

# Optique géométrique





# Optique géométrique

Agnès **MAUREL**

**BELIN**

8, rue Férou 75278 Paris cedex 06  
[www.editions-belin.com](http://www.editions-belin.com)

DANS LA COLLECTION BELIN SUP SCIENCES

A. MAUREL, J.-M. MALBEC

*Optique géométrique, résumé de cours et exercices*

M. SAINT-JEAN, J. BRUNEAUX et J. MATRICON

*Électrostatique et magnéto-statique, cours*

J. BRUNEAUX, M. SAINT-JEAN et J. MATRICON

*Électrostatique et magnéto-statique, résumé de cours et exercices*

DANS LA COLLECTION BELIN SUP HISTOIRE DES SCIENCES

A. BARBEROUSSE

*La constitution de la mécanique statistique*

M. BLAY

*La science du mouvement de Galilée à Lagrange*

Photo de couverture © Digital Vision

Le code de la propriété intellectuelle n'autorise que « les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » [article L. 122-5] ; il autorise également les courtes citations effectuées dans un but d'exemple ou d'illustration. En revanche « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » [article L. 122-4].

La loi 95-4 du 3 janvier 1994 a confié au C.F.C. (Centre français de l'exploitation du droit de copie, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris), l'exclusivité de la gestion du droit de reprographie. Toute photocopie d'œuvres protégées, exécutée sans son accord préalable, constitue une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

# Sommaire

<b>1. La lumière et l'optique géométrique</b> .....	5
Introduction .....	6
Nature ondulatoire de la lumière. Ondes électromagnétiques .....	7
Vitesse de propagation, indice optique.....	9
De l'onde au rayon lumineux .....	12
<i>Résumé du cours</i> .....	17
<b>2. Réflexion et réfraction</b> .....	19
Dioptries et miroirs.....	21
Lois de Snell-Descartes en milieu homogène. Lois de Kepler .....	22
Principe de Fermat .....	28
Propagation de rayons lumineux en milieu non homogène.....	31
Application : la réfraction atmosphérique et les mirages.....	32
Surface des indices. Construction de Descartes .....	41
Principe d'Huyghens et interprétation des lois de Descartes .....	42
<i>Résumé du cours</i> .....	47
<b>3. Étude de l'arc-en-ciel et du prisme</b> .....	49
L'arc-en-ciel.....	50
Le prisme .....	58
<i>Résumé du cours</i> .....	66
<b>4. Stigmatisme et approximation de Gauss</b> .....	69
Image d'un point lumineux à travers un système optique.....	70
Stigmatisme rigoureux .....	72
Notion de stigmatisme approché.....	80
<i>Résumé du cours</i> .....	82
<b>5. Dioptries et miroirs dans l'approximation de Gauss</b> .....	85
Le dioptre plan et la lame à faces parallèles .....	86
Le dioptre sphérique .....	89
Le miroir plan .....	95
Le miroir sphérique.....	99
<i>Résumé du cours</i> .....	105
<b>6. Les systèmes centrés</b> .....	107
Définitions .....	109
Points et plans cardinaux d'un système dioptrique .....	109
Construction de l'image d'un objet à travers un système dioptrique.....	113
Formules de conjugaison d'un système centré.....	114

Les systèmes catadioptriques .....	116
Association de systèmes centrés.....	120
<i>Résumé du cours</i> .....	125
<b>7. Les lentilles épaisses</b> .....	<b>127</b>
Caractéristiques d'une lentille épaisse.....	128
Les lentilles convergentes et divergentes.....	130
Relation de conjugaison d'une lentille épaisse.....	131
Points focaux d'une lentille épaisse .....	132
<i>Résumé du cours</i> .....	134
<b>8. Les lentilles minces dans l'approximation de Gauss</b> .....	135
Caractéristiques d'une lentille épaisse.....	137
Image d'un objet à travers une lentille mince .....	138
Points cardinaux d'une lentille mince .....	139
Distance focale, relation de conjugaison de Descartes d'une lentille mince .....	140
Construction géométrique de l'image d'un objet à travers une lentille mince.....	142
Relations de conjugaison d'une lentille mince symétrique .....	144
Lentilles accolées. Vergence .....	146
Association de lentilles. Application aux oculaires .....	148
Les systèmes afocaux.....	156
<i>Résumé du cours</i> .....	158
<b>9. Propriétés générales des instruments d'optique</b> .....	161
Les différents instruments optiques.....	162
Grandissement, grossissement et puissance d'un instrument optique.....	163
Champs en largeur des instruments optiques.....	168
Profondeur de champ.....	171
<i>Résumé du cours</i> .....	174
<b>10. L'œil et la loupe</b> .....	175
L'œil .....	176
La loupe.....	186
<b>11. Instruments optiques à deux lentilles : le microscope et la lunette</b> .....	191
Les différents types de microscope.....	192
Le microscope optique ou photonique .....	195
Les lunettes d'approche .....	200
La lunette de Galilée.....	202
<i>Résumé du cours</i> .....	204
<b>12. Les aberrations</b> .....	207
Les aberrations chromatiques .....	208
Les aberrations géométriques.....	212
<b>Réponses aux exercices</b> .....	215

# La lumière et l'optique géométrique

La lumière est une onde électromagnétique et, à ce titre, sa propagation est régie par les équations de Maxwell. Les grandeurs caractéristiques d'une onde lumineuse sont sa longueur d'onde et sa fréquence.

Dans le cadre de l'optique géométrique, les longueurs d'onde de la lumière sont supposées petites comparées aux dimensions caractéristiques des instruments optiques. On considère alors que le chemin suivi par la lumière est décrit par un rayon lumineux. Cette notion de rayon lumineux est essentielle car elle constitue la base de l'optique géométrique.

## 1.1. Introduction

- 1 Les domaines de l'optique
- 2 Émission et détection optiques

## 1.2. Nature ondulatoire de la lumière. Ondes électromagnétiques

- 1 Milieux transparent, homogène et isotrope
- 2 Les équations de Maxwell
- 3 Ondes électromagnétiques : fréquences et longueurs d'onde

## 1.3. Vitesse de propagation, indice optique

- 1 Vitesse de propagation
- 2 Indice optique
- 3 Variation de l'indice optique. Coefficient de dispersion et coefficient thermique

## 1.4. De l'onde au rayon lumineux

- 1 Ondes plane, cylindrique ou sphérique
- 2 Surface d'onde et vecteur d'onde
- 3 Rayon lumineux
- 4 Principe du retour inverse de la lumière

## Mots-clés

- Ondes électromagnétiques
- Longueur d'onde
- Fréquence
- Surface d'onde
- Rayon lumineux

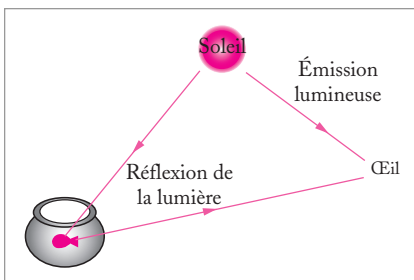
# 1.1. Introduction

## 1 Les domaines de l'optique

L'optique est un domaine de la physique divisé en sous-domaines qui se sont souvent créés de façon historique. Un de ces sous-domaines est l'optique géométrique. Dans le cadre de l'optique géométrique, on considère que la lumière se propage sous forme de rayons lumineux ; ces rayons représentent alors la trajectoire de la lumière, c'est-à-dire qu'ils transportent la vibration électromagnétique. On parle souvent d'approximation des rayons car cette notion n'est valable que dans certaines limites, la principale étant la limite des fréquences infinies, c'est-à-dire des fréquences très grandes devant toutes celles qui caractérisent le milieu de propagation. En particulier, pour que la notion de rayons soit applicable, il faut que la longueur d'onde de la lumière soit très petite devant toutes les longueurs caractéristiques du milieu considéré. Lorsque cette hypothèse n'est plus vérifiée, par exemple lorsque l'onde rencontre un obstacle dont la taille est comparable à sa longueur d'onde, des phénomènes typiquement vibratoires interviennent, comme la diffraction et les interférences. Ces phénomènes pour lesquels interviennent la nature vibratoire de la lumière et sa propagation par ondes se rattachent à l'optique ondulatoire.

Parmi les autres domaines de l'optique, nous pouvons citer l'optique énergétique qui décrit les puissances transportées par le rayonnement, leur répartition spatiale et leur action sur divers récepteurs ou encore l'optique physiologique qui traite spécifiquement de la formation des images dans l'œil et de leur perception. Plus récemment, l'optique quantique envisage l'aspect corpusculaire de la lumière, dans ses échanges d'énergie avec la matière. Enfin, liée aux nombreuses applications de l'optique, l'optique instrumentale traite des caractéristiques optiques d'un instrument par opposition à ses caractéristiques mécaniques.

## 2 Émission et détection optiques



**Fig. 1.1. Modes de vision.** Un objet lumineux (comme le Soleil) émet directement de la lumière vers l'œil tandis qu'un objet non lumineux (comme un poisson) réfléchit la lumière vers l'œil.

Les systèmes vivants communiquent avec l'extérieur grâce aux sons, c'est-à-dire en émettant et en recevant des ondes acoustiques mais aussi par la vue, en recevant des ondes lumineuses. Les yeux constituent le système de détection des ondes lumineuses ; ils transforment le signal optique en impulsions nerveuses transmises au cerveau par le nerf optique. En revanche, la plupart des êtres vivants ne disposent pas d'émetteur (seuls quelques poissons exotiques sont capables d'émettre des signaux lumineux). Nous ne sommes visibles que grâce à des sources de lumière « annexes » comme le Soleil ou les lampes. Si ces sources sont directement visibles grâce à la lumière qu'elles émettent, les objets non lumineux ne sont visibles que s'ils sont éclairés par une source lumineuse : c'est alors la lumière qu'ils réfléchissent qui est détectée par l'œil (Fig. 1.1).



### La vision archaïque de la lumière : Le feu externe et le feu visuel

Les théories archaïques de la lumière portent davantage sur la vision que sur la nature de la lumière. On distingue à l'époque antique deux théories, celle du feu externe et celle du feu visuel. Dans la théorie du feu externe, la lumière parvient à l'œil grâce à un phénomène de propagation d'« atomes » émis par les objets lumineux et qui parviennent jusqu'à l'œil. La théorie du feu visuel affirme au contraire que l'œil est le siège d'une émission de particules permettant la vision : ces particules iraient scruter les objets. C'est

notamment la théorie d'Euclide (III<sup>e</sup> siècle av. J.-C.), fondateur de l'école d'Alexandrie et auteur de la *catadioptrique*. Les disciples d'Euclide et notamment, au 1<sup>er</sup> siècle de notre ère, Ptolémée, continuent de développer cette théorie.

Platon développera une théorie que l'on peut qualifier de mixte entre les théories du feu externe et du feu visuel : œil et objet émettent périodiquement des particules dont l'interaction permet la vision.

## 1.2. Nature ondulatoire de la lumière. Ondes électromagnétiques

### 1 Milieux transparent, homogène et isotrope

Les milieux étudiés en optique géométrique sont des milieux dans lesquels la lumière est susceptible de se propager. De tels milieux sont dits **transparents**.

Un milieu est **homogène** si les caractéristiques optiques du milieu sont identiques en tout point.

Enfin, un milieu est **isotrope** si la propagation lumineuse est identique quelle que soit la direction de propagation dans le milieu.

### 2 Les équations de Maxwell

En 1860, le physicien anglais J. Maxwell établit les équations de l'électromagnétisme. Ces équations gouvernent le comportement spatio-temporel des ondes électromagnétiques. Une onde électromagnétique est caractérisée par un champ électrique et un champ magnétique couplés ; Maxwell montre en outre que la lumière est une onde électromagnétique, mais il faudra attendre encore pour que le caractère ondulatoire de la lumière soit reconnue par la communauté scientifique, alors convaincue que la lumière suivait un comportement qu'il était possible de décrire dans un cadre proche de celui de la mécanique. Nous donnons ci-dessous la forme des équations de Maxwell dans le vide :

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Le champ électromagnétique est caractérisé en chaque point de l'espace par le couple de vecteurs  $(\vec{E}, \vec{B})$ . Les densités  $\rho$  et  $\vec{j}$  sont appelées les sources du champ électromagnétique.

$\mu_0$  et  $\epsilon_0$  sont des constantes :  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  S.I. est la perméabilité du vide et  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$  S.I. est la permittivité du vide.

En absence de sources, les champs magnétique et électrique vérifient une équation de propagation caractéristique des ondes. Cette équation de propagation est obtenue à partir des équations de Maxwell en utilisant les propriétés des opérateurs divergence et rotationnel :

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{X} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{X} - \Delta \vec{X}.$$

Nous obtenons alors :

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{B} = -\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} [\vec{\text{grad}} \text{div} \vec{B} - \Delta \vec{B}] = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{B}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{rot}} \vec{B} = -\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} [\vec{\text{grad}} \text{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}] = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{E}$$

Les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  vérifient donc la même équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \Delta \vec{B} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \Delta \vec{E} = \vec{0}$$

où  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$  apparaît comme la vitesse de la lumière dans le vide.

Lorsque le milieu considéré n'est pas le vide, l'équation de propagation s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \frac{1}{v^2} \Delta \vec{B} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{v^2} \Delta \vec{E} = \vec{0}$$

où  $v$  est la vitesse de la lumière dans le milieu considéré.

Maxwell a donc établi que la lumière se propage dans le vide à la vitesse de  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ , valeur qui avait été obtenue expérimentalement par ailleurs. C'est A. Einstein qui montra, dans le cadre de la relativité que cette valeur est une constante universelle.

### 3 Ondes électromagnétiques : fréquences et longueurs d'onde

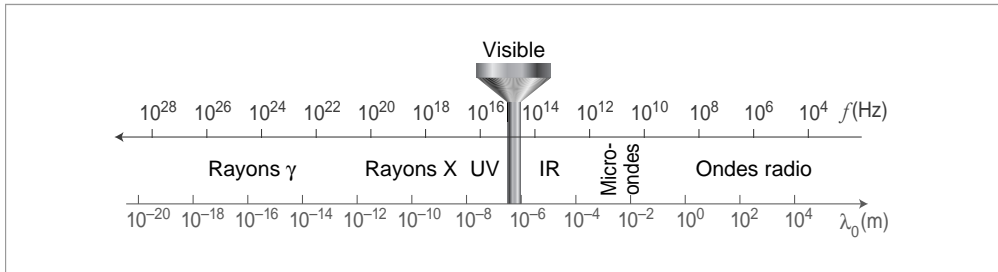
**Propriétés :** Dans un milieu quelconque, il est possible d'associer à une onde électromagnétique monochromatique, et donc à une onde lumineuse monochromatique, trois grandeurs caractéristiques :

- une longueur d'onde  $\lambda$ ,
- une fréquence  $f$ ,
- une vitesse de propagation  $v$ .

Les ondes électromagnétiques couvrent une gamme de fréquences qui va de quelques hertz (symbole Hz) à  $10^{20}$  Hz mais la lumière visible pour l'homme ne couvre qu'une plage de fréquences très limitée allant de  $4 \cdot 10^{14}$  Hz à  $8 \cdot 10^{14}$  Hz (Fig. 1.2).

Dans le vide, la fréquence  $f$  et la longueur d'onde  $\lambda$  d'une onde électromagnétique sont liées par la relation :

$$\lambda = \frac{c}{f}$$



**Fig. 1.2.** Fréquences et longueurs d'onde dans le vide des ondes électromagnétiques.

Couleurs	Longueurs d'onde (nm = $10^{-9}$ m)
Violet extrême	400
Violet moyen	420
Violet - bleu	440
Bleu moyen	470
Bleu - vert	500
Vert moyen	530
Vert - jaune	560
Jaune moyen	580
Jaune - orangé	590
Orangé moyen	600
Orangé - rouge	610
Rouge moyen	650
Rouge extrême	780

**Fig. 1.3.** Longueurs d'onde dans le vide et couleurs des ondes lumineuses.

La lumière visible est usuellement caractérisée par son contenu spectral, gamme de longueurs d'onde auxquelles sont associées des couleurs (Fig. 1.3) ; ces valeurs de longueurs d'onde correspondent à une propagation de la lumière dans le vide (et par extension, comme nous le verrons, dans l'air).

## 1.3. Vitesse de propagation, indice optique

### 1 Vitesse de propagation

Nous l'avons vu, dans le vide, la vitesse de propagation  $v$  des ondes électromagnétiques, donc de la lumière, vaut :  $v = c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$ . Dans un milieu transparent,  $v$  est toujours inférieure à la vitesse  $c$  dans le vide. Notons que la fréquence  $f$  de l'onde est un invariant de la propagation : ainsi, lorsque l'onde lumineuse passe d'un milieu à l'autre, sa fréquence reste la même mais sa vitesse de propagation dépendant du milieu de propagation, et par conséquent sa longueur d'onde  $\lambda$  varie. Un milieu de propagation est caractérisé par la vitesse de propagation  $v$  des ondes électromagnétiques. Mais il est plus usuel de caractériser un milieu par son indice optique, aussi appelé indice de réfraction.

## 2 Indice optique

L'indice optique, noté  $n$  est défini comme le rapport de la vitesse de propagation d'une onde dans le vide,  $c$ , à celle,  $v$ , de la même onde dans le milieu considéré :

$$n = \frac{c}{v} \geq 1$$



**Fig. 1.4. Phénomène de réfraction.** Tige de verre immergée dans un mélange eau/toluène. Le toluène, plus léger que l'eau, se trouve au-dessus.

Par définition, l'indice optique d'un milieu est toujours plus grand que 1. L'air est souvent assimilé au vide car son indice optique est voisin de 1 : dans les conditions normales de température et de pression (à 20 °C et 1,013 bar), l'indice de l'air vaut 1,000293. Considérons la photo de la figure 1.4. Une tige de verre est plongée dans un récipient qui contient de l'eau d'indice optique voisin de 1,33 et du toluène, dont l'indice optique est voisin de 1,5. L'eau, plus lourde que le toluène, se trouve au fond du bécher. Le verre a lui-même un indice optique de 1,5, c'est-à-dire presque égal à celui du toluène.

La vision nette que nous avons de la partie de la tige immergée dans l'eau est, schématiquement, due au fait que la lumière ne se propage pas à la même vitesse dans la tige de verre et dans l'eau. En revanche,

dans le toluène, la présence de la tige de verre ne modifie pas le comportement de l'onde qui voit un milieu homogène d'indice optique égal à 1,5. La tige n'est donc presque pas visible dans le toluène. On remarque également que la tige aux deux interfaces eau/toluène et toluène/air semble se tordre. Ce phénomène, également lié aux variations d'indice optique, s'explique par les lois de la réfraction de Snell-Descartes (voir chapitre 2).

### Recherche & Développement

#### Vitesse de la lumière

Très récemment, une physicienne danoise Lene Vestergaard Hau, du Rowland Institute for Science, a établi un nouveau record pour la vitesse de la lumière, en réussissant à la ralentir à 1,5 km/h, battant ainsi son précédent record de 60 km/h. À 1,5 km/h, la lumière se déplace 720 millions de fois moins vite qu'à l'ordinaire ! L'expérience consiste à faire passer de la lumière dans un condensat de Bose-Einstein, groupe d'atomes refroidis à une température de quelques milliardièmes de degré au-dessus du zéro absolu. Dans ce milieu très froid, les atomes cessent pratiquement de bouger, ce qui lui confère des pro-

priétés optiques très particulières, notamment un indice de réfraction 100 000 milliards de fois plus élevé que le verre. La physicienne commente « on peut presque envoyer un rayon de lumière, aller se chercher un café et revenir à temps pour le voir ressortir le rayon de l'autre côté de l'équipement. » Cette expérience a inspiré deux jeunes chercheurs, Ulf Leonhardt et Paul Piwnicki, de l'Institut royal de technologie, en Suède : créer un trou noir optique. Ils ont montré qu'il est possible de construire un analogue optique de ce phénomène gravitationnel. Déjà en 1818, Fresnel avait établi

qu'un milieu mobile pouvait courber un rayon lumineux. Mais pour qu'apparaissent des effets équivalents à la courbure de l'espace-temps près d'un trou noir, il faut que la vitesse du milieu soit du même ordre que la vitesse de la lumière. Un condensat de Bose-Einstein semble donc un bon candidat pour réaliser un tel milieu, et Leonhardt et Piwnicki proposent de réaliser une tornade de ce milieu ; refroidie à une température proche du zéro absolu, cette tornade pourrait littéralement aspirer et emprisonner la lumière. Ainsi, tous les photons entrant dans le tourbillon en demeureraient prisonniers, tant que le condensat continuerait à tourbillonner, et

tant qu'il resterait froid, réalisant ainsi un piège à lumière, ce qui correspond bien à l'une des propriétés d'un trou noir!

À quoi un tel trou noir optique pourrait-il servir ? Les possibilités sont immenses. On présume qu'une seule chose peut s'échapper d'un trou noir : la radiation de Hawking. Cette force mystérieuse n'a encore jamais été observée et un piège à lumière le permettrait peut-être. Il pourrait aussi servir de banc d'essai pour la théorie quantique de la gravité. À terme, ceci pourrait permettre de réunir la théorie quantique avec la relativité générale d'Einstein, l'un des rêves de la physique moderne depuis des décennies !

Recherche & Développement

### L'indice optique en mécanique quantique

En mécanique quantique, la solution de l'équation de Schrödinger pour un potentiel uniforme correspond à l'onde, dite de De Broglie, associée à une particule libre. Cette onde subit une réfraction en accord avec la loi classique de la réfraction de l'optique quand elle passe d'une région de potentiel  $U_1$  dans

une région de potentiel  $U_2$ . L'expression de l'indice optique est alors donnée par la relation :

$$n = \sqrt{(W - U_1)(W - U_2)}$$

où  $W$  représente l'énergie totale de la particule

## 3 Variation de l'indice optique.

### Coefficient de dispersion et coefficient thermique

A priori, les valeurs de la vitesse de propagation  $v$  et donc de l'indice optique d'un milieu peuvent dépendre de la fréquence de l'onde qui s'y propage, ou autrement dit de sa longueur d'onde  $\lambda$  ainsi que de grandeurs thermodynamiques telle que la température.

Les variations de l'indice optique sont en général très faibles et nous considérerons la plupart du temps l'indice optique comme une constante caractéristique du milieu. La dépendance de l'indice optique en fonction de la longueur d'onde est pourtant essentielle pour comprendre la dispersion de la lumière blanche observée dans un prisme ou dans une gouttelette d'eau : ce dernier exemple étant responsable de la formation des arcs-en-ciel.

La variation de l'indice optique avec la longueur d'onde est caractérisée par un coefficient appelé coefficient de dispersion et noté  $v$ . Ce coefficient est défini, pour les longueurs

d'onde du spectre visible, comme le rapport de l'indice de réfraction mesuré au milieu de ce spectre (couleur jaune,  $\lambda_j = 589 \text{ nm}$ ) à la différence des indices déterminés aux deux extrémités de ce spectre (couleurs bleu  $\lambda_B = 486 \text{ nm}$  et rouge  $\lambda_R = 655 \text{ nm}$ ) :

$$v = \frac{n(\lambda_j)}{n(\lambda_B) - n(\lambda_R)}$$

Le tableau ci-dessous donne les indices optiques de quelques matériaux pour les longueurs d'onde correspondant aux couleurs bleu, jaune et rouge ainsi que le coefficient de dispersion calculé.

Matériau (à 20°C)	$n(\lambda_B)$	$n(\lambda_j)$	$n(\lambda_R)$	$v$
Crown	1,523	1,517	1,514	168,56
Flint léger	1,585	1,575	1,570	105,00
Flint moyen	1,665	1,650	1,645	82,50
Flint lourd	1,919	1,890	1,879	47,25
Diamant	2,435	2,417	2,410	96,68
Eau	1,338	1,333	1,331	190,45

**Fig. 1.5. Variation de l'indice optique de quelques matériaux en fonction de la longueur d'onde.** Dans la dernière colonne, on donne le coefficient de dispersion correspondant. Le crown est un verre blanc peu dispersif, les flints (léger, moyen et lourd) sont des verres à base de plomb.

L'indice optique  $n$  peut également varier en fonction de la température  $T$  du milieu. Ces variations sont caractérisées par le coefficient thermique de l'indice de réfraction  $\frac{dn}{dT}$ . Pour les verres, le coefficient thermique de l'indice optique est compris entre  $3 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$  et  $16 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ .

## 1.4. De l'onde au rayon lumineux

### 1 Ondes plane, cylindrique ou sphérique

Une onde lumineuse est une onde de propagation, caractérisée par une fonction  $\xi$  dépendant du temps et de l'espace. Cette fonction  $\xi$  est déterminée par les équations de Maxwell ( $\xi$  peut être par exemple le champ  $\vec{E}$  ou  $\vec{B}$ ). Dans le cas où il n'y a pas de sources,  $\xi(M, t)$  est alors solution d'une équation de propagation.

Nous considérons tout d'abord la solution générale de l'équation de propagation à une dimension. Un point  $M$  est repéré par son abscisse  $x$  et l'opérateur laplacien  $\Delta$  se réduit

à une dérivée seconde par rapport à  $x$  :  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ . L'équation de propagation s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \xi = 0$$

La solution générale de cette équation de propagation s'écrit :

$$\xi(M, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

La fonction  $f(x - vt)$  correspond à une onde se propageant dans le sens des  $x$  croissants et la fonction  $g(x + vt)$  à une onde se propageant dans le sens des  $x$  décroissants. Considérons une onde se propageant dans le sens des  $x$  croissants : l'onde est dite harmonique si la fonction  $f$  est choisie parmi les fonctions harmoniques (les fonctions réelles sinus ou cosinus ou la fonction exponentielle complexe). Ainsi, une onde de pulsation  $\omega = 2\pi f$  s'écrit, par exemple :

$$\xi(M, t) = \xi(x, t) = \xi_0 \cos\left(\frac{\omega}{v}(x - vt)\right)$$

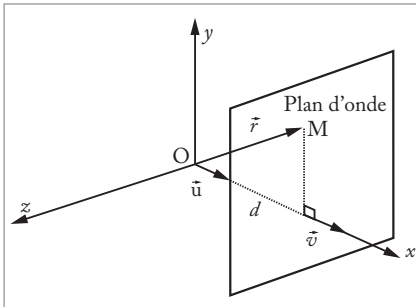
Notons que cette solution de l'équation à une dimension est également obtenue lorsque l'onde est générée par un plan source  $(O, y, z)$ . Les symétries du problème imposent alors une solution de la forme précédente.

Considérons maintenant une onde générée par un fil source en deux dimensions ou par un point source en trois dimensions. Dans les deux cas, les symétries du problème imposent que la fonction ne dépende que de la variable  $r$ , définie en deux dimensions par les coordonnées cylindriques et en trois dimensions par les coordonnées sphériques.

Sans rentrer dans les détails, nous donnons la forme de la solution dans ces deux cas :

$$\xi(M, t) = \xi(r, t) = \xi_0(r) \cos\left(\frac{\omega}{v}(r - vt)\right)$$

## 2 Surface d'onde et vecteur d'onde



**Fig. 1.6.** Plan d'onde d'une onde plane se propageant dans la direction  $Ox$ .

Considérons tout d'abord le cas d'une onde plane se propageant dans le sens des  $x$  croissants. Sa fonction d'onde  $\xi$  s'écrit :  $\xi(M, t) = f(x - vt)$ . La phase de la fonction d'onde,  $(x - vt)$ , à un instant donné  $t$ , a la même valeur pour tous les points contenus dans un plan d'abscisse  $x$ . Tous les points de ce plan sont dits en phase et le plan qui les contient définit une surface d'onde ou plan d'onde. L'onde considérée est en fait une onde plane se propageant suivant la direction  $x$ . Au cours de sa propagation, le plan d'onde, à  $x$  constant, reste perpendiculaire au vecteur

unitaire  $\vec{u}$  associé ( $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}$ ) à la vitesse  $\vec{v}$  de propagation de l'onde (Fig. 1.6).

Considérons maintenant un plan d'onde de direction  $\vec{u}$  quelconque. La distance de ce plan à l'origine est mesurée par  $d$  selon la direction  $\vec{u}$  et tout point  $M$  du plan d'onde situé à l'extrémité du vecteur  $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$  est tel que  $\vec{u} \cdot \vec{r} = d$ . L'onde de propagation dans la direction  $\vec{u}$  s'écrit donc :

$$\xi(M, t) = f(d - vt) = f(\vec{u} \cdot \vec{r} - vt)$$

En particulier, si la fonction  $\xi$  est harmonique, nous obtenons :

$$\xi(\mathbf{M}, t) = \xi_0 \cos(\vec{k}(\vec{u} \cdot \vec{r} - vt)) = \xi_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

Dans cette expression,  $\omega = kv$  est la pulsation de l'onde et  $\vec{k}$  est le vecteur d'onde défini par la relation :

$$\vec{k} = k\vec{u} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}$$

Le vecteur  $\vec{k}$  est donc, par construction, toujours perpendiculaire au plan d'onde.

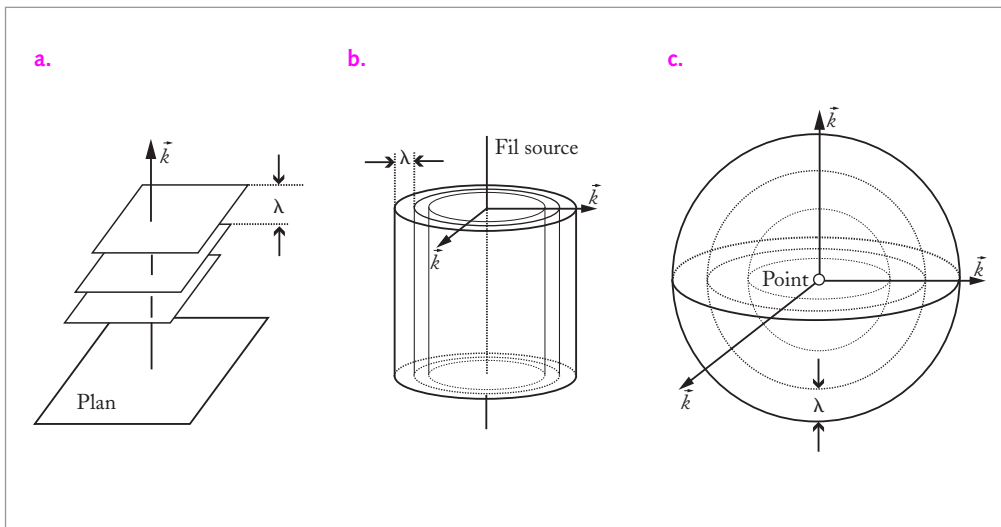
Usuellement, les plans d'onde d'une onde plane sont représentés distants de  $\lambda$ . En effet, la différence de phase entre un point M du premier plan P et un point M' du plan P' distant de P de  $\lambda$  s'écrit alors  $\vec{k} \cdot (\vec{r} + \lambda\vec{u}) - \omega t = (\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + 2\pi$ . Par suite, l'onde a la même valeur dans tous les plans séparés de  $\lambda$  (Fig. 1.7a)

Considérons maintenant le cas d'une onde cylindrique ou sphérique. Un raisonnement analogue peut être mené. Ainsi, pour une onde harmonique, cylindrique ou sphérique, nous obtenons :

$$\xi(\mathbf{M}, t) = \xi_0(r) \cos(k(\vec{u} \cdot \vec{r} - vt)) = \xi_0(r) \cos(k(r - vt)) = \xi_0(r) \cos(kr - \omega t)$$

Pour une onde cylindrique, tous les points de même phase ( $kr - \omega t$ ) appartiennent à des cylindres concentriques dont l'axe est le fil source. Tous les cylindres distants de  $\lambda$  sont équiphases (Fig. 1.7b).

De même, pour une onde sphérique, tous les points de même phase ( $kr - \omega t$ ) appartiennent à des sphères concentriques dont le centre est le point source. Toutes les sphères distantes de  $\lambda$  sont équiphases (Fig 1.7c).



**Fig. 1.7.** Surfaces d'onde : d'une onde plane (a.), cylindrique (b.) et sphérique (c.).  $\vec{k}$  désigne le vecteur d'onde local.



### 3 Rayon lumineux

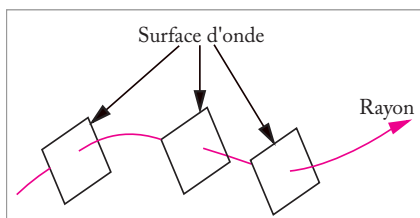


Fig. 1.8. Surfaces d'onde locales le long d'un rayon lumineux.

**Définition :** Les rayons lumineux sont localement perpendiculaires aux surfaces d'onde.

Le sens des rayons (indiqué par une flèche) indique le sens de propagation de la lumière (Fig 1.8.).

Notons que l'onde se propage de façon rectiligne dans un milieu transparent homogène isotrope.

#### Un peu d'histoire

#### L'optique au Moyen-Orient

Après les théories archaïques de la vision, les premiers siècles de notre ère ne verront guère de progression dans la théorie de la lumière. Il faudra attendre le Moyen-Âge pour que l'optique renaisse en Égypte. En effet, très tôt, les savants arabes se sont intéressés aux travaux grecs sur l'optique et, loin de se contenter de traduire ces ouvrages, ils les reprennent et les corrigent. C'est finalement le physicien Alhazen (965-1039), de son vrai nom Ibn al-Haytham, qui contribuera de manière décisive à l'avancée de la compréhension de la lumière dans son ouvrage *Opticae thesaurus Alhaseni Arabis* (traduction latine dans laquelle son nom fut modifié). Jusqu'alors, voir et éclairer se confondaient. Animé par une démarche scientifique rigoureuse, il s'est imposé à Alhazen qu'il fallait distinguer vision et éclairage lumineux. Il pose alors clairement les fondements de l'optique géométrique : les objets lumineux émettent des rayons qui se propagent en ligne droite et atteignent l'œil qui forme une image dont la position dépend de celle du cristallin. Il établit sous une forme générale la loi de la

réflexion, tente une description du phénomène de réfraction mais surtout, s'attache à vérifier expérimentalement les lois qu'il énonce ; il sera notamment le premier à utiliser une chambre noire. Il laisse un problème qui porte son nom et s'énonce ainsi : « En quel point d'un miroir concave circulaire doit tomber la lumière provenant d'un point A donné pour qu'elle soit réfléchi en un autre point B donné ? » ; la solution du problème d'Alhazen revient à la résolution d'une équation du quatrième degré.

Alhazen peut être considéré comme l'initiateur d'une nouvelle démarche scientifique à la fois mathématique et expérimentale. Parmi ses disciples, on peut citer le persan Kamal al-Din al-Farisi (~1260 - ~1320) qui établit une table de la réfraction air-verre et donne une explication des arcs-en-ciel primaire et secondaire très proche de celle que donnera Descartes trois siècles plus tard dans son *Discours de la méthode*. Après les travaux d'Alhazen, peu de grandes découvertes en optique seront faites et il faudra attendre le XVI<sup>e</sup> siècle pour qu'une nouvelle « renaissance » se produise en optique.

## 4 Principe de retour inverse de la lumière

Dans un milieu transparent homogène et isotrope, le trajet de la lumière est indépendant du sens de parcours. Ce principe est une conséquence du principe de Fermat que nous développerons plus loin (chapitre 2) ; ce principe prévoyant la minimisation du chemin suivi par un rayon lumineux, on comprend aisément que le chemin qui minimise le temps de trajet d'un point A à un point B est également celui qui minimise le temps de trajet du point B au point A.

### Un peu d'histoire

#### La première mesure de la vitesse de la lumière

L'idée que la lumière se propage à la vitesse de 300 000 km/s nous est aujourd'hui familière mais il n'en a pas toujours été ainsi. Il faudra en fait attendre 1676 pour que l'astronome danois Olaf Römer effectue la première mesure de la vitesse de la lumière, démontrant ainsi le caractère non instantané de sa propagation.

Dans l'Antiquité, la nature de la lumière n'était pas connue. Aristote pensait que la propagation de la lumière était instantanée tandis qu'Empédocle d'Agrigente évoquait déjà l'idée qu'elle devait prendre un certain temps pour parvenir du Soleil à la Terre. Au XVII<sup>e</sup> siècle, Galilée a l'intuition que la vitesse de la lumière pourrait être si rapide que notre intuition, fondée sur l'expérience du quotidien, nous trompe. Dans son ouvrage « *Dialogue sur les deux principaux systèmes du monde* », paru en 1632, il met en scène Simplicio, aristotélicien naïf et attaché aux traditions, à qui il prête les propos suivants : « Les expériences quotidiennes nous enseignent que la propagation de la lumière est instantanée. Le flash lumineux d'un tir d'artillerie atteint notre œil sans aucun délai mais le son produit, lui, arrive à notre oreille avec un retard. » Galilée souligne la fausseté du raisonnement : l'exemple de Simplicio montre simplement que la vitesse de la lu-

mière est plus grande que celle du son. Il imagine alors une expérience qui permettrait de mesurer cette vitesse. Il se place au sommet d'une colline, armé d'une lanterne ; son assistant fait de même sur une colline voisine. Galilée couvre sa lanterne ; son assistant doit couvrir la sienne dès qu'il ne voit plus la lanterne de Galilée. Le temps entre le moment où Galilée a caché sa lanterne et celui où il ne voit plus celle de son assistant correspond aux temps qu'a mis la lumière pour parcourir deux fois la distance qui sépare les deux lanternes. Galilée comprendra lui-même qu'il est en train de mesurer son temps de réaction combinée à celui de son assistant et il conclut judicieusement que la distance mise en jeu dans son expérience est trop faible.

Quarante ans plus tard, le danois Olaf Römer met fin aux débats en effectuant la première mesure de la vitesse de la lumière. Il réalise cette mesure après avoir étudié Io, satellite de Jupiter. En mesurant les intervalles de temps entre deux éclipses successives, il constate un résultat surprenant : Io semble avoir deux périodes de révolution ! Römer comprend alors que la première période est mesurée lorsque la Terre est proche de Jupiter tandis que la seconde correspond à une configuration des planètes où la Terre est

loin de Jupiter. Il en déduit que Io a une seule période de révolution autour de Jupiter, c'est-à-dire qu'elle émet des signaux lumineux (lors des éclipses) avec un intervalle de temps régulier, mais que ces signaux mettent des temps différents pour parvenir à la Terre. Les deux temps mesurés correspondent à des positions de la Terre diamétralement opposés sur son orbite par rapport au Soleil et leur différence, trouvée égale à 22 minutes, cor-

respond au temps que met la lumière pour parcourir le diamètre de cette orbite, soit environ 300 millions de kilomètres. Römer en déduit la première mesure de la lumière, qu'il trouve environ égale à 200 000 km/s (mesure très imprécise). Par sa mesure, il montre surtout que la lumière ne se propage pas de manière instantanée, ce qui était discuté à l'époque.

## résumé du cours

### Onde lumineuse

◆ Dans un milieu quelconque, une lumière monochromatique, comme toute onde électromagnétique monochromatique, est caractérisée par trois grandeurs :

- une longueur d'onde  $\lambda$ ,
- une fréquence  $f$ ,
- une vitesse de propagation  $v$ .

◆ Dans le vide, la vitesse de propagation d'une onde électromagnétique est  $c$ . La fréquence  $f$  et la longueur d'onde  $\lambda$  d'une onde électromagnétique sont liées par la relation :

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

◆ Un milieu de propagation est caractérisé par son indice optique, aussi appelé indice de réfraction, noté  $n$  et défini comme le rapport de la vitesse de propagation d'une onde dans le vide,  $c$ , à celle,  $v$ , de la même onde dans le milieu considéré :

$$n = \frac{c}{v} \geq 1$$

◆ Lors de la propagation d'une onde électromagnétique dans différents milieux, la fréquence de l'onde reste inchangée : seule la longueur d'onde et la vitesse de propagation varient. On a toujours la relation :

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

### Rayons lumineux

◆ Les rayons sont localement perpendiculaires aux surfaces d'onde. Le sens des rayons indique le sens de propagation de la lumière.

## Exercices

**1** Une onde se propage dans le vide à la vitesse de  $3 \cdot 10^8$  m/s. S'agit-il d'une onde lumineuse ?

**2** Une onde se propage dans le vide à la vitesse de  $3 \cdot 10^8$  m/s et dans l'eau à la vitesse de  $2,25 \cdot 10^8$  m/s. S'agit-il d'une onde lumineuse ? Quel est l'indice de l'eau ?

**3** On envoie un rayon lumineux de l'air vers un morceau de flint. On donne l'indice de réfraction du flint  $n = 1,585$  pour une radiation de longueur d'onde  $\lambda = 486$  nm. Que deviennent les quantités suivantes : fréquence, vitesse de l'onde et longueur d'onde lorsque la lumière passe de l'air au flint (on assimile l'air au vide) ?

# Réflexion et réfraction

Ce chapitre est tout à fait primordial. Il regroupe les lois essentielles de l'optique géométrique et il ne serait pas exagéré de dire qu'il est suffisant de connaître ces quelques lois pour retrouver toutes les autres. La lumière se propage en ligne droite dans un milieu homogène transparent. Qu'en est-il lorsque le milieu n'est plus homogène ? Tout l'objet de ce chapitre est de répondre à cette question. Les lois de Snell-Descartes sont probablement les plus « utiles » pour la plupart des problèmes classiques d'optique géométrique. Elles permettent de déterminer la trajectoire des rayons lumineux lors de la traversée d'une succession de milieux transparents et homogènes : ces lois décrivent le comportement d'un rayon lumineux au passage entre deux milieux. Elles sont généralisables au cas, plus compliqué, où les caractéristiques optiques du milieu changent continûment. Dans ce cas, le théorème de Malus (« les rayons lumineux sont normaux aux surfaces d'onde ») débouche sur l'équation dite des rayons et qui est l'équation la plus générale de l'optique géométrique. Cette équation permet par exemple d'expliquer le phénomène des mirages.

## 2.1. Dioptries et miroirs

## 2.2. Lois de Snell-Descartes en milieu homogène. Lois de Kepler

- 1 Énoncé des lois de Snell-Descartes pour un dioptre
- 2 Émergence rasante et réflexion totale
- 3 Application de la réflexion totale aux fibres optiques
- 4 Incidence rasante
- 5 Lois de Kepler

## 2.3. Principe de Fermat

- 1 Qu'est-ce que le principe de Fermat ?
- 2 Notion de chemin optique
- 3 Énoncé du principe de Fermat

## 2.4. Propagation de rayons en milieu non homogène

- 1 Théorème de Malus
- 2 Équation des rayons

## 2.5. Applications : la réfraction atmosphérique et les mirages

- 1 La réfraction atmosphérique
- 2 Le mirage inférieur
- 3 La ligne évanescence

- 4 Le mirage supérieur
- 5 Compression verticale des mirages
- 6 L'inversion de température et le mirage double
- 7 Fata morgana

## 2.6. Surface des indices. Construction de Descartes

## 2.7. Principe d'Huyghens et interprétation des lois de Descartes

- 1 Notion de sources secondaires
- 2 Le principe d'Huyghens
- 3 Interprétation de la réfraction et de la réflexion avec le principe d'Huyghens

● Réfraction ● Réflexion totale ● Indice de réfraction ● Mirage

## Mots-clés

## 2.1. Dioptries et miroirs

Dans le cadre de ce chapitre, nous considérons deux types de surfaces : les dioptries et les

miroirs.

**Définition :** Un dioptré est une surface qui sépare deux milieux transparents et homogènes d'indices optiques différents, par exemple l'interface eau/air définie par la surface libre de l'eau d'un lac. On appelle miroir une surface réfléchissante telle que pratiquement toute la lumière incidente est renvoyée par la surface.

Dans le cas du miroir, si la surface réfléchissante est due à un dépôt métallique, la lumière ne peut pas traverser la couche métallisée et tous les rayons lumineux sont réfléchis. En revanche, dans le cas du dioptré, il existe en général, en plus du rayon **réfléchi**, un rayon qui passe dans le milieu suivant, appelé rayon **réfracté**. Ainsi, un objet lumineux dans l'air se reflète à la surface de l'eau d'un lac mais il est également vu par les poissons du lac. Une partie de la lumière qu'il émet est donc réfléchi par le dioptré tandis que l'autre partie est transmise dans l'eau.

L'objet des lois de Snell-Descartes est de décrire comment les rayons lumineux sont réfléchis et réfractés. Ces lois ne permettent pas en revanche de prédire quel pourcentage de l'intensité lumineuse sera réfléchi ou réfracté. En effet, la notion d'intensité lumineuse est en dehors du cadre de l'optique géométrique.

Enfin, les surfaces que nous étudions dans le cadre de l'optique géométrique présentent des aspérités dont la taille est très inférieure à la longueur d'onde considérée. Cette caractéristique est appelée le poli optique.

### Un peu d'histoire

#### Renaissance de l'optique au XVI<sup>e</sup> siècle

Le XVI<sup>e</sup> siècle voit la renaissance de l'optique, endormie depuis les travaux de Ptolémée et d'Alhazen. Les voies empruntées sont très variées. Léonard de Vinci adopte une démarche « purement » scientifique ; il reprend le dispositif expérimental de la chambre obscure et s'attache à établir des analogies entre la propagation du son et celle de la lumière. Au même moment, l'utilisation des lentilles se développe dans le but utilitaire de corriger la vue et d'étudier le cristallin, comme en témoigne le livre de Della Porta, le *Magia Naturalis*. Mais le XVI<sup>e</sup> siècle est surtout le siècle de l'astronomie. C'est par le biais de cette discipline en plein essor que l'optique

va progresser, notamment parce que l'observation des astres passe par la mise au point d'instruments optiques performants. La première lunette est construite par les hollandais en 1590 ; en Italie, Galilée, informé de la mise au point de ce nouvel instrument, en construit un plus performant encore et découvre quatre satellites de Jupiter. L'astronome allemand Kepler publie en 1611 l'ouvrage d'optique le plus important avant celui de Newton, le *Dioptrique*, dans lequel il expose la loi de la réflexion et une loi approchée de la réfraction, explique le mécanisme de vision et expose le fonctionnement des lentilles.

## 2.2. Lois de Snell-Descartes en milieu homogène.

# Lois de Kepler

## 1 Énoncé des lois de Snell-Descartes pour un dioptre

Nous considérons un rayon incident IO rencontrant en O un dioptre séparant deux milieux (1) et (2) d'indices respectifs  $n_1$  et  $n_2$ . Par convention, tous les angles sont mesurés à partir de la normale au dioptre en O et en conséquence, ils sont tous compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ , puisqu'ils sont définis dans un quart de plan.

