par 3, par 5 etc. Or un nombre est divisible par un entier premier p avec la probabilité $\frac{1}{p}$; deux nombres sont simultanément divisibles par p avec la probabilité $\frac{1}{p^2}$; ils ne sont donc pas simultanément divisibles par p avec la probabilité $1 - \frac{1}{p^2}$. On en déduit la formule

$$P = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)\left(1 - \frac{1}{7^2}\right)\cdots$$

C'était la partie facile du calcul de P. La question de Oldenburg portait sur le calcul de la valeur de ce produit infini, et c'est Euler qui l'a trouvée. Admettons la somme

$$S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

Calculons le produit

$$SP = \left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\right]$$

$$\times \left[\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)\left(1 - \frac{1}{7^2}\right)\dots\right]$$

en multipliant d'abord S par le premier facteur de P, puis en multipliant ce résultat par le second facteur de P, puis en continuant avec le troisième facteur, etc. On trouve successivement

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \dots$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{17^2} + \dots$$

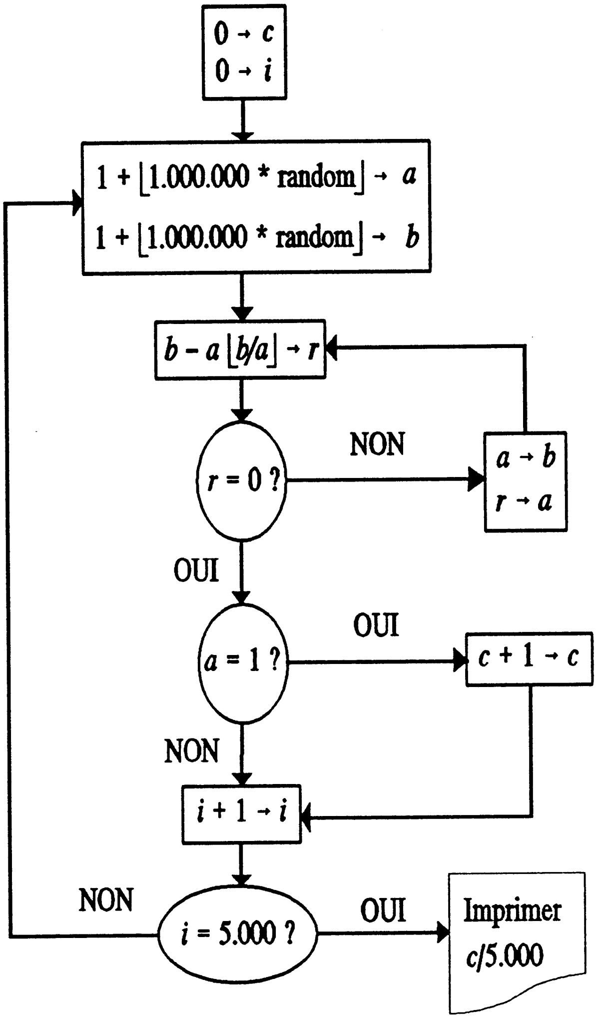
$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{19^2} + \dots$$

La première fois, tous les termes dont le dénominateur est divisible par 2 disparaissent ; la deuxième fois, tous les termes restant donc le dénominateur est divisible par 3 disparaissent à leur tour ; ceux dont le dénominateur est divisible par 5 disparaissent au troisième produit. En passant à la limite, on en déduit $SP = 1$, puis

$$P = \frac{6}{\pi^2} \approx 0{,}6079 .$$

On peut évaluer expérimentalement P par une simulation numérique. Le problème technique est lié à la fonction RANDOM qui donne un nombre aléatoire entre deux valeurs spécifiées. L'algorithme suivant, que chacun pourra traduire dans le langage de programmation de son choix, suppose que la fonction RANDOM donne un nombre aléatoire entre 0 et 1. Par un calcul de 5.000 fractions, il permet une estimation expérimentale de P ; il est dû à Leonard et Shultz (1988). On a noté $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.