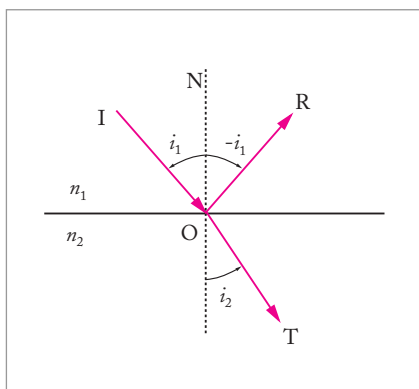
Les directions des rayons réfléchi et réfracté obéissent aux lois de Snell-Descartes, qui sont au nombre de trois (Fig. 2.1) :

- Les rayons incident IO, réfracté OT et réfléchi OR sont contenus dans un même plan normal au dioptre. Ce plan contient également la normale ON à la surface de séparation.
- L'angle de réflexion  $i'$  est lié à l'angle d'incidence  $i_1$  par la relation :

$$i' = -i_1$$

- L'angle de réfraction  $i_2$  et l'angle d'incidence  $i_1$  sont liés par la relation :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$



**Fig. 2.1.** Réflexion (rayon OR) et réfraction (rayon OT) d'un rayon lumineux IO incident sur un dioptre.

La dernière loi montre que, lorsqu'un rayon lumineux passe d'un milieu (1) à un milieu (2), le milieu (1) étant moins réfringent ( $n_1 < n_2$ ), le rayon réfracté se rapproche de la normale. A contrario, lorsque le milieu (1) est plus réfringent que le milieu (2), le rayon réfracté s'éloigne de la normale.

En général, les indices de réfraction des milieux dépendent de la longueur d'onde : c'est le phénomène de dispersion. Cette dépendance de l'indice optique par rapport à la longueur d'onde est à l'origine du spectre lumineux observé dans l'arc-en-ciel et le prisme (chapitre 3). Ce même phénomène est responsable de certaines aberrations chromatiques (chapitre 12).

Considérons, à titre d'exemple, un rayon se propageant dans l'air, assimilé au vide, et rencontrant sous l'incidence  $i_1$  la surface libre de l'eau. Avec  $n_{\text{air}} = 1$  et  $n_{\text{eau}} = \frac{4}{3}$ , nous obtenons les valeurs de l'angle que forme le rayon réfracté avec la normale au dioptre air/eau en fonction de l'angle d'incidence (voir tableau).

$i_1$ (°)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
$i_2$ (°)	0	3,75	7,48	11,19	14,86	18,48	22,02	22,48	28,82	32,03



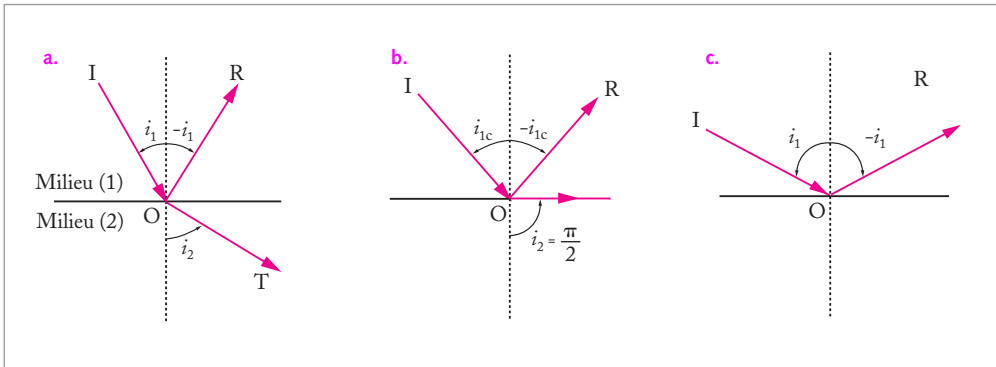
## 2 Émergence rasante et réflexion totale

Considérons un rayon lumineux se propageant d'un milieu (1) vers un milieu (2), le milieu (1) étant plus réfringent que le milieu (2). La loi de la réfraction  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$  montre que l'angle  $i_2$  est plus grand que l'angle  $i_1$ . Ainsi, partant de  $i_1 = i_2 = 0$  et faisant croître  $i_1$ , l'angle  $i_2$  croît plus vite que  $i_1$  et atteint la valeur  $\frac{\pi}{2}$  pour une valeur de  $i_1$ , que nous noterons  $i_{1C}$ , comprise entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ . Que se passe-t-il alors ? L'expérience montre qu'au-delà de l'angle d'incidence  $i_{1C}$  qui réalise  $i_2 = \frac{\pi}{2}$ , il y a disparition du rayon réfracté : la lumière incidente ne pénètre plus dans le milieu (2). Ce phénomène s'appelle la **réflexion totale** puisque la lumière est alors réfléchie totalement comme à la surface d'un miroir. L'angle  $i_{1C}$  est appelé **angle critique** de réflexion totale. Le cas particulier pour lequel  $i_1 = i_{1C}$  et  $i_2 = \frac{\pi}{2}$  correspond à l'**émergence rasante**.

Mathématiquement, il est aisé de retrouver la valeur de l'angle d'incidence critique en cherchant le domaine de validité de la loi de la réfraction. En effet, la loi de la réfraction doit vérifier  $1 \geq \sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1$ . On en déduit  $\frac{n_2}{n_1} \geq \sin i_1$ , soit la valeur critique de  $i_1$  :

$$i_{1C} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

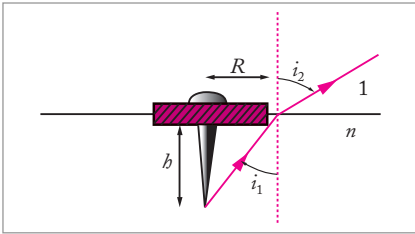
Suivant la valeur de l'angle d'incidence  $i_1$ , trois cas sont possibles, résumés par la figure 2.2.



**Fig. 2.2.** Réflexion et réfraction d'un rayon lumineux à la surface d'un dioptre séparant le milieu (1) d'incidence, d'indice  $n_1$ , du milieu (2), moins réfringent que le milieu (1).  $i_1$  désigne l'angle d'incidence et  $i_{1C} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$  l'angle critique d'incidence. **a.**  $i_1 < i_{1C}$  : il y a réflexion et réfraction ; **b.**  $i_1 = i_{1C}$  : l'émergence rasante est observée ; **c.**  $i_1 > i_{1C}$  : il y a réflexion totale.

Considérons à titre d'exemple un clou planté au centre d'un flotteur de rayon  $R$ , la tête du clou étant à la distance  $b$  du centre du flotteur. Le disque flotte à la surface de l'eau, dont l'indice  $n$  est égal à 1,33 (le clou est immergé). Nous voulons établir une condition pour que le clou soit visible pour un observateur dans l'air. Cela sera le cas si au moins un rayon émis par l'extrémité du clou vers la surface de l'eau est réfracté dans l'air (Fig. 2.3). Le cas du rayon passant par le bord du disque permet de trancher : si ce rayon subit une réflexion totale, alors tous les rayons issus du clou seront également totalement réfléchis car ils cor-

respondent à des angles d'incidence plus grands. Le clou ne sera alors pas visible. Si, en revanche, ce rayon est réfracté, alors une partie des rayons émis par le clou le seront également (jusqu'à ce que l'angle d'incidence atteigne l'angle d'incidence critique) et le clou sera visible. L'angle d'incidence de ce rayon passant par le bord du disque est donné par :



$$\sin i_1 = \frac{R}{\sqrt{b^2 + R^2}}.$$

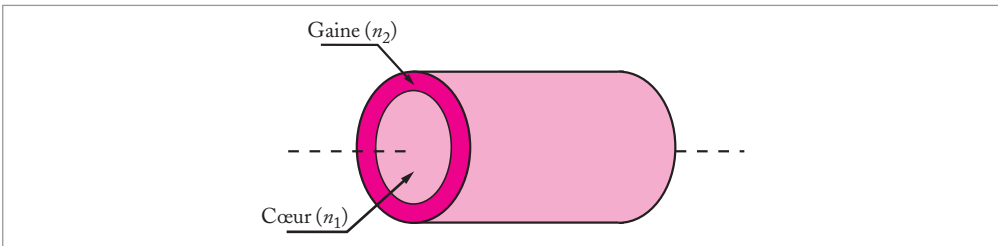
La condition pour que ce rayon soit transmis dans l'air s'écrit, d'après la loi de la réfraction et en prenant 1 pour l'indice de l'air :  $n \sin i_1 = \sin i_2 < 1$ . Nous obtenons donc la condition suivante :

$$b > \sqrt{n^2 - 1} R$$

**Fig. 2.3. Condition de vision** par un observateur dans l'air d'un clou planté au centre d'un flotteur de rayon  $R$ , la tête du clou étant à la distance  $h$  du centre du flotteur. Le clou est immergé dans l'eau.

### 3 Application de la réflexion totale aux fibres optiques

Une application de la réflexion totale est le piégeage d'un faisceau lumineux dans les fibres optiques. La fibre optique la plus simple consiste en deux cylindres concentriques, constitués de matériaux diélectriques d'indices de réfraction différents (Fig. 2.4). Le cœur, d'indice  $n_1$ , est placé au centre d'une gaine optique d'indice  $n_2$ , avec  $n_2 < n_1$ , appelée « manteau » (*cladding*) pour la distinguer de la gaine de protection mécanique extérieure. Le faisceau lumineux est envoyé dans la fibre en incidence normale par rapport à l'entrée de la fibre.



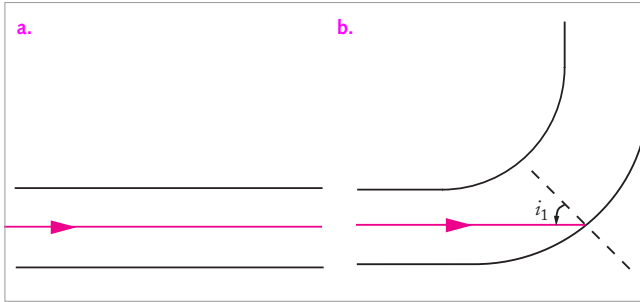
**Fig. 2.4. Fibre optique.**

**Recherche & Développement**

#### Les fibres à gradient d'indice

Les fibres à « saut d'indice » possèdent une variante intéressante : les fibres à « gradient d'indice ». Les trajets optiques des différents rayons à l'intérieur du cœur sont rendus pratiquement identiques, en faisant varier l'indice de réfraction en fonction de la distance radiale, suivant une loi pratiquement

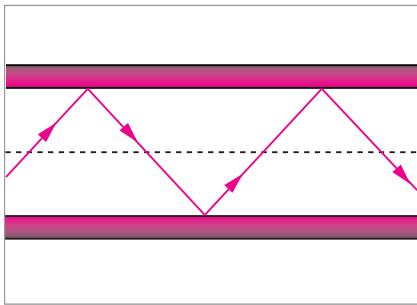
parabolique. La gaine optique peut disparaître, et les rayons lumineux correspondant aux différents modes de propagation à faible perte sont continûment déviés par la variation radiale de l'indice ; ils ne subissent pas de réflexion totale à la limite du cœur de la fibre.



**Fig. 2.5.** a. Lorsque la fibre est droite, le rayon lumineux est piégé dans la fibre ; b. lorsque la fibre se courbe, l'angle d'incidence peut diminuer : le rayon n'est plus piégé.

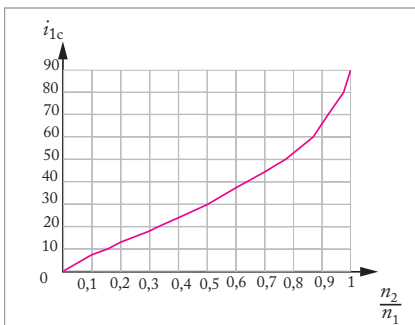
Dans le cas idéal, la fibre est droite et le tir du faisceau est parfait (Fig. 2.5). Les rayons lumineux se propagent de façon rectiligne, en incidence rasante par rapport au dioptre qui sépare le cœur de la fibre et sa gaine. Dans la pratique cependant, la fibre est susceptible de se courber et le tir d'être imparfait, de sorte que les rayons arrivent avec un an-

gle d'incidence (faible) sur le dioptre cœur/gaine. La fibre à « saut d'indice » est conçue pour que ces rayons subissent une réflexion totale à l'interface cœur/gaine optique afin que les pertes lumineuses soient minimisées (Fig. 2.6).



**Fig. 2.6.** Réflexion totale dans la fibre : le rayon lumineux est piégé.

La valeur critique de l'angle d'incidence étant donnée par  $i_{1c} = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$ , nous voyons que la réflexion totale est obtenue pour un angle d'incidence d'autant plus faible que le rapport  $\frac{n_2}{n_1}$  est petit (Fig. 2.7). Les pertes lumineuses sont ainsi limitées en choisissant un rapport faible  $\frac{n_2}{n_1}$ .



**Fig. 2.7.** Variation de la valeur critique de l'angle d'incidence en fonction du rapport  $n_2/n_1$ , où  $n_1$  est l'indice du milieu d'incidence.

En fait, la propagation des ondes à l'intérieur de la fibre n'est pas uniquement limitée au respect de la condition de réflexion totale à l'interface cœur/gaine optique. A priori, une infinité de rayons lumineux peuvent se propager dans le cœur de la fibre en respectant cette condition. Mais le phénomène d'interférence peut provoquer leur extinction si les ondes lumineuses sont en opposition de phase. Ainsi, les angles d'ouverture susceptibles de favoriser la propagation, avec de faibles pertes, à l'intérieur du cœur ne prennent pas toutes les valeurs comprises entre 0 et l'angle critique de réflexion totale, mais un certain nombre de valeurs discrètes, qui correspondent à des modes, appelés « mode de propagation guidée », avec des pertes minimales.

### Des fontaines lumineuses aux fibres optiques

Dès l'Antiquité, les Grecs connaissaient le phénomène de propagation de la lumière dans des cylindres transparents grâce à la réflexion totale. Pendant longtemps, ce principe n'eut d'autres applications que les fontaines lumineuses, veines dans lesquelles la lumière se propage avec des angles d'incidence sur les parois tels que la condition de réflexion totale soit assurée. L'énergie lumineuse est ainsi transportée tout le long de la veine. La sortie de la veine est courbée de sorte que toute ou partie de cette énergie est émise par réflexion, les angles d'incidence devenant trop grands. En jouant sur les différentes possibilités, on obtient les effets spectaculaires que l'on connaît aux fontaines

blanches. Lors de l'Exposition coloniale de 1931, une fontaine lumineuse de 45 mètres de haut, « le Grand Signal », fut installée sur le lac Daumesnil. En 1935, la piscine du paquebot Normandie, fut agrémentée d'une fontaine lumineuse en forme de corne d'abondance.

Ce n'est réellement que pendant la seconde moitié du XX<sup>e</sup> siècle que le développement industriel des fibres optiques est intervenu. Ainsi, en 1980, l'une des premières applications fût la liaison des deux centraux téléphoniques parisiens Tuileries et Philippe-Auguste, à l'aide d'un câble comprenant soixante-dix fibres optiques.

## 4 Incidence rasante

Considérons le cas « symétrique » du cas précédent, c'est-à-dire le cas d'un rayon lumineux se propageant d'un milieu (1) vers un milieu (2), le milieu (1) étant cette fois moins réfringent que le milieu (2) ( $n_1 < n_2$ ). Que se passe-t-il ?

Un argument simple permet de répondre immédiatement. Le principe de retour inverse de la lumière donne directement le résultat suivant : l'angle de réfraction est plus petit que l'angle d'incidence. La réfraction existe quelle que soit l'inclinaison du rayon incident et l'angle de réfraction atteint la valeur limite  $i_{21} = \arcsin \frac{n_1}{n_2}$  en incidence rasante, c'est-à-dire lorsque l'angle d'incidence atteint  $\frac{\pi}{2}$  (Fig. 2.8).

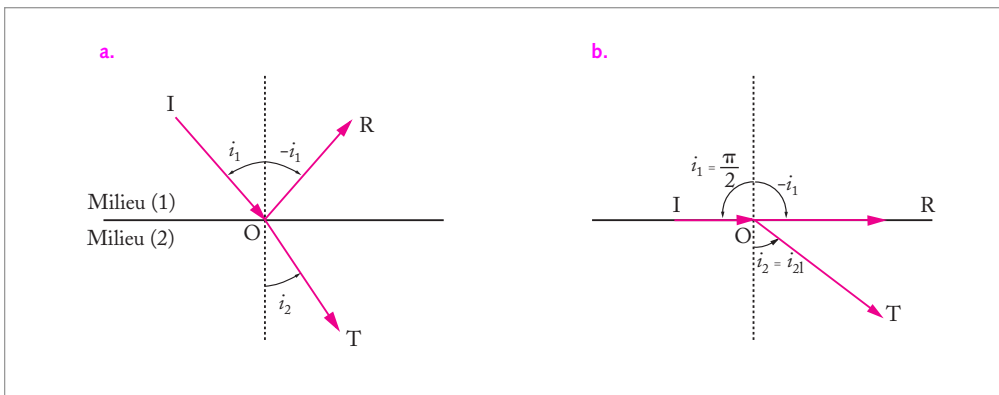


Fig. 2.8. Réflexion et réfraction d'un rayon lumineux à la surface d'un dioptre séparant le milieu (1) d'indice  $n_1$ , du milieu (2), plus réfringent que le milieu (1).  $i_1$  désigne l'angle d'incidence et  $i_{21} = \arcsin \left( \frac{n_1}{n_2} \right)$  l'angle limite de réfraction. a.  $i_1 < \frac{\pi}{2}$ ,  $i_2 < i_{21}$ , b.  $i_1 = \frac{\pi}{2}$ , incidence rasante, angle limite  $i_2 = i_{21}$ .

Nous pouvons retrouver ce résultat à partir de la loi de la réfraction. La relation de Snell-Descartes  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ , avec  $n_1 < n_2$  donne  $i_2 < i_1$ , le rayon réfracté existe donc toujours.

Que se passe-t-il lorsque  $i_1$  atteint  $\frac{\pi}{2}$ ? La réponse est qu'il n'y a rien de spécial pour cette valeur limite de l'angle d'incidence. L'angle de réfraction atteint sa valeur maximale, strictement inférieure à  $\frac{\pi}{2}$  et cette valeur est donnée par la loi de la réfraction :  $n_1 \sin \frac{\pi}{2} = n_2 \sin i_{21}$ , soit :

$$i_{21} = \arcsin \frac{n_1}{n_2}$$

## 5 Lois de Kepler

Les lois de Kepler correspondent aux lois de Snell-Descartes écrites au premier ordre, lorsque les angles  $i_1$ ,  $i'_1$  et  $i_2$  sont petits. Ces lois prennent la forme :

$$\begin{aligned} i_1 &= -i'_1 \\ n_1 i_1 &= n_2 i_2 \end{aligned}$$

Rappelons que si le degré est en pratique souvent utilisé pour mesurer les angles, c'est le radian qui correspond aux conventions du Système International (S.I.). Ainsi, lorsque nous passons des lois de Snell-Descartes aux lois de Kepler, il faut prendre garde à exprimer les angles en radian. De même, un angle  $\alpha$  est dit petit, s'il est petit devant la valeur de l'angle ouvert ( $\pi$  ou  $180^\circ$ ) par exemple. S'il est exprimé en radian,  $\alpha$  sera dit petit s'il est négligeable comparé à  $\pi$ , c'est-à-dire typiquement à 1. En revanche, s'il est exprimé en degré, il devra être comparé à  $180^\circ$ , c'est-à-dire typiquement à 100. Ainsi, un angle de  $10^\circ$  est petit car négligeable devant 100, ou de façon équivalente  $0,17$  rad ( $10^\circ \approx 0,17$  rad) est petit car négligeable devant 1.

### Un peu d'histoire

#### R. Descartes : la méthode plus que le résultat

René Descartes (1596-1650) est surtout célèbre pour ses talents mathématiques et pour la vision unificatrice des sciences qu'il expose dans son « *Discours de la méthode* ». Il ne laisse pas de résultats forts en physique, si ce n'est la loi la plus célèbre de l'optique géométrique, la loi de la réfraction qu'il énonce dans son « *Dioptrique* » publié en 1636 (la démonstration qu'il y développe sera d'ailleurs très critiquée par le mathématicien Fermat). Mais Descartes ne contribuera pas à la grande réflexion sur la nature de la lumière qui secoue son siècle. La vision qu'il en a reste confuse. Empruntant des images à la

cinématique du point, il expliquera avec succès les phénomènes de réflexion et de réfraction, notamment la formation de l'arc-en-ciel. Mais les termes qu'il utilise pour décrire la lumière à proprement parler restent flous ; il parle d'« action », de « pression tremblante », de « tendance ». Il a l'intuition (fausse) que la lumière parvient instantanément de l'objet lumineux à l'œil et tient à cet égard des propos malheureux : « si l'on me peut convaincre de la fausseté là-dessus, je suis tout prêt d'avancer que je ne sais rien du tout en philosophie ».

## 2.3. Principe de Fermat

### 1 Qu'est-ce que le principe de Fermat ?

Historiquement, Pierre de Fermat (1601-1665), mathématicien français, énonça son principe après que Descartes et Snell eurent trouvé la loi de la réfraction. La loi de la réflexion, elle, était connue depuis l'Antiquité. La grande force du principe de Fermat est de donner une version unifiée de l'optique géométrique à partir d'une proposition très simple qui énonce, en substance, que la lumière emprunte le chemin le plus rapide, proposition à partir de laquelle il est possible de démontrer non seulement les lois de la réflexion et de la réfraction telles qu'on les a vues précédemment mais aussi l'équation des rayons en milieu inhomogène comme on le verra plus tard.

### 2 Notion de chemin optique

Le principe de Fermat repose sur la notion de minimisation du temps de parcours de l'onde lumineuse. Considérons une onde se propageant d'un point A à un point B ; minimiser le temps de parcours entre A et B revient à minimiser l'intégrale  $\int_A^B \frac{dM}{v(M)}$ , où M est le point courant sur une courbe quelconque reliant A et B et  $v(M)$  la vitesse au point M. Introduisons la vitesse constante  $c$  de la lumière dans le vide ; minimiser  $t$  est équivalent à minimiser  $ct$ , soit  $\int_A^B \frac{c}{v(M)} dM = \int_A^B n(M) dM$ . Cette dernière quantité est appelée le chemin optique et est notée  $L_{AB}$  :

$$L_{AB} = \int_A^B n(M) dM$$
$$L_{AB} = \int_A^B n(M) \vec{u} \cdot d\vec{M}$$

où  $\vec{u}$  est le vecteur tangent, en M, à la courbe reliant A et B.

### 3 Énoncé du principe de Fermat

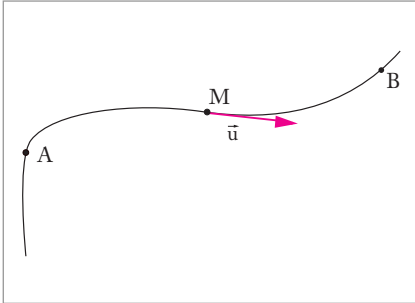
**Principe :** Le trajet effectivement suivi par la lumière pour aller d'un point A à un point B correspond à une valeur stationnaire du chemin optique par rapport aux trajets fictifs voisins allant de A à B.

Cet énoncé permet de retrouver immédiatement la propagation rectiligne des rayons dans un milieu homogène d'indice  $n$ . En effet, il faut dans ce cas minimiser la quantité

$\int_A^B n(\vec{M}) \vec{u} \cdot d\vec{M}$  et nous savons que le plus court chemin entre deux points est la ligne droite.

Dans un milieu homogène, le chemin optique s'exprime simplement :

$$L_{AB} = n AB.$$

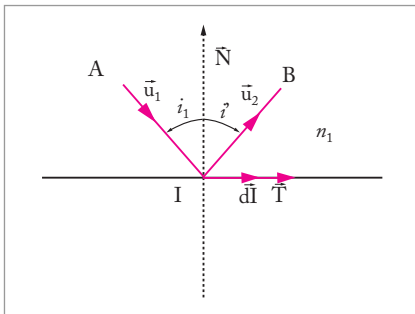


**Fig. 2.9.** Calcul du chemin optique entre les points A et B le long d'un rayon lumineux

$$L_{AB} = \int_A^B n(\vec{M}) \vec{u} \cdot d\vec{M}$$

Montrons que cet énoncé est suffisant pour retrouver les lois de la réflexion et de la réfraction que nous avons énoncées plus haut. Considérons un rayon lumineux se propageant dans un milieu homogène d'indice  $n$  d'un point A à un point B, après réflexion sur un miroir (ou sur un dioptre).

Notons I le point d'impact du rayon sur le miroir. Nous savons que le chemin optique de A à I est un segment de droite (propagation rectiligne,  $L_{AI} = n AI$ ), de même pour le chemin optique de I à B ( $L_{IB} = n IB$ ).



**Fig. 2.10.** Calcul de l'angle  $i'$  de réflexion grâce au principe de Fermat : le point I est tel que le chemin  $L_{AB}$  est minimum.

Le problème est donc de trouver la position de I qui minimise  $L_{AB}$ . Nous devons résoudre le problème suivant :

$$dL_{AB} = dL_{AI} + dL_{IB} = 0$$

$$dL_{AB} = n_1 (dAI + dIB) = n_1 (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \cdot d\vec{I} = 0$$

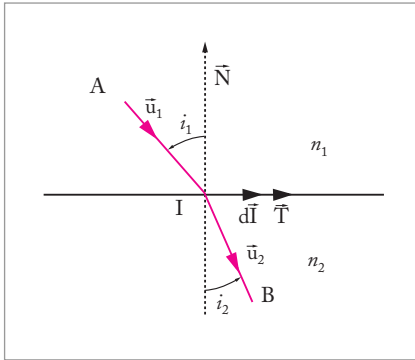
où  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  sont les vecteurs unitaires portés par AI et IB. Le vecteur déplacement  $d\vec{I}$  de I étant porté par la direction  $\vec{T}$ , parallèle à l'interface, la condition trouvée impose que le chemin optique entre A et B est minimal si la projection de  $(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)$  sur l'interface est nulle, ou, de façon

équivalente, si  $(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)$  est porté par la normale  $\vec{N}$  à l'interface. Cette dernière condition s'écrit  $\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = K \vec{N}$  ( $K$  est une constante), qui donne, en projection sur  $\vec{T}$  :

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{T} = \vec{u}_2 \cdot \vec{T} \Leftrightarrow \sin i_1 = -\sin i' \Leftrightarrow i_1 = -i'$$

(il y a équivalence car tous les angles sont inférieurs à  $\frac{\pi}{2}$ ) ce qui termine la démonstration de la loi de la réflexion à partir du principe de Fermat.

Établissons le même résultat pour la loi de la réfraction. Formellement, le problème est le même, et minimiser le chemin optique entre A et B, A étant dans le milieu (1) et B dans le milieu (2), revient à chercher la position du point I sur l'interface telle que (Fig. 2.11) :



**Fig. 2.11.** Calcul de l'angle  $i_2$  de réfraction grâce au principe de Fermat : le point I est tel que le chemin  $L_{AB}$  est minimum.

$$dL_{AB} = dL_{AI} + dL_{IB} = 0$$

$$dL_{AB} = n_1 dAI + n_2 dIB = (n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2) \cdot d\vec{I} = 0.$$

La relation trouvée implique que  $(n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2)$  est porté par la normale  $\vec{N}$  à l'interface, ce qui implique :

$$n_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{T} = n_2 \vec{u}_2 \cdot \vec{T} \Leftrightarrow n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2,$$

ce qui termine la démonstration de la loi de la réfraction à partir du principe de Fermat.

Nous allons voir que le principe de Fermat permet également d'établir l'équation des rayons en milieu inhomogène.

## Un peu d'histoire

### La loi de la réfraction : de Ptolémée à Fermat

Depuis longtemps, les scientifiques avaient constaté que la lumière se divise lorsqu'elle arrive à la surface de séparation entre deux milieux, une partie étant réfléchi, l'autre subissant une déviation au passage dans le second milieu. Dès l'Antiquité, l'égalité des angles incident et réfléchi est connue. Mais il faudra attendre la fin du XVI<sup>e</sup> siècle pour que la loi de la réfraction sous sa forme actuelle ( $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ ) soit énoncée.

On trouve une ébauche de description des rayons réfractés dans les essais de Ptolémée. Les savants arabes donneront des tables des angles réfractés en fonction des angles incidents pour l'interface eau-verre. Mais c'est seulement en 1611 qu'on trouve la première loi de la réflexion dans le *Dioptrique* de Kepler, énoncée sous la forme simplifiée  $n_1 i_1 = n_2 i_2$  (valable pour les faibles angles). C'est peut-être injustement que la loi de la réfraction porte le nom de Snell-Descartes car c'est sans doute au mathématicien anglais Thomas Harriot que nous devons le premier énoncé de cette loi telle que nous la connaissons aujourd'hui. En fait, Snell l'a probablement trouvée expérimentalement en 1621 puisqu'il n'en propose aucune démonstration tandis que Descartes en propose une,

mais discutable. À l'époque, le mathématicien français Fermat s'élève d'ailleurs contre la pseudo-démonstration donnée par le philosophe.

Fermat s'attaque alors à l'optique et il énonce en 1650 le principe de moindre temps : parmi toutes les courbes joignant deux points de l'espace, c'est celle qui correspond au temps de parcours minimal qui est effectivement suivie par la lumière. Mais Fermat n'est pas physicien et ce n'est qu'une dizaine d'années plus tard que la loi de la réflexion est retrouvée grâce à son principe. Fermat veut aller plus loin et déclare à propos de la loi de la réfraction : « Il me semble que la chose est aisée et qu'un peu de géométrie pourra nous tirer d'affaire ». Il a raison ! En 1661, il effectue la démonstration de la loi de la réfraction à partir de son principe, offrant ainsi le premier exemple de calcul variationnel appliqué à la physique. Il déclare à ce propos « le fruit de mon travail a été le plus extraordinaire, le plus imprévu et le plus heureux qui fût jamais car j'ai trouvé que mon principe donnait justement et précisément la même proportion des réfractions que Monsieur Descartes a établie ».



## 2.4. Propagation de rayons en milieu non homogène

Les lois de Snell-Descartes régissent la propagation des rayons lumineux à l'interface entre deux milieux transparents homogènes isotropes. Que se passe-t-il pour un rayon se propageant dans un milieu dont l'indice varie continûment dans l'espace ? Nous allons montrer que le principe de Fermat permet d'établir l'équation, dite équation des rayons, qui décrit la trajectoire du rayon dans un tel milieu. Notons que la plupart des milieux réels sont d'indice continûment variable, ce qui explique l'importance de l'équation des rayons.

### 1 Théorème de Malus

Montrons tout d'abord que le principe de Fermat permet d'énoncer un théorème connu sous le nom de théorème de Malus qui s'énonce ainsi : « les rayons lumineux sont normaux aux surfaces d'onde ».

Considérons le chemin optique d'un rayon se propageant d'un point fixe  $A$  vers un point  $M$  ;  $A$  étant fixe, le chemin optique est une fonction de  $M$  que nous notons  $L(M)$  :

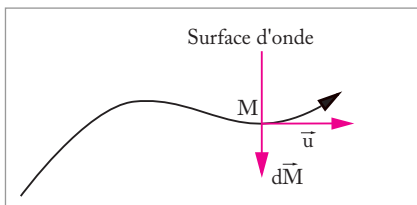
$$L(M) = \int_A^M n(P) \vec{u} \cdot d\vec{P}$$

La différentielle de  $L(M)$  a pour expression :

$$dL(M) = \overrightarrow{\text{grad}}_M L(M) \cdot d\vec{M} = n(M) \vec{u} \cdot d\vec{M}$$

avec

$$\overrightarrow{\text{grad}}_M L(M) = n(M) \vec{u}$$



**Fig. 2.12. Théorème de Malus :** « les rayons lumineux sont normaux aux surfaces d'onde ».

$M$  est un point du rayon et  $\vec{u}$  le vecteur tangent au rayon en  $M$ .

Le principe de Fermat impose que le chemin effectivement suivi par la lumière soit tel que

$dL(M) = 0$ , donc  $\vec{u} \cdot d\vec{M} = 0$ . L'ensemble des points d'une surface d'onde, c'est-à-dire l'ensemble des points correspondant au même chemin optique, vérifient le principe de Fermat (il faut que les points appartiennent à une courbe effectivement suivie par la lumière). Nous en déduisons que deux points voisins d'une surface d'onde

vérifient la condition  $\vec{u} \cdot d\vec{M} = 0$ , ce qui signifie

que la surface d'onde est « localement » perpendiculaire à la direction  $\vec{u}$  du rayon (Fig. 2.12).

### 2 Équation des rayons

Considérons un point  $M$  repéré par l'abscisse curviligne  $s$ , tel qu'il existe effectivement un rayon issu de  $A$  et passant par  $M$ . Cette fois, les deux points  $A$  et  $M$  sont fixes et nous cherchons une relation permettant de prévoir le trajet ultérieur de la lumière, c'est-à-dire la position du point  $M'$  infiniment voisin de  $M$ .

Remarquons tout d'abord que :

$$d(\vec{n}\vec{u}) \cdot \vec{u} = dn(\vec{u} \cdot \vec{u}) + n(\vec{u} \cdot d\vec{u}) = dn$$

Car :  $\vec{u} \cdot \vec{u} = 1$  et  $\vec{u} \cdot d\vec{u} = 0$ . Par ailleurs :

$$dn = \overrightarrow{\text{grad}}(n) \cdot \vec{u} ds$$

Il vient donc :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(n) \cdot \vec{u} = \frac{d(\vec{n}\vec{u})}{ds} \cdot \vec{u}$$

Nous allons maintenant montrer que  $d(\vec{n}\vec{u})$  et  $\overrightarrow{\text{grad}}n$  sont colinéaires. Nous avons établi en 2.3 la relation qui traduit la continuité de la composante tangentielle de la quantité  $(\vec{n}\vec{u})$  dans le cas d'une interface entre deux milieux (1) et (2) :

$$(n_1\vec{u}_1 - n_2\vec{u}_2) = a\vec{N}$$

Dans cette relation,  $\vec{N}$  est la normale à l'interface et  $a$  est un coefficient de proportionnalité. Cette relation s'étend au cas d'un indice continûment variable en considérant l'interface entre M (d'indice  $n$ ) et M' (d'indice  $n'$ ). Le vecteur  $(n_1\vec{u}_1 - n_2\vec{u}_2)$  tend vers  $d(\vec{n}\vec{u})$  quand M et M' deviennent infiniment voisins. Par ailleurs, la normale  $\vec{N}$  à l'interface entre les deux milieux d'indice  $n$  et  $n' = n + dn$  est portée par le vecteur  $\overrightarrow{\text{grad}}(n)$ , ce qui permet de conclure que les vecteurs  $d(\vec{n}\vec{u})$  et  $\overrightarrow{\text{grad}}(n)$  sont colinéaires.

La relation  $\overrightarrow{\text{grad}}(n) \cdot \vec{u} = \frac{d(\vec{n}\vec{u})}{ds} \cdot \vec{u}$  devient donc :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(n) = \frac{d(\vec{n}\vec{u})}{ds}$$

Cette équation porte le nom d'équation des rayons.

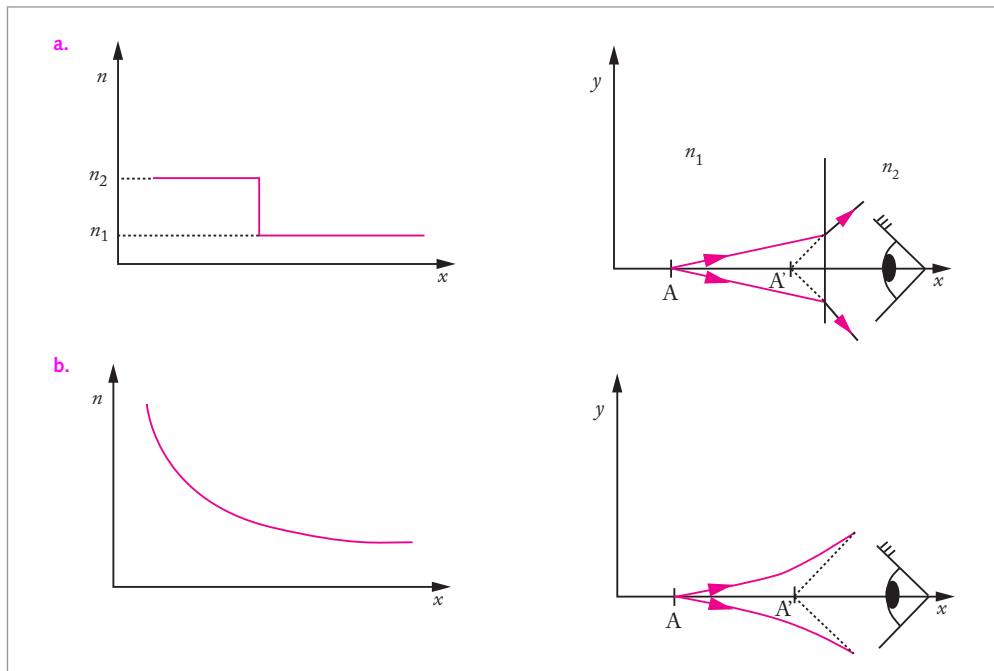
## 2.5. Applications : la réfraction atmosphérique, les mirages

### 1 La réfraction atmosphérique

Le mot **mirage** évoque un paysage désert sous le soleil au milieu duquel un palmier ondoyant semble se refléter dans le sable. Nous verrons que ce mirage est appelé mirage inférieur.

Les mirages sont dus à un gradient de l'indice optique. Si on pousse le raisonnement à l'extrême, l'image d'un objet à travers un dioptre est un mirage. La variation correspondante

de l'indice optique est alors une fonction créneau. Plus usuellement, le mirage renvoie à une variation continue de l'indice optique, due à un gradient de température dans les couches d'air de l'atmosphère. Les rayons parvenant à l'observateur suivent une trajectoire courbe : c'est la réfraction atmosphérique. (fig. 2.13).



**Fig. 2.13.** Vision de l'image d'un objet à travers : a. un dioptre (saut d'indices) ; b. un milieu d'indice continûment variable (phénomène du mirage).

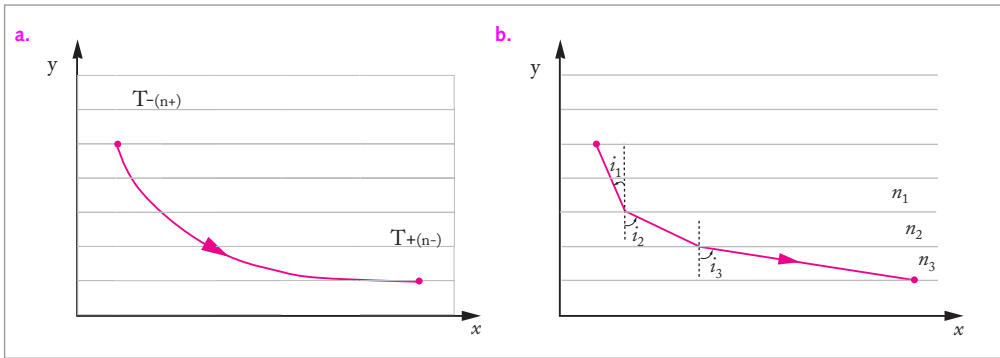
L'œil reconstruit l'objet  $A$  en cherchant le sommet du faisceau conique lumineux qui lui parvient et voit une image  $A'$  qui ne coïncide pas avec l'objet réel.

L'indice optique de l'air diminue lorsque la température augmente. Pour comprendre cela très schématiquement, souvenons-nous qu'un gaz a une densité d'autant plus faible que sa température est importante. Le gaz considéré est donc d'autant plus dispersé que la température est élevée et son comportement optique se rapproche de celui du vide, d'indice optique égal à 1.

## 2 Le mirage inférieur

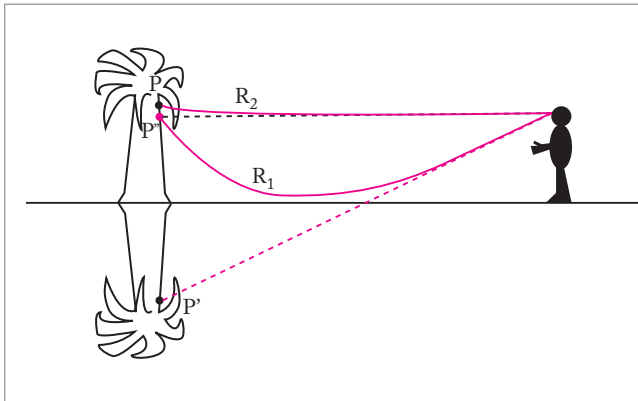
Le mirage d'un palmier dans le désert est le plus commun des mirages. Comment expliquer ce phénomène ? Pendant la journée, le sable est plus chaud que l'air ambiant et il chauffe une petite couche d'air juste à son contact. Il se crée donc un gradient thermique orienté vers le haut et par conséquent un gradient d'indice optique orienté vers le bas. Un rayon lumineux se dirigeant dans un tel milieu vers le sol est dévié de sorte que l'angle qu'il

forme avec la verticale augmente ; pour comprendre cela simplement, discrétisons le problème, le milieu à gradient d'indice pouvant être considéré comme une succession de milieux d'indices différents. La loi de la réfraction de Descartes peut être appliquée à chaque



**Fig. 2.14.** a. Trajectoire d'un rayon lumineux dans une atmosphère possédant un gradient vertical de température (et donc un gradient vertical d'indice optique). b. Modélisation du milieu (a) en couches homogènes transparentes et isotropes : à chaque interface, la trajectoire du rayon est donnée par la loi de Descartes sur la réfraction.

dioptre, comme illustré sur la figure 2.14b. Revenons à notre palmier planté dans le sable chaud. Parmi tous les rayons issus d'un point P du palmier, deux parviennent à l'observateur :  $R_1$  et  $R_2$  (Fig. 2.15).



**Fig. 2.15. Mirage inférieur.** Parmi tous les rayons issus d'un point P du palmier, deux parviennent à l'observateur :  $R_1$  et  $R_2$ . Les traits pointillés indiquent la direction apparente de ces rayons pour l'œil, donnant deux images  $P'$  et  $P''$  du point P.

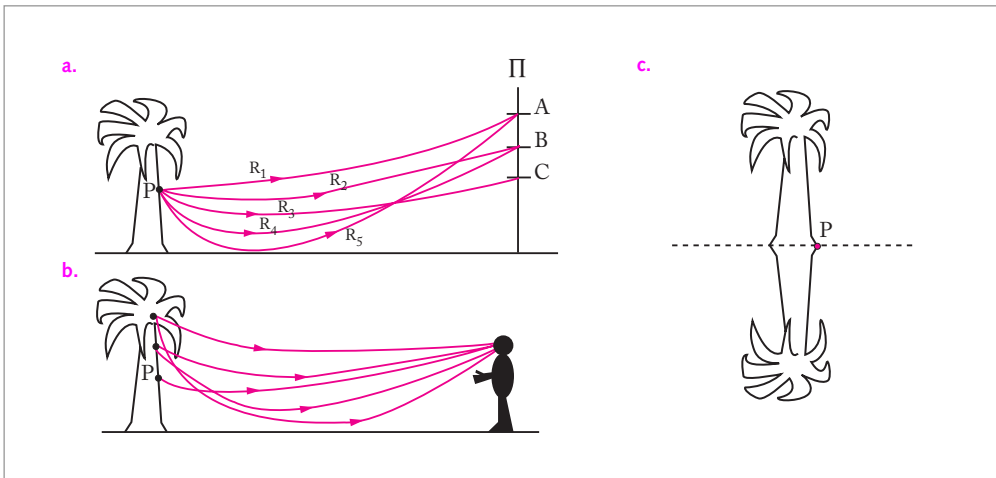
Les traits pointillés indiquent la direction apparente de ces rayons pour l'œil. Ainsi, le faisceau  $F_1$  de rayons voisins de  $R_1$  contribue à former une image  $P'$  de P,  $P'$  appartenant à l'image inversée de l'arbre. De façon analogue, le faisceau  $F_2$  de rayons voisins de  $R_2$  contribue à former une image  $P''$  de P,  $P''$  appartenant à l'image droite de l'arbre ; le faisceau  $F_2$  étant peu dévié, cette image droite de l'arbre est en général quasiment confondue avec l'arbre réel.

Généralement, l'existence d'un objet et, sous l'objet, de son image inversée est due à la réflexion sur une surface, par exemple la surface de l'eau. C'est pour cette raison qu'en présence d'un mirage, nous attribuons inconsciemment la scène à la présence d'une surface d'eau. En fait, un mirage n'est pas lié à la présence d'une surface d'eau mais surtout, il n'est pas dû à un phénomène de réflexion mais de réfraction.

Ce type de mirage est appelé mirage inférieur en référence à la position de l'image au-dessous de l'objet réel. On peut également observer des mirages supérieurs.

### 3 La ligne évanescente

Nous avons donné le principe fondamental de la formation d'un mirage. Mais il convient maintenant d'affiner cette description. Pour anticiper, nous pouvons dire brutalement que la représentation de la figure 2.15 est fautive. Considérons un point  $P$  du palmier.  $P$  émet des rayons dans toutes les directions, rayons déviés dans le milieu à gradient d'indice. Considérons maintenant trois points d'observation  $A$ ,  $B$  et  $C$  dans un plan  $\Pi$  vertical (Fig. 2.16a). Deux rayons  $R_1$  et  $R_5$  issus de  $P$  parviennent en  $A$ . De même, deux rayons  $R_2$  et  $R_4$  parviennent en  $B$ . En revanche, un seul rayon  $R_3$ , issu de  $P$ , arrive en  $C$ . Autrement dit, aucun rayon issu de  $P$  ne peut atteindre un point plus bas que  $C$  dans  $\Pi$ .



**Fig. 2.16. Construction de la ligne évanescente.** a. Aucun rayon issu de  $P$  ne peut atteindre un point plus bas que  $C$  dans  $\Pi$ . b. Un œil placé en  $C$  voit deux images des points placés plus haut que  $P$  et ne voit qu'une image du point  $P$ . c. Vision du palmier pour un observateur en  $C$ . L'image mirage est symétrique de l'image droite par rapport à une ligne appelée la ligne évanescente.

En effet, un rayon issu de  $P$  avec un angle supérieur à  $\alpha_C$  (angle formé par le rayon  $R_3$  en  $P$  avec la verticale) sera moins dévié que le rayon  $R_3$  (comme  $R_1$  et  $R_2$  qui contribuent à l'image droite de l'arbre en  $A$  ou  $B$ ). Un rayon issu de  $P$  avec un angle inférieur à  $\alpha_C$  est fortement dévié (inversion de sa direction verticale de propagation) : comme  $R_4$  et  $R_5$  qui contribuent à l'image de  $P$  sur l'image inversée de l'arbre (le mirage) pour un œil placé en  $A$  ou  $B$ , c'est-à-dire également au-dessus de  $C$ . Un œil placé en  $C$  ne verra qu'une image du point  $P$ , donnée par le rayon  $R_3$ . Plaçons donc l'œil en  $C$  (Fig. 2.16b). Par continuité, un point du palmier au-dessous de  $P$  n'émet aucun rayon susceptible d'arriver en  $C$  et par conséquent, la partie du palmier au-dessous de  $C$  n'est pas visible pour l'observateur en  $C$ . En revanche, tout point du palmier situé au-dessus de  $P$  émet deux rayons qui atteignent  $C$ , un qui contribue à l'image de  $P$  sur l'image droite du palmier, l'autre qui contribue à l'image de  $P$  sur l'image inversée du palmier. La figure 2.16c montre la vision du palmier pour un observateur en  $C$ .

L'image mirage est symétrique de l'image droite par rapport à une ligne appelée la **ligne évanescente**. Que se passe-t-il lorsque le plan varie, c'est-à-dire lorsque l'observateur

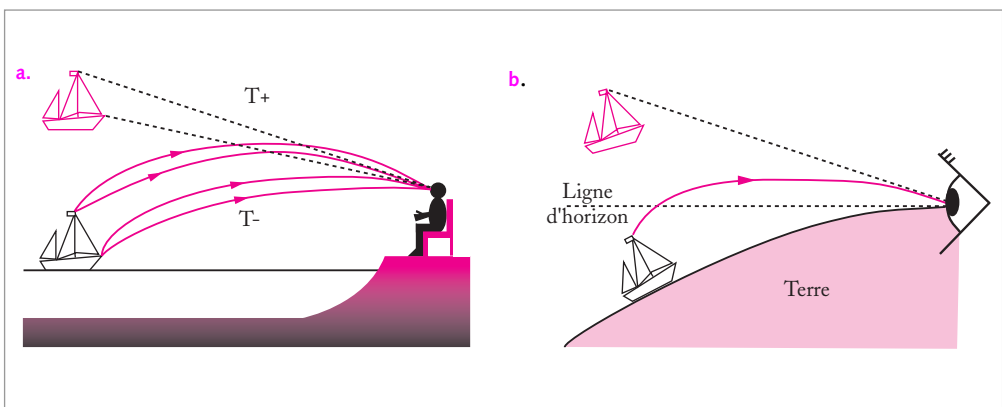
s'éloigne ou se rapproche du palmier ? La hauteur de la ligne évanescente varie. Si la ligne évanescente devient plus haute que le point le plus haut du palmier, l'observateur ne voit plus du tout d'image du palmier.

Nous ne sommes pas entrés dans le détail des équations pour tracer les trajectoires des rayons. Notons cependant que l'image inversée du palmier sur la figure 2.16 est inversée uniquement parce que nous avons supposé qu'un rayon issu d'un point plus haut que P de l'arbre parvenait à l'œil avec une inclinaison plus importante par rapport à l'horizontale. C'est ce qui est observé le plus fréquemment pour ce type de mirage, mais nous pouvons imaginer une situation où le mirage n'est pas une image inversée de l'objet, mais une image droite.

#### 4 Le mirage supérieur

Par opposition au mirage inférieur, le mirage supérieur correspond à une image formée au-dessus de l'objet. Ces mirages, plus rares, sont observés lorsque le gradient de température est orienté vers le bas, c'est-à-dire que le sol (ou la surface de l'eau) est plus froid que l'air au-dessus. Le raisonnement que nous avons fait pour le mirage inférieur se transpose en inversant haut et bas ! Les mirages supérieurs existent sous forme d'image droite ou inversée. Nous considérerons ici la formation d'une image droite qui correspond aux descriptions les plus fréquentes, rapportées notamment par les marins. Considérons donc la surface d'un lac sur lequel navigue un bateau et supposons que l'air au contact de l'eau est plus froid que les couches d'air supérieures. Comme dans le cas du mirage inférieur, les rayons issus des différents points du bateau se courbent au cours de la propagation de sorte que deux images du bateau sont vues par l'observateur : une droite qui coïncide à peu près avec le bateau réel, et une droite située au-dessus (Fig. 2.17a).

Une conséquence de ce mirage est qu'un bateau situé au-dessous de la ligne d'horizon pourra être « vu » si son mirage est au-dessus de cette ligne (Fig. 2.17b)



**Fig. 2.17. Mirages supérieurs.** a. Un observateur au bord de l'eau voit le bateau « flotter » dans l'air. b. Un bateau au-dessous de la ligne d'horizon pour un observateur sera « vu » car son image se trouve au-dessus de la ligne d'horizon de l'observateur.

### Observations sur les réfractions terrestres par Dangos

Un voyageur rapporte en 1806, dans un journal scientifique, la vision d'un mirage en Italie : « Ayant lu depuis peu, dans la connaissance des temps de l'an 12, une observation curieuse sur les réfractions terrestres, faite par un savant physicien anglais, j'ai pensé que l'Institut National verrait avec plaisir les détails d'un phénomène à peu près semblable, qui se montra à Malte en 1784, et dont tous les habitants de l'île furent les témoins. Le 20 mars vers 1 heure de l'après-midi, je fus instruit par des grands cris qui retentissaient dans les rues, qu'une île venait de s'élever dans le canal de Malte, et j'aperçus bientôt, de dessus les terrasses de l'observatoire, une terre très blanche, entourée d'eau, et dont la forme était celle à peu près d'un cône droit irrégulièrement tronqué. Des marins et des pêcheurs étaient déjà partis pour aller reconnaître cette île et pour en prendre possession. La figure de cette terre, sa blancheur et surtout sa position, qui se trouvait exactement dans la direction de la mire que j'avais tracée depuis longtemps vers le mont Etna, me firent reconnaître bien vite que cette terre n'était autre chose que le sommet toujours enneigé de ce mont élevé de 3 326 mètres. Cette apparence extraordinaire dura environ 30 minutes depuis l'instant où j'en eus connaissance. Il survint un instant de confusion, et lorsque je la cherchais dans les airs, je la vis, avec étonnement, assise à sa place. Tout le mont et les côtes de Sicile, qui avaient été invisibles, se montrèrent bientôt en entier, et furent visibles le reste du jour ».

L'auteur mentionne qu'il ne pouvait s'agir d'une simple réflexion « comme on le prétendit dans les journaux d'Italie : car alors l'image aurait dû être renversée, et elle était droite. Je finis en rappelant un phénomène

assez curieux qui tient à l'objet de ce mémoire, phénomène bien connu des marins, des astronomes qui ne sont pas fort éloignés de la mer, que j'ai vu assez souvent à Malte et surtout à l'observatoire de Rouen. Le soleil prend quelquefois, vers son lever, une forme un peu allongée qui se rétrécit tout-à-coup dans sa partie inférieure, et qui est terminée par le bas, par une ligne droite, de sorte qu'il ressemble à une urne sur son piédestal. La cause de ce fait est bien simple, d'après la théorie de M. Monge sur le mirage ».

W. de Fonvielle et G. Tissandier dans « Voyages Aériens » font mention d'un mirage :

« Nous cherchons les falaises de Douvres et nous nous étonnons bientôt de ne pas voir les côtes de l'Angleterre qui ne sont pas bien distantes de notre aérostat ; elles sont cachées par un immense rideau de vapeurs plombées, qui s'étend vers ce côté de l'horizon. Je lève la tête pour chercher la limite de cette muraille de nuages, et quelle n'est pas ma stupéfaction quand j'aperçois dans le ciel une nappe verdâtre qui ressemble à l'image de l'océan ; bientôt un petit point semble se mouvoir dans cette plage céleste, c'est un bateau, gros comme une coquille de noix, et en y fixant avec soin mes regards, je ne tarde pas à constater qu'il navigue à l'envers sur cet océan retourné ; ses mâts sont en bas et sa quille en haut. Un moment après je vois l'image du bateau à vapeur qui vient de partir de Calais pour l'Angleterre, et, avec ma lunette, je distingue la fumée qui s'échappe de son tuyau. Voici bientôt deux ou trois autres barques qui apparaissent au milieu de cette mer magique, tableau vraiment saisissant, d'une éblouissante fantasmagorie de mirage. »

## Un peu d'histoire

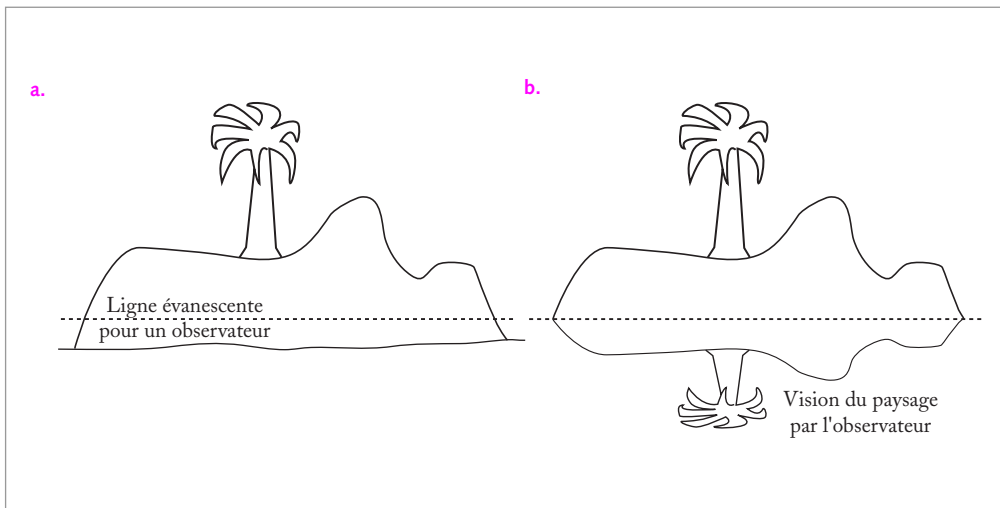
### Erik le Rouge

Le Groenland fut probablement découvert grâce à un mirage. Il est usuel de dire que l'Islande donna naissance à une colonie, le Groenland, aperçu pour la première fois vers 980 par un banni, le viking Erik le Rouge. En effet, Erik le Rouge se dirigea directement de

l'Islande vers la côte du Groenland la plus proche, à 300 km de là. Le plus probable est qu'il avait des informations sur l'existence d'une terre dans cette direction, informations qui ont pu lui être apportées par un mirage arctique.

## 5 Compression verticale des mirages

Nous avons dit que l'image droite d'un objet plongé dans un gradient d'indice est souvent similaire, en taille et en position, à l'objet réel. Il n'en est pas de même pour le mirage et il est fréquent d'observer un effet de compression verticale du mirage (Fig. 2.18).

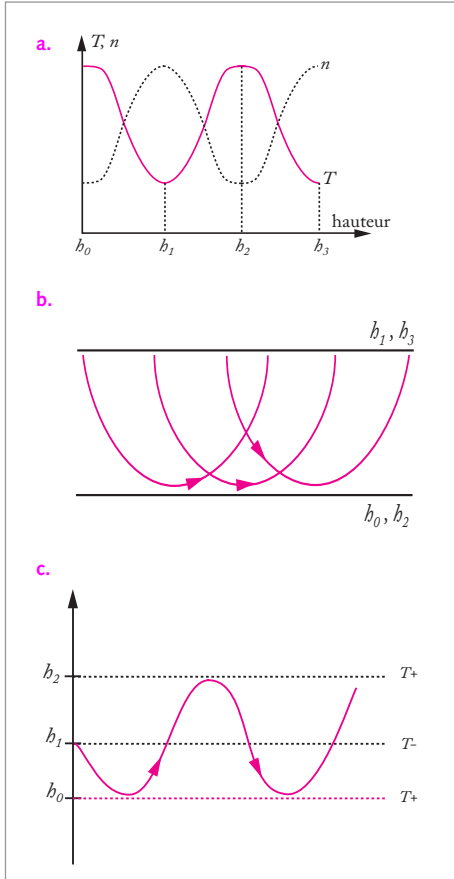


**Fig. 2.18.** Compression verticale des mirages. a. La ligne évanescence « coupe » l'île. b. L'observateur ne voit qu'une partie de l'île et son image inversée.

## 6 L'inversion de température et le mirage double

Nous avons considéré jusqu'à présent des gradients de température, donc d'indice optique, monotones. Il arrive que les variations verticales de température soient plus complexes. Dans certaines conditions, l'atmosphère présente une inversion de température, c'est-à-dire qu'il y a une succession de couches chaudes et froides (Fig. 2.19).





**Fig. 2.19.** a. Variation de la température et de l'indice optique en fonction de la hauteur dans la couche atmosphérique. b. Trajectoires de rayons dans les couches atmosphériques à gradient de température positif. c. Trajectoires de rayons lumineux dans une couche à gradient de température négatif.

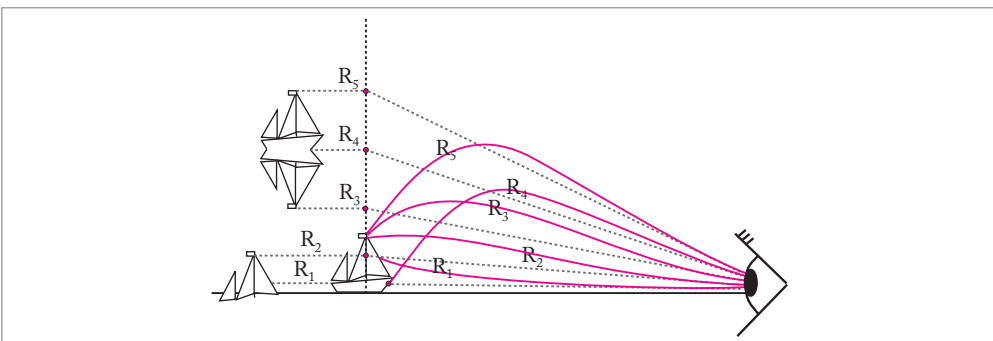
### Mirages multiples

Un type de trajectoires typiques de rayons dans cette succession de couches d'air est représentée sur la figure 2.19b. Dans les couches d'air  $[h_0, h_1]$  et  $[h_2, h_3]$ , l'indice optique augmente avec la hauteur. Un rayon initialement orienté vers le bas est redressé horizontalement au cours de sa propagation et peut même être défléchi vers le haut. Un rayon initialement orienté vers le haut a une direction qui se rapproche de la verticale. Un raisonnement symétrique peut être effectué pour la couche d'air  $[h_1, h_2]$  dans laquelle l'indice optique décroît avec la hauteur.

Dans ces conditions, il est possible d'observer des mirages multiples, typiquement deux mirages et une image droite, comme nous l'avons illustré sur la figure 2.20.

### Guide de lumière

Un autre type de trajectoires de rayons lumineux observées à l'occasion d'une inversion de température est représenté sur la figure 2.19c. Les rayons sont piégés dans une couche d'air centrée sur  $h_1$  qui correspond à un maximum de l'indice optique. Nous pensons immédiatement au principe de la fibre optique qui guide la lumière le long de la zone d'inversion de courbure de la température ; c'est en effet le même principe à ceci près que le guidage est ici assuré par la réfraction et non pas la réflexion totale comme dans le cas des fibres à saut d'indice.

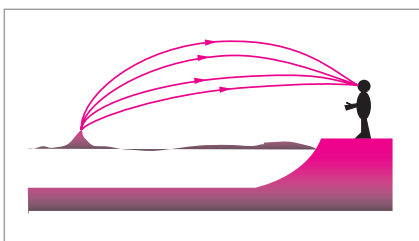


**Fig. 2.20.** Exemple de mirages multiples. Ce mirage double de bateau est reporté dans l'article de S. Vince de 1799 publié dans *Philosophical Transactions of the Royal Society*.

## 7 Fata Morgana

Nous réservons un paragraphe particulier à ce mirage mythique, souvent mentionné comme le plus beau des mirages.

La fée Morgane est, dans la mythologie celtique, la sœur déchue du roi Arthur ; dotée de pouvoirs maléfiques, elle est souvent représentée, évoluant dans un château de verre au milieu des flots. C'est aux peintres préraphaélites que l'on doit le nom générique de *Fata Morgana* (fée Morgane) ; elle perd à cette époque le rôle maléfique qu'elle avait dans les textes médiévaux pour apparaître comme la fée de la mer, souveraine d'Avalon, l'île des bienheureux. C'est donc assez raisonnablement que le mirage qui fait apparaître des châteaux féeriques, s'élevant au-dessus de l'eau, se déformant puis s'effondrant, porte son nom ; d'autant plus raisonnable que, dans la légende, Avalon est localisée en Sicile (bien qu'on la localise parfois en Irlande) et que c'est précisément sur la route de Messine, entre l'Italie et la Sicile que ce mirage est le plus fréquemment observé.



**Fig. 2.21. Principe du mirage Fata Morgana.** Un point émet une multitude de rayons qui atteignent l'œil de l'observateur.

*Fata Morgana* est liée à des conditions atmosphériques très particulières telles qu'un observateur voit, à différentes hauteurs, les images multiples d'un même point, pouvant créer l'illusion d'un mur vertical (Fig. 2.21). Très souvent, le cheminement des rayons est beaucoup plus complexe que celui de la figure 2.21 et un petit mouvement de l'observateur ou une petite variation de la distribution de températures (par exemple due à un coup de vent) modifie complètement l'image perçue. Ainsi, Fata Morgana a la caractéristique de prendre des aspects très variables, ce qui a fait la réputation de ce mirage.

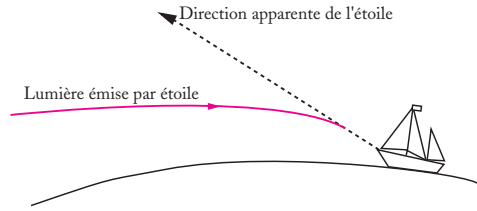
### Un peu d'histoire

#### Navigation aux étoiles

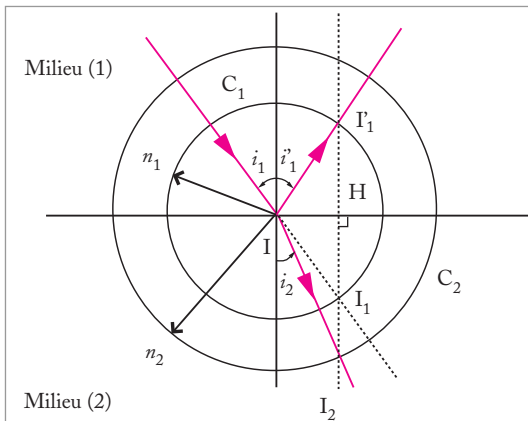
L'effet mirage intervient également lorsqu'on regarde la position des étoiles dans le ciel. À la traversée des couches basses de l'atmosphère, les rayons lumineux sont déviés, de sorte que la position apparente d'une étoile dans le ciel est faussée par cette réfraction atmosphérique. Les navigateurs qui se repèrent avec la position des étoiles utilisent des tables standard qui répertorient les corrections introduites par ces effets de réfraction de l'atmosphère terrestre. L'astronome Jules Janssen exposa cette observation aux Séances de la Société Française de Physique (« Du mirage en mer », 1875) :

« D'après mes observations, qui embrassent plusieurs années déjà, le mirage en mer est très fréquent, même dans les mers septentrionales. Dans le golfe de Siam et dans la mer Rouge, j'ai observé des cas très remarquables de mirage direct et inverse. Les apparences observées, soit sur le Soleil levant et couchant, soit sur les objets situés à l'horizon, conduisent à admettre un plan de réflexion totale situé à une distance variable de la mer. La cause de ces effets de mirage et de réfractions anormales réside dans l'action thermique de la mer sur les couches atmosphériques voisines. Une des conséquences les plus importantes de

ces études, c'est qu'elles conduisent à reconnaître que le niveau apparent de l'horizon de la mer est affecté d'une manière très notable par ces effets optiques et qu'il faudra en tenir compte quand on prendra (pour des mesures soignées) la hauteur d'un astre par le moyen de l'horizon de la mer. Je construis un instrument pour donner la correction. »



## 2.6. Surface des indices. Construction de Descartes



**Fig. 2.22. Construction de Descartes.** Surface des indices et construction des rayons réfléchis  $II_1$  et réfractés  $II_2$  à la surface d'un dioptré.

La construction de Descartes permet de tracer les trajectoires des rayons réfléchis et réfractés à l'interface de deux milieux (Fig. 2.22). Cette construction s'appuie sur les lois de Descartes pour la réflexion et la réfraction. Elle n'a pas de réalité physique, contrairement à la construction de Huyghens (voir 2.7). Par un point I, traçons les cercles de rayons  $C_1$  et  $C_2$  de rayons respectifs  $n_1$  et  $n_2$ . Un rayon incident dans le milieu (1) d'indice  $n_1$  intercepte le dioptré en I. Son prolongement dans le milieu (2) coupe le cercle  $C_1$  en un point  $I_1$ . Traçons alors la normale au dioptré passant par  $I_1$ . Elle coupe  $C_2$  en  $I_2$  dans le

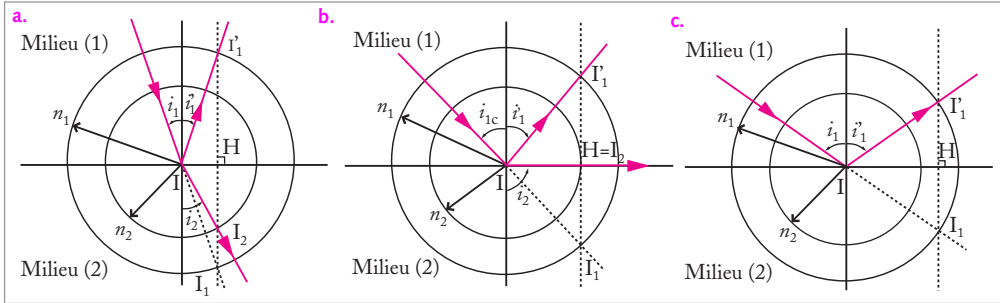
milieu (2),  $C_1$  en  $I_1$  dans le milieu (1) et le dioptré en H.

Notons  $i_1$  l'angle formé par le rayon incident avec la normale à l'interface,  $i_1'$  et  $i_2$  les angles formés respectivement par  $II_1$  et  $II_2$  avec la normale à l'interface. Par construction, il est aisé de vérifier que :

$$IH = II_1 \sin i_1 = II_1' \sin i_1' = II_2 \sin i_2$$

Soit :

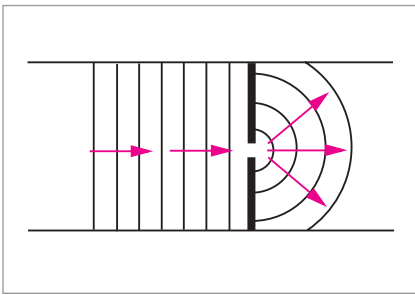
$$n_1 \sin i_1 = n_1 \sin i_1' = n_2 \sin i_2$$



**Fig. 2.23.** Construction de Descartes pour un milieu (1) plus réfringent que le milieu (2). **a.** pour  $i_1 < i_{1c}$ , il existe un rayon réfléchi et un rayon réfracté ; **b.** pour  $i_1 = i_{1c}$ , le point  $I_2$  est sur le dioptré, il y a émergence rasante ; **c.** pour  $i_1 > i_{1c}$ , le point  $I_2$  n'existe pas, il y a réflexion totale.

Nous retrouvons donc les lois de Descartes pour la réfraction et la réflexion en considérant que le rayon réfracté est porté par  $II_2$ , le rayon réfléchi par  $II'_1$ . Les figures 2.23 illustrent les différents cas dans le cas où le milieu (1) est plus réfringent que le milieu (2).

## 2.7. Principe d'Huyghens et interprétation des lois de Descartes



**Fig. 2.24.** Onde à la surface de l'eau traversant un diaphragme dans un canal droit.

### 1 Notion de sources secondaires

Considérons un canal rempli d'eau et des vaguelettes se propageant dans ce canal. Supposons maintenant que ces vaguelettes rencontrent un diaphragme (Fig. 2.24). L'expérience nous dit que l'ouverture du diaphragme se comporte comme le centre d'une nouvelle forme de vaguelettes circulaires dont le centre est le centre du diaphragme. En d'autres termes, le diaphragme se comporte comme une source secondaire de vaguelettes (ou d'ondelettes). La notion de source secondaire est étendue à tout point atteint par une surface d'onde.

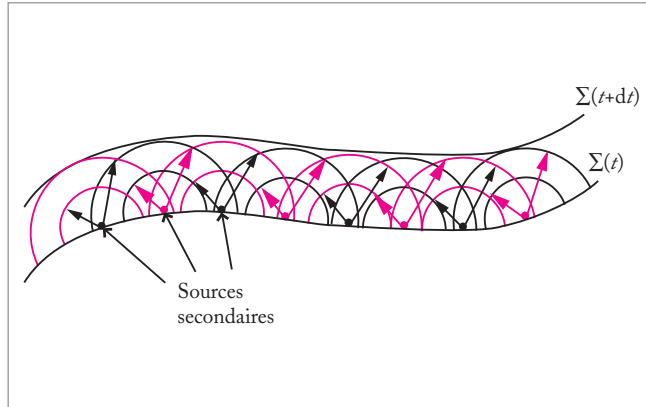
### 2 Le principe d'Huyghens

Huyghens utilise la notion de source secondaire pour énoncer de façon très intuitive son principe. Soit à un instant  $t$  une surface d'onde lumineuse  $\Sigma(t)$ . Comment construire la surface d'onde  $\Sigma(t + dt)$  atteinte par l'onde lumineuse à l'instant ultérieur  $t + dt$  ? Pour faire cette construction, on répartit sur la surface  $\Sigma(t)$  une série de sources secondaires qui émet-

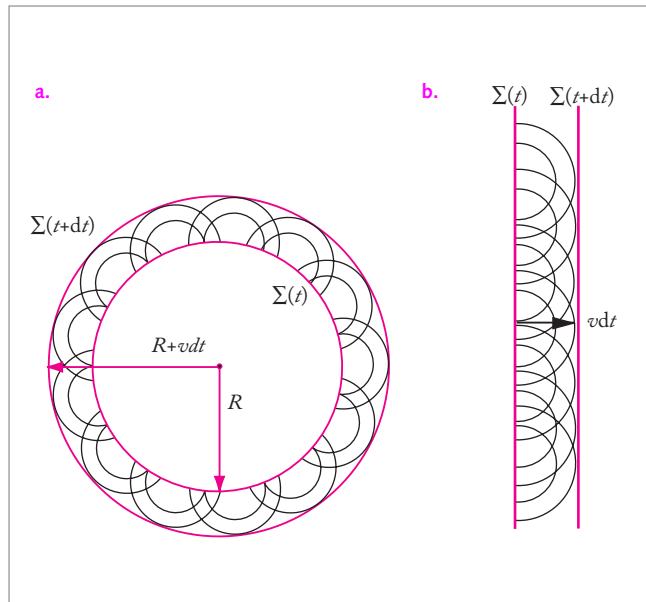
tent des ondelettes à l'instant  $t$ . À l'instant  $t + dt$ , les ondelettes émises par les sources secondaires se sont propagées d'une distance  $d\ell = v dt$ , où  $v$  est la vitesse de propagation de la lumière dans le milieu considéré. La surface d'onde à l'instant  $\Sigma(t + dt)$  est l'enveloppe des ondelettes émises par les sources secondaires (Fig. 2.25).

Remarquons que le principe d'Huyghens permet de retrouver la forme circulaire des surfaces d'onde dans le cas d'une lumière émise par un point source (Fig. 2.26a) ainsi que la forme droite de la lumière émise par une source étendue plane (Fig. 2.26b). Dans le premier cas, la source primaire émet une ondelette circulaire. À un instant ultérieur  $t$ , tous les points de la surface d'onde circulaire  $\Sigma(t)$  (de rayon  $R$ ) se comportent à leur tour comme les sources secondaires d'ondelettes circulaires. L'enveloppe des ondelettes émises par les points d'un cercle à l'instant  $t + dt$  est de nouveau un cercle de rayon  $R + vdt$ . Dans le cas d'une onde générée plane, les points de la surface d'onde à l'instant  $t$  appartiennent à un plan. À l'instant  $t + dt$ , l'enveloppe des ondelettes émises par les points d'un plan est encore un plan distant du premier de  $vdt$ .

Ainsi, le principe d'Huyghens prévoit que, dans un milieu transparent homogène, isotrope, une onde plane se propage en restant plane et une onde circulaire (ou sphérique) se propage en restant circulaire (ou sphérique).

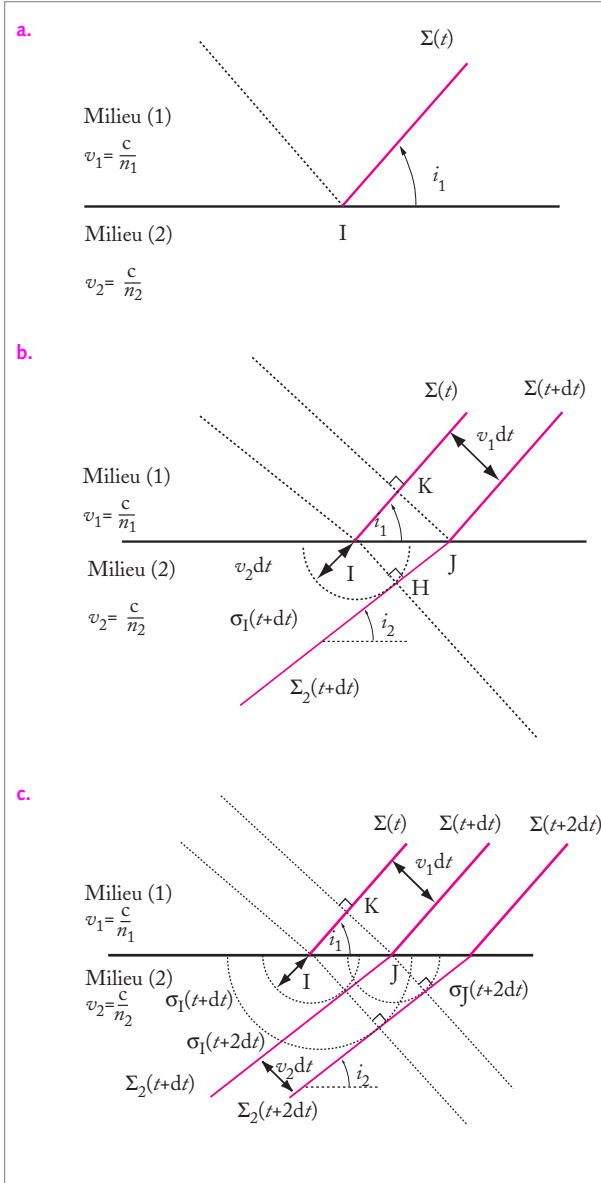


**Fig. 2.25.** Construction de la surface d'onde  $\Sigma(t + dt)$  issue de la surface d'onde  $\Sigma(t)$  en utilisant le principe d'Huyghens : tous les points de  $\Sigma(t)$  se comportent comme des sources secondaires.



**Fig. 2.26.** Principe d'Huyghens. a. Onde circulaire (ou sphérique). b. Onde plane.

### 3 Interprétation de la réfraction et de la réflexion avec le principe d'Huyghens



**Fig. 2.27.** a. La surface d'onde  $\Sigma(t)$  atteint le point I qui se comporte comme une source secondaire. À l'instant  $t$ , l'ondelette issue de I,  $\sigma_1(t)$ , est confondue avec le point I.

b. À l'instant  $t + dt$ , la surface d'onde  $\Sigma(t + dt)$  a atteint le point J qui se comporte à son tour comme une source secondaire. L'ondelette  $\sigma_J(t + dt)$ , est confondue avec le point J tandis que la surface d'onde  $\sigma_1(t + dt)$  s'est propagée à la vitesse  $v_2$  dans le milieu (2). La surface d'onde  $\Sigma_2(t + dt)$  est l'enveloppe des ondelette (dont  $\sigma_1(t + dt)$  et  $\sigma_J(t + dt)$ ). c. Même construction à l'instant  $t + 2dt$ .

Considérons une onde lumineuse plane tombant en incidence  $i_1$  quelconque sur un dioptre séparant deux milieux homogènes transparents isotropes différents. Dans le milieu (1), la lumière se propage à la vitesse  $v_1 = \frac{c}{n_1}$  et dans le milieu (2)

à la vitesse  $v_2 = \frac{c}{n_2}$ . Un plan d'onde  $\Sigma(t)$  incident rencontre à l'instant  $t$  la surface du dioptre en un point I (Fig. 2.27a). Le point I se comporte, à l'instant  $t$ , comme une source secondaire émettant une ondelette sphérique  $\sigma_1$ . Cette ondelette se propage dans le milieu (1) à la vitesse  $v_1$  et dans le milieu (2) à la vitesse  $v_2$ .

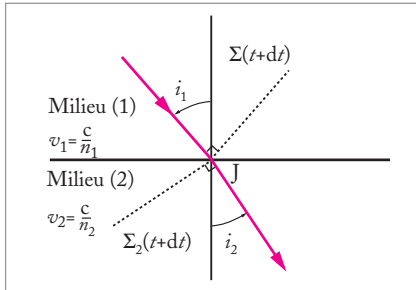
Considérons l'ondelette  $\sigma_1$  dans le milieu (2), issue de la source secondaire I. À l'instant  $t$ ,  $\sigma_1(t)$  est réduite au point I et à l'instant  $t + dt$ ,  $\sigma_1(t + dt)$  est une sphère de rayon  $v_2 dt$ . Pendant  $dt$ , le plan d'onde  $\Sigma$  continue de se propager à la vitesse  $v_1$  dans le milieu (1), de sorte que  $\Sigma(t)$  et  $\Sigma(t + dt)$  sont distants de  $KJ = v_1 dt$ . L'onde incidente a donc atteint pendant  $dt$  tous les points de l'interface situés entre I et J, J étant à la distance IJ de I telle que :

$$IJ = \frac{KJ}{\sin i_1} = \frac{v_1}{\sin i_1} dt.$$

À l'instant  $t + dt$ , l'ondelette  $\sigma_J(t + dt)$  issue de la source secondaire J est réduite au point J. La surface d'onde  $\Sigma_2(t + dt)$

générée dans le milieu (2) correspond à l'enveloppe des surfaces d'onde secondaires à l'instant  $t + dt$  (figure 2.27b). Notons H le point de tangence au cercle  $\sigma_1(t + dt)$  de la droite passant par J.  $\Sigma_2(t + dt)$  est une droite faisant un angle  $i_2$  avec le dioptré plan tel que :

$$\sin i_2 = \frac{IH}{IJ} = \frac{v_2 dt}{\left(\frac{v_1}{\sin i_1} dt\right)} = \frac{n_1 \sin i_1}{n_2}$$



**Fig. 2.28. Du principe de Huyghens à la loi de Descartes pour la réfraction.** D'après le théorème de Malus, le rayon incident en J est perpendiculaire à  $\Sigma(t + dt)$  et le rayon réfracté dans le milieu (2) est perpendiculaire à  $\Sigma_2(t + dt)$ .

Il est possible d'itérer le processus avec  $\Sigma_2(t + 2dt)$  ; les surfaces d'onde restent des plans de même inclinaison (figure 2.27c).

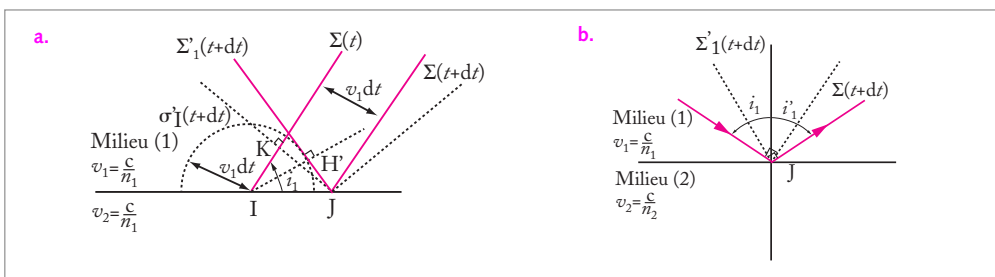
Il nous reste à relier la notion de rayons lumineux à celle de surface d'onde, ce que nous permet de faire le théorème de Malus. Au point J, le rayon incident est perpendiculaire à  $\Sigma(t + dt)$ , c'est-à-dire qu'il fait un angle  $i_1$  avec la normale au dioptré. Au même instant, le rayon réfracté dans le milieu (2) est perpendiculaire à  $\Sigma_2(t + dt)$ , c'est-à-dire qu'il fait un angle  $i_2$  par rapport à la normale au dioptré (figure 2.28). Le système étant invariant par translation le long du dioptré, la loi trouvée,  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ , est vraie quel que soit

l'instant  $t$  considéré.

Par un raisonnement analogue, nous pouvons retrouver la loi de la réflexion à partir du principe d'Huyghens. Considérons pour cela les ondelettes émises par les sources secondaires se propageant dans le milieu (1). Nous obtenons la surface d'onde  $\Sigma'_1(t + dt)$  dans le milieu (1), correspondant à l'enveloppe des ondelettes à  $t + dt$ . Avec les mêmes notations que précédemment, nous notons H' le point d'intersection du cercle  $\sigma'_1(t + dt)$  avec le plan passant par J et tangent au cercle  $\sigma'_1(t + dt)$ .  $\Sigma_1(t + dt)$  est un plan faisant un angle  $i'_1$  avec le dioptré plan tel que :

$$\sin i'_1 = \frac{IH'}{IJ} = \frac{v_1 dt}{\left(\frac{v_1}{\sin i_1} dt\right)} = \sin i_1$$

Nous en déduisons  $i'_1 = i_1$ , qui correspond à la loi de Snell-Descartes pour la réflexion.



**Fig. 2.29. Construction d'Huyghens pour la réflexion.** a. Le point I, intersection du dioptré et de la surface d'onde  $\Sigma(t)$ , émet une ondelette à l'instant  $t$ . À l'instant  $t + dt$ , l'ondelette  $\sigma'_1(t + dt)$  est une sphère de centre I et de rayon  $v_1 dt$ . À l'instant  $t + dt$ , l'onde incidente rencontre le point J du dioptré ; la surface d'onde résultante  $\Sigma'_1(t)$  est un plan contenant JH', tangent en H' à la sphère  $\sigma'_1(t + dt)$ . b. Tracé du rayon réfléchi à partir du théorème de Malus : le rayon incident en J est perpendiculaire à  $\Sigma(t + dt)$  et le rayon réfléchi est perpendiculaire à  $\Sigma'_1(t + dt)$ .

### Christian Huyghens

Huyghens (1629-1695) était opposé à la théorie corpusculaire de la lumière, en raison de ses recherches en mécanique, en particulier celles concernant les collisions élastiques : si la lumière, disait-il, est faite d'un vol de particules, quand deux rayons se croisent, il y aura collision de ces particules et on devrait observer une déviation et un éparpillement de ces rayons. L'expérience montre qu'il n'en est rien. Il admit donc que la lumière est faite d'ondes similaires aux ondulations qui s'élargissent sur l'eau à la chute d'un caillou ; en revanche le milieu de propagation de ces ondes restait indéfini, et Huyghens montra qu'il n'était pas nécessaire de connaître les propriétés de ce milieu pour prouver la nature ondulatoire de la lumière. Qui plus est, la perturbation qui se propageait de proche en proche et qui constituait le mouvement lumineux restait une inconnue. Grossièrement, on imaginait le milieu de propagation comme une gelée de groseilles et la perturbation comme un déplacement de ses

particules par rapport à leur position normale. Cela semble peu scientifique, mais il faut comprendre qu'à cette époque la propagation des ondes dans un milieu élastique était encore très mal connue : les vibrations mécaniques ou les processus sonores étaient étudiés de manière très empirique et sans base théorique ou mathématique solide.

Il n'en reste pas moins que le principe de Huyghens allait permettre d'expliquer la réfraction et d'en retrouver la formule fondamentale, et aussi de construire géométriquement le rayon réfracté à partir des indices de réfraction. Huyghens considérait donc la lumière issue d'une source ponctuelle, par exemple une étoile ou une petite zone d'une surface éclairée, comme une perturbation se propageant par ondulations. Tout point perturbé agit à son tour comme une source de perturbations ondulatoires, de sorte que le phénomène lumineux se propage comme une onde de points perturbés servant à leur tour de sources à chaque instant.



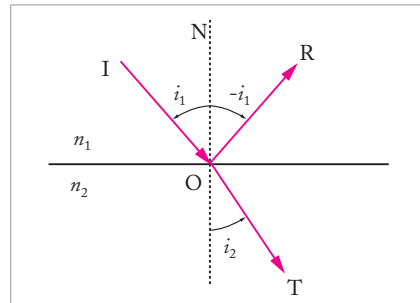
# résumé du cours

## Dioptre et miroir

- ◆ Un dioptre est une surface qui sépare deux milieux transparents et homogènes d'indices optiques différents.
- Un miroir est une surface réfléchissante telle que pratiquement toute la lumière incidente est renvoyée par cette surface.

## Lois de Snell-Descartes

◆ Nous considérons un rayon incident IO rencontrant en O un dioptre séparant deux milieux (1) et (2) d'indice respectif  $n_1$  et  $n_2$ . Par convention, tous les angles sont mesurés à partir de la normale au dioptre en O et en conséquence, ils sont tous compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ , puisqu'ils sont définis dans un quart de plan. Les directions des rayons réfléchi et réfracté obéissent aux lois de Snell-Descartes :



- Les rayons incident IO, réfracté OT et réfléchi OR sont contenus dans un même plan normal au dioptre. Ce plan contient également la normale ON à la surface de séparation.
- L'angle de réflexion est lié à l'angle d'incidence  $i_1$  par la relation:

$$i' = -i_1$$

- L'angle de réfraction  $i_2$  et l'angle d'incidence  $i_1$  sont liés par la relation :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

## Principe de Fermat

- ◆ Le trajet effectivement suivi par la lumière pour aller d'un point A à un point B correspond à une valeur stationnaire du chemin optique  $L_{AB}$  par rapport aux trajets fictifs voisins allant de A à B.
- ◆ Le chemin optique entre A et B s'exprime :

$$L_{AB} = \int_A^B n(M) dM$$

où  $n(M)$  est l'indice du milieu au point M

## Équation des rayons

- ◆ Soit un milieu d'indice  $n$  variable.  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire du rayon lumineux et  $s$  l'abscisse curviligne associée au rayon. La propagation d'un rayon lumineux dans le milieu d'indice  $n$  vérifie en tout point l'équation :

$$\vec{\text{grad}}(n) = \frac{d(n\vec{u})}{ds}$$

## Exercices

**1** Une lame de verre d'indice  $n$  et d'épaisseur  $e$  est plongée dans l'air. Un rayon arrive dans l'air sur la lame avec un angle d'incidence  $i$  par rapport à la normale à la lame.

Montrer que le rayon émergent de la lame est parallèle au rayon incident et calculer la distance entre ces deux rayons, notée  $d$ , en fonction de  $e$ ,  $i$  et  $n$ .

**2** Un rayon lumineux se propage dans l'air et rencontre un dioptre plan séparant l'air d'un milieu d'indice  $n$ .

Pour quelle valeur de l'angle d'incidence  $i$  le rayon réfléchi par le dioptre est-il perpendiculaire au rayon réfracté par le dioptre ?

**3** Un observateur regarde un poisson nager dans un aquarium contenant de l'eau d'indice  $n = 4/3$ . On néglige dans les calculs l'épaisseur de la paroi de l'aquarium. Le poisson se trouve à la distance  $h = 20$  cm d'une des faces de la vitre. À quelle distance  $h'$  de la vitre l'observateur voit-il le poisson ?

**4** Un rayon lumineux passe de l'air dans un verre d'indice  $n = 1,5$ . Calculer l'angle de réfraction  $r$  pour un angle d'incidence  $i = 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ$ .

Si on admet une erreur de  $10'$  pour l'angle de réfraction  $r$ , jusqu'à quelle incidence peut-on se contenter de la formule approchée  $i = nr$ , dite formule de Kepler ?

**5** Considérons un cylindre de rayon  $R$  en verre ( $n = 1,5$ ) et un rayon lumineux situé dans un plan perpendiculaire à son axe de révolution.

1. Calculer la distance du rayon réfracté à l'axe du tube en fonction de l'angle d'incidence  $i$ .

2. Ce même tube est percé d'une cavité cylindrique coaxiale de rayon  $a$ , remplie de mercure, l'ensemble constituant un thermomètre. À partir des résultats de la question 1, déduire le diamètre apparent du tube de mercure.

Si  $R = 3$  mm, que voit un observateur éloigné du tube pour  $a = 1$  mm et  $a = 2$  mm ?

**6** Il existe plusieurs méthodes pour mesurer l'indice  $n$  d'un milieu solide transparent. Nous

allons ici en décrire une parmi les plus précises. Un prisme (d'angle au sommet  $A = 90^\circ$  et d'indice  $N = \sqrt{3}$ ) est placé de telle sorte que l'une de ses faces est en contact avec le milieu d'indice  $n$  tandis que l'autre face est en contact avec l'air. À travers le liquide, on envoie un rayon lumineux en incidence rasante sur la première face du prisme et on mesure son angle d'émergence  $i'$  dans l'air.

1. En supposant que  $i' = 60^\circ$ , déterminer l'indice  $n$  du milieu.  $N$  pouvait-il être choisi quelconque ?

2. Les incertitudes sur  $N$  et  $i'$  étant respectivement  $\Delta N = 10^{-5}$  et  $\Delta i' = 1' = (1/60)^\circ$ , déterminer l'incertitude  $\Delta n$  sur  $n$ .

**7** La paroi d'un aquarium est constituée d'une lame de verre à faces parallèles d'épaisseur 5 mm. L'indice optique de l'air  $n_1 = 1$ , celui du verre  $n_2 = 1,5$  et celui de l'eau  $n_3 = 4/3$ .