Voici un programme écrit en Turbo-Pascal, qui met en œuvre cet algorithme ; le nombre de tirages aléatoires



est variable. Eviter des nombres trop grands, en raison du nombre limité d'entiers en Turbo-Pascal, et pour assurer un tirage suffisamment aléatoire.

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

```
PROGRAM FRACTIONS_REDUCTIBLES;

   VAR
    Limite,K,compteur:integer;
    proba:real;

   FUNCTION REDUC(p,q:integer):integer;{renvoie  1 si
      la fraction est irréductible 0 sinon}
    VAR
     temp:integer;
    BEGIN
     REPEAT
        IF p<q THEN             BEGIN
        temp:=p;p:=q;q:=temp;
                               END;
        REPEAT
         p:=p-q;
        UNTIL p<q;
     UNTIL p=0;
     IF q=1 THEN REDUC:=1 ELSE REDUC:=0;
    END;

   PROCEDURE Fractions_Aleatoires;{crée des fractions
        aléatoires et comptabilise celles qui sont
        irréductibles}
   VAR
    i,p,q:integer;
    BEGIN
     Randomize;
      FOR i:=1 TO K DO
       BEGIN
        p:=RANDOM(K)+1;
        q:=RANDOM(K)+1;{on ajoute 1 pour éviter le
            cas q=0}
        compteur:=compteur+REDUC(p,q);
       END;
    END;

BEGIN
   write('entrez la borne max des éléments de votre
      fraction;limite:=');
   readln(limite);
   write('entrez le nombre K de fractions que vous
      voulez étudier;K=');
```

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

```
    readln(K);
    compteur:=0;
    Fractions_Aleatoires;
    proba:=compteur/K;
    writeln('la probabilité trouvée est=',proba);
END.
```

9.

(1) □
(2) □
(3) ■
(4) ■
(5) □

L'algorithme décrit peut facilement se programmer. Il reproduit la méthode utilisée par les Grecs pour calculer les fractions continues, qui sont des fractions approchant de plus en plus un réel donné. S'il arrive que le processus s'arrête de lui-même, c'est que l'on a $d_k = 0$, et que le nombre x est un nombre rationnel. La réciproque aussi est vraie : si $x \in \mathbb{Q}$, il existe un entier k tel que $d_k = 0$. Lorsqu'un nombre est irrationnel, le dénominateur de y_k devient de plus en plus grand ; cela fournit un moyen empirique de déterminer si un nombre connu par son approximation décimale est une fraction simple ou a de bonnes chances d'être irrationnel. Voici par exemple les premiers résultats obtenus pour π :

$$\begin{array}{lll} n_1 = 3 & d_1 = 0{,}14159 & r_2 = 1/d_1 = 7,\ 06251 \\ n_2 = 7 & d_2 = 0{,}06251 & r_3 = 1/d_2 = 15{,}99659 \\ n_3 = 15 & d_3 = 0{,}99659 & r_4 = 1/d_3 = 1{,}003417 \\ n_4 = 1 & d_4 = 0{,}00341 & \ldots \end{array}$$

La suite de fractions approchant π est alors 3,

$$3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}, \qquad 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{355}{113},$$

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}} = \frac{333}{106}.$$

Essayez l'algorithme pour $\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$, et e.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

Voici un exemple de programation de cet algorithme en TURBO-PASCAL.

```
PROGRAM FRACTIONS_CONTINUES;
   CONST
    MaxKK=50;

   VAR
     n,d:ARRAY[1..MaxKK]  of real;
     k,kfin,KK:integer;
     x:real;

   BEGIN
     write('entrez le nombre réel x que vous voulez
       décomposer;x=');
     readln(x);
     writeln('entrez le nombre KK de réduites
       souhaitées (KK<50)');
     write('KK=');
     readln(KK);
     n[1]:=int(x);d[1]:=Frac(x);k:=1;{initialisation}
     WHILE ((k<KK) AND (d[k]>1e-7)) DO
       BEGIN
         d[k]:=1/d[k];k:=k+1;
         n[k]:=int(d[k-1]);
         d[k]:=Frac(d[k-1]);
       END;
       kfin:=k;
       writeln('voici les réduites successives
         obtenues');
       FOR k:=1 TO kfin DO
         writeln('n[',k,']=',n[k]);
    END.
```

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

10.