1. Considérant un rayon venant de l'extérieur et faisant un angle d'incidence  $i_1 = 30^\circ$ , calculer les angles de réfraction aux autres interfaces.

2. Existe-t-il un phénomène de réflexion totale pour les rayons pénétrant dans l'aquarium ?

3. Existe-t-il un phénomène de réflexion totale pour les rayons sortant dans l'aquarium ?

**8** Un cube de verre ( $n_2 = 1,5$ ) est immergé dans de l'eau ( $n_1 = 1,33$ ). Un rayon incident situé dans un plan parallèle à une face d'un cube arrive au milieu d'une face sous un angle d'incidence  $i$ .

1. Quelle doit être la valeur maximale de  $i$  pour que le rayon n'émerge pas directement par la face parallèle à la face d'entrée ?

2. Quelle doit être la valeur maximale de  $i$  pour que le rayon n'émerge pas par une des faces perpendiculaires à la face d'entrée ?

**9** Un vacancier veut aller d'un point A sur la plage à une bouée B en mer. Sa vitesse de marche sur le sable est  $V_1$  tandis que sa vitesse de nage est  $V_2 (< V_1)$ .

Quel parcours doit-il choisir pour effectuer ce trajet en un minimum de temps ? Montrer que les lois de Descartes rendent compte de ce résultat.

# Étude de l'arc-en-ciel et du prisme

La réfraction à travers un dioptre, abordée dans le chapitre précédent, permet d'interpréter deux phénomènes bien connus : la formation des arcs-en-ciel et la dispersion de la lumière par un prisme. Lorsque la lumière du soleil rencontre des gouttes d'eau, elle est déviée par réfraction dans la goutte et cette déviation dépend de la longueur d'onde - du bleu au rouge - de la radiation considérée. Le résultat est une dispersion du spectre coloré, chaque couleur étant « vu » par un observateur suivant une direction différente. On observe également la dispersion de la lumière blanche lorsqu'elle traverse un prisme.

## 3.1. L'arc-en-ciel

- 1 Réfraction dans une goutte d'eau : l'arc primaire et l'arc secondaire
- 2 Le minimum de déviation
- 3 La forme de l'arc-en-ciel
- 4 Les couleurs de l'arc-en-ciel
- 5 La bande sombre d'Alexandre

## 3.2. Le prisme

- 1 Définition
- 2 Formule du prisme
- 3 Condition d'émergence
- 4 Déviation par le prisme
- 5 Application : mesure de l'indice d'un prisme

### Mots-clés

- Dispersion
- Prisme
- Arc-en-ciel
- Déviation

## 3.1. L'arc-en-ciel

Par temps pluvieux, dans l'écume d'un bateau ou d'une fontaine, il est fréquent d'observer un arc-en-ciel. En y prêtant attention, on se rend compte qu'il faut également avoir le soleil dans le dos pour voir ce phénomène. Nous allons montrer que la loi de la réfraction permet d'expliquer la formation de l'arc-en-ciel.

Nous montrerons d'abord que les gouttes d'eau sont responsables de la déviation de la lumière du soleil. Nous montrerons ensuite que, pour une radiation donnée, une incidence particulière du faisceau lumineux sur la goutte produit un faisceau émergent très concentré. Il nous restera à prendre en compte le contenu spectral de la lumière blanche pour expliquer les couleurs de l'arc-en-ciel.

### Un peu d'histoire

#### La « mythologie » de l'arc-en-ciel

Les Grecs voyaient dans l'arc-en-ciel l'écharpe d'Iris, « messagère des dieux à la ceinture multicolore », dont la fonction était de mettre en relation le ciel et la terre.

Selon la Bible, l'arc-en-ciel serait le sceau apposé au contrat fait par Dieu à Noé en reconnaissance du travail accompli et en signe de promesse qu'il n'y aurait jamais plus de déluge. Si aujourd'hui, l'arc-en-ciel continue d'apparaître, c'est justement pour rappeler cette promesse.

En Inde, l'arc-en-ciel, lien entre le monde

des hommes et celui des dieux, est symbolisé par des rinceaux terminés par des têtes de monstres marins (*makara*).

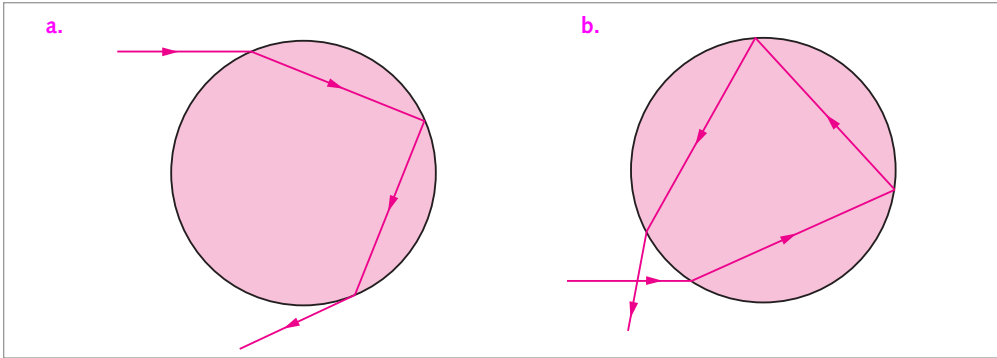
Dans les anciennes croyances nordiques, on trouve l'arc-en-ciel divinisé sous le nom de *Bifrost*, pont qui mène du monde des hommes à celui des Dieux.

Une légende populaire prétend qu'à chaque extrémité de l'arc-en-ciel existe un fabuleux trésor mais tous ceux qui sont partis à sa recherche ont échoué !

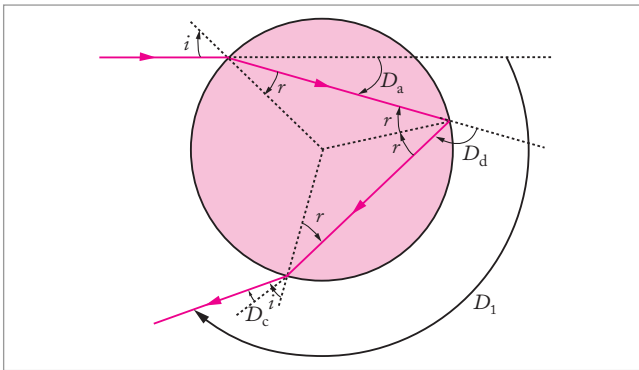
### 1 Réfraction dans une goutte d'eau : l'arc primaire et l'arc secondaire

Considérons un plan coupant une goutte d'eau dans l'air et contenant un rayon incident sur la goutte d'incidence  $i$ . À l'interface air/eau, une partie de la lumière est réfractée dans la goutte, l'autre est réfléchi. Nous ne nous intéressons ici qu'au rayon réfracté dans l'eau. Dans la goutte, commence alors un jeu de réfractions/réflexions multiples à chaque fois que le rayon rencontre l'interface eau/air. Pour comprendre les arc-en-ciel primaire et secondaire, nous ne considérons que deux types de rayons : celui qui subit une réfraction à l'interface air/eau, une réflexion dans la goutte et une réfraction dans l'air (Fig. 3.1a) et celui qui ressort après deux réflexions dans la goutte (Fig. 3.1b). Nous reviendrons plus tard sur le choix de ces rayons particuliers. Calculons la déviation subie par le premier rayon (Fig. 3.2). Lorsqu'il entre dans la goutte, il est dévié de  $D_a = i - r$ , lors de la réflexion de  $D_b = \pi - 2r$  et à sa sortie de la goutte de  $D_c = i - r$ . Finalement, il est dévié de  $D_1 = D_a + D_b + D_c$  :

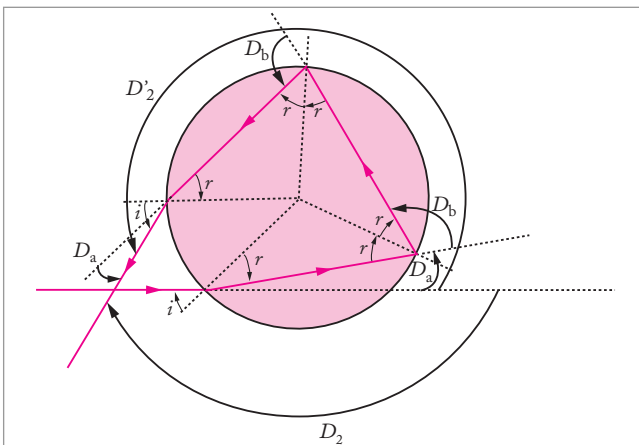
$$D_1 = \pi + 2i - 4r.$$



**Fig. 3.1.** Trajectoire d'un rayon incident sur une goutte d'eau. a. Le rayon incident horizontal est réfracté dans la goutte, subit une réflexion puis est réfracté dans l'air. b. Le rayon horizontal est réfracté dans la goutte, subit deux réflexions puis est réfracté dans l'air.



**Fig. 3.2.** Trajectoire d'un rayon incident sur une goutte d'eau. a. Le rayon incident horizontal est réfracté dans la goutte, subit une réflexion puis est réfracté dans l'air. b. Le rayon horizontal est réfracté dans la goutte, subit deux réflexions puis est réfracté dans l'air.



**Fig. 3.3.** Déviation d'un rayon par une goutte d'eau : cas de rayons subissant deux réflexions dans la goutte.

Calculons maintenant la déviation du second rayon (Fig. 3.3). Puisqu'il subit une réflexion de plus que le rayon précédent, sa déviation est simplement  $D'_2 = D_1 + D_b$  :

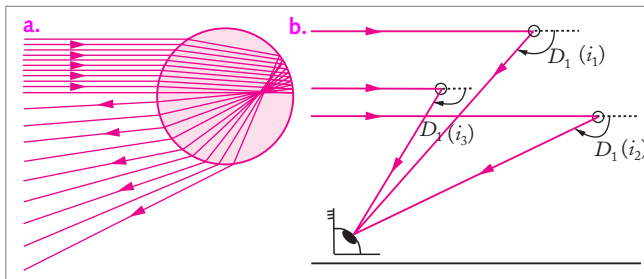
$$D'_2 = 2\pi + 2i - 6r.$$

Parce que ce deuxième rayon est dévié dans une direction opposée à celle du premier rayon considéré, il est pratique de mesurer la déviation en utilisant le complémentaire  $D_2$  de  $D'_2$ ,  $D_2 = 2\pi - D'_2$  :

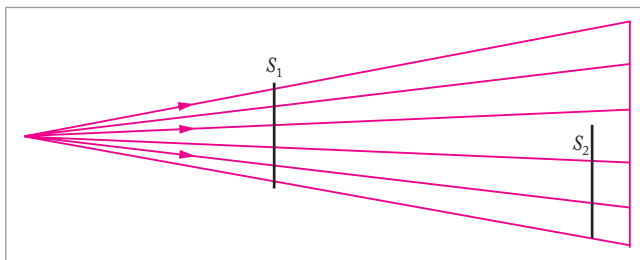
$$D_2 = -2i + 6r$$

Nous avons choisi dans le cas d'une simple réflexion un rayon rencontrant la partie supérieure de la goutte et, dans le cas d'une double réflexion, un rayon rencontrant sa partie inférieure.

Bien sûr, il y a symétrie par rapport à la droite coupant le centre de la goutte mais les rayons que nous avons choisis sont déviés vers le bas de la figure. Replaçons-nous dans le cas d'un observateur au sol regardant le ciel : il ne percevra que les rayons qui vont effectivement vers le bas, d'où notre choix !



**Fig. 3.4.** a. Exemples de trajectoires de rayons incidents à différentes hauteurs d'une goutte b. représentation des trajectoires des rayons incidents sur différentes gouttes et susceptibles d'atteindre l'observateur.



**Fig. 3.5.** Variation de l'intensité lumineuse reçue par une surface  $S$  se déplaçant suivant l'axe d'un faisceau lumineux conique.

## 2 Le minimum de déviation

Nous venons de montrer qu'un rayon rencontrant une goutte d'eau est dévié. Mais qu'advient-il d'un faisceau de rayons incidents sur cette goutte ? Les angles d'incidence  $i$  prennent toutes les valeurs entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$  et la goutte dévie ces rayons dans toutes les directions, comme indiqué sur la figure 3.4 a.

Qu'advient-t-il alors pour l'observateur au sol ? Il devrait recevoir des rayons provenant de toutes les directions de l'espace puisqu'il reçoit les rayons dans la direction  $\pi - D(i)$ , et que  $D(i)$  prend a priori toutes les valeurs (Fig. 3.4 b).

Cette description n'est pas conforme à notre expérience, qui nous dit que l'observateur voit une radiation, c'est-à-dire une couleur de l'arc-en-ciel, dans une direction bien déterminée. Pour comprendre cette directivité, il faut prendre en compte la notion d'intensité lumineuse qui était jusqu'alors absente de notre description. L'intensité lumineuse peut être correctement décrite par la notion de « concentration » de rayons. Considérons le faisceau conique de lumière de la figure 3.5. Par expérience, nous savons que l'intensité lumineuse au sommet du cône de lumière est plus grande qu'en n'importe quel autre point du faisceau. C'est l'effet loupe qui explique notamment le déclenchement de certains feux de forêt : un faisceau de lumière solaire est concentré par un bout de verre et converge sur une feuille

d'arbre. De même, plus la surface  $S$  est proche du point de convergence, plus l'intensité lumineuse qu'elle reçoit est grande. Comment traduire cette propriété en termes de rayons ? Nous admettrons que si la surface  $S_1$  coupe plus de rayons que  $S_2$  ( $S_1$  et  $S_2$  étant de même surface), elle reçoit une intensité lumineuse plus grande. Ainsi, en éloignant  $S_2$  du sommet du cône lumineux, elle intercepte de moins en moins de rayons. Si elle est très éloignée, l'intensité est trop faible et ne peut plus être détectée par l'œil.

Mais revenons à l'arc-en-ciel. À quelle condition notre observateur verra-t-il de la lumière dans une direction d'observation donnée ? D'après ce que nous venons de dire, il verra de la lumière, si cette direction correspond à une grande concentration de rayons.

Ce phénomène est obtenu pour un extremum de la déviation, qui dans ce cas précis est un minimum. En effet, si la déviation atteint un minimum, c'est que la différence de déviation pour deux incidences voisines est très petite. Ainsi, les rayons émergents de la goutte seront très proches et donneront une forte intensité lumineuse ; c'est dans cette direction que la radiation sera visible.

Calculons le minimum de déviation pour les deux premiers arcs, dits primaire et secondaire. Dans la pratique, seuls ces deux arcs sont visibles, l'intensité lumineuse diminuant à chaque réflexion dans la goutte (une partie de la lumière étant réfractée dans l'air).

### Minimum de déviation de l'arc primaire

Le minimum de déviation est obtenu lorsque la différentielle  $dD_1(i)$  s'annule :

$$dD_1 = 2di - 4dr = 0$$

On différencie la relation de Descartes  $\sin i = n \sin r$ , en considérant dans un premier temps  $n$  constant. On obtient alors  $\cos i \, di = n \cos r \, dr$ , soit :

$$dD_1 = 2di \left( 1 - 2 \frac{\cos i}{n \cos r} \right)$$

Le minimum ( $dD_1 = 0$ ) est donc atteint pour un angle d'incidence  $i_{1m}$  tel que :

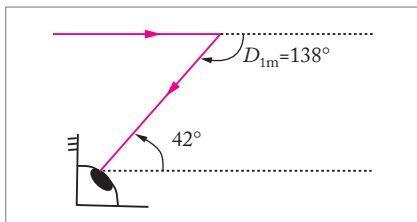
$$n \cos r_{1m} = 2 \cos i_{1m}$$

soit :

$$n^2(1 - \sin^2 r_{1m}) = 4 \cos^2 i_{1m}$$

avec  $n \sin r_{1m} = \sin i_{1m}$ , il vient :

$$n^2 - \sin^2 i_{1m} = 4 \cos^2 i_{1m}$$

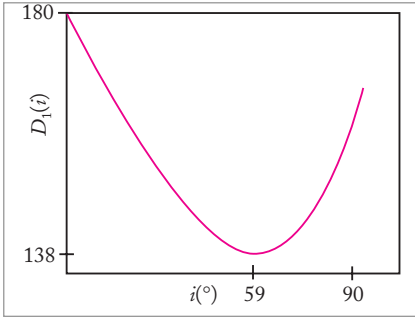


**Fig. 3.6.** Vision par un observateur au sol de l'arc-en-ciel primaire.

Nous en déduisons la valeur de  $i_{1m}$  :

$$\cos^2 i_{1m} = \frac{n^2 - 1}{3}$$

Pour l'eau  $n = \frac{4}{3}$ , nous obtenons donc  $i_{1m} = 59,4^\circ$ ,  $r_{1m} = 40,2^\circ$  soit  $D_{1m} = 138^\circ$ . L'observateur voit donc l'arc-en-ciel primaire sous un angle d'environ  $42^\circ$  (Fig. 3.6).

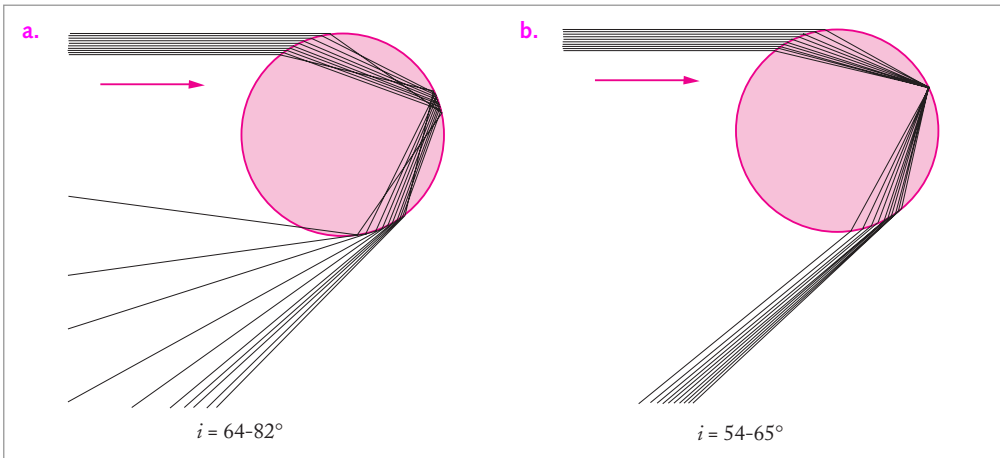


**Fig. 3.7.** Variation de la déviation d'un rayon  $D_1(i)$  en fonction de l'angle d'incidence  $i$  du rayon incident sur la goutte.

La courbe de la figure 3.7 représente les variations de la déviation  $D_1(i)$  pour des angles d'incidence sur la goutte variant de 0 à 90°. Pour tracer cette courbe, il suffit de calculer  $r$  pour différentes valeurs de  $i$  :

$$r = \arcsin \frac{\sin i}{n}$$

puis d'en déduire  $D_1(i) = \pi + 2i - 4r$ .



**Fig. 3.8.** Trajectoires de rayons incidents sur la goutte sous la forme d'un faisceau parallèle d'épaisseur  $0,05 R$  avec un angle d'incidence du rayon central sur la goutte compris entre **a.** 64 et 82° et **b.** 54 et 65°, et émergeant après une réflexion.

La figure 3.8 illustre qu'un faisceau fin incident sur la goutte avec cette incidence donne en effet un faisceau émergent plus concentré que pour une autre incidence.

Nous considérons dans les deux cas un faisceau incident d'« épaisseur »  $0,05 R$  ( $R$ , rayon d'une goutte), correspondant à une certaine intensité lumineuse. Sur la figure 3.8a, pour une incidence voisine de 70°, le faisceau émergent est divergent, donc peu lumineux ; au contraire, sur la figure 3.8b, pour un faisceau incident de même intensité, mais d'incidence voisine de l'incidence  $i_{1m}$ , le faisceau émergent est presque parallèle, donc beaucoup plus intense que dans le premier cas.

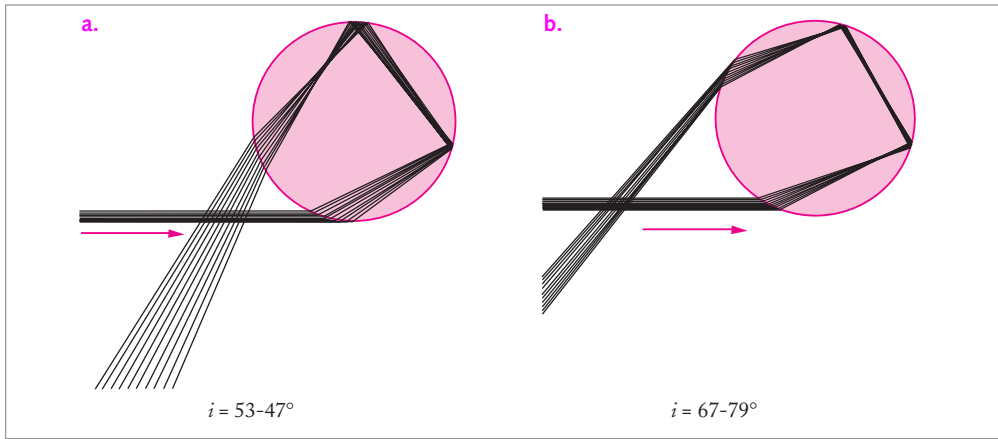
### Minimum de déviation pour l'arc secondaire

Un calcul identique pour  $D_2$  donne  $dD_2 = 2di - 6dr = 2 di \left( 1 - 3 \frac{\cos i}{n \cos r} \right)$ , soit  $i_{2m}$  tel que :

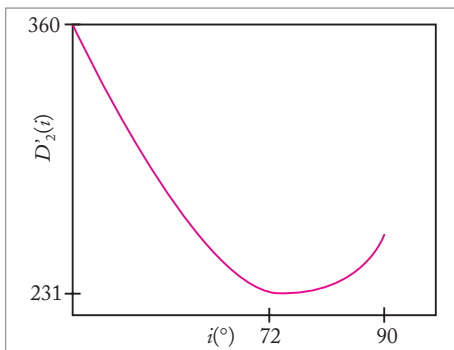
$$\cos_2 i_{2m} = \frac{n^2 - 1}{8}$$



Avec  $n = \frac{4}{3}$ , on obtient  $i_{2m} = 71,8^\circ$ ,  $r_{2m} = 45,4^\circ$  et  $D_{2m} = 129^\circ$ . L'observateur voit donc l'arc-en-ciel secondaire sous un angle d'environ  $51^\circ$ .



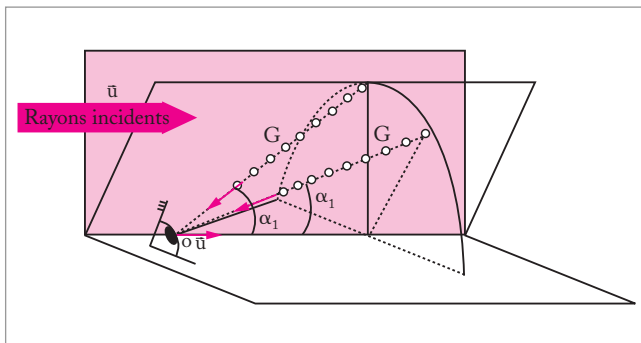
**Fig. 3.9. Trajectoires de rayons incidents sur la goutte** sous la forme d'un faisceau parallèle d'épaisseur  $0,03R$  avec un angle d'incidence du rayon central sur la goutte compris entre **a.**  $53-47^\circ$  et **b.**  $67-79^\circ$ , et émergeant après deux réflexions.



**Fig. 3.10. Variation de la déviation  $D'_2(i)$  en fonction de l'angle d'incidence  $i$ .**

Comme sur la figure 3.8, il apparaît sur la figure 3.9 que le faisceau émergent au minimum de déviation  $D_{2m}$  (Fig. 3.9 b) est plus concentré, donc plus lumineux, qu'en incidence quelconque (Fig. 3.9 a). Nous avons pris dans cet exemple un faisceau incident d'« épaisseur »  $0,03R$ .

La figure 3.10 représente la courbe de variation de la déviation  $D'_2(i)$  en fonction de l'angle d'incidence  $i$ .



**Fig. 3.11. Forme de l'arc-en-ciel primaire.** Les gouttes G situées sur le cône de centre O (l'observateur) et d'angle d'ouverture  $\alpha_1$  (par rapport à la direction  $\vec{u}$  des rayons incidents) renvoient un maximum d'intensité lumineuse dans la direction de l'observateur.

### 3 La forme de l'arc-en-ciel

Nous venons de comprendre pourquoi une radiation est vue sous un angle particulier lorsqu'on raisonne dans un plan et bien sûr en lumière monochromatique, c'est-à-dire sur une seule couleur du spectre de la lumière blanche incidente.

Examinons maintenant pourquoi, dans l'espace réel

à trois dimensions, la direction que nous venons de déterminer produit un arc lumineux. Le problème précédent à deux dimensions se résume à une direction de l'espace, caractérisée par un angle  $\alpha_1$  sous lequel l'observateur voit l'arc-en-ciel et un point particulier O, point où se situe l'observateur (Fig. 3.11). L'angle  $\alpha_1$  est repéré par rapport à la direction  $\vec{u}$  de la lumière incidente. Dans le raisonnement précédent, nous n'avons pas utilisé d'autre direction ou point particulier. Le plan dans lequel nous avons mené le raisonnement est donc un plan quelconque contenant la direction  $\vec{u}$  et le point O de l'observateur. Une infinité de plans contenant la droite  $(O, \vec{u})$  existent. Ils sont semblables aux pages d'un livre que l'on tourne autour de la reliure (direction  $O, \vec{u}$ ). Dans chacun de ces plans, toutes les gouttes G faisant un angle  $(O\vec{u}, \overrightarrow{OG})$  égal à  $\alpha_1$  contribuent à l'arc primaire. Ces gouttes sont donc sur un cône d'angle  $\alpha_1$  et la lumière reçue par l'observateur semble provenir d'un arc de même angle. Bien sûr, cette représentation reste valable si le point O est en translation, ce qui explique que l'arc-en-ciel se déplace avec l'observateur qui souhaiterait le rattraper !

#### 4 Les couleurs de l'arc-en-ciel

Il reste un point à comprendre : pourquoi les arcs-en-ciel sont-ils colorés alors que la lumière incidente est blanche ? Ce phénomène de décomposition de la lumière est classique des phénomènes de réfraction. Le spectre de la lumière blanche contient toutes les radiations comprises entre l'indigo ( $\lambda = 440$  nm) et le rouge ( $\lambda = 750$  nm). Or l'indice  $n$  de l'eau, que nous avons pris constant jusqu'ici, dépend en fait de la radiation considérée ; il ne varie pas beaucoup mais cela est suffisant pour décomposer la lumière.

Ainsi, le minimum de déviation que nous avons calculé en prenant  $n = \frac{4}{3}$  n'est en fait pas le même suivant la radiation considérée.

La formule de Cauchy donne la variation de l'indice  $n$  avec la longueur d'onde  $\lambda$  :

$$n^2 = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}$$

Nous retiendrons ici que l'indice optique de l'eau diminue lorsque la longueur d'onde augmente. Quelle conséquence cette dépendance de  $n$  sur  $\lambda$  a-t-elle sur nos calculs précédents ? En toute rigueur, il faudrait reprendre le calcul du minimum de déviation et prendre en compte, dans la différentielle de  $D$ , cette nouvelle dépendance. Nous ne le ferons pas mais il est facile de montrer que le résultat serait très peu modifié. Mais nous pouvons montrer que le minimum de déviation est légèrement modifié suivant la radiation considérée ; si  $D_m$  dépend de  $\lambda$ , chaque radiation est vue sous un angle légèrement différent, ce qui permet d'expliquer la coloration de l'arc-en-ciel.

#### Coloration de l'arc-en-ciel primaire

Nous supposons que le minimum de déviation est obtenu pour un angle d'incidence voisin de  $i_{1m}$  et ce quelle que soit la radiation considérée. Nous cherchons maintenant à déterminer la variation  $dD_m$  de l'angle de déviation en fonction de la longueur d'onde, c'est-à-dire en fonction de  $n(\lambda)$ . Le minimum de déviation  $D_m$  s'écrit comme une fonction de  $n$  :

$$D_{1m}(n) = \pi + 2i_{1m} - 4r(n)$$

avec  $n \sin r(n) = \sin i_{1m}$ . Nous avons alors, en considérant  $i_{1m}$  constant :

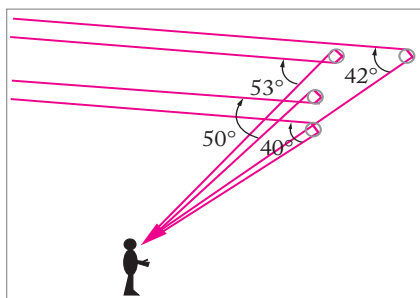
$$dD_{1m} = -4dr(n)$$

Différentions la loi de la réfraction en  $i_{1m}$ , toujours à  $i_{1m}$  constant :  $dn \sin r + n \cos r dr = 0$ .

Il vient donc :

$$dD_{1m} = 4 \frac{dn}{n} \tan r_{1m}$$

Le minimum de déviation  $D_{1m}$  augmente donc lorsque  $n$  augmente ( $dn > 0$ ), c'est-à-dire, lorsque  $\lambda$  diminue. L'angle sous lequel est vue une radiation étant  $\alpha_1 = \pi - D_{1m}$ , et avec  $\lambda(\text{rouge}) > \lambda(\text{bleu})$ , on a  $\alpha_1(\text{rouge}) > \alpha_1(\text{bleu})$  : la radiation rouge est vue au-dessus de la radiation bleue.



**Fig. 3.12. Arcs primaires et secondaires.** Dans la pratique, l'arc primaire est vu entre 40 et 42° et l'arc secondaire entre 52 et 53° environ.

### Coloration de l'arc-en-ciel secondaire

Effectuons le même calcul avec  $D_{2m} = -2i_{2m} + 6r$  :

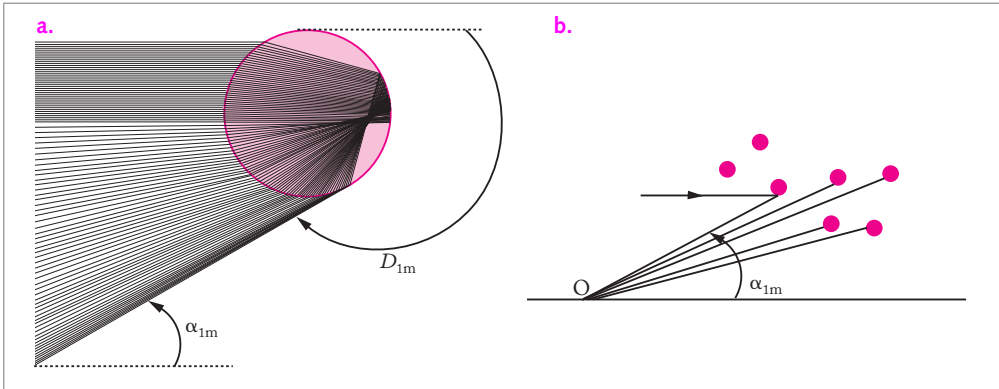
$$dD_{2m} = 4 \frac{dn}{n} \tan r_{2m}$$

La dépendance de  $D_{2m}$  en fonction de  $n$  est inverse à celle de  $D_{1m}$ . Les couleurs de l'arc-en-ciel secondaire sont donc inversées par rapport à celle de l'arc primaire : le rouge apparaît au-dessous du bleu.

## 5 La bande sombre d'Alexandre

Il nous reste un point à éclaircir, si l'on peut dire ! Un observateur attentif remarquera que le ciel situé sous l'arc-en-ciel primaire est plus lumineux que la portion comprise entre le primaire et le secondaire (les deux arcs sont séparés d'environ 10°). Que se passe-t-il dans cette zone ?

Revenons aux déviations  $D_1$  et  $D_2$  calculées précédemment. Le minimum de déviation ne correspond pas seulement à la direction du maximum d'intensité. C'est également, par définition, le plus petit angle que peut prendre la déviation. Ainsi, parmi tous les rayons subissant une réflexion dans une goutte, aucun n'est dévié d'un angle inférieur à  $D_{1m}$  et par conséquent, l'observateur ne reçoit aucun rayon lumineux, quelle que soit sa longueur d'onde, sous un angle supérieur à  $\alpha_{1m} = \pi - D_{1m} = 42^\circ$  (Fig. 3.13). De même, parmi les rayons subissant une double réflexion, aucun n'est dévié d'un angle inférieur à  $D'_{2m} = 231^\circ$ , c'est-à-dire, supérieur à  $D_{2m} = 2\pi - D'_{2m} = 129^\circ$ . Par conséquent, l'observateur ne reçoit aucun rayon sous un angle inférieur à  $\alpha_{2m} = D_{2m} = 50^\circ$ . La bande sombre d'Alexandre est donc comprise entre 42° et 50°, soit entre l'arc primaire et l'arc secondaire.



**Fig. 3.13.** a. Pour un large faisceau incident sur la goutte, les rayons réfractés correspondent tous à des déviations supérieures à  $D_{1m}$ . b. Au sol, seules les gouttes situées dans le cône d'angle  $\alpha_{1m} = \pi - D_{1m}$  sont susceptibles d'envoyer des rayons vers l'observateur. Les gouttes situées au-dessus ne renvoient pas de lumière, elles sont dans la bande sombre d'Alexandre.

### Un peu d'histoire

#### La bande sombre d'Alexandre

Le nom de « bande sombre d'Alexandre » n'a rien à voir avec le conquérant. Il s'agit d'un philosophe grec, Alexandre d'Aphrodisias, qui vécut environ en 200 ap. J.-C. Alexandre fut le premier à décrire que le ciel est plus noir dans la région comprise entre les deux arcs-en-ciel, primaire et secondaire. Il faudra attendre plus d'un siècle pour comprendre ce phénomène, lié au minimum de déviation des rayons lumineux dans une goutte. Alexandre décrira également que juste sous

l'arc-en-ciel principal, on observe des arcs supplémentaires alternativement roses et verts. Ces arcs, appelés surnuméraires, sont dus à l'interférence de rayons lumineux parallèles à l'entrée et à la sortie de la goutte, mais ayant suivi des chemins différents à l'intérieur. C'est le britannique G. Airy (1801-1892) qui proposera en 1836 une explication satisfaisante de ce phénomène, notamment grâce à la « fameuse » fonction d'Airy.

## 3.2. Le prisme

**Définition :** Un prisme est un ensemble de trois milieux transparents, homogènes et isotropes séparés par deux dioptrés plans. Les dioptrés plans sont dans la pratique limités à des segments AB et AC et forment un triangle, dans un plan de coupe ou plan de section principal. L'angle  $\hat{A} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  est appelé angle au sommet.

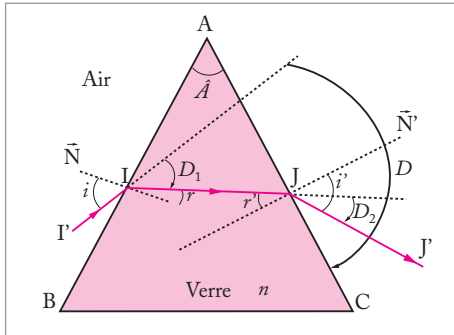
Nous limiterons notre étude au cas où les milieux extrêmes sont identiques (en général, de l'air) et où les rayons incidents sont situés dans un plan de section principale.

### 1 Formule du prisme

Considérons un rayon  $PI$  incident sur le prisme dans un plan de section principale. Le rayon fait un angle  $i$  avec la normale  $\vec{N}$  au dioptré AB (Fig. 3.14). Il se réfracte en I en res-

tant dans ce plan, qui coïncide avec le plan d'incidence. Notons  $r$  l'angle formé par le rayon réfracté et la normale  $\vec{N}$  à AB,  $r$  étant donné par la loi de réfraction de Descartes :

$$\sin i = n \sin r$$



**Fig. 3.14. Trajectoire d'un rayon incident sur un prisme dans le plan de section principale avec un angle  $i$  avec la normale au dioptre AB.**

Le rayon réfracté se propage dans le prisme et rencontre la face AC en J. Notons  $r'$  l'angle formé entre le rayon lumineux et la normale  $\vec{N}'$  au dioptre AC. Le rayon est alors réfracté dans l'air dans une direction JJ' faisant un angle  $i'$  par rapport à  $\vec{N}'$ . La loi de la réfraction de Descartes s'écrit en J :

$$n \sin r' = \sin i'$$

Notons qu'en I, le rayon incident est réfléchi par le dioptre AB dans l'air. De même, en J, le rayon IJ est réfléchi dans le prisme, rayon réfléchi qui, à son tour, générera une multiplicité de rayons réfléchis et réfractés. Cependant, à chaque réflexion dans le prisme, les rayons

perdent en intensité lumineuse. Il est donc raisonnable de limiter l'étude au rayon sortant du prisme sans y avoir subi aucune réflexion. Ce rayon porte une plus grande intensité lumineuse.

Il est possible d'établir des relations entre les angles  $i, i', r, r', \hat{A}$  et la déviation  $D$ , définie par  $D = \widehat{(\vec{I'I}, \vec{J'J})}$ .

### Relation entre $r, r'$ et $\hat{A}$ :

Avec  $\widehat{(\vec{N}, \vec{IJ})} + \widehat{(\vec{IJ}, \vec{N}')} = \widehat{(\vec{N}, \vec{N}')}$ , nous obtenons :

$$r + r' = \hat{A}$$

### Relation entre $D, i, i'$ et $\hat{A}$ :

La déviation  $D_1$  du rayon IJ, réfracté dans le prisme, par rapport au rayon incident s'écrit  $D_1 = i - r$ . Celle,  $D_2$ , du rayon JJ' réfracté dans l'air, par rapport au rayon IJ s'écrit  $D_2 = i' - r'$ . La déviation totale du rayon est  $D = D_1 + D_2$  :

$$D = i + i' - r - r'$$

$$D = i + i' - \hat{A}$$

Ces deux relations constituent les formules du prisme. Pour un prisme de petit angle au sommet  $\hat{A}$  et une faible incidence, ces relations prennent une forme simplifiée car on peut exprimer simplement  $i$  et  $i'$  en fonction de  $n, r$  et  $r'$  :

$$i = nr \text{ et } i' = nr'$$

La première expression est obtenue car  $i$  est petit. Avec  $\hat{A} = r + r'$  petit, nous pouvons déduire que  $r'$  est également petit et conclure sur la deuxième relation.

Nous obtenons les formules approchées du prisme :

$$\hat{A} = r + r'$$

$$D = (n - 1) \hat{A}$$

### Les spectrographes

Les spectrographes, qui sont utilisés pour déterminer la composition spectrale d'une lumière, comportent souvent un ou plusieurs prismes. Sous leur forme simple, ils comportent une fente source  $S$ , deux lentilles, un prisme et un écran. La lumière étudiée éclaire la fente  $S$  placée dans le plan focal d'une première lentille. À chaque point de  $S$  correspond un faisceau parallèle qui est dévié

par le prisme, et cela d'autant plus que sa longueur d'onde est courte. Les faisceaux reçus par une seconde lentille convergent dans son plan focal sur des images monochromatiques qui peuvent s'échelonner entre le rouge et le bleu. En isolant une de ces images par une « fente de sortie », l'instrument devient un mono-chromateur.

## 2 Condition d'émergence

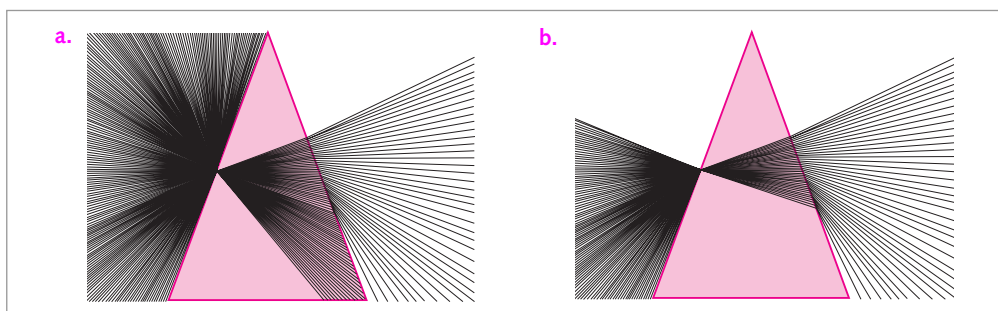
Nous avons supposé jusqu'ici que le rayon  $PI$  incident sur la face  $AB$  donnait après réfraction dans le prisme un rayon  $JJ'$  émergeant par la face  $AC$ . Cela est-il toujours le cas ? La réponse est non et nous allons établir la condition, appelée condition d'émergence, pour que cela soit le cas. Nous supposons que  $AC$  est assez long pour que le rayon  $IJ$  rencontre toujours la face  $AC$ . Dans la pratique, nous pouvons être limité par la longueur finie de la face  $AC$ .

Le rayon  $PI$  rencontrant la face  $AB$  est toujours réfracté dans le prisme car le milieu dans lequel il se propage est, par hypothèse, moins réfringent que celui du prisme (on a pris l'air dans nos calculs). L'angle  $r$  est donc dans le cône de réfraction, c'est-à-dire inférieur à l'angle limite de réfraction :

$$-i_1 \leq r \leq i_1 \text{ avec } i_1 = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right).$$

Pour que le rayon  $IJ$  qui rencontre la face  $AC$  émerge, il faut que son angle d'incidence  $r'$  soit dans le cône d'incidence, c'est-à-dire inférieur à l'angle d'incidence critique :

$$-i_c \leq r' \leq i_c \text{ avec } i_c = i_1 = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right).$$



**Fig. 3.15.**  $\hat{A} = 30^\circ$ . **a.** Tous les rayons incidents possibles sont représentés :  $-\frac{\pi}{2} \leq i \leq \frac{\pi}{2}$ . Les rayons réfléchis dans le prisme ne sont pas représentés. **b.** Seuls les rayons dont l'incidence permet qu'ils traversent le prisme sont représentés.

Nous obtenons donc une première condition sur l'angle  $\hat{A}$  du prisme :

$$\hat{A} \leq 2 i_c.$$

Si cette condition n'est pas vérifiée ( $\hat{A} > 2 i_c$ ), aucun rayon ne peut traverser le prisme.

Si la condition est vérifiée, les rayons qui traversent le prisme vérifient :

$$-i_c \leq r' \leq i_c,$$

et, avec  $r = \hat{A} - r'$ , on obtient :

$$\hat{A} - i_c \leq r \leq \hat{A} + i_c$$

Les deux encadrements de  $r$  donnent finalement :

$$\hat{A} - i_c \leq r \leq i_c$$

Les deux rayons extrêmes qui traversent le prisme sont donnés par :

$$r = i_c; \quad i = \frac{\pi}{2}; \quad r' = \hat{A} - i_c; \quad i'_{\min} = i_0.$$

$$r = \hat{A} - i_c; \quad i = i_0; \quad r' = i_c; \quad i'_{\max} = \frac{\pi}{2}$$

avec  $i_0 = \arcsin(n \sin(\hat{A} - i_c))$ .

### Déviations par un prisme

La déviation  $D = i + i' - \hat{A}$  peut être considérée comme une fonction des variables indépendantes  $n$ ,  $\hat{A}$  et  $i$  ( $i'$  dépend de  $\hat{A}$ ,  $i$  et  $n$ ). Pour étudier la déviation, nous allons différentier  $D$ , puis étudier ses variations en fonction des trois variables dont elle dépend.

$$dD(i, n, \hat{A}) = di + di'(n, i, \hat{A}) - d\hat{A}$$

Calculons l'élément différentiel  $di'$  en fonction de  $dn$ ,  $d\hat{A}$  et  $di$  avec la loi de la réfraction exprimée en I et J :

$$\sin i = n \sin r \quad \text{soit} \quad \cos i \, di = \sin r \, dn + n \cos r \, dr$$

$$\sin i' = n \sin r' \quad \text{soit} \quad \cos i' \, di' = \sin r' \, dn + n \cos r' \, dr'.$$

La relation  $\hat{A} = r + r'$  donne :  $d\hat{A} = dr + dr'$ .

On a finalement :

$$dD(i, n, \hat{A}) = \frac{\sin \hat{A}}{\cos i' \cos r} dn + \left( \frac{n \cos r'}{\cos i'} - 1 \right) d\hat{A} + \left( 1 - \frac{\cos i \cos r'}{\cos r \cos i'} \right) di$$

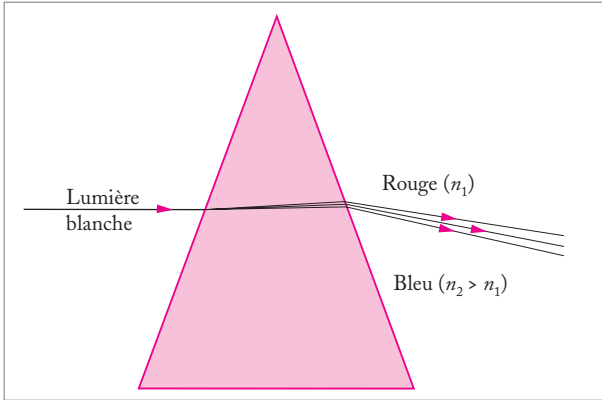
### Variation de la déviation en fonction de l'indice

Avec  $\hat{A}$  et  $i$  fixés, on a :

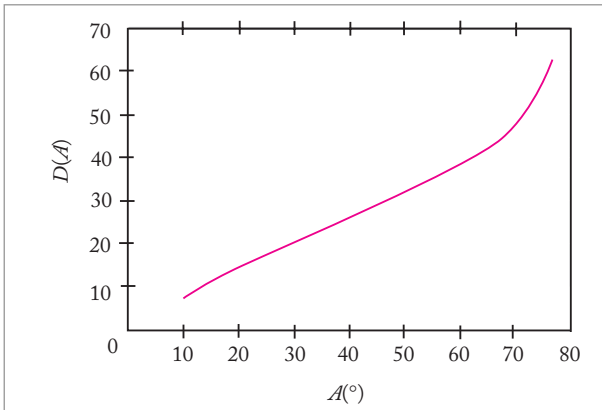
$$\frac{\partial D}{\partial n} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos i' \cos r}$$

$$\frac{\partial D}{\partial n} = \frac{\sin \hat{A}}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2(\hat{A} - r)} \sqrt{1 - \sin^2 r}}$$

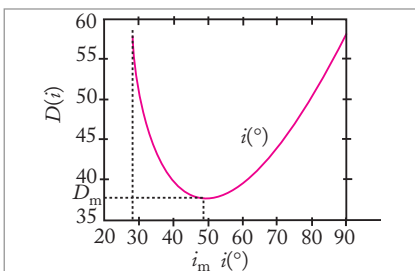
avec  $r = \arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right)$ . La figure 3.16 montre, pour  $\hat{A} = 30^\circ$ ,  $i = 60^\circ$ , la forme de la dépendance de  $\frac{\partial D}{\partial n}$  et de  $D$  en fonction de  $n$ .



**Fig. 3.16.** Variation  $\frac{\partial D}{\partial n}$  et de  $D$  en fonction de  $n$  pour un prisme d'angle  $\hat{A} = 30^\circ$  et pour un rayon incident sur le prisme avec un angle d'incidence  $i$  égal à  $60^\circ$ .



**Fig. 3.17.** Variation de la déviation en fonction de l'indice du prisme. Les grandes valeurs de  $n$  induisent des déviations plus importantes. Les plus grandes longueurs d'onde correspondant à de plus petites valeurs de  $n$  (loi de Cauchy, chapitre 3), elles sont moins déviées : ainsi le rouge est-il moins dévié que le bleu.



**Fig. 3.18.** Variation de la déviation  $D$  en fonction de l'angle d'incidence  $i$  du rayon incident sur la goutte. Le prisme a un angle  $A = 60^\circ$  et un indice de réfraction  $n = 1,5$  ( $i_0 = 27,92^\circ, i_m = 48,61^\circ$ ).

La déviation augmente avec l'indice du prisme. Ainsi, comme les gouttes d'eau pour l'arc-en-ciel, le prisme est susceptible de décomposer la lumière blanche : avec  $n$  croissant pour des longueurs d'ondes décroissantes, le prisme dévie davantage les faibles longueurs d'onde (Fig. 3.16).

### Variation de la déviation en fonction de l'angle du prisme

Avec  $n$  et  $i$  fixés, on a :

$$\frac{\partial D}{\partial \hat{A}} = \frac{n \cos r'}{\cos i'} - 1$$

Avec  $n > 1$ ,  $i'$  est supérieur à  $r'$ , donc  $\cos i'$  est inférieur à  $\cos r'$  et  $D$  est une fonction croissante de  $\hat{A}$ . La déviation croît avec l'angle du prisme.

### Variation de la déviation en fonction de l'angle d'incidence

Avec  $n$  et  $\hat{A}$  fixés, on a :

$$\frac{\partial D}{\partial i} = 1 - \frac{\cos i \cos r'}{\cos r \cos i'}$$

La déviation atteint un extremum lorsque :

$$\cos i \cos r' = \cos r \cos i'$$

Élevons l'égalité au carré et introduisons les sinus :

$$(1 - n^2 \sin^2 r) (1 - \sin^2 r') = (1 - n^2 \sin^2 r') (1 - \sin^2 r)$$



$$(1 - n^2)(\sin^2 r - \sin^2 r') = 0$$

Avec  $n > 1$ , l'extremum est atteint lorsque  $r = r'$  ou  $r = -r'$ . La solution  $r = -r'$  n'est pas acceptable car  $\hat{A} = r + r'$ . On retient donc la solution  $r = r' = \frac{\hat{A}}{2}$ . L'angle d'incidence correspondant est donné par  $i_m$  :

$$i_m = \arcsin \left( n \sin \left( \frac{\hat{A}}{2} \right) \right),$$

et

$$D_m = 2i_m - \hat{A}.$$

Le domaine de définition de  $D(i)$  étant  $[i_0, \frac{\pi}{2}]$ , il suffit de calculer  $\frac{\partial D}{\partial i}$  pour  $i = i_0$

( $r = \hat{A} - i_c, i = \frac{\pi}{2}; r' = i_c; i' = \frac{\pi}{2}$ ) et pour  $i = \frac{\pi}{2}$  ( $r = i_c; r' = \hat{A} - i_c, i' = \frac{\pi}{2}$ ). Nous obtenons :

$$\frac{\partial D}{\partial i}(i_0) \rightarrow -\infty \quad \text{et} \quad \frac{\partial D}{\partial i}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Nous en déduisons le tableau de variation de la fonction  $D(i)$  :

$i$	$i_0$	$i_m$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\partial D}{\partial i}$	$-\infty$	$-$	$0$
$D$	$i_0 + \frac{\pi}{2} - \hat{A}$	$2i_m - \hat{A}$	$i_0 + \frac{\pi}{2} - \hat{A}$

### 3 Application : mesure de l'indice d'un prisme

Pour mesurer l'indice  $n$  d'un prisme, nous utilisons les résultats précédents sur le minimum de déviation. Outre certaines nécessités pratiques que nous ne développerons pas ici, il est intéressant de se placer à l'incidence  $i_m$  pour obtenir une mesure précise de  $n$ . En effet, nous avons :

$$i_m = i'_m = (D_m + \hat{A})/2$$

$$r_m = r'_m = \hat{A}/2$$

et avec  $\sin i_m = n \sin r_m$  :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\hat{A} + D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)}$$

$\hat{A}$  étant connu, la mesure de  $n$  nécessite la mesure de  $D_m$ . Quelle est alors l'erreur commise sur  $n$  ? Effectuons la dérivée logarithmique de l'expression précédente, il vient :

$$\left(\frac{dn}{n}\right) = \left[\frac{1}{2} \cotan\left(\frac{\hat{A} + D_m}{2}\right)(d\hat{A} + dD_m) - \cotan\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)d\hat{A}\right]$$

avec  $d\hat{A} = -dD_m$ , et par suite  $\varepsilon = \Delta D_m = \Delta \hat{A}$ , on obtient l'erreur relative sur  $n$  :

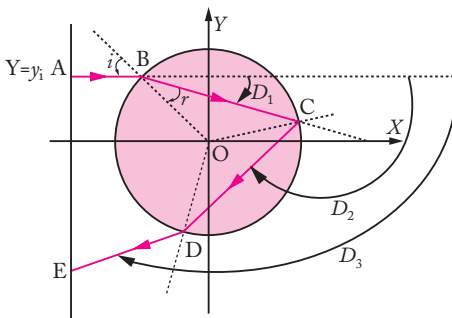
$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{1}{2} \cotan\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) \epsilon$$

En effectuant un montage très soigné, la mesure de l'indice par cette méthode peut être rendue très précise. En effet, si les angles sont déterminés à 2 minutes près ( $\epsilon \approx 6.10^{-4}$  rad), et avec un prisme dont la section est un triangle équilatéral ( $\hat{A} = 60^\circ$ ), on obtient une erreur relative sur  $n$  de  $5.10^{-4}$ .

## Recherche & Développement

### Exercice de programmation

Comment tracer les trajectoires des rayons incidents sur une goutte ? Nous proposons ici un programme très simple qui permet de calculer ces trajectoires. Le repère  $(O, X, Y)$  est représenté ci-dessous,  $O$  coïncidant avec le centre de la goutte. La condition initiale des rayons est un rayon incident horizontal à une hauteur  $y_i$  variable; on choisira cependant  $y_i$  entre  $O$  et  $R$ .

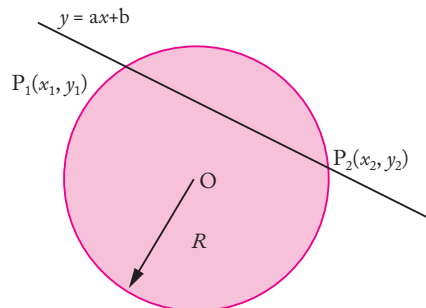


Nous nous intéressons aux rayons ayant subi une réflexion dans la goutte. Les déviations à la réflexion et aux réfractions à l'entrée et à la sortie étant connues, il suffit de calculer des points particulier de ce rayon :

- A, point de départ du rayon dans le plan vertical du tir des rayons ;
- B, point d'entrée du rayon dans la goutte ;
- C, point où le rayon est réfléchi dans la goutte ;
- D, point de sortie du rayon ;

E, point d'impact du rayon émergent dans le plan initial vertical (par exemple).

L'équation des segments qui joignent ces points est connue grâce à l'expression des déviations  $D_1$ ,  $D_2$  et  $D_3$  connues. Remarquons que nous aurions pu également programmer la loi de la réfraction aux points B et D et la loi de la réflexion au point C, mais cette programmation est un peu plus fastidieuse car il faut alors calculer les angles formés par le rayon incident avec la normale locale à l'interface (mais cela est bien sûr faisable !). Le programme principal fait appel à la fonction nommée « inters ». Que fait la fonction inters ? Elle calcule les coordonnées du point d'intersection  $P_2(x_2, y_2)$  d'une droite d'équation  $y = ax + b$  avec le cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ . Comme il existe (dans les cas que nous considérons) deux points d'intersection  $P_1$  et  $P_2$ , un des arguments de la fonction inters est l'abscisse  $x_1$  du point d'intersection  $P_1$  connu.



La détermination des coordonnées de  $P_1$  et  $P_2$  conduit à la résolution du système:  
 $x^2+y^2 = R^2$  et  $y = ax+b$

d'où l'équation du second degré sur  $x$ :  
 $(1+a^2)x^2 + 2abx + b^2 - R^2 = 0$

Le déterminant vaut  $\delta = a^2b^2 - (1+a^2)(b^2-R^2)$ .  
 Les deux racines s'écrivent :

$$x_{1,2} = \frac{-ab \pm \sqrt{\delta}}{(1+a^2)}$$

En résumé, le point A étant fixé, nous calculons les coordonnées des points B, C, D et E. Il reste alors pour la représentation graphique à tracer les segments de droites AB, BC, CD et DE !

Le programme ci-dessous est destiné au logiciel Matlab.

*% nous avons initialisé auparavant y à une série de valeurs, correspondant aux hauteurs du point A*

```
Ntirs=10 ;
y=linspace(O,R,Ntirs);
for ii=1:Ntirs
yA=y(ii);
% coordonnées xB et yB du point B sur le cercle, à la même hauteur que le point A
yB=yA;
xB=-sqrt(RR^2-yB^2);
% calcul de l'angle d'incidence i du rayon sur la goutte en B
if xB==0 then i=0
else i=atan(yB./xB);
endif
% calcul de l'angle r du rayon réfracté dans la goutte en B
r=asin(sin(i)/n);
```

*% coordonnées xC et yC du point C*  
*l'équation de la droite BC, inclinée de D1 par rapport à Ox et passant par le point B est: y = tanD1 (x-xB) + yB D1=i-r;*

```
[xC,yC]=inters(tan(D1),tan(D1)*xB+yB,RR,xB);
```

*% coordonnées xD et yD du point D*

*l'équation de la droite CD, inclinée de D2 par rapport à Ox et passant par le point C est:*

```
y%=tanD2(x-xC)+yC avec D2=pi-3*r+i;
[xD,yD]=inters(tan(D2),tan(D2)*xC+yC,RR,xC);
```

*% coordonnées xE et yE du point E*

*l'équation de la droite DE, inclinée de D3 par rapport à Ox et passant par le point D est:*

```
y=tanD3(x-xD)+yD avec D3=2*pi-4*r+2*i;
xE=xA;
yE=tan(D3)*(xA-xE);
```

```
function [x2,y2]=inters(a,b,R,x1)
delta= a^2*b^2-(b^2-R^2)*(1+a^2);
if delta < 0, then writte 'pas d'intersection !'
else if
xc1=(-a*b+sqrt(delta))/(1+a^2);
xc2=(-a*b-sqrt(delta))/(1+a^2);
```

*% due aux erreurs numériques, le test pour reconnaître P1 est posée sous la forme d'une %inégalité*

```
if abs(xc1-x1)>abs(xc2-x1); then
x2=xc1;
elseif x2=xc2; endif
y2=a*x2+b;
```

## Résumé du cours

### Le prisme

◆ Un prisme est un ensemble de trois milieux transparents, homogènes et isotropes séparés par deux dioptries plans. Les dioptries plans sont dans la pratique limités à des segments AB et AC et forment un triangle, dans un plan de coupe ou plan de section principale. L'angle  $\hat{A} = (\overline{AB}, \overline{AC})$  est appelé angle au sommet.

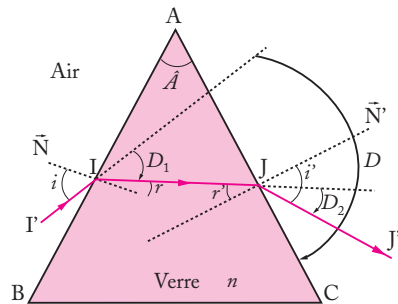
◆ Les formules du prisme sont :

$$r + r' = \hat{A}$$

$$D = i + i' - \hat{A}$$

◆ Pour un prisme d'indice  $n$  dans l'air d'indice 1, lorsque les angles  $i$ ,  $i'$  et  $A$  sont faibles, on peut également écrire :

$$D = (n - 1) \hat{A}$$



## Exercices

1 Un rayon lumineux monochromatique pénètre dans une sphère homogène transparente d'indice  $n > 1$  et émerge après s'être réfléchi une fois à l'intérieur de la sphère.

- Déterminer la déviation  $D$  du rayon en fonction des angles  $i$  et  $r$  d'incidence et de réfraction.
- Montrer que cette déviation passe par un extremum  $D_m$  et déterminer l'angle d'incidence  $i_m$  correspondant à cet extremum.
- Déterminer les valeurs numériques de cet extremum pour des gouttes d'eau d'indice  $n = 4/3$ .
- En se plaçant au minimum de déviation, on considère le rayon incident constitué par deux radiations voisines pour lesquelles  $\Delta n = 4 \cdot 10^{-4}$ . Quelle est la radiation la plus déviée ? Quel est l'écart angulaire entre les deux radiations émergentes. En déduire comment se forme l'arc-en-ciel.

2 On considère un prisme, caractérisé par son indice  $n$  et son angle au sommet  $A$ , supposé petit. Le prisme est plongé dans l'air, dont l'indice est pris égal à 1 et on envoie un rayon lumineux de sorte que le rayon arrive sur le prisme en faisant un angle  $\alpha$  avec la normale à la face d'entrée

du prisme. Calculer la déviation  $D$  du rayon émergeant du prisme en fonction de  $n$  et de  $A$ .

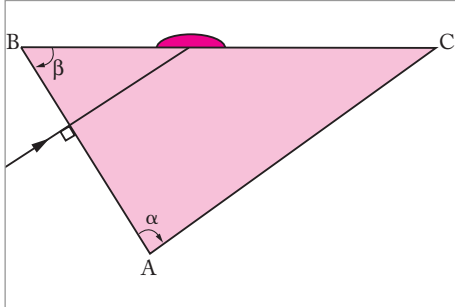
3 On considère un prisme dont la base est un triangle équilatéral. Le prisme d'indice  $n = 1,5$  est plongé dans l'air (dont l'indice est pris égal à 1) puis dans l'eau (d'indice égal à  $4/3$ ).

Quelle est, dans chaque cas, la valeur de son angle de déviation minimale  $D_m$  ?

4 Un prisme est placé de telle sorte que l'une de ses faces est en contact avec un liquide d'indice  $n$  et l'autre face est en contact avec l'air (d'indice pris égal à 1). À travers le liquide, on envoie un rayon lumineux en incidence rasante sur la première face du prisme et on mesure son angle d'émergence  $i'$  dans l'air. Le prisme est caractérisé par son angle  $A = 90^\circ$  et son indice  $N = \sqrt{3}$ .

- Déterminer l'indice  $n$  du milieu ( $i' = 60^\circ$ ).  $N$  peut-il être choisi quelconque ?
- Les incertitudes sur  $N$  et  $i'$  étant respectivement  $\Delta N = 10^{-5}$  et  $\Delta i' = 1' = (1/60)^\circ$ , déterminer l'incertitude  $\Delta n$  sur  $n$ .

5 On considère un prisme en verre ABC d'indice  $n = 1,5$  d'angles  $\alpha = 90^\circ$  et  $\beta = 60^\circ$ . Un rayon entre dans le prisme par la face AB en incidence normale et rencontre la face BC en I, où l'on place une goutte d'un liquide transparent d'indice  $n_0$ .

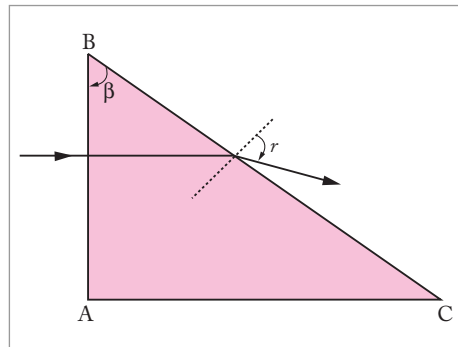


1. Trouver la limite de l'indice  $n_0$  du liquide pour qu'il y ait réflexion totale en I.
2. Dans ce cas, suivre la marche du rayon qui sort par la face AC et trouver la déviation totale du rayon.

6 Un prisme de verre d'indice  $n = 1,51$  a pour section principale ABC un triangle rectangle

en A. On note  $\beta$  l'angle  $\widehat{ABC}$ . Le prisme est plongé dans l'air d'indice égal à 1,00. On éclaire la face d'entrée AB sous incidence normale.

1. Calculer la valeur de l'angle de réfraction  $r$  à la sortie du prisme lorsque  $\beta = 30,0^\circ$ .
2. Soit  $\beta_1$  la valeur limite de l'angle en B à partir de laquelle il y a réflexion totale sur la face BC du prisme. Calculer la valeur de  $\beta_1$ .
3. Quelle est la valeur  $\beta'$  de  $\beta$  telle que les rayons lumineux, après réflexion totale sur la face BC, émergent du prisme perpendiculairement à la face AC ?





# Stigmatisme et approximation de Gauss

Nous avons étudié dans le chapitre 2 les lois qui permettent de prévoir la trajectoire d'un rayon. Dans la pratique, un point source n'émet pas qu'un rayon lumineux mais une infinité de rayons. Parmi ces rayons, certains parviennent à l'œil d'un observateur, ce qui permet à l'objet d'être « vu ». Prenons l'exemple d'un observateur regardant la lumière émise par un phare lointain. À l'œil nu, l'observateur verra le point lumineux du phare à l'endroit réel où le phare se trouve. Mais s'il se munit d'une paire de jumelle, l'observateur verra le point lumineux du phare plus proche qu'il ne l'est réellement. Pour faire la distinction entre la position réelle de l'objet lumineux et la position où l'observateur « voit » cet objet, nous introduisons dans ce chapitre les notions d'objet et d'image. Mais tout objet a-t-il une image ? Ce n'est pas toujours le cas, mais dans le cadre du stigmatisme rigoureux ou approché, on peut, à un objet, associer une image. La position de l'objet et celle de son image sont alors reliées par une relation, dite relation de conjugaison.

## 4.1. Image d'un point lumineux à travers un système optique

- 1 Systèmes dioptrique et catadioptrique
- 2 Notion d'objet et d'image
- 3 Espace objet, espace image

## 4.2. Stigmatisme rigoureux

- 1 Définition du stigmatisme rigoureux. Points conjugués et relation de conjugaison
- 2 Condition de stigmatisme
- 3 Exemple de stigmatisme rigoureux par réflexion : le miroir plan et le miroir parabolique
- 4 Points de Weierstrass du dioptrique sphérique
- 5 Aplanétisme et condition d'Abbe
- 6 La condition d'Herschel

## 4.3. Notion de stigmatisme approché

- 1 Définition du stigmatisme approché
- 2 Exemple de stigmatisme approché : le dioptrique plan
- 3 Les systèmes centrés dans l'approximation de Gauss

### Mots-clés

- Objet ● Image ● Stigmatisme ● Points de Weierstrass ● Condition d'Abbe
- Condition d'Herschel

# 4.1. Image d'un point lumineux à travers un système optique

## 1 Systèmes dioptrique et catadioptrique

**Définition :** On appelle système optique une succession de milieux homogènes et transparents, limités par des dioptries ou des miroirs : si le système ne comporte que des dioptries, il est dit dioptrique ; s'il contient au moins un miroir, il est dit catadioptrique (Fig. 4.1).

Dans ce chapitre, les systèmes optiques figurés seront dioptriques et on s'intéressera à la lumière réfractée à travers les dioptries successifs : on suit la lumière de la gauche vers la droite. Bien sûr, on peut reprendre toutes les figures en raisonnant sur des systèmes catadioptriques, à condition d'inverser le sens de propagation de la lumière à chaque miroir.

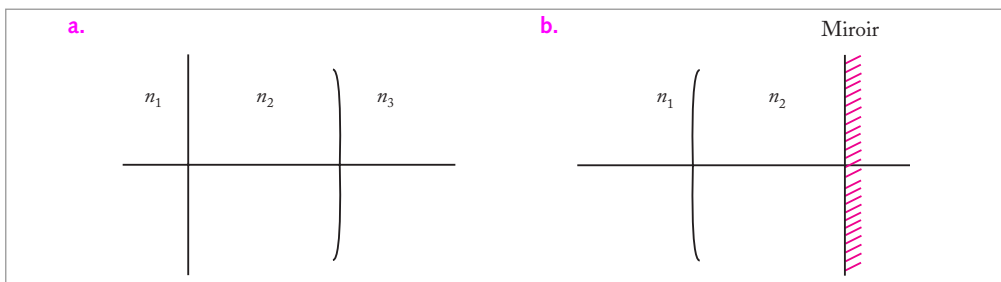


Fig. 4.1. Exemple de système dioptrique (a.) et de système catadioptrique (b.).

## 2 Notion d'objet et d'image

Soit un système optique figuré par ses deux faces extrêmes ( $\Sigma_1$ ) et ( $\Sigma_2$ ). ( $\Sigma_1$ ), qui est du côté de la lumière incidente et reçoit les rayons lumineux, est la face d'entrée ; la face ( $\Sigma_2$ ) est la face de sortie.

Le faisceau lumineux incident (nous ne nous intéressons pas à la façon dont il a été généré) rencontre la face d'entrée ( $\Sigma_1$ ). Une partie de ce faisceau pénètre dans le système optique, chemine à travers lui et en sort par ( $\Sigma_2$ ), constituant le faisceau émergent.

### Objet réel ou virtuel

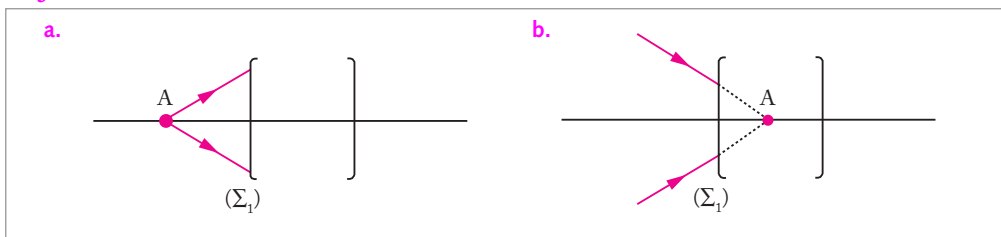


Fig. 4.2. Objets définis par rapport à la face d'entrée ( $\Sigma_1$ ). a. Objet A réel ; b. Objet A virtuel.

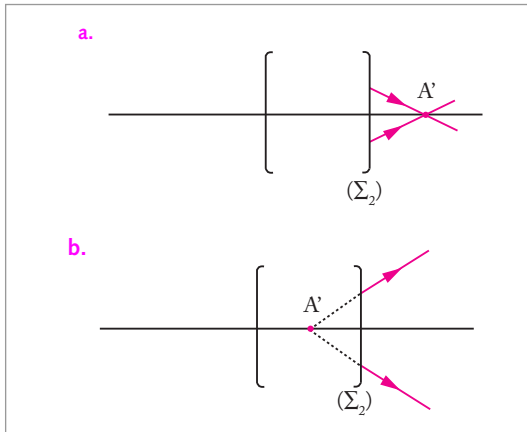
Si le faisceau incident est conique de sommet A, le point A peut être considéré par le système optique comme un objet. On rappelle qu'un cône est un ensemble de droites passant par un point fixe.



**Définition :** Si le faisceau incident est conique de sommet  $A$ ,  $A$  est un objet. Si le faisceau conique incident est divergent au niveau de  $(\Sigma_1)$ , l'objet  $A$  est dit réel. Si le faisceau incident est convergent au niveau de  $(\Sigma_1)$ , l'objet est dit virtuel.

Un objet réel est donc un point qui émet effectivement des rayons ou, du moins, qui se comporte comme s'il émettait des rayons lumineux. En revanche, un objet virtuel n'émet pas de rayons, il est le point de convergence de rayons virtuels.

### Image réelle ou virtuelle

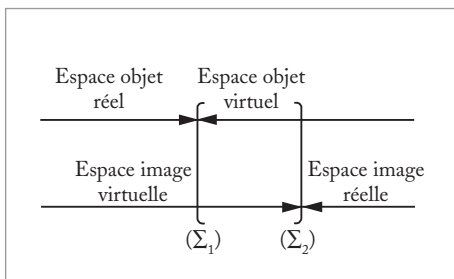


**Fig. 4.3.** Images définies par rapport à la face de sortie  $(\Sigma_2)$ . a. Image réelle ; b. Image virtuelle.

**Définition :** Si le faisceau émergent est conique de sommet  $A'$ , on dit que  $A'$  est l'image du point  $A$  à travers le système optique. Si le faisceau conique est convergent au niveau de  $(\Sigma_2)$ , les rayons qui le constituent passent effectivement par  $A'$  : l'image  $A'$  de  $A$  est dite réelle. Si le faisceau conique est divergent,  $A'$  est située sur la partie virtuelle de ces rayons :  $A'$  est appelée image virtuelle.

Rien ne distingue pour un observateur une image réelle d'une image virtuelle (Fig. 4.3). Un observateur placé à droite de  $(\Sigma_2)$  reçoit des rayons lumineux, dans le cas d'une image réelle, qui proviennent effectivement de  $A'$ , et, dans le cas d'une image virtuelle,

qui semble provenir de  $A'$ . Dans les deux cas, il a l'impression qu'il y a en  $A'$  un véritable objet lumineux.



**Fig. 4.4.** Espaces objet réel/virtuel et espaces image réel/virtuel.

### 3 Espace objet, espace image

Les espaces objet et image sont définis par rapport aux deux dioptries extrêmes  $(\Sigma_1)$  et  $(\Sigma_2)$  qui constituent le système optique. Avec la convention usuelle de propagation de la lumière de la gauche vers la droite, un objet placé à gauche du dioptré d'entrée  $(\Sigma_1)$  émet un faisceau qui pénètre dans le système optique sous la forme d'un faisceau conique divergent : l'espace à gauche de la face d'entrée du système optique est nommé l'« espace

objet réel ». Un raisonnement analogue permet de définir l'espace objet virtuel à droite de la face d'entrée  $(\Sigma_1)$ , les espaces images virtuelle et réelle respectivement à droite et à gauche de la face de sortie  $(\Sigma_2)$  du système optique (Fig 4.4).

## 4.2. Stigmatisme rigoureux

Dans les définitions précédentes, nous avons considéré le cas où un objet ponctuel donne une image ponctuelle, les faisceaux étant supposés coniques pour définir un objet ou une image. Cette condition, appelée le **condition de stigmatisme**, peut s'exprimer à l'aide du principe de Fermat. Mais la condition de stigmatisme n'est pas toujours réalisée et la plupart des systèmes optiques, à commencer par le dioptré, donne d'un objet ponctuel une image « floue », c'est-à-dire une tache plutôt qu'un point. Nous pouvons cependant définir une condition, appelée condition de stigmatisme approchée, qui permet d'associer une image ponctuelle à un objet ponctuel. C'est l'objet du paragraphe suivant.

### 1 Définition du stigmatisme rigoureux.

#### Points conjugués et relation de conjugaison

**Définition :** Un système optique est dit rigoureusement stigmatique pour un couple de points  $A$  et  $A'$  si tout rayon passant par  $A$  passe par  $A'$  après avoir traversé le système optique.

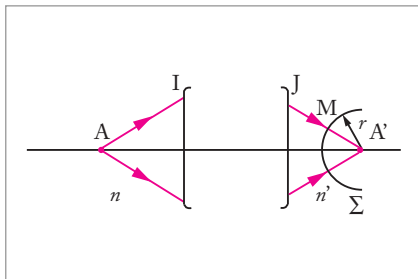
D'après le principe de retour inverse de la lumière, tout rayon passant par  $A'$  passe par  $A$  après avoir traversé le système optique. On dit que les points  $A$  et  $A'$  sont des points conjugués par le système optique et la relation qui lie les positions relatives de  $A$  et  $A'$  est appelée la **relation de conjugaison**.

### 2 Condition de stigmatisme

Nous nous proposons d'établir la condition de stigmatisme pour un système optique.

#### Cas d'un objet réel $A$ et d'une image réelle $A'$

Le système optique sépare deux milieux d'indice  $n$  et  $n'$ . Le point objet  $A$  est dans le milieu d'indice  $n$  et l'image réelle  $A'$  dans un milieu d'indice  $n'$ .



**Fig. 4.5.** Condition de stigmatisme pour un système optique symbolisé par ses faces d'entrée et de sortie. Dans le cas d'un objet réel et d'une image réelle, la surface d'onde à la sortie du système optique est une portion de sphère centrée en  $A'$ .

Dans le cas considéré ( $A$  et  $A'$  réels), les rayons proviennent effectivement de  $A$  et convergent effectivement en  $A'$ . Considérons maintenant dans le milieu d'indice  $n'$  une surface d'onde  $\Sigma$  correspondant aux rayons issus de  $A$ . Par construction,  $\Sigma$  est l'ensemble des points  $M$  tel que le chemin optique  $L_{AM}$  est constant pour tout point de  $\Sigma$  (Fig. 4.5),  $L_{AM} = L_{AI} + L_{IJ} + L_{JM} = L_0$ .

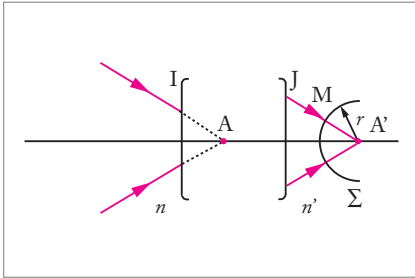
Nous pouvons maintenant exprimer la condition de stigmatisme de la façon suivante : pour que  $A$  et  $A'$  soient conjugués, il faut que  $\Sigma$  soit une portion de sphère de centre  $A'$ . Cette condition est en effet nécessaire et suffisante pour que tout rayon issu de  $A$  converge en  $A'$ . Dans ce cas, le

chemin optique de  $\Sigma$  à  $A'$  s'écrit  $L'_{MA'} = n'r$ , où  $r$  est le rayon de la sphère  $\Sigma$ . Nous obtenons finalement :

$$L_{AA'} = L_0 + n'r = \text{cte.}$$

Nous avons donc montré que  $A$  et  $A'$  sont conjugués lorsque le chemin optique  $L_{AA'}$  est constant, quel que soit le rayon considéré.

### Cas d'un objet virtuel $A$ et d'une image réelle $A'$



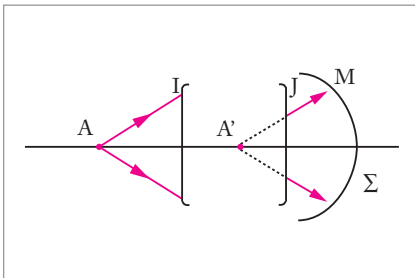
**Fig. 4.6. Condition de stigmatisme pour un système optique symbolisé par ses faces d'entrée et de sortie.** Dans le cas d'un objet virtuel et d'une image réelle, la surface d'onde à la sortie du système optique est une portion de sphère centrée en  $A'$ .

La différence de nature de l'objet (réel ou virtuel) se traduit ici par le signe de  $L_{AI}$  (Fig. 4.6). Pour un objet réel,  $L_{AI} = nAI$  ; pour un objet virtuel,  $L_{AI} = -nAI$ . Mais cette différence n'affecte pas le raisonnement.

Nous pouvons toujours écrire  $L_{AA'} = L_{AM} + L_{MA'}$ . Avec une surface d'onde telle que, quel que soit  $M$  appartenant à  $\Sigma$ ,  $L_{AM} = L_0$  est une constante, nous nous ramenons à l'étude précédente.

$A$  et  $A'$  sont conjugués si  $\Sigma$  est centrée sur  $A'$ , c'est-à-dire si  $L_{MA'} = n r = \text{cte}$ , ce qui implique  $L_{AA'} = \text{cte}$ .

### Cas d'un objet réel $A$ et d'une image virtuelle $A'$



**Fig. 4.7. Condition de stigmatisme pour un système optique symbolisé par ses faces d'entrée et de sortie.** Dans le cas d'un objet réel et d'une image virtuelle, la surface d'onde à la sortie du système optique est une portion de sphère centrée en  $A'$ , le sens  $MA'$  étant opposé au sens réel de parcours de la lumière.

Quelle que soit la nature de l'objet  $A$ , nous pouvons écrire, avec les mêmes notations que précédemment, le chemin optique entre  $A$  et  $A'$  (Fig. 4.7) :  $L_{AA'} = L_{AM} + L_{MA'}$ , où  $M$  est un point d'une surface d'onde  $\Sigma$  issue de  $A$  et située dans le milieu d'indice  $n'$ .  $L_{AM} = L_0 = \text{cte}$ .

$A'$  est l'image de  $A$  si  $\Sigma$  est une portion de sphère centrée sur  $A'$ . Le sens  $MA'$  étant opposé au sens réel de parcours de la lumière, nous avons :  $L_{MA'} = -n'MA' = -n' r$ .

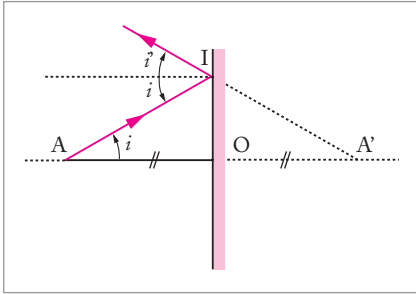
La conclusion est cependant identique :  $A$  et  $A'$  sont conjugués si  $L_{MA'} = -n'r = \text{cte}$ , c'est-à-dire si  $L_{AA'} = \text{cte}$ .

## 3 Exemple de stigmatisme rigoureux par réflexion : le miroir plan et le miroir parabolique

Nous considérons ici deux cas, celui du miroir plan et celui du miroir parabolique, concave ou convexe.

### Le miroir plan

Considérons un point  $A$ , objet réel pour un miroir plan. Soit  $AI$  un rayon issu de  $A$  et rencontrant le miroir au point  $I$ , le rayon faisant un angle  $i$  par rapport à la normale au miroir (Fig. 4.8).

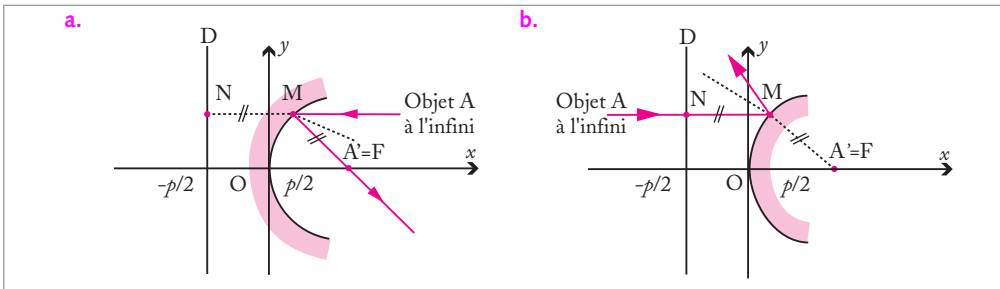


**Fig. 4.8. Stigmatisme rigoureux du miroir plan, points conjugués A et A'.**

Exprimons le chemin optique  $L_{AA'} = n(AI - IA')$ . Le chemin optique de I à A' est compté négativement car il correspond à une partie virtuelle du rayon. La loi de la réflexion donne  $i = i'$ . Les triangles AOI et A'OI sont donc symétriques et nous avons  $AI = IA'$ . La condition de stigmatisme rigoureux est donc vérifiée puisque  $L_{AA'} = 0$ , quel que soit le point I, c'est-à-dire quel que soit le rayon lumineux considéré.

Le miroir plan est parfaitement stigmatique pour tout couple de points symétriques par rapport à son plan. C'est le cas pratique de stigmatisme rigoureux le plus important.

### Le miroir parabolique convexe ou concave



**Fig. 4.9. Stigmatisme rigoureux du miroir parabolique pour un point objet A situé à l'infini, sur l'axe, son conjugué étant le foyer de la parabole. a. Miroir parabolique concave ; b. Miroir parabolique convexe.**

Le miroir parabolique n'est pas rigoureusement stigmatique pour tout point objet. Il l'est pour un point objet situé à l'infini, sur l'axe, son conjugué étant le foyer de la parabole. Nous démontrons ici le caractère rigoureusement stigmatique pour  $(A, A')$ , A étant sur l'axe à l'infini et A' étant le foyer F de la parabole (Fig. 4.9).

La parabole d'équation  $y^2 = 2px$  dans le plan  $(O, x, y)$  est l'ensemble des points M à égale distance du foyer noté  $F(+\frac{p}{2}, 0)$  et d'une droite D d'équation  $x = -\frac{p}{2}$ , appelée directrice de la parabole.

Dans le cas d'un miroir parabolique convexe, considérons un objet A situé à l'infini sur l'axe Ox de la parabole. L'objet A émet des rayons qui arrivent sur le miroir parabolique sous la forme d'un faisceau de rayons parallèles à l'axe optique. Le chemin optique de A à A' s'écrit :

$$L_{AA'} = L_{AN} + L_{NM} + L_{MA'}$$

où N est sur la droite D et M sur le miroir.

La distance  $L_{AN}$  est constante quel que soit le rayon considéré car les surfaces d'onde du faisceau parallèle à l'axe Ox sont les plans à x constant. D est donc une surface d'onde.

Nous posons  $L_{AN} = L_0$ . Par ailleurs,  $L_{NM} = d(D, M)$  et  $L_{MA'} = L_{MF} = -d(M, F)$  où  $d(D, M)$  est la distance de la directrice  $D$  au point  $M$  du miroir et  $d(M, F)$  la distance du point  $M$  au foyer  $F$  du miroir.  $L_{MA'}$  est compté négativement car  $MA'$  correspond à la partie virtuelle du rayon réfléchi. Par définition de  $F$  et de  $D$ , nous avons  $d(D, M) = d(F, M)$  quel que soit  $M$  appartenant au miroir. Nous en déduisons  $L_{AA'} = L_0 = \text{cte}$ .

Le miroir parabolique convexe vérifie donc la condition de stigmatisme rigoureux pour un point à l'infini et le foyer de la parabole.

Dans le cas du miroir parabolique concave, une démonstration analogue (avec  $L_{AA'} = L_{AN} + L_{NM} + L_{MA'} = L_0 - d(D, M) + d(M, F)$ ) conduit à la même conclusion.

Ce cas de stigmatisme rigoureux a une grande importance dans la pratique puisque les miroirs paraboliques sont utilisés en astronomie pour former les images d'étoiles éloignées.

#### 4 Points de Weierstrass du dioptre sphérique

Considérons le problème du stigmatisme rigoureux dans le cas d'un dioptre sphérique (Fig. 4.10). Le dioptre sépare le milieu d'indice  $n$  du milieu d'indice  $n'$ . Soit  $A$  un objet et  $A'$  son image par le dioptre ; nous suivons un rayon  $AIA'$ ,  $I$  étant sur le dioptre. Nous ne développons pas les cas où objet et image sont tous deux réels ou tous deux virtuels. La condition de stigmatisme s'écrit dans ces cas  $n AI + n' IA = \text{cte}$ . Ces deux cas correspondent à une forme de dioptre connu sous le nom d'ovale de Descartes, presque irréalisable dans la pratique.

Considérons le cas où l'objet est réel et l'image virtuelle (ou l'inverse). La condition de stigmatisme s'écrit :

$$L_{AA'} = \pm (n AI - n' IA) = \text{cte}$$

Le signe  $+$  correspond au cas où  $A$  est réel et  $A'$  virtuel, le signe  $-$  au cas où  $A$  est virtuel et  $A'$  réel.

La condition de stigmatisme est trivialement vérifiée si les points  $A$  et  $A'$  sont situés sur la surface du dioptre, ce qui conduit à  $L_{AA'} = 0$ . C'est également le cas pour le centre  $C$  du dioptre, qui réalise  $A = A' = C$ , soit également  $L_{AA'} = 0$ .

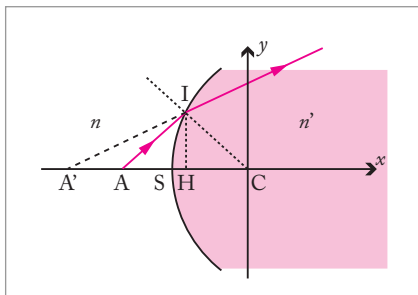


Fig. 4.10. Dioptre sphérique.  $A$  et  $A'$  sont des points conjugués par un dioptre sphérique.

Hormis les points du dioptre et son centre  $C$ , nous allons montrer que deux points seulement, appelés les points de Weierstrass, vérifient la condition de stigmatisme rigoureux. Pour cela, nous nous plaçons dans le repère  $(C, x, y)$  où  $C$  est le centre du dioptre,  $Cx$  la direction de l'axe optique et  $Cy$  la direction perpendiculaire. Notons  $S$  le sommet du dioptre et posons :

$R = \overline{SC}$ ,  $p = \overline{SA}$ ,  $p' = \overline{SA'}$ , et si  $H$  désigne la projection de  $I$  sur l'axe  $Cx$ , posons  $x = \overline{SH}$ .

Exprimons AI et A'I dans (C, x, y) :

$$AI = \sqrt{(-\rho + x)^2 + R^2 - (-R + x)^2} = \sqrt{\rho^2 + 2x(R - \rho)}$$

$$A'I = \sqrt{(-\rho' + x)^2 + R^2 - (-R + x)^2} = \sqrt{\rho'^2 + 2x(R - \rho')}$$

Nous en déduisons l'expression du chemin optique entre A et A' :

$$L_{AA'} = +n\rho \sqrt{1 + 2\frac{x}{\rho}\left(\frac{R}{\rho} - 1\right)} - n'\rho' \sqrt{1 + 2\frac{x}{\rho'}\left(\frac{R}{\rho'} - 1\right)}$$

Pour les points de Weierstrass, ce chemin est « rigoureusement » indépendant de la position du point I, c'est-à-dire de x. Autrement dit, la fonction  $L_{AA'}(x)$  est indépendante de x, donc quel que soit x :

$$\frac{dL_{AA'}(x)}{dx} = \frac{n\left(\frac{R}{\rho} - 1\right)}{\sqrt{1 + 2\frac{x}{\rho}\left(\frac{R}{\rho} - 1\right)}} - \frac{n'\left(\frac{R}{\rho'} - 1\right)}{\sqrt{1 + 2\frac{x}{\rho'}\left(\frac{R}{\rho'} - 1\right)}} = 0$$

$\frac{dL_{AA'}(x)}{dx} = 0$ , pour  $x = 0$ , implique :

$$n\left(\frac{R}{\rho} - 1\right) = n'\left(\frac{R}{\rho'} - 1\right)$$

d'où, pour tout x, nous devons également avoir :

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{R}{\rho} - 1\right) = \frac{1}{\rho'}\left(\frac{R}{\rho'} - 1\right)$$

Ces deux conditions assurent  $\frac{dL_{AA'}(x)}{dx} = 0$ , quel que soit x, et peuvent se réécrire :

$$\begin{cases} n\rho = n'\rho' \\ n\left(\frac{R}{\rho} - 1\right) = n'\left(\frac{R}{\rho'} - 1\right) \end{cases}$$

Les positions des points de Weierstrass sont caractérisées par les valeurs de  $\rho$  et  $\rho'$  correspondantes :

$$\rho = \left(\frac{n'}{n} + 1\right)R$$

$$\rho' = \left(\frac{n}{n'} + 1\right)R$$

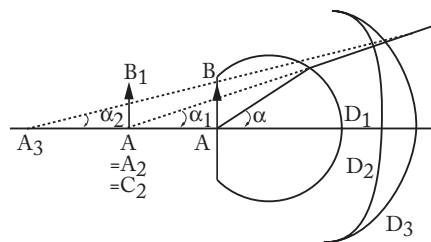
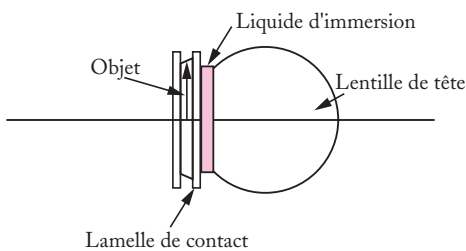
Un dioptré sphérique n'est donc rigoureusement stigmatique que pour les points de Weierstrass, pour les points de sa surface et pour son centre.

### Les points de Weierstrass et le microscope à immersion

Il existe une limite de résolution pour tout instrument optique. Cette limite de résolution est calculée par des règles mettant en jeu le caractère ondulatoire de la lumière et est égale à  $\frac{\lambda}{2n \sin \alpha}$ . Dans cette relation,  $\alpha$  est l'angle que fait avec l'axe optique du système le rayon le plus incliné issu du point objet de l'axe entrant dans l'instrument,  $\lambda$  est la longueur d'onde utilisée et  $n$  l'indice de réfraction du milieu objet. La limite de résolution la plus favorable est obtenue avec une lumière de faible longueur d'onde (radiation violette ou ultra-violette) et une ouverture numérique (valeur de  $n \sin \alpha$ ) aussi grande que possible. Il existe ainsi des microscopes dont les objectifs ont une ouverture numérique de 1,35 obtenue pour des valeurs de  $\alpha$  de l'ordre de  $65^\circ$  et des milieux objet d'indice 1,5. Pour obtenir de bonnes images avec des rayons aussi inclinés, il faut que l'objet se situe en un point stigmatique, l'approximation paraxiale que nous verrons plus tard n'étant évidemment pas applicable. Les objectifs de microscope à immersion utilisent le stigmatisme rigoureux des points de Weierstrass. L'objet est placé

pratique, l'objet n'est pas en contact direct avec la lentille de tête mais immergé entre deux lamelles. La lamelle la plus proche de la lentille de tête est appelée lamelle de contact. Elle est constituée du même matériau que la lentille et séparée de cette dernière par un liquide, également de même indice, appelé liquide d'immersion.