(1) ☐
(2) ■
(3) ☐
(4) ☐
(5) ☐

Cet algorithme a été conçu en 1987, pour mettre en œuvre une décomposition découverte en 1986 par NICK MACKINNON et NICK LORD. Il permet de décomposer tout nombre réel strictement positif r sous la forme

$$r = r_1\, r_2 \dots r_n = r_1 + r_2 + \dots + r_n$$

L'idée de base vient de ce que pour tout nombre réel $s \geq 4$, il existe une unique paire $\{s_1 ; s_2\}$ de nombres réels tels que

$$s = s_1\, s_2 = s_1 + s_2$$

Cette paire est donnée par

$$s_1 = \frac{s - \sqrt{s^2 - 4s}}{2} \quad \text{et} \quad s_2 = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4s}}{2},$$

et l'on a l'encadrement $1 < s_1 \leq 2$. Lorsque $0 < s < 4$, le discriminant $s^2 - 4s$ est strictement négatif, et il est impossible de trouver les deux nombres s_1 et s_2. Si $r < 4$, la double factorisation se réduit à la relation triviale $r = r = r$. Si $r \geq 4$, on a la double décomposition $r = s_1\, s_2 = s_1 + s_2$, et l'un des deux termes, disons s_1, est < 4 ; si l'autre est aussi ≤ 4, la factorisation est terminée. Sinon, on peut continuer, et factoriser s_2. L'algorithme se poursuit jusqu'à ce que la double décomposition soit complète. La décomposition obtenue en fin de compte est caractérisée par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} r = r_1\, r_2\, r_3 \dots r_n &= r_1 + r_2 + r_3 + \dots r_n \\ r_2\, r_3 \dots r_n &= r_2 + r_3 + \dots r_n \\ r_3 \dots r_n &= r_3 + \dots r_n \\ &\vdots \\ r_{n-1}\, r_n &= r_{n-1} + r_n \end{aligned}$$

avec $r_1, \dots, r_{n-1} \leq 2$, $r_n < 4$.

Par exemple, partant de $r = 6$, on trouve successivement

$$6 = \left(3 - \sqrt{3}\right)\left(3 + \sqrt{3}\right) = \left(3 - \sqrt{3}\right) + \left(3 + \sqrt{3}\right)$$

■ *Réponse correcte*

☐ *Réponse fausse*

et, puisque $\left(3+\sqrt{3}\right) \geq 4$,

$$\left(3+\sqrt{3}\right) = \left(\frac{3+\sqrt{3}-\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}\right)\left(\frac{3+\sqrt{3}+\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{3+\sqrt{3}-\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}\right) + \left(\frac{3+\sqrt{3}+\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}\right)$$

soit finalement

$$6 = \left(3-\sqrt{3}\right)\left(\frac{3+\sqrt{3}-\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}\right)\left(\frac{3+\sqrt{3}+\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}\right)$$

$$= \left(3-\sqrt{3}\right) + \left(\frac{3+\sqrt{3}-\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}\right) + \left(\frac{3+\sqrt{3}+\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}\right)$$

A noter que la seule condition

$$r = r_1\, r_2 \,...\, r_n = r_1 + r_2 + ... + r_n$$

ne suffit pas à caractériser la décomposition fournie par l'algorithme, car on a aussi

$$6 = 1 \times 2 \times 3 = 1 + 2 + 3.$$

Voici un exemple de programmation de cet algorithme en TURBO-PASCAL :

```
PROGRAM FACTORISATION;

   VAR
     r:array[1..1000]  of real;
     {on arrêtera la factorisation s'il y a plus de
     1000 facteurs}
     r_initial,s,s1,s2:real;
     i,ifin:integer;

   BEGIN
     write('entrez  le réel r positif à
       factoriser;r=');
     readln(r_initial);
     i:=1;s:=r_initial;
```