L'image  $A_1B_1$  de AB est légèrement agrandie (en général d'un facteur 2 pour  $n = 1,5$ ) et l'angle d'ouverture  $\alpha_1$  est plus faible que  $\alpha$ . En général, la valeur de  $\alpha_1$  reste cependant encore trop importante et les constructeurs ont recours à d'autres dioptries. L'ensemble des deux dioptries  $D_2$  et  $D_3$  est tel que le point de Weierstrass de  $D_3$  est confondu avec le centre optique  $C_2$  de  $D_2$  et on place  $D_2$  de sorte que  $A_1$  se forme au centre  $C_2$  de  $D_2$ .  $A_1$  et son image  $A_2$  à travers  $D_2$  sont donc confondues et la qualité de l'image n'est pas altérée car  $C_2$  est un point rigoureusement stigmatique. L'image  $A_3$  de  $A_2$  à travers  $D_3$  est à nouveau agrandie et l'ouverture image  $\alpha_2$  diminuée. À nouveau, la qualité de l'image n'est pas altérée car  $(A_2, A_3)$  sont des points rigoureusement stigmatiques pour  $D_3$ .



au point de Weierstrass objet A d'un dioptre sphérique  $D_1$  formant la face de sortie d'une lentille « demi-boule », sphère de verre tronquée au niveau du point de Weierstrass objet de  $D_1$  (cette lentille au contact de l'objet est appelée lentille de tête). Dans la

Ce processus peut être itéré jusqu'à ce que l'ouverture image atteigne une valeur suffisamment faible pour que l'imagerie soit continuée à l'aide d'objectifs classiques dans l'approximation paraxiale (des faibles angles).

## 5 Aplanétisme et condition d'Abbe

La condition de stigmatisme rigoureux permet d'assurer qu'un objet ponctuel donne une image ponctuelle. Bien souvent cependant, l'objet étudié n'est pas ponctuel mais étendu.

**Définition :** La condition d'aplanétisme, ou condition d'Abbe, traduit la condition d'obtention d'une image plane à partir d'un objet plan, perpendiculaire à l'axe optique du système optique utilisé.

Si P et P' désignent les plans perpendiculaires à l'axe optique et passant par A et A', tout point B de P situé au voisinage de A admet un conjugué B' situé dans P' au voisinage de A' (Fig. 4.11). On dit alors que P et P' sont des plans conjugués et la relation qui lie leur position est la relation de conjugaison du système.

Soit A un point de l'axe optique donnant à travers le système optique (S) considéré une image ponctuelle A'. La condition des sinus d'Abbe correspond à la condition pour que l'image A'B' à travers (S) de l'objet étendu AB soit étendue.

Notons  $n$  l'indice objet et  $n'$  l'indice image. Le chemin optique  $L_{AA'}$  est calculé le long d'un rayon AIIA', I appartient à la face d'entrée de (S) et J à sa face de sortie.  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire portant le rayon incident AI et  $\vec{u}'$  le vecteur unitaire portant le rayon émergent JA'. On a alors :

$$L_{AA'} = n \overrightarrow{dAI} \cdot \vec{u} + n' \overrightarrow{dJA'} \cdot \vec{u}' + L_{IJ}$$

Le chemin optique  $L_{BB'}$  entre B et B', B voisin de A, s'écrit :

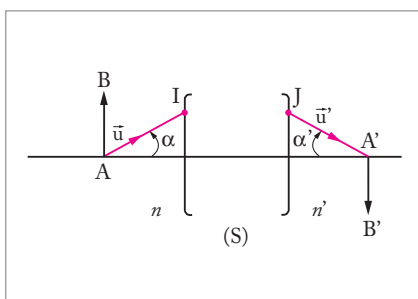
$$L_{BB'} = L_{AA'} + dL$$

où  $dL$  est la variation de chemin optique lorsque A se déplace en B ( $-\overrightarrow{dAI} = \overrightarrow{AB}$ ), A' en B' ( $-\overrightarrow{dJA'} = \overrightarrow{A'B'}$ ), les points I et J restant fixes.

$$dL = n \overrightarrow{dAI} \cdot \vec{u} + n' \overrightarrow{dJA'} \cdot \vec{u}'$$

$$dL = -n \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} + n' \overrightarrow{A'B'} \cdot \vec{u}'$$

Le chemin optique entre A et A' étant, par définition, constant, le chemin optique entre B et B' le sera également si  $dL$  est constant quel que soit le point I, c'est-à-dire quels que soient les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$ . En utilisant les angles  $\alpha$  et  $\alpha'$ , on a :



**Fig. 4.11.** Condition d'Abbe pour un objet étendu AB perpendiculaire à l'axe et son image A'B' :  $n\overline{AB} \sin \alpha = n'\overline{A'B'} \sin \alpha'$ .

$$dL = -n\overline{AB} \sin \alpha + n'\overline{A'B'} \sin \alpha' = \text{cte.}$$

La relation est valable quels que soient  $\alpha$  et  $\alpha'$ . Or, pour  $\alpha = \alpha' = 0$ , on calcule  $\text{cte} = 0$ , par conséquent, la condition d'Abbe s'écrit :

$$n\overline{AB} \sin \alpha = n'\overline{A'B'} \sin \alpha'$$

Une conséquence de la relation d'Abbe est l'impossibilité de réaliser un instrument optique parfait au sens de l'optique géométrique. En effet, parmi les systèmes réalisant un stigmatisme rigoureux, seuls les miroirs plans et le dioptre sphérique



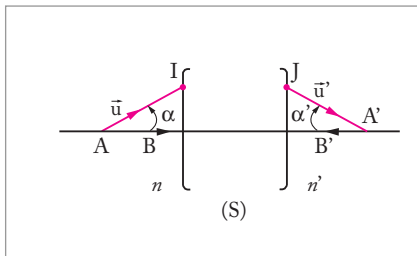
pour les points de Weierstrass sont aplanétiques. Le miroir plan n'a pas une importance pratique pour la réalisation de système optique et le dioptre sphérique présente un autre défaut : les points de Weierstrass ne sont pas achromatiques.

### Un peu d'histoire

#### Ernst Abbe

Ernst Abbe (1840-1905) est un opticien allemand, professeur à l'université d'Iéna et directeur des observatoires astronomiques et météorologiques (1878). E. Abbe étudie l'amélioration des appareils d'optique, formule la relation des sinus permettant de calculer les conditions à réaliser pour qu'un système de lentilles ne présente pas d'aberrations de sphéricité ni de coma. Il

améliore également les microscopes, pour lesquels il met au point le condenseur et les lentilles apochromatiques qui éliminent la distorsion des couleurs. En 1891, il crée la fondation Carl Zeiss pour la recherche scientifique et le progrès social, qu'il organise en une coopérative dont les profits sont répartis entre la direction, les travailleurs et l'université d'Iéna.



**Fig. 4.12.** Condition de Herschel pour un objet étendu AB le long de l'axe et son image A'B' :

$$n \overline{AB} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = n' \overline{A'B'} \sin^2\left(\frac{\alpha'}{2}\right)$$

## 6 La condition d'Herschel

**Définition :** La condition d'Herschel traduit la condition d'obtention par un système optique d'une image plane, à partir d'un objet plan sur l'axe optique du système.

Pour établir la condition d'Herschel, nous pouvons reprendre le raisonnement précédent avec cette fois, un point B voisin de A sur l'axe optique, A et A' réalisant la condition de stigmatisme rigoureux.

Le chemin optique  $L_{BB'}$  s'écrit en fonction du chemin optique  $L_{AA'}$  (Fig. 4.12) :

$$L_{BB'} = L_{AA'} + dL$$

Avec :

$$dL = -n \overrightarrow{dAI} \cdot \vec{u} + n' \overrightarrow{dJA'} \cdot \vec{u}'$$

$$dL = -n \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} + n' \overrightarrow{A'B'} \cdot \vec{u}'$$

En utilisant les angles  $\alpha$  et  $\alpha'$ , on a :

$$dL = -n \overline{AB} \cos \alpha + n' \overline{A'B'} \cos \alpha' = \text{cte.}$$

La relation est valable quels que soient  $\alpha$  et  $\alpha'$ . En particulier, pour  $\alpha = \alpha' = 0$ , on calcule

$$-n \overline{AB} + n' \overline{A'B'} = \text{cte.}$$

Par conséquent

$$n \overline{AB} (1 - \cos \alpha) = n' \overline{A'B'} (1 - \cos \alpha')$$

La condition d'Herschel s'écrit finalement :

$$n \overline{AB} \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = n' \overline{A'B'} \sin^2\left(\frac{\alpha'}{2}\right)$$

### William Herschel

Sir William Herschel (1738-1822) est un physicien anglais d'origine allemande. Comme beaucoup de ses contemporains, Herschel se passionne pour l'astronomie. Très jeune, il étudie les ouvrages des plus grands auteurs et construit de nombreux télescopes aidé de sa sœur Caroline et de son frère Alexander. En 1780, il envoie ses premiers articles à la Royal Society de Londres. L'année suivante, en effectuant un

examen méthodique de la voûte céleste, il découvre, dans la constellation des Gémeaux, une nouvelle planète située au-delà de l'orbite de Saturne et qui sera baptisée Uranus. Célèbre sur-le-champ, Herschel reçoit la médaille Copley et est admis à la Royal Society. Partagé entre la physique et la musique, il abandonne cette dernière lorsque le roi George III lui demande de devenir son astronome privé.

## 4.3. Notion de stigmatisme approché

### 1 Définition du stigmatisme approché

Pour de nombreux systèmes optiques, la condition de stigmatisme rigoureux n'est pas vérifiée. Ainsi, les rayons issus d'un point objet émergent du système optique sous la forme d'un faisceau non conique, de sorte qu'il n'y a pas d'image ponctuelle de cet objet. La différentielle du chemin optique n'est donc pas nulle. Cependant, il est possible d'établir une condition, dite condition de stigmatisme approché, qui se traduit par la nullité de la différentielle du chemin optique au premier ordre. Les termes d'ordre supérieur, non nuls, sont responsables des aberrations chromatiques et seront discutées au chapitre 12.

### 2 Exemple de stigmatisme approché : le dioptre plan

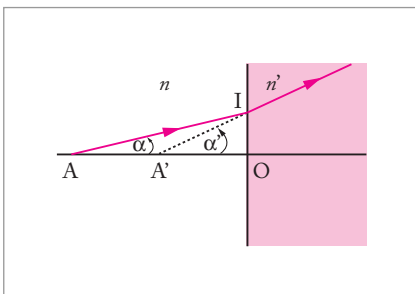


Fig. 4.13. Stigmatisme approché du dioptre plan. A et A' sont conjugués à travers le dioptre.

Nous allons montrer que le dioptre plan, qui ne réalise pas la condition de stigmatisme rigoureux, réalise la condition de stigmatisme approché, dans le cas des faibles angles d'incidence. Exprimons le chemin optique  $L$  entre A et A' (Fig. 4.13) :

$$L_{AA'} = n AI - n' IA'$$

Le chemin optique entre I et A' est compté négativement car l'image A' est virtuelle.

Dans les triangles AOI et A'OI, rectangles en O, on a :

$$AI = \frac{OA}{\cos \alpha} \quad \text{et} \quad A'I = \frac{OA'}{\cos \alpha}$$

Le chemin optique  $L_{AA'}$  s'écrit :

$$L_{AA'} = n \frac{OA}{\cos \alpha} - n' \frac{OA'}{\cos \alpha'}$$

Le principe de Fermat prévoit que ce chemin est indépendant de l'angle  $\alpha$  (et donc de  $\alpha'$ ). L'expression précédente n'est pas indépendante de  $\alpha$ , mais, dans l'approximation des faibles angles, nous pouvons écrire le chemin optique à l'ordre 1. Si  $\alpha$  est petit, la loi de la réfraction s'écrit :

$$\sin \alpha' = \frac{n}{n'} \sin \alpha \approx \frac{n}{n'} \alpha$$

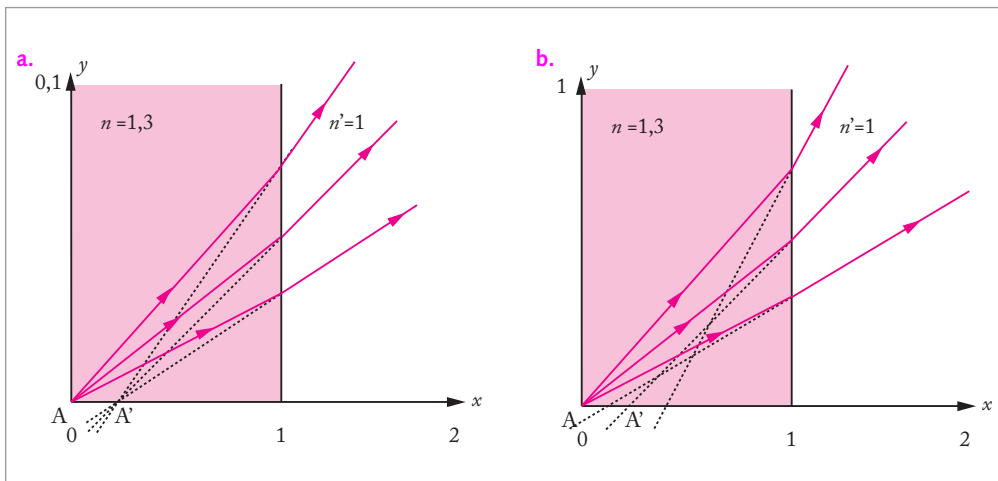
Pour des valeurs de  $\frac{n}{n'}$  de l'ordre de 1, nous avons également  $\alpha'$  petit. Le chemin optique au 1<sup>er</sup> ordre prend la forme :

$$L_{AA'} \approx n OA - n' OA'$$

Au premier ordre, le chemin optique entre A et A' est constant car OA et OA' sont indépendants du point I considéré, et donc de  $\alpha$  et de  $\alpha'$ . En réalité, les rayons ne font que passer au voisinage de A'. Généralisant ce résultat, le stigmatisme approché est défini de la façon suivante :

**Définition :** Un système optique présente un stigmatisme approché pour un couple de points (A, A') si tout rayon passant par A passe au voisinage de A' après avoir traversé le système optique.

Les figures ci-dessous illustrent le stigmatisme approché du dioptré plan. Sur la figure 4.14a, les angles sont petits (0,01 ; 0,03 et 0,05 radian) et l'image du point situé à l'origine du repère semble ponctuel. Lorsqu'on augmente les angles d'incidence (Fig. 4.14b,  $i_1$  compris entre 0,3 et 0,7 radian), on constate que l'image n'est plus ponctuelle : les rayons réfractés ne se coupent pas en un point, image de l'objet, mais passe en son voisinage.



**Fig. 4.14. Illustration du stigmatisme approché du dioptré plan.** Le calcul de la trajectoire des rayons est mené pour une interface verticale située en  $x = 1$  et séparant un milieu d'indice optique égal à 1,3 d'un milieu d'indice optique égal à 1. **a.** Pour de faibles angles d'incidence des rayons issus de A, les rayons réfractés semblent provenir d'un point : l'image est définie ; **b.** Pour des angles d'incidence plus importants, les rayons réfractés ne forment plus un cône : l'image de A n'est pas définie.

### 3 Les systèmes centrés dans l'approximation de Gauss

Les systèmes centrés, que nous étudierons en détail dans le chapitre 6, sont des systèmes optiques constitués d'une suite de dioptries ou de miroirs dont les centres sont sur le même axe et qui sont séparés par des milieux transparents homogènes. En général, les dioptries et les miroirs sont à symétrie circulaire (par exemple lorsqu'ils sont limités par des diaphragmes circulaires) de sorte que le système possède une symétrie de révolution. Les systèmes sont utilisés dans l'approximation de Gauss lorsque les rayons considérés restent voisins de l'axe, avec de faibles angles d'inclinaison (approximation paraxiale). Cette condition est vérifiée lorsque les diaphragmes sont suffisamment limitant.

Dans l'approximation de Gauss, la condition de stigmatisme approché est automatiquement vérifiée.

## Résumé du cours

### Stigmatisme

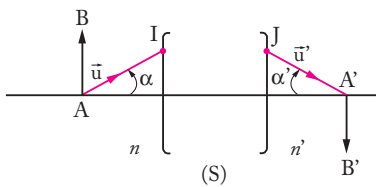
◆ Un système optique est dit rigoureusement stigmatique pour un couple de points A et A' si tout rayon passant par A passe par A' après avoir traversé le système optique. Un système est rigoureusement stigmatique pour un couple de points A et A' si quel que soit le rayon considéré, le chemin optique  $L_{AA'}$  est constant :

$$L_{AA'} = \text{cte}$$

◆ Un système optique présente un stigmatisme approché pour un couple de points (A, A') si tout rayon passant par A passe au voisinage de A' après avoir traversé le système optique. On a alors :

$$L_{AA'} \approx \text{cte}$$

### Condition d'aplanétisme

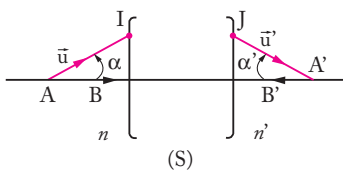


◆ La condition d'aplanétisme, ou condition d'Abbe, traduit la condition d'obtention d'une image plane à partir d'un objet plan, perpendiculaire à l'axe optique du système optique utilisé.

La condition d'Abbe s'exprime par la relation :

$$n \overline{AB} \sin \alpha = n' \overline{A'B'} \sin \alpha'$$

### Condition d'Herschel



◆ La condition d'Herschel traduit la condition d'obtention par un système optique d'une image plane, à partir d'un objet plan sur l'axe optique du système. Elle s'exprime par la relation :

$$n \overline{AB} \sin^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) = n' \overline{A'B'} \sin^2 \left( \frac{\alpha'}{2} \right)$$

## Exercices

**1** Un dioptré plan sépare deux milieux d'indice  $n$  et  $n'$ . On considère un point source  $A$  dans le milieu d'indice  $n$  et on note  $O$  l'intersection du dioptré avec la normale à l'interface passant par  $A$ . Un rayon issu de  $A$  est réfracté en  $I$  sur le dioptré et coupe de nouveau la droite  $OA$  en un point  $A'$ . On note  $i$  et  $i'$  les angles formés par les rayons incident et réfracté par rapport à la normale au dioptré en  $I$ .

1. Exprimer le chemin optique  $L$  entre  $A$  et  $A'$  en fonction de  $OA$ ,  $OA'$ ,  $n$ ,  $n'$ ,  $i$  et  $i'$ .

2. Montrer que la condition de stigmatisme est obtenue dans l'approximation paraxiale. Quelle relation de conjugaison obtient-on alors ?

**2** On considère un dioptré sphérique séparant un milieu d'indice  $n$  d'un milieu d'indice  $n'$ . Le centre  $C$  du dioptré se trouve dans le milieu d'indice  $n$  et on note  $S$  son sommet, avec  $R = \overline{SC}$ . Soit  $A$  ( $p = \overline{SA}$ ) un point du milieu objet, situé sur l'axe principal et  $AI$  le rayon incident rencontrant le dioptré en  $I$ . Le rayon réfracté rencontre l'axe en un point  $A'$  ( $p' = \overline{SA'}$ ).

1. Construire le rayon incident et réfracté si on suppose que  $A$  et  $A'$  sont réels.

2. Soit  $H$  la projection de  $I$  sur l'axe principal, on pose  $x = \overline{SH}$ . Calculer le chemin optique  $L$  entre  $A$  et  $A'$  en fonction des données.

3. Montrer que le principe de Fermat permet d'établir une relation de conjugaison pour le dioptré sphérique dans l'approximation des rayons paraxiaux. Que vaut alors le chemin optique entre  $A$  et  $A'$  ?

**3** On considère un dioptré sphérique séparant un milieu d'indice  $n$  d'un milieu d'indice  $n'$ . Le centre  $C$  du dioptré se trouve dans le milieu d'indice  $n$  et on note  $S$  son sommet, avec  $R = \overline{SC}$ . Soit  $A$  ( $p = \overline{SA}$ ) un point du milieu objet, situé sur l'axe principal et  $AI$  le rayon incident rencontrant le dioptré en  $I$ . Le rayon

réfracté coupe l'axe en un point  $A'$  ( $p' = \overline{SA'}$ ).

Calculer les positions des points de Weierstrass, qui réalisent la condition de stigmatisme rigoureux.

**4** On considère le dioptré de l'exercice précédent. Les conditions d'Abbe et de Herschell traduisent la conservation du stigmatisme perpendiculairement et suivant l'axe du dioptré.

On considère un objet transversal  $AB$  dont l'image à travers le dioptré est  $A'B'$  et un objet  $AC$  parallèle à l'axe dont l'image à travers le dioptré est  $A'C'$ . Les points  $A$  et  $A'$  sont les points de Weierstrass pour le dioptré. L'angle  $\alpha$  (respectivement  $\alpha'$ ) repère l'angle  $(AA', AI)$  (respectivement  $(A'A, A'I)$ ).

1. On appelle condition d'Abbe, la condition pour que le système, rigoureusement stigmatique pour  $A$  et  $A'$ , le soit également pour  $B$  et  $B'$ .

Écrire la condition d'Abbe sous la forme d'une relation entre  $n$ ,  $n'$ ,  $\overline{AB}$ ,  $\overline{A'B'}$ ,  $\alpha$  et  $\alpha'$ .

2. La condition de Herschell est la condition pour que le système, rigoureusement stigmatique pour  $A$  et  $A'$ , soit stigmatique pour  $C$  et  $C'$ .

Écrire la condition de Herschell sous la forme d'une relation entre  $n$ ,  $n'$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{A'C'}$ ,  $\alpha$  et  $\alpha'$ .

**5** Soit un miroir sphérique de centre  $C$  et de rayon  $R$  et soit un point source en  $A$  sur l'axe du miroir tel que  $\overline{CA} = r$ ; un rayon issu du point  $A$  se réfléchit en  $I$  sur le miroir, le rayon réfléchi coupe de nouveau l'axe en  $A'$ . On note  $a$  l'angle  $(\overline{CS}, \overline{CI})$  et  $\overline{CA'} = r'$ .

1. Calculer le chemin optique  $L$  entre  $A$  et  $A'$  en fonction de  $a$ ,  $r$  et  $r'$ .

2. Donner une expression approchée de  $L$  lorsque les points  $A$  et  $A'$  sont proches du centre  $C$  du miroir ( $|r| \ll R$  et  $|r'| \ll R$ ). En déduire que le miroir sphérique présente un stigmatisme approché pour des points symétriques par rapport à  $C$  et au voisinage de  $C$ .



# Dioptrés et miroirs dans l'approximation de Gauss

Ce chapitre est la continuité directe du chapitre 4, dans lequel nous avons défini les notions d'objet et d'image à travers un système optique. Les positions d'un objet et de son image sont reliées par une relation de conjugaison. Dans le cadre de l'approximation de Gauss, il est possible d'établir ces relations de conjugaison pour les dioptrés et les miroirs, qui sont les constituants essentiels des systèmes optiques. Il est tout à fait essentiel de connaître (ou mieux, de savoir retrouver !) les relations de conjugaison pour ces éléments simples.

## 5.1. Le dioptré plan et la lame à faces parallèles

- 1 Le dioptré plan
- 2 La lame à faces parallèles

## 5.2. Le dioptré sphérique

- 1 Dioptré sphérique concave ou convexe
- 2 Relation de conjugaison avec origine au sommet
- 3 Relation de conjugaison avec origine au centre
- 4 Expression du grandissement du dioptré sphérique
- 5 Foyers objet et image du dioptré sphérique ; distance focale
- 6 Dioptré convergent ou divergent
- 7 Construction géométrique de l'image d'un objet à travers un dioptré sphérique
- 8 Équation ou invariant de Lagrange-Helmholtz

## 5.3. Le miroir plan

- 1 Image d'un objet par un miroir plan
- 2 Association de deux miroirs plans
- 3 Considération énergétique

## 5.4. Le miroir sphérique

- 1 Stigmatisme rigoureux pour un miroir sphérique
- 2 Relation de conjugaison du miroir sphérique avec origine au sommet
- 3 Relation de conjugaison du miroir sphérique avec origine au centre
- 4 Foyer objet et image du miroir sphérique
- 5 Relation de conjugaison du miroir sphérique avec origine aux foyers
- 6 Grandissement du miroir sphérique
- 7 Construction de l'image d'un objet à travers un miroir sphérique

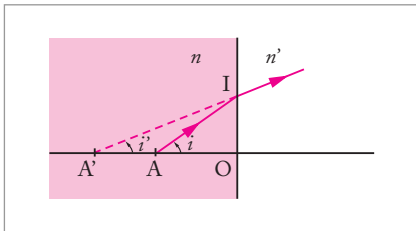
### Mots-clés

- Dioptré
- Miroir
- Relation de conjugaison
- Grandissement

Un dioptre correspond à une surface  $S$  séparant deux milieux transparents homogènes d'indices différents. Lorsque  $S$  est une calotte sphérique, on parle de dioptre sphérique, lorsque  $S$  est un plan, on parle de dioptre plan. Les trajets de la lumière réfléchié et réfracté par le dioptre sont données par les lois de Descartes ou, dans l'approximation de Gauss, par la loi de Kepler. Cependant on ne s'intéressera pas dans la suite à la lumière réfléchié par le dioptre et l'on ne considérera que les rayons réfractés par  $S$ .

## 5.1. Le dioptre plan et la lame à faces parallèles

### 1 Le dioptre plan



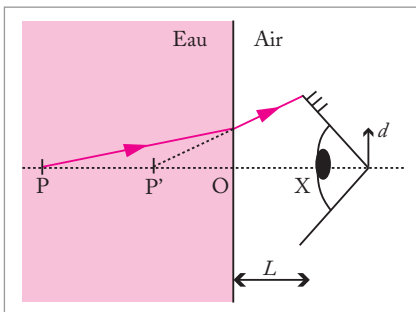
**Fig. 5.1. Dioptre plan.**  $A$  et  $A'$  sont des points conjugués à travers le dioptre.

Le dioptre plan (Fig. 5.1) a été étudié comme exemple de système présentant un stigmatisme approché dans le chapitre précédent. La minimisation du chemin optique au premier ordre (principe de Fermat) permet d'écrire une relation, dite relation de conjugaison, qui relie la position de l'objet  $A$ , associé à l'indice objet  $n$ , à celle de son image  $A'$ , associée à l'indice image  $n'$  pour des angles  $i$  et  $i'$  faibles. On a alors, d'après la loi de réfraction de Descartes  $n \sin i = n' \sin i'$ .

Avec  $\sin i \approx \tan i = \frac{\overline{OI}}{\overline{OA}}$  et  $\sin i' \approx \tan i' = \frac{\overline{OI}}{\overline{OA'}}$ , on obtient :

$$\frac{\overline{OA}}{n} - \frac{\overline{OA'}}{n'} = 0.$$

On dit que les points  $A$  et  $A'$  sont des points conjugués par le dioptre.



**Fig. 5.2.** L'observateur, placé à la distance  $L$  de la paroi plane de l'aquarium, voit l'image  $P'$  du poisson situé en  $P$ .

Considérons à titre d'exemple un poisson assimilé à un objet ponctuel  $P$  dans un aquarium rempli d'eau. Les parois de l'aquarium sont supposées planes et leur épaisseur est négligée de sorte que le dioptre considéré est celui qui sépare l'eau, d'indice optique égal à  $\frac{4}{3}$  et l'air dans lequel est placé un observateur. L'observateur en  $X$  ne voit pas le poisson à sa position réelle, c'est-à-dire en  $P$ , mais à la position de son image  $P'$  à travers le dioptre eau/air (Fig. 5.2).

Pour utiliser l'approximation paraxiale, il faut que les rayons parvenant à l'œil soient peu inclinés par rapport à la direction  $PX$  ; si  $d$  est la taille typique

de l'œil et  $L$  sa distance à l'aquarium, cette condition s'écrit :  $\alpha = \arctan (d/L) \ll 1$ . Avec  $d$  de l'ordre du centimètre, la condition est obtenue dès que  $L$  dépasse 10 cm ( $\alpha$  est alors de l'ordre de 0,1 rad).

Nous pouvons alors utiliser la relation de conjugaison du dioptre plan qui donne la position  $P'$  de l'image du poisson vue par l'observateur dans l'air. Si  $O$  désigne l'intersection de  $PX$  avec le dioptre, nous écrivons :



$$\frac{\overline{OP}}{n_{\text{eau}}} - \frac{\overline{OP'}}{n_{\text{air}}} = 0$$

Avec  $n_{\text{eau}} \approx \frac{4}{3}$  et  $n_{\text{air}} \approx 1$ , nous obtenons  $\overline{OP'} = \frac{3}{4}\overline{OP}$ . L'observateur voit l'image du poisson en P', dans l'eau (c'est-à-dire que l'image P' du poisson est virtuelle) à une distance de la paroi de l'aquarium environ 1,3 fois plus petite que la distance réelle du poisson à la paroi de l'aquarium.

## 2 La lame à faces parallèles

Une lame à faces parallèles est constituée de deux dioptries plans, parallèles entre eux et distants de  $e$ . En général, les deux milieux de part et d'autre de la lame sont identiques, par exemple de l'air. Nous notons  $n_1$  l'indice du milieu dans lequel se trouve la lame et  $n_2$  l'indice du milieu situé entre les deux dioptries et qui constitue la lame ; ce matériau peut par exemple être du verre.

Nous nous intéressons dans un premier temps au trajet des rayons d'un faisceau de lumière parallèle incidente sur la lame. Nous verrons ensuite les propriétés de l'image d'un objet ponctuel à travers la lame.

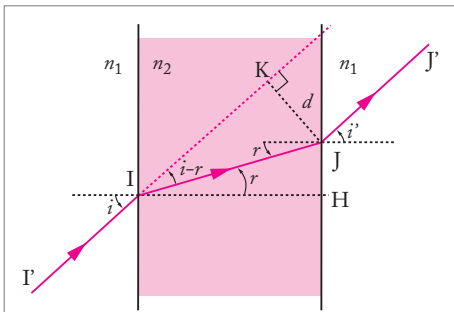
### Translation d'un rayon lumineux par une lame

Nous avons représenté sur la figure 5.3 le trajet d'un rayon particulier du faisceau de lumière parallèle. Ce rayon arrive en I sur la lame avec un angle d'incidence égal à  $i$ . Il est réfracté dans la lame avec un angle  $r$  suivant la loi de Descartes :

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

Le rayon se propage alors dans la lame et arrive en J à l'interface  $n_2/n_1$  avec un angle d'incidence  $r$ . Il est réfracté dans le milieu d'indice  $n_1$  avec un angle  $i'$  suivant la loi de Descartes :

$$n_2 \sin r = n_1 \sin i'$$



**Fig. 5.3.** Translation d'un rayon lumineux à travers une lame à faces parallèles.

Les deux relations aboutissent à  $\sin i = \sin i'$ , soit  $i' = i$ . Nous en déduisons que le rayon émergent de la lame est parallèle au rayon incident. Il n'y a donc pas d'effet de déviation de la lumière par une lame à faces parallèles. Quelle est alors l'effet d'une lame sur la propagation de la lumière ? Cet effet correspond à une translation des rayons lumineux, la distance de translation dépendant de l'angle d'incidence du rayon sur la lame et de l'épaisseur de la lame. Exprimons la distance  $d$  de translation du rayon incident. En absence de lame, le rayon suit la trajectoire IK (en pointillé) ; en présence de la lame, il sort suivant JJ', translaté par rapport à sa direction initiale I'I. La distance entre le rayon non dévié IK et le rayon dévié par la lame JJ' est  $d = JK$ .

La distance  $d$  est déterminée par les relations dans le triangle IJK, rectangle en K :

$$d = JK = IJ \sin(i - r)$$

Par ailleurs, dans le triangle IJH rectangle en H, nous avons :

$$IJ = \frac{IH}{\cos r} = \frac{e}{\cos r}$$

On peut donc écrire :

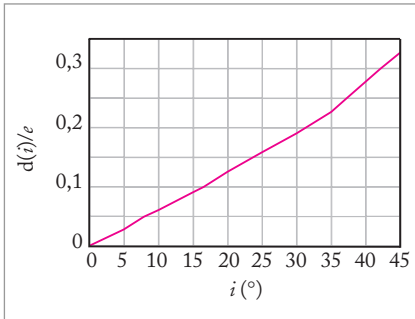
$$d = e \frac{\sin(i - r)}{\cos r} = e \frac{\sin i \cos r - \sin r \cos i}{\cos r}$$

Il faut éliminer  $r$  dans cette expression :

$$\cos r = \sqrt{1 - \sin^2 r} = \frac{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i}}{n_2}$$

Nous obtenons finalement :

$$d(i) = e \left( \sin i - \frac{n_1 \sin i}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i}} \cos i \right) = e \sin i \frac{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} - n_1 \cos i}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i}}$$



**Fig. 5.4.** Distance de translation  $d(i)$  d'un rayon à travers une lame à faces parallèles en fonction de l'angle d'incidence  $i$  du rayon sur la lame ; le calcul est effectué pour  $n_1 = 1$  et  $n_2 = 1,5$  (lame de verre dans l'air).

Il apparaît que la distance de translation croît avec l'angle d'incidence et peut atteindre un tiers de l'épaisseur de la lame (Fig. 5.4). La lame peut être utilisée pour décaler un faisceau de lumière. Cependant dans la pratique, on utilise plutôt des prismes qui permettent de décaler des faisceaux lumineux, mais également de changer leur direction de propagation. C'est le cas pour les jumelles.

### Image d'un objet par une lame

Considérons un objet ponctuel A émettant un faisceau conique divergeant vers la lame. Cet objet ponctuel A admet une image ponctuelle A'' dans l'approximation paraxiale puisqu'alors cha-

que dioptre vérifie la condition de stigmatisme approché (Fig. 5.5). Pour déterminer la position de l'image A'' de A à travers la lame, nous considérons le schéma synoptique suivant :

$$A \xrightarrow{\text{dioptre 1}} A' \xrightarrow{\text{dioptre 2}} A''$$

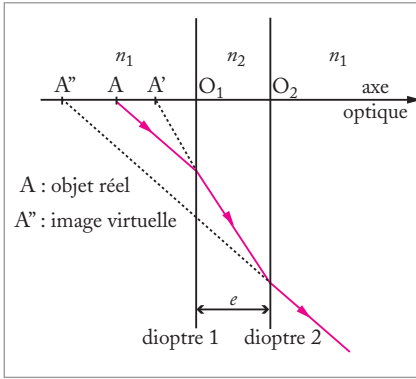
Il suffit d'appliquer deux fois la relation de conjugaison des dioptres plans pour obtenir la position de l'image A'' à travers la lame.

$$\frac{\overline{O_1 A}}{n_1} - \frac{\overline{O_1 A'}}{n_2} = 0$$

$$\frac{\overline{O_2 A'}}{n_2} - \frac{\overline{O_2 A''}}{n_1} = 0$$

Avec  $\overline{O_1 O_2} = e$ , nous obtenons la position de l'image A'' de A à travers la lame à faces parallèles en sommant les deux égalités :

$$\overline{O_2 A''} = \overline{O_2 A} + \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)e$$

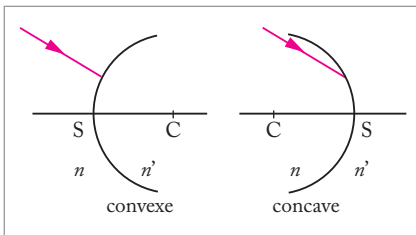


Lorsque  $n_1 < n_2$ , l'image  $A''$  est plus éloignée de la lame que ne l'est l'objet ; lorsque  $n_1 > n_2$ , elle est plus proche de la lame que l'objet.

**Fig. 5.5.** Images successives  $A'$  et  $A''$  de l'objet  $A$  à travers une lame à faces parallèles, constituée des dioptres 1 et 2.  $A''$  est l'image définitive de  $A$  à travers la lame.

## 5.2. Le dioptre sphérique

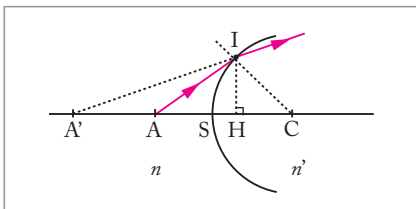
Considérons un dioptre sphérique de centre  $C$ , séparant un milieu d'indice  $n$  d'un milieu d'indice  $n'$  (Fig. 5.6). Dans l'approximation de Gauss, on se limite en fait à une partie de la sphère, c'est-à-dire à une calotte sphérique de sommet  $S$ , les angles considérés étant faibles. L'axe  $CS$  est appelé axe principal ou axe optique du dioptre.



**Fig. 5.6.** Rayon incident sur un dioptre concave ou convexe.

### 1 Dioptre sphérique concave ou convexe

**Définition :** Le dioptre sphérique est dit concave ou convexe selon que sa concavité est orientée dans le sens des rayons incidents ou dans le sens opposé.



**Fig. 5.7.** Points  $A$  et  $A'$  conjugués à travers un dioptre sphérique de sommet  $S$  et de centre  $C$ .

### 2 Relation de conjugaison avec origine au sommet

Pour établir la relation de conjugaison du dioptre sphérique, reprenons l'expression du chemin optique entre un point lumineux  $A$  et un point  $A'$ , calculé au chapitre 4.

Avec  $R = \overline{SC}$ ,  $p = \overline{SA}$ ,  $p' = \overline{SA'}$  et  $x = \overline{HI}$ , l'expression du chemin optique est (Fig. 5.7) :

$$L_{AA'} = n p \sqrt{1 + 2 \frac{x}{p} \left( \frac{R}{p} - 1 \right)} - n' p' \sqrt{1 + 2 \frac{x}{p'} \left( \frac{R}{p'} - 1 \right)}$$

Nous savons que le dioptré sphérique n'est rigoureusement stigmatique que pour les points de Weierstrass. Effectuons un développement limité au premier ordre en  $x$  du chemin optique  $L_{AA'}$  :

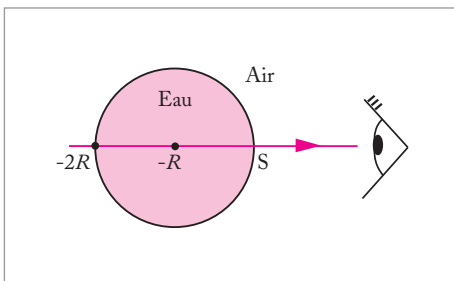
$$L_{AA'} \approx n p \left( 1 + \frac{x}{p} \left( \frac{R}{p} - 1 \right) \right) - n' p' \left( 1 + \frac{x}{p'} \left( \frac{R}{p'} - 1 \right) \right)$$

Nous retrouvons la condition de stigmatisme rigoureux à l'ordre 0 (position des points de Weierstrass). La minimisation du chemin optique conduit à :

$$n \left( \frac{R}{p} - 1 \right) - n' \left( \frac{R}{p'} - 1 \right) = 0$$

d'où nous déduisons la relation de conjugaison du dioptré sphérique :

$$\frac{n'}{p'} - \frac{n}{p} = \frac{n' - n}{R}$$



**Fig. 5.8.** L'observateur regarde le poisson dans un aquarium sphérique de rayon  $R$ .

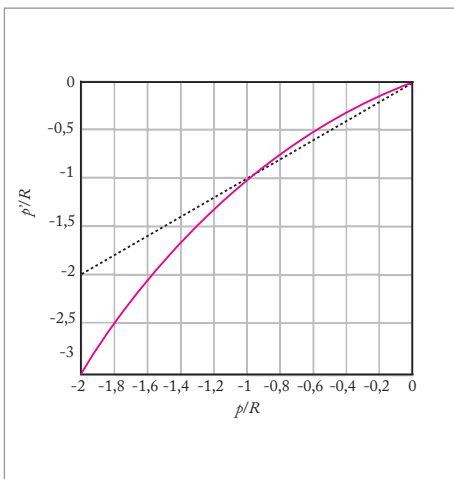
Reprenons l'exemple du poisson que nous plaçons cette fois dans un aquarium aux parois sphériques (Fig. 5.8).

Exprimons  $p' = \overline{SP'}$  en fonction de  $p = \overline{SP}$ . En appliquant la relation de conjugaison d'un dioptré sphérique avec origine au sommet, nous obtenons :

$$\frac{n_{\text{air}}}{\overline{SP'}} - \frac{n_{\text{eau}}}{\overline{SP}} = \frac{n_{\text{air}} - n_{\text{eau}}}{R}$$

La position de  $P'$  est donc :

$$\overline{SP'} = \frac{n_{\text{air}}}{\frac{n_{\text{eau}}}{\overline{SP}} + \frac{n_{\text{air}} - n_{\text{eau}}}{R}}$$



**Fig. 5.9.** Distance  $p' = \overline{SP'}$  de l'image du poisson vu par l'observateur en fonction de la distance  $p = \overline{SP}$  du poisson au bord de l'aquarium sphérique (configuration de la figure 5.8). La courbe en trait pointillé indique la position réelle du poisson.

Il apparaît que le poisson est confondu avec son image (Fig. 5.9) à travers le dioptré lorsqu'il est situé le plus près de l'observateur (c'est-à-dire en  $S$ , soit  $p = 0$ ) ou lorsqu'il est au milieu de l'aquarium ( $p = -R$ ). Lorsque le poisson est entre la paroi la plus éloignée de l'observateur et le centre du bocal ( $-2R < p < -R$ ), il apparaît à l'observateur plus éloigné qu'il ne l'est réellement alors que lorsqu'il est situé entre le centre du bocal et la paroi la plus proche de l'observateur ( $-R < p < 0$ ), il paraît plus proche qu'il ne l'est réellement.

### 3 Relation de conjugaison avec origine au centre

On peut établir une autre formule de conjugaison en choisissant l'origine du repère au centre C du dioptre. Notons :

$$q = \overline{CA} \quad \text{et} \quad q' = \overline{CA'}$$

Il vient alors  $q = p - R$  et  $q' = p' - R$ . La relation de conjugaison avec origine au sommet devient :

$$\frac{n'}{q' + R} - \frac{n}{q + R} = \frac{n' - n}{R}$$

Après simplification, nous obtenons :

$$\frac{n'}{q} - \frac{n}{q'} = \frac{n - n'}{R}$$

Cette relation constitue la relation de conjugaison du dioptre sphérique avec origine au centre. On rappelle que  $R = \overline{SC}$ .

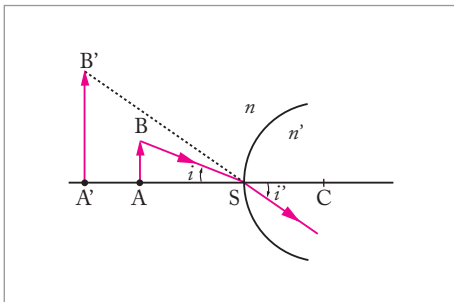


Fig. 5.10. Grandissement à travers un dioptre sphérique.

### 4 Expression du grandissement du dioptre sphérique

**Définition :** Si  $AB$  est un objet transverse (perpendiculaire à l'axe optique du dioptre) et  $A'B'$  son image par le dioptre, alors le grandissement transverse  $\gamma$  est donné par la relation :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

Pour calculer  $\gamma$ , considérons le rayon issu de  $B$  et passant par le sommet  $S$  du dioptre (Fig. 5.10). Nous notons  $i$  l'angle d'incidence de ce rayon  $BS$  sur le dioptre et  $i'$  l'angle que fait le rayon réfracté  $SB'$ .

Dans l'approximation des faibles angles, nous avons :

$$i \approx \frac{\overline{AB}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{AB}}{p} \quad \text{et} \quad i' \approx \frac{\overline{A'B'}}{\overline{SA'}} = \frac{\overline{A'B'}}{p'}$$

Dans l'approximation paraxiale, la loi de la réfraction (loi de Kepler) s'écrit  $n i = n' i'$ . Il vient donc :

$$n \frac{\overline{AB}}{p} = n' \frac{\overline{A'B'}}{p'}$$

Nous obtenons l'expression du grandissement :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{n p'}{n' p}$$

## 5 Foyers objet et image du dioptre sphérique ; distance focale

**Définition :** Les foyers (ou points focaux) objet et image sont les points conjugués de points situés à l'infini. Le foyer objet  $F$  est le point conjugué d'une image réelle à l'infini, tandis que le foyer image  $F'$  est l'image d'un objet réel placé à l'infini.

Pour déterminer les positions des foyers, nous utilisons la relation de conjugaison du dioptre sphérique avec origine au sommet, avec  $R = \overline{SC}$  :

- position du foyer objet  $F$  : avec  $p' \rightarrow \infty$ ,  $\overline{SF} = p = \frac{n}{n' - n}R$  ;
- position du foyer image  $F'$  : avec  $p \rightarrow \infty$ ,  $\overline{SF'} = p' = \frac{n'}{n' - n}R$ .

Les distances focales objet  $f$  et image  $f'$  sont définies par :

$$f = \overline{SF} = \frac{n}{n' - n}R \quad \text{et} \quad f' = \overline{SF'} = \frac{n'}{n' - n}R$$

## 6 Dioptre convergent ou divergent

**Définition :** Un dioptre est dit convergent si le foyer image  $F'$  est réel, divergent s'il est virtuel.

Cette condition dépend de la concavité du dioptre sphérique et de la réfringence des milieux qu'il sépare. La figure 5.11 illustre les différents cas possibles. Le dioptre sphérique est convergent dans deux cas : lorsque le dioptre est concave et  $n > n'$  (a) et lorsque le dioptre est convexe et  $n < n'$  (b) ; il est divergent lorsque le dioptre est convexe et  $n > n'$  (c) et lorsque le dioptre est concave et  $n < n'$  (d).