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

```
  WHILE ((s≠4) AND (i<999)) DO
   BEGIN
     s1:=(s-sqrt(s*s-4.0*s))/2.0;
     s2:=(s+sqrt(s*s-4.0*s))/2.0;
     r[i]:=s1;
     i:=i+1;
     s:=s2;
   END;
  ifin:=i;
  r[ifin]:=s2;
  writeln('Voici  le résultat  obtenu pour la
   factorisation');
  FOR i:=1 TO ifin DO writeln('r[',i,']=',r[i]);
END.
```

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

Résultats du QCM n°11
Récapitulatif

1.

(1) □
(2) □
(3) □
(4) □
(5) ■

La dérivée de $\ln F$ s'obtient immédiatement en utilisant la formule magique de dérivation. Cela étant, passons à la démonstration de l'inégalité de Jensen.

Le dénominateur de $\ln F$, à savoir $x^2\left(a_1^x + \ldots + a_n^x\right)$, étant positif, les variations de $\ln F$, et partant, celles de F, se déduisent de l'étude du signe du numérateur. Or, ce dernier peut se réécrire

$$N = a_1^x \ln a_1^x + \ldots + a_n^x \ln a_n^x - \left(a_1^x + \ldots + a_n^x\right) \ln\left(a_1^x + \ldots + a_n^x\right)$$

$$= a_1^x \ln\left(\frac{a_1^x}{a_1^x + \ldots + a_n^x}\right) + \ldots + a_n^x \ln\left(\frac{a_n^x}{a_1^x + \ldots + a_n^x}\right)$$

En outre, l'inégalité $\ln x \leq x - 1$ conduit à

$$N \leq a_1^x\left(\frac{a_1^x}{a_1^x + \ldots + a_n^x} - 1\right) + \ldots + a_n^x\left(\frac{a_n^x}{a_1^x + \ldots + a_n^x} - 1\right)$$

$$= \frac{(a_1^x)^2 - a_1^x\left(a_1^x + \ldots + a_n^x\right) + \ldots + (a_n^x)^2 - a_n^x\left(a_1^x + \ldots + a_n^x\right)}{\left(a_1^x + \ldots + a_n^x\right)}$$

$$= \frac{(a_1^x)^2 + \ldots + (a_n^x)^2 - \left(a_1^x + \ldots + a_n^x\right)^2}{\left(a_1^x + \ldots + a_n^x\right)}$$

$$< 0$$

qui nous donne les variations de F. A propos, pouvez-vous dire dans quel sens est l'inégalité de Jensen ?

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

2.

(1) □ La suite (u_n) définie par $u_n = -n^2$ vérifie la condition de
(2) ■
(3) ■ l'énoncé, mais $\left(\frac{u_n}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ ne converge pas.
(4) ■
(5) □

• Soit n un entier > 0. De l'inégalité $u_{2n} \le u_n + u_n$, on déduit $\frac{u_{2n}}{2n} \le \frac{u_n}{n}$, puis, par récurrence, $\frac{u_{pn}}{pn} \le \frac{u_n}{n}$ pour tout entier $p > 0$.

• Si la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, il est clair qu'elle est bornée. Inversement, si la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, pour tous n et $k \in \mathbb{N}^*$, on a, si $k > n$, et si $k = pn + r$ (division euclidienne de k par n)

$$\begin{aligned}\frac{u_k}{k} = \frac{u_{pn+r}}{pn+r} &\le \frac{u_{pn}+u_r}{pn+r}\\ &\le \frac{u_{pn}}{pn} + \frac{u_r}{k} \le \frac{u_n}{n} + \frac{u_r}{k}\end{aligned}$$

Cela étant, soient $\epsilon > 0$, M la borne inférieure de l'ensemble $\left\{\frac{u_n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ et q un entier > 0 tel que $\frac{u_q}{q} \le M + \frac{\varepsilon}{2}$. Posons $\alpha = \max\{|u_i|, 1 \le i \le q\}$. Soit r un entier tel que $\frac{\alpha}{r} < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors, pour tout entier $k > \max\{q;r\}$ s'écrivant $k = qt + s$, on a

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

$$M \leq \frac{u_k}{k} \leq \frac{u_q}{q} + \frac{u_s}{k} \leq M + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = M + \varepsilon$$

Ainsi la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

• Si la suite (u_n) est à valeurs positives, la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée inférieurement par 0, et supérieurement par u_1. D'après ce qui précède, elle converge.

• Enfin, la suite vérifiant $u_n = -n$ contredit l'assertion (5).

3.

(1) ☐ Le bloc
(2) ☐
(3) ■
(4) ☐
(5) ■

```
BEGIN
   FOR i:=1 TO 4 DO
     BEGIN
   FOR j:=1 TO 4 DO
       BEGIN
     A[i,j]:=1;B[i,j]:=2;C[i,j]:=0;D[i,j]:=0;
       END;
     END;
```

initialise les coefficients des matrices : 1 pour ceux de A, 2 pour ceux de B, 0 pour ceux de C et pour ceux de D. Le bloc suivant,

```
FOR i:=1 TO 3 DO
FOR j:=1 TO 3 DO
  C[i,j]:=A[i,j]*B[i,j];
  D[i,j]:=A[i,j]*B[i,j];
```

effectue un produit terme à terme des matrices A et B. En l'absence d'une instruction "BEGIN...END;"

■ *Réponse correcte*
☐ *Réponse fausse*

indiquant un bloc d'instructions à exécuter, le programme ne fait porter les boucles FOR... que sur la ligne

```
C[i,j]:=A[i,j]*B[i,j];
```

La ligne suivante,

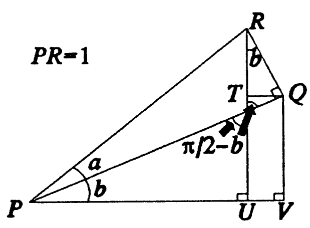
```
D[i,j]:=A[i,j]*B[i,j];
```

est exécutée ensuite, séparément. En sortant de la boucle FOR, cette ligne n'est exécutée qu'une fois, sans qu'on puisse préciser les valeurs de i et j : la boucle FOR étant terminée, les valeurs de i et j peuvent devenir quelconques. Cette instruction venant juste après la boucle, on pourra avoir i = 3 et j = 3, mais ce n'est pas garanti. Pour faire porter les deux boucles sur les deux lignes, il faudrait écrire

```
FOR i:=1 TO 3 DO
FOR j:=1 TO 3 DO
   BEGIN
     C[i,j]:=A[i,j]*B[i,j];
     D[i,j]:=A[i,j]*B[i,j];
   END;
```

4.

(1) □
(2) ■
(3) □
(4) □
(5) □

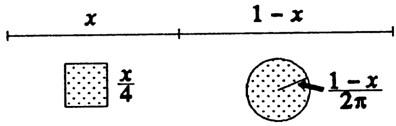


$$\sin(a+b) = RU = RT + TU = RT + QV$$
$$= RQ\cos b + PQ\sin b$$
$$= \sin a\cos b + \cos a\sin b$$

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

5.

(1) ☐
(2) ☐
(3) ☐
(4) ■
(5) ☐



L'aire totale vaut $A = \frac{x^2}{16} + \frac{(1-x)^2}{4\pi}$. En dérivant par rapport à x, on trouve que l'aire est minimale lorsque

$x = \frac{4}{4+\pi} \approx 0{,}56$.

L'aire et le périmètre du carré et du cercle valent alors respectivement $A_1 = \frac{1}{(4+\pi)^2}$, $p_1 = \frac{4}{4+\pi}$,

$A_2 = \frac{\pi}{4(4+\pi)^2}$ et $p_2 = \frac{\pi}{4+\pi}$, et l'on a l'égalité

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{p_1}{p_2}$. Cette dernière relation est assez générale.