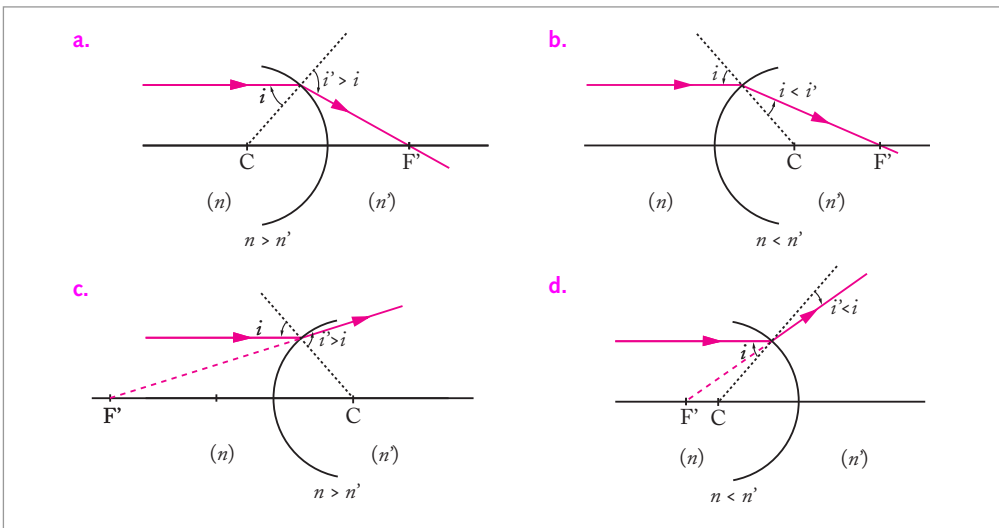
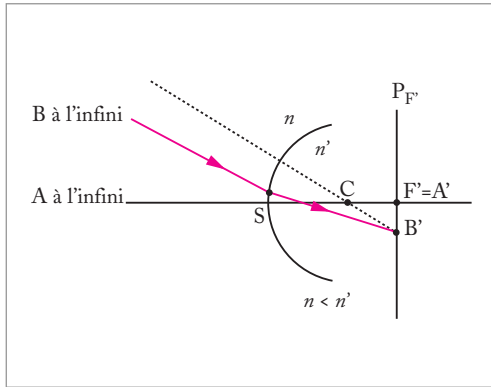


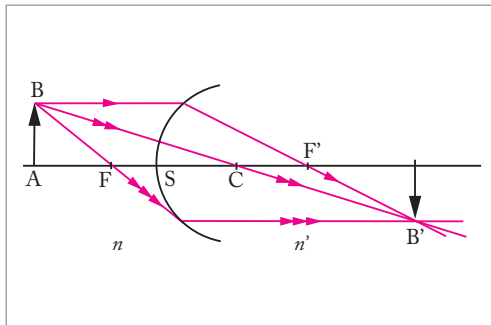
Fig. 5.11. Dioptres convergents a. et b. et dioptres divergents c. et d.

## 7 Construction géométrique de l'image d'un objet à travers un dioptre sphérique



**Fig. 5.12.** Image  $A'B'$  d'un objet étendu transverse  $AB$ , situé à l'infini, à travers un dioptre sphérique.

la position du point étant donnée par l'intersection du rayon passant par le centre  $C$  du dioptre et du plan focal image  $P_{F'}$ . En effet, le rayon parallèle à  $BI$  passant par le centre du dioptre n'est pas dévié et son intersection avec le plan focal image du dioptre coïncide avec l'image  $B'$  de  $B$ .



**Fig. 5.13.** Construction à trois rayons particuliers de l'image  $A'B'$  d'un objet étendu transverse  $AB$  à travers un dioptre sphérique.

tracé de deux de ces rayons est suffisant) :

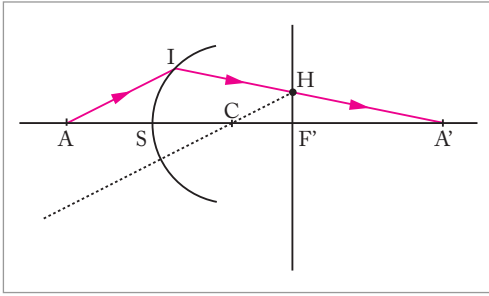
- le rayon incident parallèle à l'axe est réfracté suivant une direction passant par le foyer image  $F'$  du dioptre ;
- le rayon passant par le centre  $C$  du dioptre n'est pas dévié ;
- le rayon incident passant par le point focal objet  $F$  du dioptre est réfracté dans une direction parallèle à l'axe du dioptre.

### Cas d'un objet à l'infini

Considérons tout d'abord le cas d'un objet  $AB$  transverse situé à l'infini, le point  $A$  étant sur l'axe du dioptre. L'image  $A'B'$  se trouve dans le plan focal du dioptre  $P_{F'}$ , c'est-à-dire que  $A'B'$  est transverse et  $A'$  est confondu avec le point focal image  $F'$  du dioptre (Fig. 5.12). Pour déterminer la position de l'image  $B'$  de  $B$  dans le plan focal du dioptre, nous nous référons à une situation où un faisceau de rayons parallèles arrivent sous incidence  $i$  sur le dioptre. Nous savons que ce faisceau converge en un point du plan focal image du dioptre,

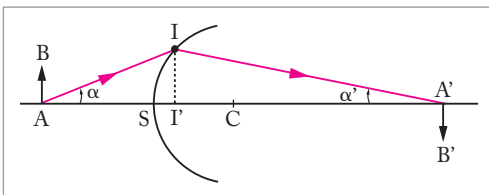
### Cas d'un objet $AB$ situé à distance finie du dioptre

Considérons maintenant un objet quelconque transverse  $AB$ , situé à distance finie du dioptre (le point  $A$  est sur l'axe optique). Pour construire l'image  $A'B'$  de  $AB$  à travers le dioptre, le plus simple est de construire l'image  $B'$  de  $B$ , l'image  $A'$  de  $A$  se déduisant de  $B'$  en prenant la projection de  $B'$  sur l'axe (l'image d'un objet transverse est transverse). Pour cela, nous pouvons utiliser trois rayons particuliers issus de  $B$  (Fig. 5.13) (dans la pratique, le



**Fig. 5.14.** Construction par un rayon quelconque de l'image  $A'$  d'un objet  $A$  sur l'axe optique à travers un dioptre sphérique.

Nous mentionnons ici une autre construction de l'image d'un objet placé sur l'axe, l'alternative consistant bien sûr à étendre fictivement l'objet ponctuel  $A$  en un objet étendu  $AB$  et à reprendre la construction décrite ci-dessus. Il est cependant possible de procéder autrement. Nous savons que l'image  $A'$  de  $A$  est située sur l'axe du dioptre. Il nous suffit donc d'effectuer le tracé d'un rayon lumineux issu de  $A$  pour déterminer la position de  $A'$  (Fig. 5.14). Prenons ce rayon quelconque, incident sur le dioptre en  $I$ . Comment construire son trajet après réfraction sur le dioptre ? Référons-nous pour cela à une autre situation, dans laquelle le rayon de direction  $AI$  appartient à un faisceau de rayons parallèles ; tous ces rayons convergent dans le plan focal du dioptre en un point  $H$  (intersection du plan focal image et du rayon parallèle à  $AI$  passant par le centre  $C$  du dioptre). Cette construction nous indique que le rayon  $AI$  et le rayon parallèle à  $AI$  passant par  $C$  se coupent dans le plan focal image au point  $H$ . Le trajet du rayon  $AI$  après réfraction est donc donné par la direction de  $IH$  et  $A'$  est l'intersection de ce rayon avec l'axe du dioptre.



**Fig. 5.15.** Invariant de Lagrange-Helmholtz  $n \overline{AB} \alpha = n' \overline{A'B'} \alpha'$  pour un dioptre sphérique.  $A'B'$  est l'image de  $AB$  à travers le dioptre.

un dioptre sphérique. Pour établir l'équation de Lagrange-Helmholtz, considérons un objet étendu  $AB$  plan perpendiculaire à l'axe du dioptre sphérique et  $A'B'$  son image par le dioptre. Soit  $AI$  un rayon issu de  $A$  et incident en  $I$  sur le dioptre (Fig. 5.15). Le rayon réfracté se propage suivant  $IA'$ . Repérons les angles  $\alpha$  et  $\alpha'$  entre l'axe du dioptre et les rayons respectivement incident et réfracté (ces angles, orientés, sont mesurés de l'axe optique vers le rayon).

Dans l'approximation paraxiale, le rayon  $AI$  est proche de l'axe. Nous pouvons considérer que la projection  $I'$  de  $I$  sur l'axe est confondue avec le sommet  $S$  du dioptre et que les angles  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont petits. Nous pouvons alors écrire :

- dans le triangle  $AIS$  :  $\alpha \approx \tan \alpha = \frac{\overline{SI}}{\overline{SA}}$

## Autre construction de l'image d'un objet sur l'axe du dioptre

Nous mentionnons ici une autre construction de l'image d'un objet placé sur l'axe, l'alternative consistant bien sûr à étendre fictivement l'objet ponctuel  $A$  en un objet étendu  $AB$  et à reprendre la construction décrite ci-dessus. Il est cependant possible de procéder autrement. Nous savons que l'image  $A'$  de  $A$  est située sur l'axe du dioptre. Il nous suffit donc d'effectuer le tracé d'un rayon lumineux issu de  $A$  pour déterminer la position de  $A'$  (Fig. 5.14). Prenons ce rayon quelconque, incident sur le dioptre en  $I$ . Comment construire son trajet après réfraction sur le dioptre ? Référons-nous pour cela à une autre situation, dans laquelle le rayon de direction  $AI$  appartient à un faisceau de rayons parallèles ; tous ces rayons convergent dans le plan focal du dioptre en un point  $H$  (intersection du plan focal image et du rayon parallèle à  $AI$  passant par le centre  $C$  du dioptre). Cette construction nous indique que le rayon  $AI$  et le rayon parallèle à  $AI$  passant par  $C$  se coupent dans le plan focal image au point  $H$ . Le trajet du rayon  $AI$  après réfraction est donc donné par la direction de  $IH$  et  $A'$  est l'intersection de ce rayon avec l'axe du dioptre.

## 8 Équation (ou invariant) de Lagrange-Helmholtz

Un invariant correspond à une quantité constante au cours de la propagation de la lumière. Ainsi, la quantité  $n \sin i$  est-elle un invariant de la propagation dans les milieux transparents homogènes isotropes. L'invariant de Lagrange-Helmholtz concerne le passage de la lumière à travers



- dans le triangle A'IS :  $\alpha' \approx \tan \alpha' = +\frac{\overline{SI}}{\overline{SA}'}$

Nous en déduisons l'égalité :

$$\alpha \overline{SA} = \alpha' \overline{SA}'$$

Le grandissement  $\gamma$  du dioptre est donné par :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{n \overline{SA}'}{n' \overline{SA}}$$

Nous obtenons finalement l'équation de Lagrange-Helmholtz :

$$n \alpha \overline{AB} = n' \alpha' \overline{A'B'}$$

La quantité  $n \alpha \overline{AB}$  est appelée l'invariant de Lagrange-Helmholtz.

## 5.3. Le miroir plan

### 1 Image d'un objet par un miroir plan

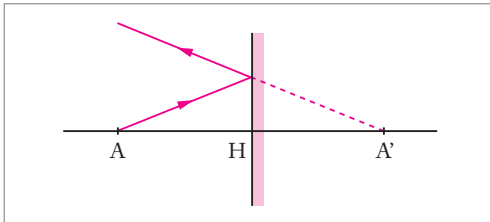


Fig. 5.16. Image A' d'un objet A à travers un miroir plan.

**Définition :** Toute surface réfléchissant bien la lumière porte le nom de miroir ; c'est le cas de la surface plane d'un métal poli.

Le miroir plan est un exemple de système optique présentant un stigmatisme rigoureux pour tout couple de points symétriques par rapport au plan du miroir.

**Relation :** La relation de conjugaison du miroir plan est par suite :

$$\overline{AH} = \overline{HA'}$$

où H est le projeté de A sur le miroir (Fig. 5.16).

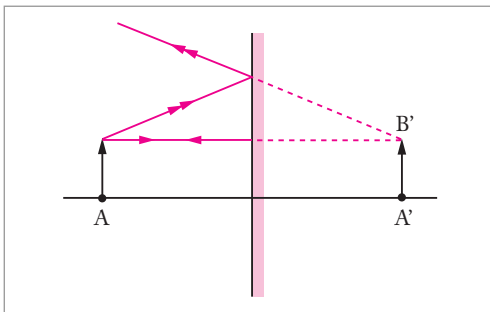


Fig. 5.17. Image A'B' d'un objet étendu transverse AB à travers un miroir plan.

Un objet étendu pouvant être considéré comme un ensemble d'objets ponctuels, l'image d'un objet étendu est le symétrique de l'objet par le miroir. Le grandissement donné par le miroir plan est égal à 1. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer le rayon perpendiculaire au miroir (ce rayon, en incidence normale, est dévié de  $\pi$ ) ; nous obtenons  $AB = A'B'$  (Fig. 5.17) et :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = 1$$

### La manufacture de Saint-Gobain

Colbert réussit à ravir le monopole des glaces à la Sérénissime république de Venise en faisant venir quatre verriers de Murano qu'il installa dans le faubourg Saint-Antoine. La manufacture vit le jour en 1665 sous le nom de Manufacture des glaces du faubourg Saint-Antoine. Cet établissement devait fabriquer « des glaces de miroir et autres ouvrages de cristal ». L'entreprise fut un succès. Louis XIV puis Louis XV se fournirent à la manufacture et, si la grande époque des miroirs se situe au XVIII<sup>e</sup> siècle, Versailles illustre déjà magnifiquement la production de la nouvelle industrie française. En 1695, la Manufacture du faubourg Saint-Antoine fusionna avec la Manufacture royale des glaces de France (Saint-Gobain) puis avec celle de Tourlaville près de Cherbourg, dont elle utilisera les fours jusqu'en 1832. Saint-Gobain et Coucy lui fournirent tout le bois nécessaire et, lorsque les réserves des terres de la manufacture furent épuisées, au XVIII<sup>e</sup> siècle, on fit appel au charbon anglais importé de Newcastle. Colbert interdit l'importation des glaces vénitiennes et l'exportation des sables de Creil et de Dieppe que l'on utilisait à l'étranger ; il ordonna que l'on importe d'Espagne des cendres de varech tandis que la terre nécessaire à la fabrication des fours venait de Bellièvre en Normandie. Les modes de gestion de la manufacture changèrent au fil du temps ; le premier fut une compagnie par actions faisant appel à la noblesse et au clergé, et dont le premier conseil d'administration était entièrement bourgeois. On y trouvera notamment deux

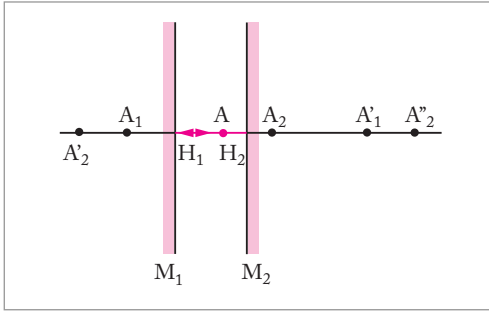
frères Poquelin, cousins de Molière, grands marchands parisiens de miroirs, qui centralisaient le commerce des glaces pour tout le royaume de France.

À l'époque, les gentilshommes verriers prétendent avoir seuls le privilège de couper les glaces et provoquent sans cesse des conflits, car ils se libèrent selon leur bon plaisir, pour aller à la chasse par exemple, et bloquent ainsi toute la production. Les ouvriers sont des techniciens dont la formation peut durer près de dix ans. Les apprentis sont embauchés à quinze ans et soumis au régime général du travail, de cinq heures du matin à sept heures du soir sans autre repos que les repas. Les ouvriers sont logés à la manufacture dont les portes se ferment le soir à huit heures l'hiver et à dix heures l'été. Les retards sont sanctionnés par une amende et la discipline de la manufacture ressemble à celle d'une caserne. Cependant, les ouvriers bénéficient, outre le logement, de privilèges considérables tels que l'exemption d'impôts, les gardes de ville, le logement des gens de guerre. Ils ont en outre le droit de *committimus*, c'est-à-dire la possibilité de se faire juger devant une haute juridiction. Retraites et secours sont prévus, d'autant plus nécessaires que la manipulation du mercure est dangereuse. Ces ouvriers fabriquèrent des glaces soufflées puis des glaces coulées à partir de 1695. À partir du milieu du XIX<sup>e</sup> siècle, la manufacture s'adonne à l'industrie chimique, puis, un siècle plus tard, à l'industrie pétrochimique.

## 2 Association de deux miroirs plans

### *Association de deux miroirs plans parallèles*

Supposons que le plan d'incidence soit perpendiculaire au plan des miroirs (Fig. 5.18). Nous obtenons d'un point A objet une double infinité d'images alignées sur la même normale aux deux miroirs et passant par A. À chaque double réflexion, le rayon se trouve parallèle au rayon incident.



**Fig. 5.18.** Images successives d'un objet A situé entre deux miroirs.

Les deux images directes  $A_1$  et  $A_2$  de A sont telles que :

$$AH_2 = H_2A_2$$

$$AH_1 = H_1A_1$$

Les images successives de  $A_2$  dans  $M_1$  et  $M_2$  vérifient :

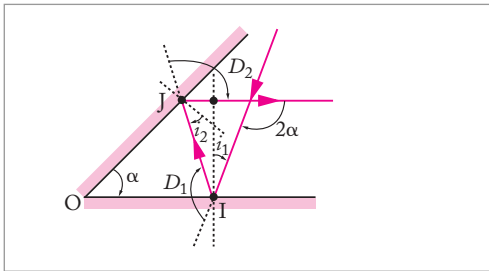
$$A_2H_1 = H_1A'_2$$

$$A'_2H_2 = H_2A''_2$$

Les images successives de  $A_1$  dans  $M_1$  et  $M_2$  vérifient :

$$A_1H_2 = H_2A'_1$$

$$A'_1H_1 = H_1A''_1$$



**Fig. 5.19.** Trajectoire d'un rayon lumineux pour une association de deux miroirs plans formant un angle  $\alpha$ .

### Association de deux miroirs plans formant un angle $\alpha$

Lorsque les deux miroirs forment un angle  $\alpha$ , les rayons incidents et réfléchis forment un angle égal à  $2\alpha$  après réflexion sur les deux miroirs (Fig. 5.19).

La déviation du rayon en I est donnée par :  $D_1 = \pi - 2i_1$

La déviation du rayon en J est donnée par :  $D_2 = \pi - 2i_2$

La déviation totale est donnée par :

$$D = 2\pi - 2(i_1 + i_2)$$

Dans le triangle OIJ, nous avons :

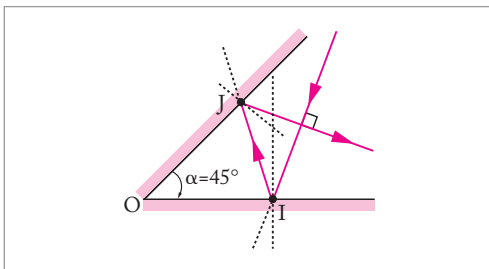
$$\left(\frac{\pi}{2} - i_1\right) + \left(\frac{\pi}{2} - i_2\right) + \alpha = \pi$$

soit

$$\alpha = i_1 + i_2$$

Finalement :

$$D = 2\pi - 2\alpha$$



**Fig. 5.20.** Trajectoire d'un rayon lumineux pour une association de deux miroirs plans formant un angle  $\alpha = 45^\circ$  : équerre optique.

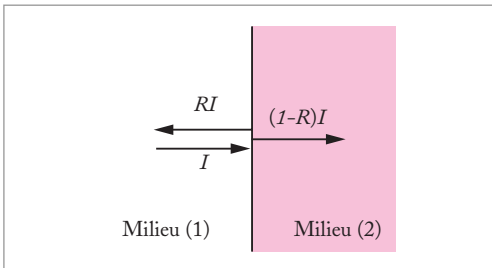
Pour obtenir un rayon réfléchi perpendiculaire au rayon incident, les deux miroirs doivent former un angle égal à  $45^\circ$ . Un tel montage est appelé équerre optique (Fig. 5.20).

### 3 Considération énergétique

La surface polie d'un bloc de verre, la surface de l'eau, la surface du mercure peuvent jouer le rôle de miroir. Nous savons pourtant que le pouvoir réflecteur de la surface d'un matériau dépend de la nature du matériau ; il dépend également souvent de l'angle d'incidence des rayons lumineux.

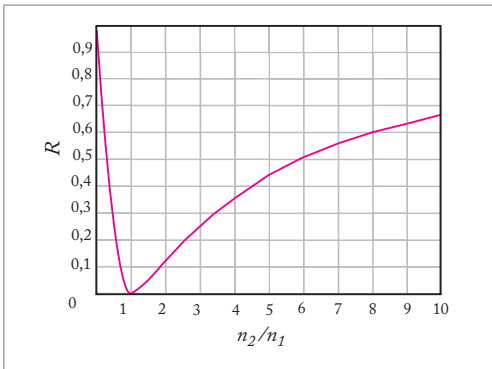
Sous incidence normale, le coefficient de réflexion  $R$  d'un dioptre séparant deux milieux réfringents, le milieu d'incidence (1) d'indice  $n_1$  du milieu (2) d'indice  $n_2$ , est donné par la formule de Fresnel :

$$R = \left( \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2$$



**Fig. 5.21.** Fractions réfléchie  $RI$  et transmise  $(1 - R)I$  de l'intensité lumineuse incidente  $I$  à la surface d'un dioptre.

$R$  mesure la fraction de l'intensité lumineuse réfléchie par le miroir tandis que  $(1 - R)$  correspond à la fraction de l'intensité lumineuse transmise dans le milieu (2) (Fig. 5. 21). Nous voyons qu'en incidence normale, aucun matériau réfringent n'est un réflecteur parfait car  $R$  est toujours différent de 1. Pour un milieu (1) donné, le dioptre sera d'autant plus réfléchissant que le milieu (2) aura un indice élevé.



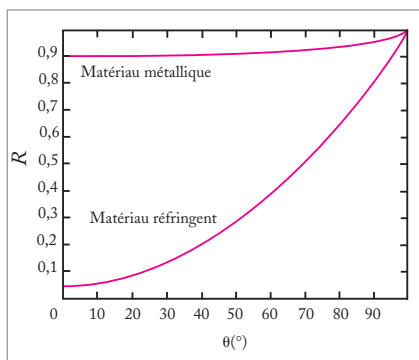
**Fig. 5.22.** Variation du coefficient de réflexion de l'intensité lumineuse à la surface d'un dioptre séparant un milieu d'indice  $n_1$  d'un milieu d'indice  $n_2$  en fonction du rapport  $n_2/n_1$ .

Le tableau ci-dessous fournit quelques valeurs de  $R$  pour l'interface air/milieu d'indice  $n$  sous incidence normale.

Milieu (2)	$n$	$R$
Eau	1,33	0,02
Verre	1,5	0,04
Germanium	4	0,36

**Fig. 5.23.** Valeur de la fraction d'énergie lumineuse réfléchie  $R$  pour un faisceau incident en incidence normale dans l'air vers un milieu (2) pour quelques matériaux.

Notons que pour les milieux réfringents, l'effet de miroir se produit de la même façon quel que soit le milieu d'incidence. Il est, par exemple, possible lorsqu'on est sous l'eau de voir son image se refléter à la surface de séparation eau/air. Et nous savons bien que cet effet se produit également à la surface de séparation air/eau : il suffit pour s'en convaincre de se pencher sur la surface de l'eau d'un lac.



**Fig. 5.24.** Variation de la fraction d'énergie lumineuse réfléchie  $R$  en fonction de l'angle d'incidence du faisceau lumineux sur un dioptre pour un matériau métallique et pour un matériau réfringent.

Les surfaces métalliques polies sont plus réfléchissantes que les milieux réfringents. Ainsi, en incidence normale,  $R$  est déjà égal à 0,9 et atteint la valeur de 1 pour un angle de  $90^\circ$ . La figure 5.24 montre les variations caractéristiques de  $R$  en fonction de l'angle d'incidence pour un matériau réfringent ( $n = 1,5$ ) et pour un matériau métallique.

## Un peu d'histoire

### Archimède défendant Syracuse

Archimède (287-212 av. J.C), savant grec, était également un fin stratège. On sait que, lors du siège de Syracuse par les romains, il participa à la défense de la ville en tant qu'ingénieur chargé de la direction des travaux portuaires, navales et militaires. Les romains, conscients de la valeur de cet adversaire, espéraient le capturer pour lui proposer de travailler pour eux. Malheureusement, lors de la prise de la ville en 212, et malgré les consignes du consul de

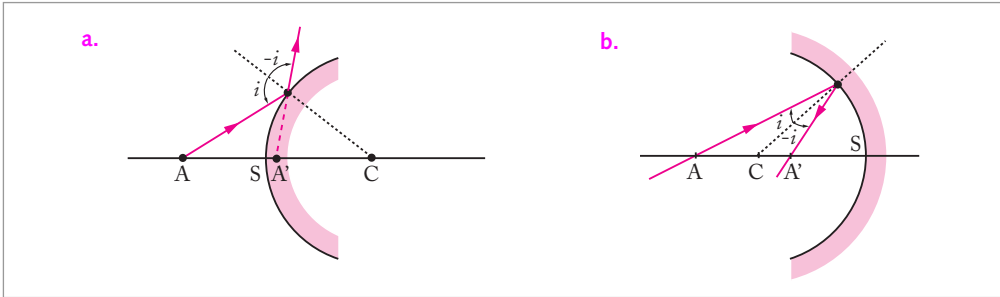
le capturer vivant, Archimède fut tué.

On attribue notamment à Archimède la destruction de la flotte romaine, postée au large de Syracuse ; la légende raconte qu'il aurait utilisé des miroirs réfléchissant la lumière du soleil vers les bateaux ; la puissance lumineuse ainsi réfléchie aurait provoqué l'incendie de la flotte. L'expérience a été reproduite avec 70 miroirs plans en cuivre disposés à 50 m d'un bateau.

## 5.4. Le miroir sphérique

Un miroir sphérique est un miroir dont la surface réfléchissante est une portion de sphère. Dans l'approximation de Gauss, les miroirs sphériques sont en général limités à une calotte sphérique de sommet  $S$  (pôle de la calotte). L'axe du miroir passe  $S$  et par le centre  $C$  du miroir ; c'est un axe de révolution du miroir.

Comme pour le dioptre sphérique, nous définissons un miroir sphérique concave ou convexe selon que la concavité de la calotte sphérique est orientée vers les rayons incidents ou dans le sens opposé (Fig. 5.25).

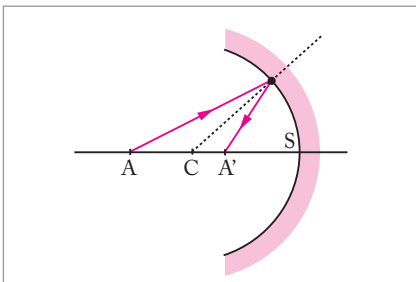


**Fig. 5.25.** Image  $A'$  d'un objet  $A$  par un miroir concave (a.) et convexe (b.).

D'un objet réel, le miroir concave donne une image virtuelle tandis que le miroir convexe donne une image réelle.

### 1 Stigmatisme rigoureux pour un miroir sphérique

Nous laissons à titre d'exercice la recherche des points conjugués vérifiant la condition de stigmatisme absolu pour le miroir sphérique. Il apparaît que seul le centre  $C$  du miroir ainsi que tout point de la surface du miroir vérifient cette condition ; ces points sont également leur propre conjugué.



**Fig. 5.26.** Image  $A'$  d'un objet  $A$  par un miroir sphérique.

### 2 Relation de conjugaison du miroir sphérique avec origine au sommet

Il est aisé de mener le calcul en utilisant le résultat obtenu dans le cas du dioptre sphérique. Il suffit de remarquer que la loi de la réflexion, exprimée pour des angles orientés,  $i = -i'$  est identique à une loi de réfraction dans l'approximation de Gauss  $ni = n'i'$  à condition de prendre  $n' = -n$ . Tous les calculs peuvent être menés à partir des résultats obtenus pour le dioptre sphérique.

Nous obtenons ainsi :

$$\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SA} = \frac{2}{SC}$$

### 3 Relation de conjugaison du miroir sphérique avec origine au centre

En reprenant le résultat obtenu pour le dioptre sphérique et en appliquant à nouveau  $n' = -n$  à la relation de conjugaison du dioptre sphérique (avec origine au centre), nous obtenons :

$$\frac{1}{CA} + \frac{1}{CA'} = \frac{2}{CS}$$

#### 4 Foyers objet et image du miroir sphérique

On définit le foyer objet  $F$  comme le point donnant une image à l'infini et le foyer image  $F'$  comme le point image d'un objet à l'infini. En prenant la relation de conjugaison avec origine au sommet, nous obtenons :

$$\overline{SF} = \overline{SF'} = \frac{\overline{SC}}{2}$$

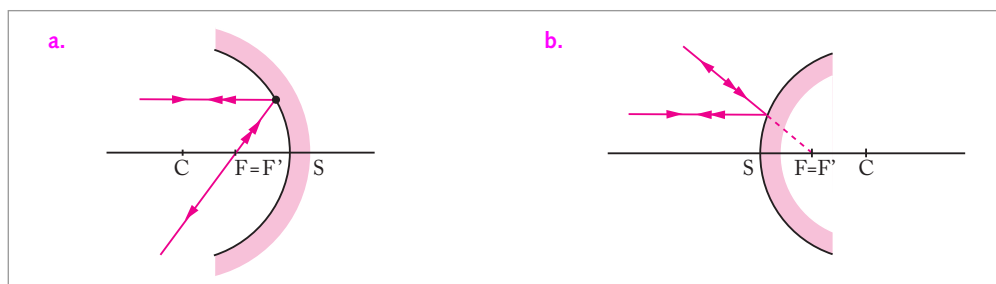


Fig. 5.27. Construction des foyers objet et image d'un miroir sphérique concave a. et convexe b.

Les foyers objet et image sont confondus et coïncident avec le milieu de  $CS$  (Fig. 5.27). Le résultat est cohérent avec le principe de retour inverse de la lumière.

#### 5 Relation de conjugaison du miroir sphérique avec origine aux foyers

Reprenons la relation de conjugaison avec origine au sommet :

$$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}}$$

avec

$$\overline{SA'} = \overline{SF'} + \overline{F'A'} = \frac{\overline{SC}}{2} + \overline{F'A'}$$

et

$$\overline{SA} = \overline{SF} + \overline{FA} = \frac{\overline{SC}}{2} + \overline{FA}$$

il vient :

$$\frac{1}{\left(\frac{\overline{SC}}{2} + \overline{F'A'}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{\overline{SC}}{2} + \overline{FA}\right)} = \frac{2}{\overline{SC}}$$

soit en développant :

$$\frac{\overline{SC} + \overline{FA} + \overline{F'A'}}{\frac{\overline{SC}^2}{4} + \frac{\overline{SC}}{2}(\overline{FA} + \overline{F'A'}) + \overline{FA} \cdot \overline{F'A'}} = \frac{2}{\overline{SC}}$$

Nous obtenons finalement la loi de conjugaison des miroirs sphériques avec origine aux foyers :

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = \frac{\overline{SC}^2}{4} = \overline{FS}^2$$

## 6 Grandissement du miroir sphérique

Soit  $AB$  un objet transverse et  $A'B'$  son image par le miroir sphérique. Pour obtenir l'expression du grandissement, considérons le rayon passant par le sommet  $S$  du miroir (Fig. 5.28). La loi de la réflexion donne  $i' = -i$ , ce qui montre que les triangles  $SAB$  et  $SA'B'$  sont semblables. Nous obtenons donc :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

Nous reconnaissons l'expression du grandissement obtenu pour le dioptre sphérique avec  $n' = -n$ .

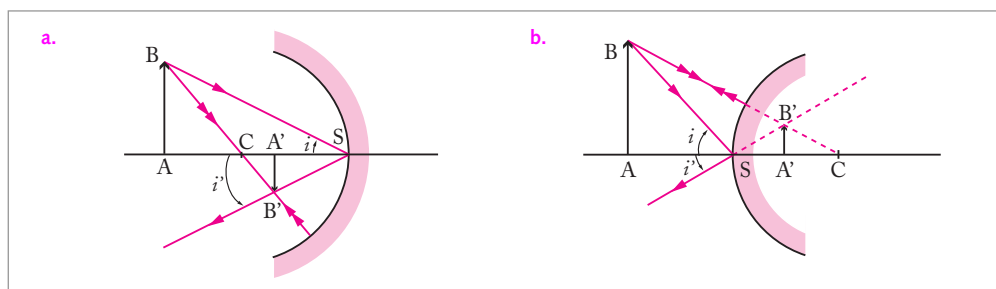


Fig. 5.28. Grandissement à travers un miroir sphérique concave (a.) et convexe (b.).

## 7 Construction de l'image d'un objet à travers un miroir sphérique

La construction de l'image d'un objet par un miroir sphérique est en tout point similaire à celle de l'image d'un objet à travers un dioptre sphérique, à condition d'inverser le sens de propagation de la lumière (le rayon considéré est réfléchi et non réfracté).

### Cas d'un objet à l'infini

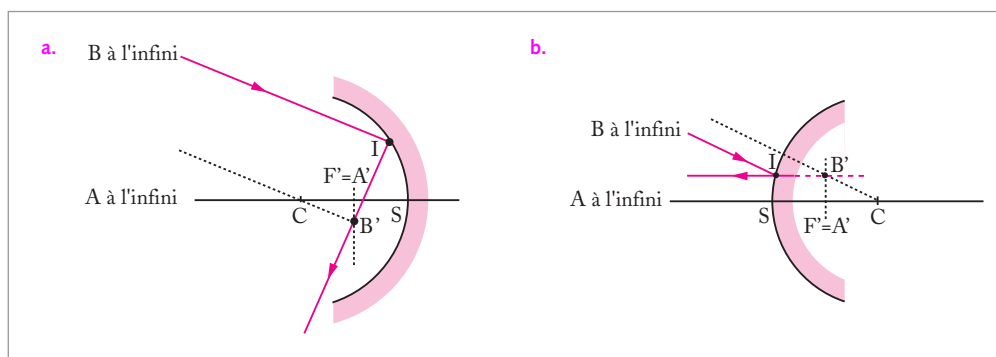


Fig. 5.29. Image  $A'B'$  d'un objet étendu transverse  $AB$ , situé à l'infini, à travers un miroir sphérique concave (a.) et convexe (b.).

Considérons tout d'abord le cas d'un objet  $AB$  transverse situé à l'infini, le point  $A$  étant sur l'axe du miroir (Fig. 5.29). L'image  $A'B'$  se trouve alors dans le plan focal du miroir, c'est-à-dire que  $A'B'$  est transverse et  $A'$  est confondu avec le point focal image du miroir.

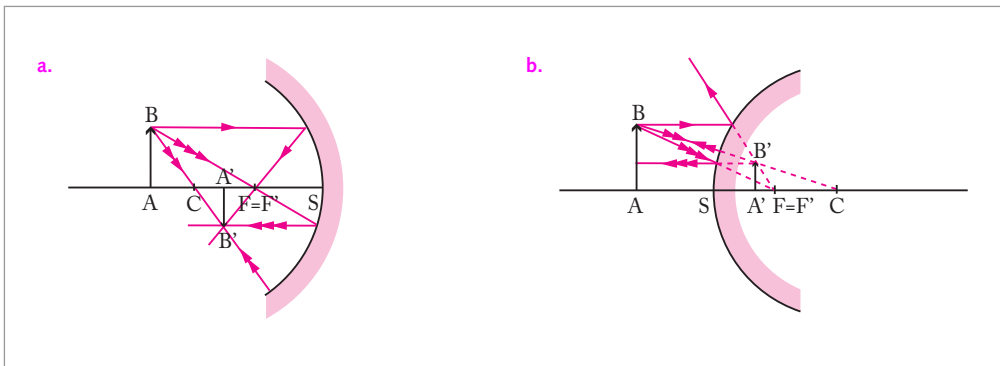


Pour déterminer la position de l'image  $B'$  de  $B$  dans le plan focal, nous nous référons à une situation où un faisceau de rayons parallèles arrivent sur le miroir ; nous savons que ce faisceau converge en un point du plan focal image, la position du point étant donnée par l'intersection du rayon passant par le centre du miroir et du plan focal image. Le rayon parallèle à  $BI$  passant par le centre du miroir n'est pas dévié et son intersection avec le plan focal image coïncide avec l'image  $B'$  de  $B$ .

### Cas d'un objet $AB$ situé à distance finie du miroir

Considérons maintenant un objet  $AB$  quelconque transverse, situé à distance finie du miroir (Fig. 5.30). Pour construire l'image  $A'B'$  de  $AB$  par le miroir, le plus simple est de construire l'image  $B'$  de  $B$ , l'image  $A'$  de  $A$  se déduisant de  $B'$  en prenant la projection de  $B'$  sur l'axe (l'image d'un objet transverse est une image transverse). Pour cela, nous pouvons utiliser trois rayons particuliers issus de  $B$  (dans la pratique, le tracé de deux de ces rayons est suffisant) :

- le rayon incident parallèle à l'axe est réfléchi suivant une direction passant par le foyer image  $F'$  du miroir ;
- le rayon passant par le centre  $C$  du miroir n'est pas dévié ;
- le rayon incident passant par le point focal objet  $F$  est réfléchi dans une direction parallèle à l'axe du miroir.

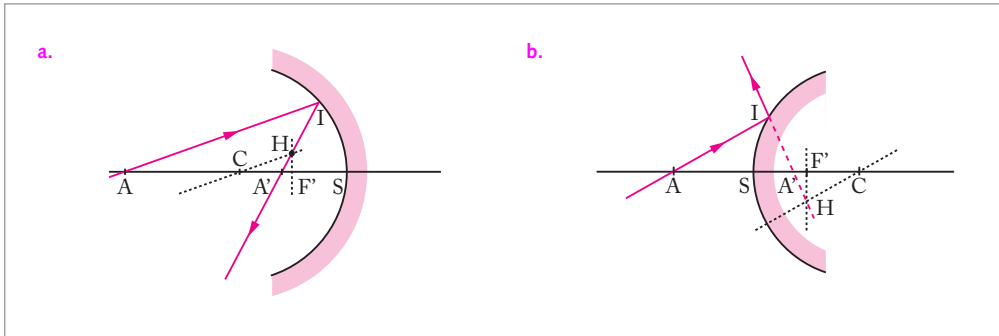


**Fig. 5.30.** Construction par trois rayons particuliers de l'image  $A'B'$  d'un objet étendu transverse  $AB$  à travers un miroir sphérique concave (a.) et convexe (b.).

### Autre construction de l'image d'un objet sur l'axe du miroir

Nous mentionnons ici une autre construction de l'image d'un objet placé sur l'axe ; l'alternative consiste bien sûr à étendre fictivement l'objet ponctuel  $A$  en un objet étendu  $AB$  et de reprendre la construction décrite ci-dessus. Il est cependant possible de procéder autrement (Fig. 5.31). Nous savons que l'image  $A'$  de  $A$  est située sur l'axe du miroir. Il nous suffit donc d'effectuer le tracé d'un rayon lumineux issu de  $A$  pour déterminer la position de  $A'$ . Prenons ce rayon quelconque, incident sur le miroir en  $I$ . Comment construire son trajet après réflexion sur le miroir ? Référons-nous pour cela à une autre situation, dans laquelle le rayon de direction  $AI$  appartient à un faisceau de rayons parallèles : tous ces rayons convergent dans le plan focal du miroir en un point  $H$  (intersection du plan focal

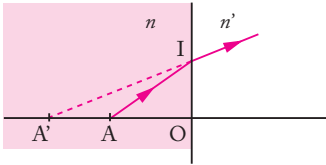
image et du rayon passant par le centre  $C$  du miroir). Cette construction nous indique que le rayon  $AI$  et le rayon parallèle à  $AI$  passant par  $C$  se coupent dans le plan focal image, au point  $H$ . Le trajet du rayon  $AI$ , après réflexion, est donc donné par la direction de  $AH$  et  $A'$  est l'intersection de ce rayon avec l'axe du miroir.



**Fig. 5.31.** Construction par un rayon quelconque de l'image  $A'$  d'un objet  $A$  sur l'axe optique à travers un miroir sphérique concave (a.) et convexe (b.).

# Résumé du cours

## Dioptre plan



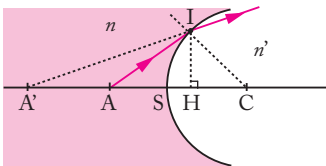
◆ La relation de conjugaison d'un dioptre plan, déduite des lois de Descartes ou du principe de Fermat s'écrit dans l'approximation paraxiale :

$$\frac{\overline{OA}}{n} - \frac{\overline{OA'}}{n'} = 0$$

◆ Le grandissement transverse du dioptre plan est égal à 1.

## Dioptre sphérique

◆ La relation de conjugaison d'un dioptre sphérique peut s'écrire avec différentes origines :



• Origine au sommet :

$$\frac{n}{\overline{SA}} - \frac{n'}{\overline{SA'}} = \frac{n-n'}{\overline{SC}}$$

• Origine au centre :

$$\frac{n}{\overline{CA'}} - \frac{n'}{\overline{CA}} = \frac{n-n'}{\overline{CS}}$$

• Origine aux foyers :

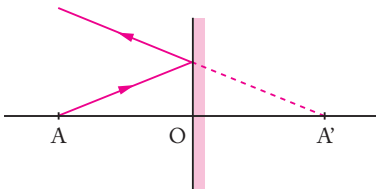
$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = \overline{FS} \cdot \overline{F'S}$$

avec  $\overline{FS} = \frac{n}{n-n'} \overline{CS}$  et  $\overline{F'S} = \frac{n'}{n'-n} \overline{CS}$

◆ Le grandissement transverse  $\gamma$  est donné par :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{n \overline{SA'}}{n' \overline{SA}}$$

## Miroir plan



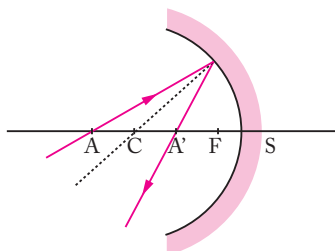
◆ La relation de conjugaison d'un miroir plan, déduite des lois de Descartes, s'écrit :

$$\overline{AO} = \overline{OA'}$$

◆ Le grandissement transverse du miroir plan est égal à 1.

## Miroir sphérique

◆ La relation de conjugaison d'un miroir sphérique peut s'écrire avec différentes origines :



• Origine au sommet :

$$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}}$$

• Origine au centre :

$$\frac{1}{\overline{CA'}} + \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{2}{\overline{CS}}$$

• Origine aux foyers :

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = \overline{FS}^2$$

$$\text{avec } \overline{FS} = \frac{\overline{CS}}{2}$$

◆ Le grandissement transverse  $\gamma$  est donné par :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

## Exercices

**1** On réalise l'image d'un objet à travers un dioptre convergent.

Montrer qu'objet et image ne peuvent pas être tous les deux virtuels.

**2** On réalise l'image d'un objet à travers un dioptre divergent.

Montrer qu'objet et image ne peuvent pas être tous les deux réels.

**3** On veut former l'image d'un objet par un miroir concave sur un écran placé à la distance  $L = 5$  m du miroir. Le miroir est caractérisé par son rayon de courbure  $R = 1$  m.

1. Calculer la distance focale  $f'$  du miroir concave.

2. À quelle distance  $D$  du miroir doit-on placer l'objet ?

**4** Un rayon lumineux se réfléchit successivement sur deux miroirs plans qui font entre eux un angle  $\theta$ .

Calculer la déviation  $D$  subie par le rayon.

**5** On place un objet lumineux A entre un miroir plan et un miroir convexe. L'objet est à la distance  $d_2$  de l'objet et le miroir concave à la distance  $d_2$ . On observe que l'image A' donnée par le seul miroir plan et celle A'' donnée par le seul miroir convexe sont à égale distance de l'objet lorsque  $d_1 = 30$  cm et  $d_2 = 40$  cm.

En déduire le rayon du miroir convexe  $R = -\overline{SC}$ .

# Les systèmes centrés

Le chapitre précédent a présenté les caractéristiques des dioptries et des miroirs. Ce chapitre est consacré aux systèmes centrés, c'est-à-dire constitués d'une succession de dioptries et de miroirs qui ont même axe de révolution. Les systèmes optiques que nous envisagerons dans la suite seront des systèmes centrés. Cependant, les notions présentées dans ce chapitre peuvent paraître un peu abstraites puisqu'elles sont développées dans un cadre général. Aussi, reprendrons-nous dans les chapitres ultérieurs les notions propres à chaque instrument optique. Ainsi, si les systèmes centrés ne sont pas explicitement à votre programme, vous pouvez ignorer ce chapitre.

## 6.1. Définitions

## 6.2. Points et plans cardinaux d'un système dioptrique

- 1 Équation de Lagrange-Helmholtz
- 2 Points focaux et plans focaux
- 3 Plans principaux
- 4 Distances focales, vergence
- 5 Points nodaux
- 6 Points anti-nodaux et points anti-principaux

## 6.3. Construction de l'image d'un objet à travers un système dioptrique

## 6.4. Formules de conjugaison d'un système centré

- 1 Formule de conjugaison de Newton
- 2 Formule de conjugaison avec origine aux points principaux
- 3 Grandissement transversal d'un système centré
- 4 Grandissement angulaire d'un système centré

## 6.5. Les systèmes catadioptriques

- 1 Systèmes catadioptriques équivalents à un miroir
- 2 Cas particulier d'un système catadioptrique équivalent à un miroir plan
- 3 Cas particulier d'un système catadioptrique équivalent à un miroir sphérique de rayon de courbure infini

## 6.6. Association de systèmes centrés

- 1 Points focaux de l'association de deux systèmes centrés
- 2 Points principaux de l'association de deux systèmes centrés
- 3 Distance focale de l'association de deux systèmes centrés
- 4 Formule de Gulstrang

### Mots-clés

- Système centré
- Formule de Newton
- Point principal
- Point nodal
- Foyer

## 6.1. Définitions

Un **système centré** est un système optique constitué de l'association de dioptrés et de miroirs qui ont même axe de révolution. On appelle **système dioptrique** un système constitué uniquement de dioptrés et un **système catadioptrique** un système qui comporte au moins un miroir. Un système centré est schématisé par son axe de symétrie et ses faces d'entrée et de sortie (Fig. 6.1).

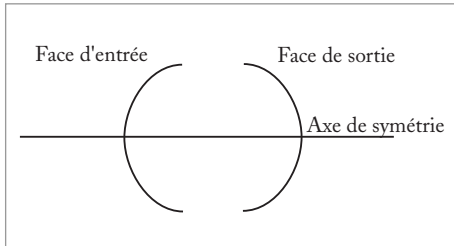


Fig. 6.1. Représentation d'un système centré.

Dans ce chapitre, les points principaux sont étudiés dans le cas des systèmes dioptriques sans perdre en généralité ; le cas des systèmes catadioptriques est identique à condition d'inverser le sens de propagation de la lumière à chaque miroir.

Nous étudions les systèmes catadioptriques dans la partie 6.5 pour montrer que leur étude peut se ramener à celle d'un miroir unique ou à celle d'un système dioptrique.