En effet, supposons qu'au lieu de faire un carré et un cercle, on veuille faire une figure de type I, et une figure de type II, les types étant tels que l'aire A_1 (resp. A_2) d'une figure de type I (resp. II) soit proportionnelle au périmètre p_1 resp. p_2) de la figure : $A_1 = k_1 p_1^2$, $A_2 = k_2 p_2^2$. Voici quelques exemples de types de figures : triangle équilatéral, ellipses, rectangles, polygones réguliers, demi-cercle, ... Si l'on coupe le fil de longueur 1 de manière à minimiser l'aire totale $A_1 + A_2$ des deux figures formées par le fil coupé, on

■ *Réponse correcte*
☐ *Réponse fausse*

trouve que pour ces "figures minimales", on a $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{k_2}{k_1}$. En effet, en dérivant la relation

$$A = A_1 + A_2 = k_1 x^2 + k_2(1-x)^2 ,$$

on obtient

$$\frac{dA}{dx} = 2(k_1 + k_2)x - 2k_2$$

et cette expression s'annule pour $x = \dfrac{k_2}{k_1 + k_2}$. En remplaçant x par cette valeur dans les expressions de A_1, A_2, p_1 et p_2, on vérifie la relation.

Et maintenant, pouvez-vous dire comment couper le fil pour former un triangle équilatéral et un carré dont l'aire totale soit minimale ?

6.

(1) ■ En posant $p = \tan a$ et $q = \tan b$ dans la formule

(2) □

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} ,$$

(3) ■

(4) □ on obtient

(5) ■

$$\tan(\arctan p - \arctan q) = \frac{p-q}{1+pq} ,$$

puis $$\arctan p - \arctan q = \arctan\left(\frac{p-q}{1+pq}\right) \qquad (1)$$

sous réserve que le premier membre soit dans l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ (sinon il faut rajouter une constante, mais si p et q sont tous deux positifs, il n'y a pas de problème). En utilisant la relation

---

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

la formule (1) conduit à l'égalité

$$\arctan\frac{1}{p} - \arctan\frac{1}{q} = \arctan\left(\frac{p-q}{1+pq}\right) \qquad (2)$$

(Exercice : y-a-t-il des conditions d'intervalles pour cette formule ?) Si (x_n) est une suite de réels positifs tendant vers $+\infty$, cette dernière formule permet d'amalgamer la série $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{x_{n+1}-x_n}{1+x_n x_{n+1}}\right)$, en écrivant

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{x_{n+1}-x_n}{1+x_n x_{n+1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\arctan\frac{1}{x_n} - \arctan\frac{1}{x_{n+1}}\right]$$
$$= \arctan\frac{1}{x_1}$$

Le fait que la suite (x_n) tende vers $+\infty$ assure la convergence de la série. Les séries (1), (3) et (5) sont calculées poar cette méthode. Les séries (2) et (4) divergent, car leur terme général ne tend pas vers 0.

7.

(1) ■
(2) ■
(3) □
(4) ■
(5) □

L'assertion (1) s'obtient par récurrence sur n. L'assertion (2) découle de (1) et du fait que les suites (u_n) et (v_n) sont respectivement majorée et minorée. Par passage à la limite, on trouve que $\alpha = \beta$. On en déduit que (u_n) et (v_n) sont adjacentes, ce qui prouve l'assertion (4). Enfin, on montre que $\alpha = \dfrac{2ab}{a+b}$ en constatant que la suite $(1/u_n + 1/v_n)$ est constante et égale à $1/a + 1/b$.

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

8.

(1) ■
(2) □
(3) □
(4) □
(5) □

On cherche le signe de $(b^m - a^m)^n - (b^n - a^n)^m$. Divisons par a^{mn}. Cela revient à chercher le signe de $\left(\dfrac{b^m - a^m}{a^m}\right)^n - \left(\dfrac{b^n - a^n}{a^n}\right)^m$, c'est-à-dire celui de $\left(\dfrac{b^m}{a^m} - 1\right)^n - \left(\dfrac{b^n}{a^n} - 1\right)^m$, ou, en posant $\dfrac{b}{a} = t$, celui de $(t^m - 1)^n - (t^n - 1)^m$, avec $t > 1$. En posant successivement $u = t^m$, puis $k = \dfrac{n}{m}$ $(k > 1)$, cette expression devient $(u - 1)^n - \left(u^{\frac{n}{m}} - 1\right)^m$, puis $(u - 1)^{km} - (u^k - 1)^m$, dont le signe est celui de $(u - 1)^k - (u^k - 1)$. Posons $g(u) = (u - 1)^k - (u^k - 1)$. On a

$$\begin{aligned} g'(u) &= k(u-1)^{k-1} - ku^{k-1} \\ &= k\left((u-1)^{k-1} - u^{k-1}\right) \\ &< 0 \end{aligned}$$

et $g(1) = 0$. On en déduit l'inégalité $g(u) < 0$ si $u > 1$, c'est-à-dire

$$(b^m - a^m)^n < (b^n - a^n)^m .$$

■ *Réponse correcte*
□ *Réponse fausse*

9.

(1) ■ (2) ■ (3) □ (4) ■ (5) ■

Voici, à l'ordre 7, les cinq développements corrects :

$$(\cos x)^{1+\sin x} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{89}{720}x^6 - \frac{1}{30}x^7 + o(x^7)$$

$$(1 + \operatorname{Arctan} x)^{\frac{x}{\sin^2 x}} = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2}x + \frac{11\mathrm{e}}{24}x^2 - \frac{13\mathrm{e}}{48}x^3 + \frac{1583\,\mathrm{e}}{5760}x^4 - \frac{2699\,\mathrm{e}}{11520}x^5 + \frac{441\,319\,\mathrm{e}}{2\,903\,040}x^6 - \frac{12\,815\mathrm{e}}{165\,888}x^7 + o(x^7)$$

$$\operatorname{Arcsin}(\pi \sin x) = \pi x + \frac{\pi^3 - \pi}{6}x^3 + \frac{9\pi^5 - 10\pi^3 + \pi}{120}x^5 + \frac{225\pi^7 - 315\pi^5 + 91\pi^3 - \pi}{5040}x^7 + o(x^7)$$

$$g(x) = \frac{1}{\pi}x - \frac{(-1+\pi)(1+\pi)}{6\pi^3}x^3 + \frac{\pi^4 - 10\pi^2 + 9}{120\pi^5}x^5 - \frac{(\pi-1)(\pi+1)(\pi^4 - 90\pi^2 + 225)}{5040\,\pi^7}x^7 + o(x^7)$$

$$\mathrm{e}^{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})} = \mathrm{e} + \mathrm{i}\mathrm{e}x - \mathrm{e}x^2 - \frac{5}{6}\mathrm{i}\mathrm{e}x^3 + \frac{5}{8}\mathrm{e}x^4 + \frac{13}{30}\mathrm{i}\mathrm{e}x^5 - \frac{203}{720}\mathrm{e}x^6 - \frac{877}{5040}\mathrm{i}\mathrm{e}x^7 + o(x^7)$$

10.

(1) □ (2) □ (3) ■ (4) □ (5) □

L'équation $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x)\,\mathrm{e}^{f(x)} = x$ définit la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto x\,\mathrm{e}^x$. Comme cette dernière fonction est une bijection croissante $[0;+\infty[\ \to [0;+\infty[$, le théorème d'existence de la fonction réciproque affirme que f est bien définie, continue, et est

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

Fonctions réciproques

Voici les résultats à connaître :

— Une fonction injective $f: A \to B$ est une bijection $A \to f(A)$.

— Une fonction continue f strictement monotone définie sur un intervalle I est une bijection $I \to f(I)$. Sa fonction réciproque est une bijection continue $f(I) \to I$, strictement monotone, croissante si f l'est, décroissante si f l'est.

— Une fonction dérivable f définie sur un intervalle I, dont la dérivée est positive (resp. négative) sur I, et telle que $\{x \in I : f'(x) > 0 \text{ (resp. } < 0)\}$ soit dense dans I est une bijection croissante (resp. décroissante) $I \to f(I)$, et sa fonction réciproque est croissante (resp. décroissante), continue, et dérivable en tout point $y = f(x)$ tel que $f'(x) \neq 0$; en un tel point, on a $(f^{-1})'(y) = 1/(f'(x))$.

aussi une bijection $[0;+\infty[\to [0;+\infty[$. Cela étant, en prenant le logarithme népérien de la relation, on obtient

$$\ln f(x) + f(x) = \ln x,$$

d'où l'on tire

$$\frac{f(x)}{\ln x} = \frac{f(x)}{f(x) + \ln x} = \frac{1}{1 + \dfrac{\ln f(x)}{f(x)}}$$

puis
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\ln x} = 1 ,$$

et enfin
$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln x .$$

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

11.

(1) ■ L'égalité $f(0) = f(1)$ montre l'assertion 1.

(2) ■ Pour montrer l'assertion (2), utilisons la technique des sommes amalgamantes, en disposant la somme

(3) □

(4) □

(5) ■

$$g(0)+g\left(\frac{1}{p}\right)+\dots+g\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

à raison d'un terme par ligne.

$$\boxed{\begin{array}{lcl} g(0) & = & f\left(\frac{1}{p}\right) - f(0) \\ & & \searrow \\ g\left(\frac{1}{p}\right) & = & f\left(\frac{2}{p}\right) - f\left(\frac{1}{p}\right) \\ & & \searrow \\ g\left(\frac{2}{p}\right) & = & f\left(\frac{3}{p}\right) - f\left(\frac{2}{p}\right) \\ & \dots & \\ & & \searrow \\ g\left(1-\frac{1}{p}\right) & = & f(1) - f\left(1-\frac{1}{p}\right) \\ \hline \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} g\left(\frac{k}{p}\right) & = & f(1)-f(0) = 0 \end{array}}$$

Puisque cette somme est nulle, deux cas sont possibles :

— ou bien tous les termes de cette somme sont nuls (et alors l'assertion (3) n'est pas vérifiée),

— ou bien il existe un de termes qui est non nul ; dans ce cas, un autre des termes doit être de signe contraire (et alors l'assertion (4) n'est pas vérifiée). Dans ce dernier cas, si $g\left(\frac{i}{p}\right)\times g\left(\frac{j}{p}\right) < 0$, $i < j$, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires, qui affirme qu'il existe $\alpha \in \left[\frac{i}{p};\frac{j}{p}\right]$ tel que $g(\alpha) = 0$.

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*

Bref, dans tous les cas, il existe $\alpha \in \left[\frac{i}{p}; \frac{j}{p}\right]$ tel que $g(\alpha) = 0$.

Ce résultat a été établi en 1934 par Paul Lévy, et est connu sous le nom de *Théorème des cordes de Paul Lévy*. En effet, il signifie que le graphe de f possède une corde horizontale de longueur $1/n$, pour tout entier $n \geq 1$: il existe deux réels α et $\alpha + 1/n$ tels que la corde (= le segment) reliant les deux points du graphe de f, $(\alpha; f(\alpha))$ et $\left(\alpha + \frac{1}{n}; f\left(\alpha + \frac{1}{n}\right)\right)$ soit horizontale et de longueur $1/n$.

Les applications de ce théorème sont nombreuses. Supposons par exemple qu'un coureur ait parcouru exactement 15km en une heure. Alors, il existe un instant t tel qu'entre t et t+30 minutes, le coureur ait parcouru exactement 7,5km (prendre $n = 2$). Il existe également un instant u tel qu'entre u et u+20 minutes, le coureur ait parcouru exactement 5km (prendre $n = 3$).

■ *Réponse correcte*

□ *Réponse fausse*