## 6.2. Points et plans cardinaux d'un système dioptrique

Les points cardinaux d'un système optique centré sont les points principaux et anti-principaux, les points focaux, les points nodaux et anti-nodaux. Nous les étudions dans ce chapitre. Nous rappelons au préalable l'équation de Lagrange-Helmholtz, valable pour les systèmes dioptriques et catadioptriques.

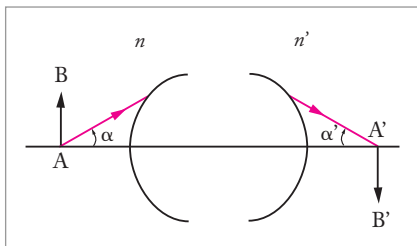


Fig. 6.2. Invariant de Lagrange-Helmholtz :  $n\overline{AB}\alpha = n'\overline{A'B'}\alpha'$

### 1 Équation de Lagrange-Helmholtz

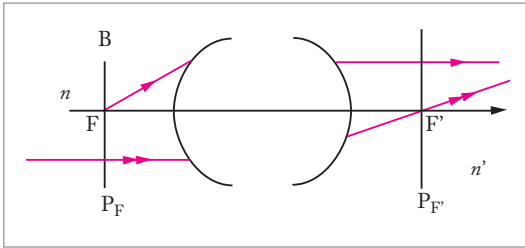
L'étude des dioptrés et des miroirs montre que le produit  $n\overline{AB}\alpha$  (Fig. 6.2) est invariant à la réflexion et à la réfraction,  $n$  désignant l'indice optique du milieu dans lequel se trouve AB. Cette relation a été démontrée au chapitre précédent dans le cas du dioptré sphérique. Nous l'étendons sans le démontrer ici au cas d'un système dioptrique centré quelconque :

$$n\overline{AB}\alpha = n'\overline{A'B'}\alpha'$$

### 2 Points focaux et plans focaux

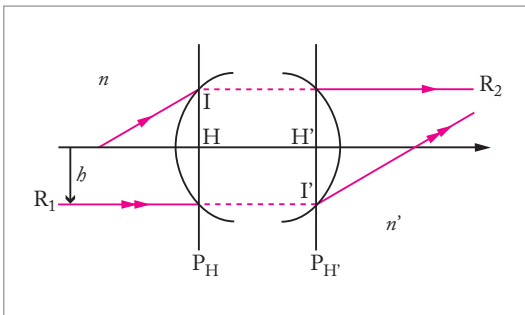
L'image des points à l'infini au voisinage de l'axe optique se forme au voisinage de l'axe optique sur un élément de plan perpendiculaire à l'axe optique. Ce plan  $P_F$  est appelé le plan focal image du système et son intersection avec l'axe optique est le point focal image

$F'$  du système. Le point focal image coïncide avec l'image d'un point objet situé à l'infini sur l'axe optique (Fig. 6.3).



**Fig. 6.3.** Points focaux objet  $F$  et image  $F'$  et plans focaux objet  $P_F$  et image  $P_{F'}$ .

De façon symétrique, le point focal objet  $F$  est défini comme le point objet de l'axe optique dont l'image est renvoyée à l'infini sur l'axe et le plan focal objet  $P_F$  comme le plan perpendiculaire à l'axe passant par  $F$ .



**Fig. 6.4.** Points principaux objet  $H$  et image  $H'$  et plans principaux objet  $P_H$  et image  $P_{H'}$ .

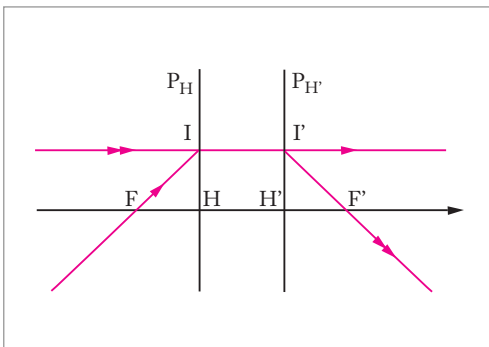
### 3 Plans principaux

Un rayon incident  $R_1$  parallèle à l'axe optique et à une hauteur  $b$  par rapport à cet axe, chemine dans un plan méridien. Il coupe le rayon émergent correspondant en un point  $I'$ . L'ensemble des points  $I'$  lorsque  $b$  varie constituent une surface de révolution  $\Sigma'$ . Les systèmes étant étudiés dans l'approximation de Gauss, la partie de  $\Sigma'$  proche de l'axe, notée  $P_{H'}$ , est assimilée à un plan.

$P_{H'}$  est tangent à  $\Sigma'$ .  $P_{H'}$  est appelé plan

principal image. Son intersection avec l'axe optique définit le point principal image  $H'$  (Fig. 6.4).

Le plan principal objet  $P_H$  et le point principal objet  $H$  sont respectivement le plan conjugué de  $P_{H'}$  et le point conjugué de  $H'$ .  $P_H$  est défini comme le plan tangent à  $\Sigma$ , ensemble des points  $I$  correspondant à l'intersection des rayons  $R_2$  qui émergent du système parallèles à l'axe optique et des rayons incidents correspondant.



**Fig. 6.5.** Un système centré est caractérisé par ses points principaux  $H$  et  $H'$  et ses points focaux  $F$  et  $F'$ .

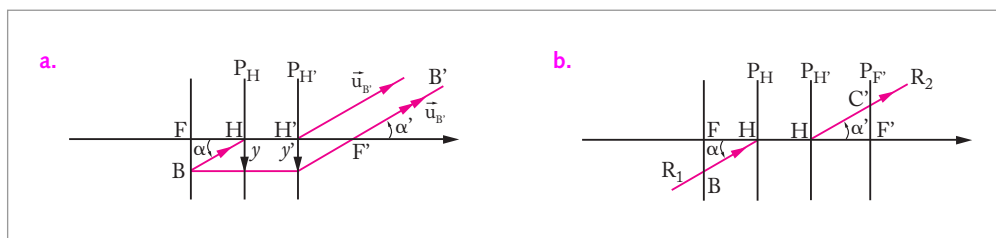
En conclusion, le système optique centré est caractérisé par ses points (ou plans) principaux et ses points (plans) focaux. Un rayon incident passant par le point focal objet coupe en  $I$  le plan principal objet  $P_H$  et émerge parallèlement à l'axe. Un rayon incident parallèle à l'axe optique coupe en  $I'$  le plan principal image  $P_{H'}$  et émerge en passant par le foyer image  $F'$ .

Il est immédiat, sur la figure 6.5, que  $\overline{HI} = \overline{H'I'}$  : le grandissement transverse des points principaux est donc unitaire.



## 4 Distances focales, vergence

**Définition :** La distance focale objet  $f$  d'un système centré est, par définition, la valeur algébrique  $f = \overline{HF}$  et la distance focale image  $f'$  la valeur algébrique  $f' = \overline{H'F'}$ .



**Fig. 6.6.** a. Détermination de l'image  $B'$  de  $B$ , point objet du plan focal objet. b. Détermination du rayon  $R_2$ , rayon conjugué de  $R_1$  à travers le système optique.

Quelle relation existe-t-il entre  $f$  et  $f'$ ? Pour répondre à cette question, considérons un rayon incident  $R_1$  passant par le point principal objet  $H$  (Fig. 6.6.b). Le rayon  $R_2$  conjugué de  $R_1$  passe par le point  $H'$ . Pour déterminer complètement  $R_2$ , considérons un objet  $B$  dans le plan focal objet du système (Fig. 6.6.a). Par définition, l'image de  $B$  est renvoyée à l'infini, dans une direction  $\vec{u}_{B'}$  donnée par le tracé du rayon incident parallèle à l'axe et passant par  $B$ . Ce rayon émerge du plan principal image  $P_{H'}$  en passant par  $F'$ , dans la direction  $\vec{u}_{B'}$ . Le rayon conjugué de  $BH$  est donc finalement le rayon parallèle à  $\vec{u}_{B'}$  passant par  $H'$ . Nous notons  $C'$  le point d'intersection du rayon émergent ( $H', \vec{u}_{B'}$ ) avec le plan focal image  $P_{F'}$ . Le rayon  $R_2$  conjugué de  $R_1$  est porté par  $H'C'$ .

Appliquons l'équation de Lagrange-Helmholtz aux points  $H$  et  $H'$  de grandissement unitaire ( $y = y'$ ). Il vient :

$$n y \alpha = n' y' \alpha' = n' y \alpha'.$$

Nous en déduisons :

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{n'}{n}$$

Les expressions de  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont données, dans l'approximation de Gauss, par :

$$\alpha = \frac{\overline{FB}}{f} \quad \text{et} \quad \alpha' = \frac{\overline{F'C'}}{f'}$$

Avec  $\overline{FB} = -\overline{F'C'}$ , nous obtenons finalement une relation entre distances focales objet et image :

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}$$

Les distances focales d'un système optique dioptrique centré sont toujours de signes opposés. Leur rapport est égal, en valeur absolue, au rapport des indices des deux milieux extrêmes ; leur valeur absolue est donc égale lorsque les milieux extrêmes sont identiques. La vergence  $V$  du système optique est alors définie par :

$$V = -\frac{n}{f} = \frac{n'}{f'}$$

## 5 Points nodaux

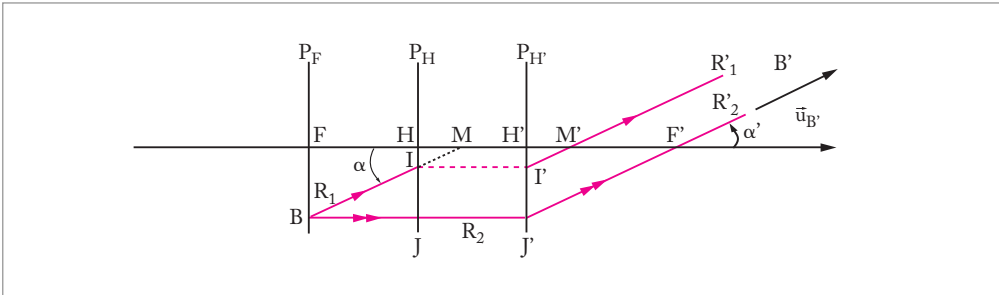


Fig. 6.7. Construction de M et M', deux points conjugués, dans le cas général.

**Définition :** Les points nodaux forment un couple de points conjugués sur l'axe optique tel que le grandissement angulaire  $g(\alpha) = \frac{\alpha'}{\alpha}$  soit égal à l'unité.

Pour déterminer les positions des points nodaux (Fig. 6.7), considérons un rayon incident  $R_1$  issu de B dans le plan focal objet et passant par un point M de l'axe optique. Ce rayon coupe le plan principal en I. Son rayon conjugué  $R'_1$  passe par I, point du plan principal image et conjugué de I, et par le point  $B'$ , image de B renvoyée à l'infini. Notons  $M'$  l'intersection de  $R'_1$  avec l'axe optique.  $M'$  est le conjugué de M.

Le rayon incident  $R_2$  et émergent  $R'_2$  sont utilisés pour connaître la direction  $\vec{u}_{B'}$  de l'image  $B'$  de B.

Les points nodaux N et N' correspondent au cas où  $\alpha = \alpha'$ . Lorsque  $M = N$ , les triangles FBN et H'J'F' sont égaux (Fig. 6.8). Nous en déduisons que la distance FN est égale à la distance focale image  $f' = H'F'$ . L'application du principe de retour inverse de la lumière montre que le point nodal image N' est à la distance  $f'$  du point focal objet F.

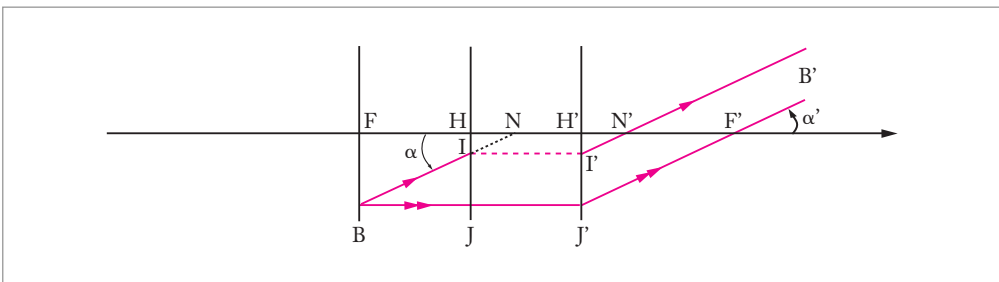
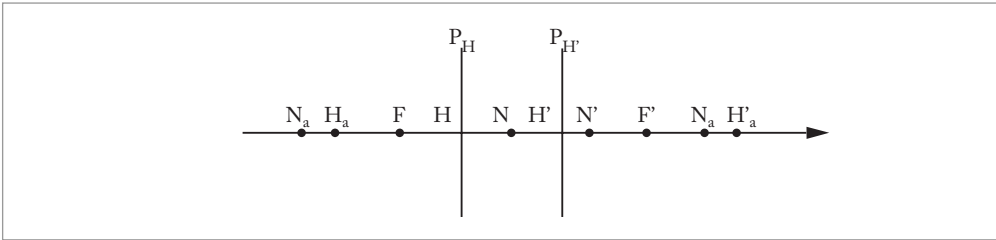


Fig. 6.8. Les points M et M' coïncident avec les points nodaux N et N' lorsque  $\alpha = \alpha'$ . Nous avons alors  $FN = f'$  et  $F'N' = f$ .

Le quadrilatère  $II'NN'$  de la figure 6.8 est un parallélogramme de sorte que la distance qui sépare les points nodaux est égale à celle qui sépare les points principaux. Lorsque les milieux extrêmes sont identiques, les distances focales ont même valeur absolue et les points nodaux sont confondus avec les points principaux.

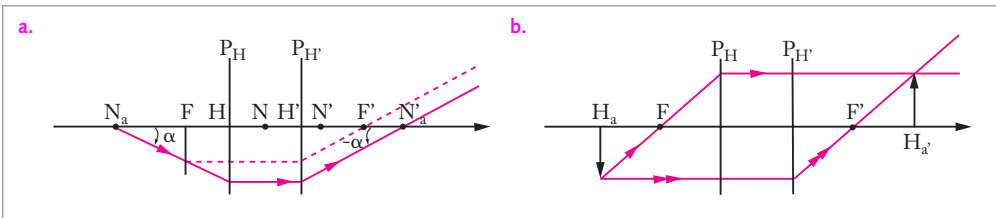
## 6 Points anti-nodaux et points anti-principaux



**Fig. 6.9.** Positions des points anti-nodaux  $N_a$  et  $N'_a$  et des points anti-principaux  $H_a$  et  $H'_a$ .

**Définition :** Les points anti-nodaux sont définis comme les points conjugués de l'axe tels que le grandissement angulaire  $g(\alpha)$  prend la valeur  $-1$  et les points anti-principaux sont les points conjugués de l'axe tels que le grandissement transversal a pour valeur  $-1$ .

Une démonstration fondée sur une construction géométrique identique à celle que nous avons développée pour les points nodaux et pour les points principaux permet de montrer que les points anti-nodaux  $N_a$  et  $N'_a$  sont les points symétriques des points nodaux par rapport aux points focaux (respectivement objet et image). De même, les points anti-principaux  $H_a$  et  $H'_a$  sont les points symétriques des points principaux par rapport aux points focaux.

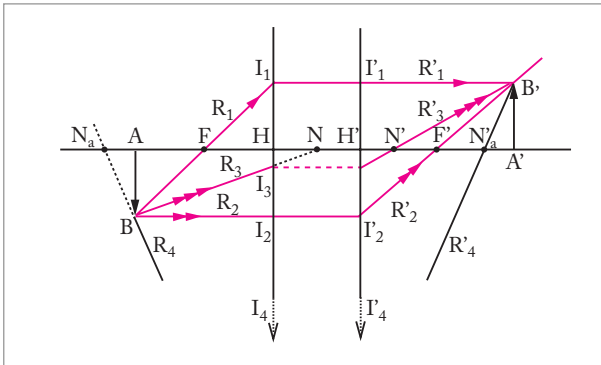


**Fig. 6.10.** Propriétés des points conjugués **a.** anti-nodaux  $N_a$  et  $N'_a$  de grandissement angulaire égal à  $-1$  et **b.** anti-principaux  $H_a$  et  $H'_a$  de grandissement transversal égal à  $-1$ .

### 6.3. Construction de l'image d'un objet à travers un système dioptrique

Pour construire l'image d'un objet transverse quelconque  $AB$  à travers un système centré, nous utilisons les propriétés des points cardinaux. Il suffit de déterminer l'image  $B'$  de  $B$  pour connaître l'image  $A'B'$  de  $AB$ , l'image  $A'B'$  étant transverse. Nous donnons ici

l'exemple du tracé de quatre rayons (Fig. 6.11), le tracé de deux de ces rayons étant bien sûr suffisant pour déterminer l'image B' de B :



**Fig. 6.11.** Construction de l'image A'B' par un système centré d'un objet AB perpendiculaire à l'axe optique.

- le rayon  $R_1$  issu de B passe par le point focal objet F et coupe le plan principal objet en  $I_1$ . Son conjugué  $R'_1$  émerge parallèlement à l'axe optique et passe par  $I'_1$  ;
- le rayon  $R_2$  issu de B parallèlement à l'axe optique coupe le plan principal image en  $I'_2$  et son conjugué  $R'_2$  émerge suivant  $I'_2F'$  ;
- le rayon  $R_3$  issu de B, passant virtuellement par le point nodal objet N, coupe le plan principal

objet en  $I_3$ . Son conjugué  $R'_3$  émerge parallèlement au rayon incident au niveau du point  $I'_3$ , avec  $I'_3$  à la même hauteur que  $I_3$  dans le plan principal image ;

- le rayon  $R_4$  issu de B et dont la direction passe par le point anti-nodal objet  $N_a$  coupe le plan principal objet en  $I_4$  (non représenté sur la figure). Son conjugué  $R'_4$  émerge dans la direction symétrique par rapport aux plans principaux en passant par  $I'_4$ , point du plan principal image à la même hauteur que  $I_4$ .

## 6.4. Formules de conjugaison d'un système centré

### 1 Formule de conjugaison de Newton

La formule de conjugaison de Newton permet de déterminer les positions relatives des points conjugués A et A' sur l'axe optique à partir des points focaux F et F'.

Pour l'établir, nous considérons les rayons  $R_1$ - $R'_1$  et  $R_2$ - $R'_2$  de la figure 6.11. Les triangles ABF et  $HI_1F$  d'une part et les triangles A'B'F' et  $H'I'_2F'$  d'autre part sont semblables. Nous en déduisons les relations :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{HI_1}}{\overline{HF}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'F'}} = \frac{\overline{H'I'_2}}{\overline{H'F'}}$$

Avec, par construction,  $\overline{A'B'} = \overline{HI_1}$  et  $\overline{AB} = \overline{H'I'_2}$ , nous en déduisons :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = -\frac{f}{\overline{FA}}$$

La formule de conjugaison de Newton s'écrit :

$$\overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = ff'$$

## 2 Formule de conjugaison avec origine aux points principaux

Reprenons la formule de conjugaison de Newton avec  $\overline{F'A'} = \overline{F'H'} + \overline{H'A'} = -f' + \overline{H'A'}$  et  $\overline{FA} = \overline{FH} + \overline{HA} = -f + \overline{HA}$ . On obtient :

$$(-f' + \overline{H'A'})(-f + \overline{HA}) = ff'$$

$$\frac{f}{\overline{HA}} + \frac{f'}{\overline{H'A'}} = 1$$

En tenant compte de la relation entre les distances focales  $\left(\frac{n}{f} = -\frac{n'}{f'}\right)$ , nous obtenons finalement la relation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{\frac{n'}{\overline{H'A'}}}{\overline{H'A'}} - \frac{n}{\overline{HA}} = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f}$$

## 3 Grandissement transversal d'un système centré

**Définition :** Le grandissement transversal  $\gamma$  est défini par le rapport des dimensions transverses de l'image  $A'B'$  et de son objet  $AB$  :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

Comme nous l'avons vu, il est possible d'exprimer le grandissement transverse en fonction des positions de l'objet  $A$  ou de son image  $A'$  sur l'axe optique par rapport aux points focaux :

$$\gamma = -\frac{f}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}$$

Il est également possible d'exprimer le grandissement en fonction des positions de  $A$  et de  $A'$  par rapport aux points principaux.

Reprenons l'expression de  $\gamma = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}$ , il vient :

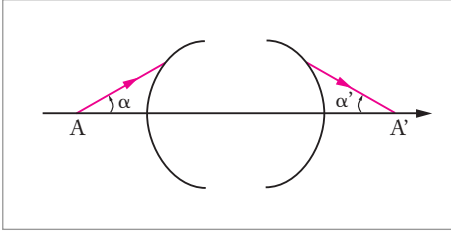
$$\gamma = \frac{\overline{H'F'} - \overline{H'A'}}{f'} = \frac{f' - \overline{H'A'}}{f'} = 1 - \frac{\overline{H'A'}}{f'}$$

La relation de conjugaison avec origine aux points principaux se réécrit en multipliant par  $\frac{\overline{H'A'}}{n'}$  :

$$1 - \frac{n}{n'} \frac{\overline{H'A'}}{\overline{HA}} = \frac{\overline{H'A'}}{f'}$$

On obtient finalement :

$$\gamma = \frac{n}{n'} \frac{\overline{H'A'}}{\overline{HA}}$$



**Fig. 6.12.** Grandissement angulaire  $g(\alpha) = \frac{\alpha'}{\alpha}$  d'un système centré.

## 4 Grandissement angulaire d'un système centré

**Définition :** Le grandissement angulaire est défini par le rapport des angles  $\alpha$  et  $\alpha'$ , qui représentent les angles formés avec l'axe optique respectivement par le rayon incident et par son rayon conjugué :

$$g(\alpha) = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

La relation de Lagrange-Helmholtz ( $n\overline{AB}\alpha = n'\overline{A'B'}\alpha'$ ) permet de relier le grandissement transverse et le grandissement angulaire :

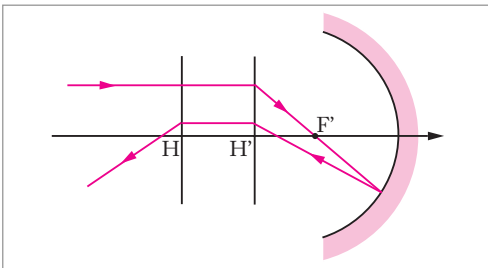
$$\gamma g(\alpha) = \frac{n}{n'}$$

Nous en déduisons différentes expressions du grandissement angulaire :

$$g(\alpha) = \frac{n \overline{AB}}{n' \overline{A'B'}} = - \frac{n \overline{FA}}{n' f} = - \frac{nf'}{n' \overline{F'A'}} = \frac{\overline{HA}}{\overline{H'A'}}$$

## 6.5. Les systèmes catadioptriques

Rappelons que les systèmes catadioptriques comportent au moins un miroir. Il est donc nécessaire de préciser pour ces systèmes le sens de propagation d'un rayon lumineux.

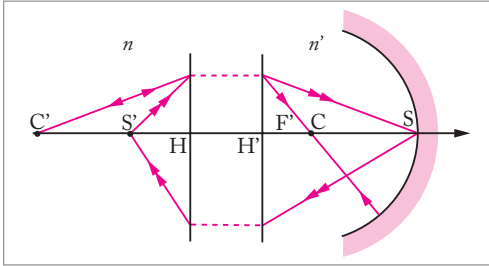


**Fig. 6.13.** Système catadioptrique comportant un système dioptrique et un miroir. Trajectoire d'un rayon parallèle à l'axe optique (H et H' sont les points cardinaux du système dioptrique).

### 1 Systèmes catadioptriques équivalents à un miroir

Nous allons montrer que tout système catadioptrique centré comprenant un seul miroir (sphérique ou plan) est équivalent à un miroir. Ce résultat se généralise à tout système catadioptrique centré comprenant un nombre impair de miroirs.

Considérons donc un système catadioptrique ne comportant qu'un miroir. Le reste du système est un système dioptrique repéré par ses points cardinaux (sur la figure 6.13, les points principaux H et H' et le point focal image F').



**Fig. 6.14.** Images  $C'$  et  $S'$  du centre  $C$  et du sommet  $S$  du miroir à travers le système dioptrique qui précède le miroir.

Les rayons incidents sont réfractés par le système dioptrique, réfléchis par le miroir, à nouveau réfractés par le système dioptrique et émergent du système avec un sens de propagation opposé à celui des rayons incidents. Supposons que le système est équivalent à un seul miroir et cherchons à définir les caractéristiques de ce miroir équivalent. Pour cela, supposons connues  $C'$  et  $S'$ , images respectives, par le système dioptrique qui précède le miroir, du centre  $C$  et du sommet  $S$  du miroir (rappelons que, pour un miroir plan,  $C$  est à l'infini). Quelles sont les images de  $C'$  et de  $S'$  par

le système catadioptrique complet ? Pour un objet  $A$  quelconque, nous devons considérer le schéma synoptique suivant :

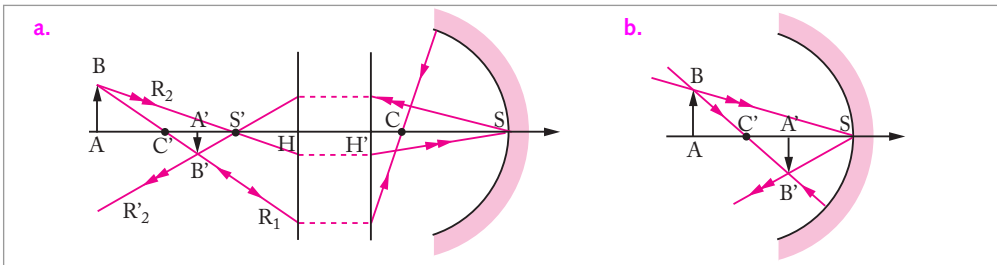
$$\text{Objet } A \xrightarrow{\text{S. dioptrique}} A_1 \xrightarrow{\text{miroir}} A_2 \xrightarrow{\text{S. dioptrique}} \text{Image définitive } A'$$

L'image de l'objet  $S'$  à travers le système dioptrique qui précède le miroir est, par définition, le point  $S$ .  $S$  étant son propre conjugué par le miroir, il devient l'objet pour le système dioptrique (propagation dans le sens opposé) qui donne à nouveau le point  $S'$ .  $S'$  est donc son propre conjugué à travers le système catadioptrique, suivant le schéma synoptique (Fig. 6.14) :

$$S' \xrightarrow{\text{S. dioptrique}} S \xrightarrow{\text{miroir}} S \xrightarrow{\text{S. dioptrique}} S'$$

Raisonnons de même pour l'objet  $C'$ .  $C'$  donne  $C$  à travers le système dioptrique,  $C$  est son propre conjugué par le miroir et redonne le point  $C'$  après traversée du système dioptrique en sens inverse.  $C'$  est donc également son propre conjugué à travers le système catadioptrique suivant le schéma synoptique (Fig. 6.14) :

$$C' \xrightarrow{\text{S. dioptrique}} C \xrightarrow{\text{miroir}} C \xrightarrow{\text{S. dioptrique}} C'$$



**Fig. 6.15.** a. Image d'un objet étendu  $AB$  à travers un système catadioptrique ; b. Image de  $AB$  à travers le miroir équivalent.

Considérons maintenant un objet étendu transverse  $AB$  et utilisons les propriétés des points  $C'$  et  $S'$  (Fig. 6.15. a) :

- le rayon  $R_1$  issu de B et passant par  $C'$  est confondu avec son rayon conjugué par le système catadioptrique ;
- le rayon  $R_2$  issu de B passant par  $S'$  a son rayon conjugué  $R'_2$  qui lui est symétrique par rapport à l'axe optique. L'image  $B'$  de B est ainsi construite par l'intersection de  $R_1$  et  $R'_2$ . Pour B, tout se passe comme si le système catadioptrique était un miroir de centre  $C'$  et de sommet  $S'$ .

Nous déduisons de ce qui précède que le centre et le sommet du miroir équivalent au système catadioptrique sont les images du centre et du sommet du miroir à travers le système dioptrique qui précède le miroir (Fig. 6.15.b).

## 2 Cas particulier d'un système catadioptrique équivalent à un miroir plan

Un système catadioptrique comprenant un miroir est équivalent à un miroir plan lorsque le foyer image  $F'$  du système dioptrique qui précède le miroir est confondu avec le centre C du miroir. En effet, le sommet S du miroir équivalent  $M_e$  est toujours à distance finie du système catadioptrique mais son centre  $C'$  est renvoyé à l'infini.

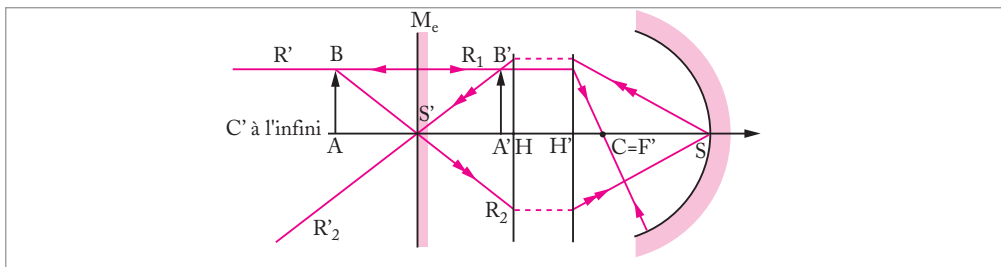


Fig. 6.16. Système catadioptrique équivalent à un miroir plan.

Construisons l'image  $A'B'$  d'un objet  $AB$  par un tel système catadioptrique (Fig. 6.16) :

- le rayon  $R_1$  issu de B et parallèle à l'axe optique émerge du système dioptrique en passant par  $F'$ . Parce que  $F'$  et C sont confondus et que le point C est son propre conjugué par le miroir, le rayon réfléchi repasse par C et émerge du système dioptrique parallèlement à l'axe optique à la hauteur de B ;
- le rayon  $R_2$  issu de B et passant par  $S'$ , image de S à travers le système dioptrique, émerge du système dioptrique en convergeant vers S. Le rayon réfléchi par le miroir est donc symétrique du rayon incident par rapport à l'axe optique ( $R'_2$ ).

L'intersection de ces deux rayons correspond à l'image  $B'$  de B à travers le système catadioptrique. Cette construction géométrique permet d'établir que les triangles  $ABS'$  et  $A'B'S'$  sont identiques. Nous avons donc :

$$\overline{AS'} = \overline{S'A'}$$

Le système catadioptrique est bien équivalent à un miroir plan  $M_e$  perpendiculaire à l'axe optique et passant par  $S'$ , image du sommet S du miroir à travers le système dioptrique qui le précède.



### 3 Cas particulier d'un système catadioptrique équivalent à un miroir sphérique de rayon de courbure infini

Nous avons vu qu'un système catadioptrique est équivalent à un miroir plan lorsque, le sommet du miroir équivalent étant défini, son centre est renvoyé à l'infini.

L'inverse n'est bien sûr pas vrai : un miroir dont le centre est défini et le sommet est renvoyé à l'infini, n'est pas un miroir plan (notamment, nous ne pouvons pas écrire de relation de conjugaison du miroir plan, la projection d'un point A sur le miroir n'étant pas définie). Un tel miroir est un miroir sphérique de rayon infini qu'il n'est pas possible de construire en utilisant un seul miroir. Il est pourtant possible de l'obtenir avec un système catadioptrique. Pour cela, nous considérons un miroir sphérique de sommet S précédé d'un système dioptrique dont le foyer F' est confondu avec S (Fig. 6.17).

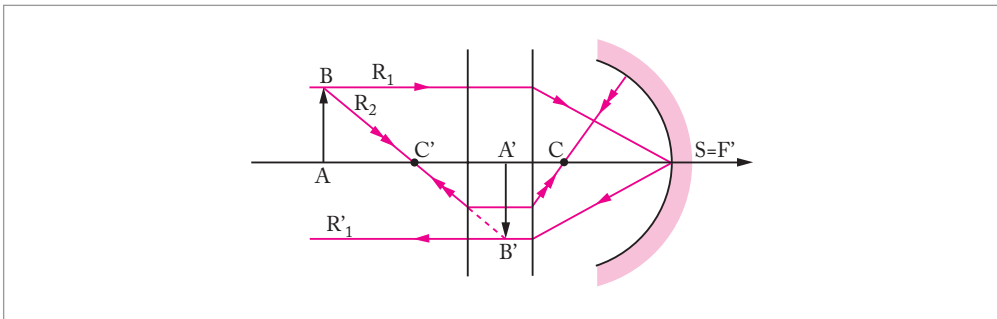


Fig. 6.17. Système catadioptrique équivalent à un miroir sphérique de rayon de courbure infini.

Nous notons toujours C' l'image du centre C du miroir sphérique à travers le système dioptrique (C et C' sont conjugués par le système dioptrique). Soit AB un objet étendu transverse :

- le rayon R<sub>1</sub> issu de B et parallèle à l'axe optique émerge du système dioptrique en convergeant vers son foyer image F'. F' et le sommet S du miroir sont confondus ; le rayon réfléchi (R'<sub>1</sub>) par le miroir est donc le symétrique du rayon incident ;
- le rayon R<sub>2</sub> issu de B et passant par C' émerge du système dioptrique en passant par C (nous ne discutons pas ici la construction du rayon émergeant du système dioptrique, le point important étant qu'il passe par C, par définition des points conjugués C et C'). C est son propre conjugué par le miroir ; le rayon réfléchi passe donc à nouveau par C. Le principe de retour inverse de la lumière permet de conclure que le rayon émergeant du système dioptrique est confondu avec R<sub>2</sub>, son conjugué par le système catadioptrique.

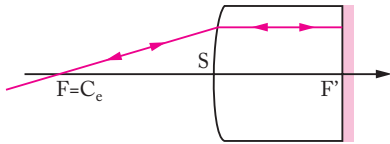
Cette construction géométrique montre que les triangles ABC' et A'B'C' sont semblables : A et A' sont symétriques par rapport à C'. Le système est équivalent à un miroir sphérique de centre C' et de sommet rejeté à l'infini, c'est-à-dire de rayon de courbure infini. La position de l'image est donnée par la relation de conjugaison :

$$\frac{1}{C'A'} + \frac{1}{C'A} = \frac{2}{C'S}$$

Ce type de miroir sphérique de rayon infini, irréalisable avec un miroir simple, apporte des possibilités très intéressantes à certains problèmes d'optique expérimentale.

### Réalisation d'un catapote

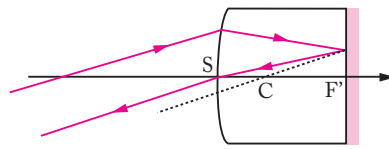
Le catapote est un système optique d'utilisation industrielle très courante, notamment en industrie automobile ou encore pour la réalisation de bornes réfléchissantes. Un catapote est constitué



d'une lentille plan convexe (morceau de verre dont la face d'entrée est un dioptre sphérique et la face de sortie est plane) dont la face de sortie est rendue réfléchissante par dépôt

d'un mince film métallique. Le foyer image du dioptre sphérique formant la face d'entrée de la lentille est situé sur le miroir plan de sa face de sortie (figure ci-dessus).

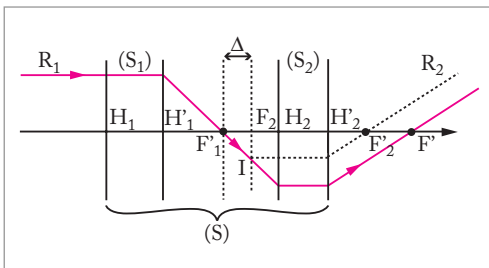
Le système catadioptrique ainsi réalisé est équivalent à un miroir sphérique dont le centre C est confondu avec le foyer objet du dioptre d'entrée. Un rayon incident sur le système émerge parallèlement à lui-même.



## 6.6. Association de systèmes centrés

Nous nous limitons à l'étude de l'association de systèmes centrés de même axe optique. Une association de systèmes centrés est équivalente à un système centré unique dont la face d'entrée est la face d'entrée du premier système et la face de sortie la face de sortie du dernier système centré. Nous allons déterminer les points principaux de ce système équivalent.

### 1 Points focaux de l'association de deux systèmes centrés



**Fig. 6.18.** Construction du point focal image  $F'$  de l'association de deux systèmes centrés.

Soit le système  $S$  constitué de l'association de deux systèmes centrés  $S_1$  et  $S_2$  de même axe optique. Pour déterminer la position du point focal du système  $S$ , considérons le rayon  $R_1$  incident sur  $S_1$  et parallèle à l'axe optique. Ce rayon émerge de  $S_1$  en convergeant vers le foyer image  $F'_1$  de  $S_1$ . Nous notons  $I$  l'intersection du rayon  $R_1$  et du plan focal objet de  $S_2$ . Pour construire la trajectoire du rayon  $R_1$  à travers  $S_2$ , nous considérons le rayon  $R_2$  issu de  $I$  et parallèle à l'axe optique.

Ce rayon émerge de  $S_2$  en convergeant vers le point focal image  $F'_2$  de  $S_2$ .  $I$  est dans le plan focal objet de  $S_2$ , son image par  $S_2$  est donc à l'infini. Le rayon  $R_1$  passant par  $I$  émerge donc de  $S_2$  parallèlement au rayon  $R_2$ . L'intersection du rayon  $R_1$

émergent de  $S_2$  et de l'axe optique correspond, par définition, au point focal image  $F'$  du système équivalent  $S$ .

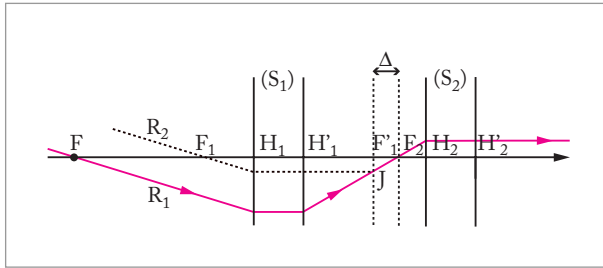
Notons  $\Delta$  la distance entre le point focal image de  $S_1$  et le point focal objet  $F_2$  de  $S_2$ .

$\Delta = \overline{F_1'F_2}$  est appelé l'intervalle optique. La position du point focal image  $F'$  est donnée par la formule de Newton appliquée aux points de l'axe ( $F_1', F'$ ) conjugués par  $S_2$  :

$$\overline{F_2'F'} \cdot \overline{F_2F_1'} = f_2f_2'$$

D'où la position de  $F'$  par rapport à  $F_2'$  :

$$\overline{F_2'F'} = - \frac{f_2f_2'}{\Delta}$$



**Fig. 6.19.** Construction du point focal objet  $F$  de l'association de deux systèmes centrés.

le rayon  $R_2$  émergent de  $S_1$  parallèlement à l'axe optique à la hauteur de  $J$ . Le rayon correspondant, incident au niveau de  $S_1$ , passe par  $F_1$  et par le point de la face d'entrée de  $S_1$  à la hauteur de  $J$ . La direction du rayon  $R_1$ , incident sur  $S_1$ , est donnée par la direction du rayon  $R_2$  ; en effet, ces deux rayons convergent dans le plan focal image de  $S_1$  ; ils ont même incidence au niveau de la face d'entrée de  $S_1$ . Le point focal objet  $F$  du système équivalent  $S$  est l'intersection du rayon  $R_1$  et de l'axe optique.

La position du point focal objet  $F$  est donnée par la formule de Newton appliquée au couple de points de l'axe ( $F, F_2$ ), conjugués par  $S_1$  :

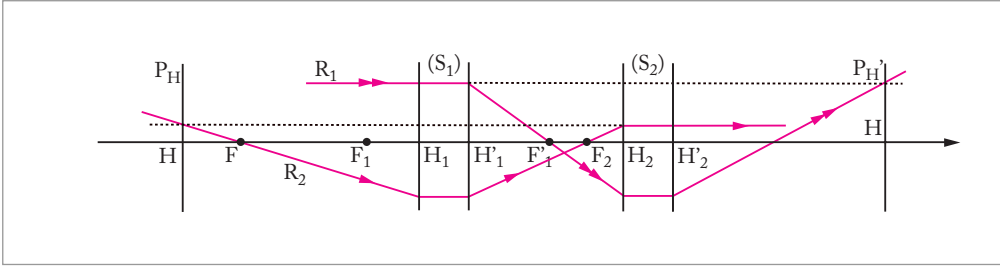
$$\overline{F_1'F_2} \cdot \overline{F_1F} = f_1f_1'$$

La position de  $F$  par rapport à  $F_1$  est donnée par la relation :

$$\overline{F_1F} = \frac{f_1f_1'}{\Delta}$$

## 2 Points principaux de l'association de deux systèmes centrés

Par définition, le plan principal image  $P_H$  du système  $S$  équivalent à l'association de  $S_1$  et  $S_2$  est le plan perpendiculaire à l'axe optique et contenant l'intersection du prolongement d'un rayon incident  $R_1$  parallèle à l'axe optique et du rayon émergent correspondant (Fig. 6.20). De même, le plan principal objet  $P_H$  de  $S$  est le plan perpendiculaire à l'axe optique et contenant l'intersection du prolongement d'un rayon  $R_2$  émergent parallèle à l'axe optique et du rayon incident correspondant (Fig. 6.20). Les points principaux  $H$  et  $H'$  sont les points de l'axe appartenant aux plans principaux.



**Fig. 6.20.** Construction des points principaux H et H' de l'association de deux systèmes centrés.

### 3 Distance focale de l'association de deux systèmes centrés

Nous considérons toujours l'association de deux systèmes centrés  $S_1$  et  $S_2$ . Le système équivalent est noté S.

#### Distance focale objet $f$

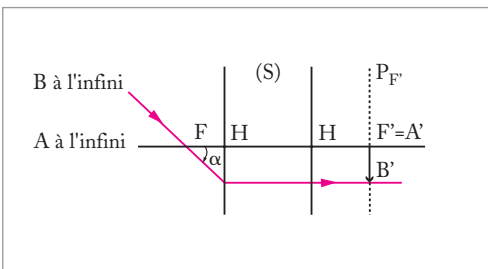
Considérons un objet transverse AB situé à l'infini, A étant un point de l'axe optique, tel que le diamètre apparent de AB soit égal à  $\alpha$  (Fig. 6.21). L'image A'B' de AB par S se forme dans le plan focal image  $P_{F'}$  de S. La taille de l'image A'B' est donnée, dans l'approximation de Gauss, par :

$$A'B' = F'B' = -f\alpha$$

où  $f = \overline{HF}$  est la distance focale objet de S.

Pour déterminer la taille de A'B', nous pouvons également considérer la succession  $S = (S_1, S_2)$ . Le schéma synoptique s'écrit :

$$AB \text{ (à l'infini)} \xrightarrow{s_1} A_1B_1 \xrightarrow{s_2} F'B'$$



**Fig. 6.21.** Image A'B' d'un objet AB à l'infini.

L'image  $A_1B_1$  est dans le plan focal image de  $S_1$  : la taille de  $A_1B_1$  est égale à :

$$\overline{A_1B_1} = -f_1 \alpha$$

La taille de A'B' est donnée par le grandissement  $\gamma_2$  de  $S_2$  :  $A'B' = \gamma_2 A_1B_1$ . Nous en déduisons :

$$\overline{A'B'} = -\gamma_2 f_1 \alpha$$

Par identification, nous en déduisons l'expression de la distance focale objet  $f$  de S :

$$f = \gamma_2 f_1$$

Nous pouvons exprimer  $\gamma_2$  pour les points  $F'_1$  et  $F'$ , conjugués à travers  $S_2$  (Fig. 6.18) :

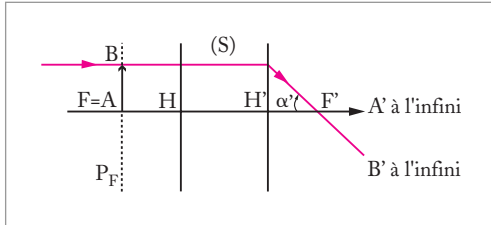
$$\gamma_2 = -\frac{f_2}{\overline{F_2 F'_1}} = -\frac{\overline{F'_2 F'}}{f'_2}$$

Nous avons établi au paragraphe précédent :  $\overline{F_2'F'} = -\frac{f_2 f_2'}{\Delta}$ . On obtient finalement :

$$\gamma_2 = \frac{f_2}{\Delta}$$

D'où nous déduisons finalement la valeur de la distance focale objet  $f$  de S :

$$f = \frac{f_2 f_2'}{\Delta}$$



**Fig. 6.22.** Image  $A'B'$  d'un objet  $AB$  dans le plan foyer objet.

### Distance focale image $f'$

Pour déterminer la distance focale image du système  $S$ , nous considérons cette fois une image transverse  $A'B'$  située à l'infini,  $A'$  étant un point de l'axe optique, tel que le diamètre apparent de  $A'B'$  soit égal à  $\alpha'$ . L'image  $A'B'$  a pour conjugué par  $S$  un objet  $AB$  dans le plan focal objet  $P_F$  de  $S$ . La taille de l'image  $AB$  est donnée par :

$$\overline{AB} = \overline{FB} = -f'\alpha'$$

où  $f'$  est la distance focale image de  $S$ .

Pour déterminer la taille de  $AB$ , nous pouvons aussi considérer la succession  $S = (S_1, S_2)$  suivant le schéma synoptique :

$$AB=FB \xrightarrow{s_1} A_1B_1 \xrightarrow{s_2} A'B' \text{ (à l'infini)}$$

$A_1B_1$ , dont l'image par  $S_2$  se forme à l'infini, est dans le plan focal objet de  $S_2$ . La taille de  $A_1B_1$  est égale à  $\overline{A_1B_1} = -f_2'\alpha'$ . La taille de  $AB$  est donnée par le grandissement  $\gamma_1$  de  $S_1$  :

$$\overline{AB} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\gamma_1}$$

Nous en déduisons :

$$\overline{AB} = -\frac{f_2'\alpha'}{\gamma_1}$$

Par identification, l'expression de la distance focale image  $f'$  de  $S$  est :

$$f' = \frac{f_2'}{\gamma_1}$$

Nous pouvons exprimer  $\gamma_1$ , le système  $S_1$  conjuguant les points  $F$  et  $F_2$  (Fig. 6.19) :

$$\gamma_1 = -\frac{f_1}{\overline{F_1F}} = -\frac{\overline{F_1'F_2}}{f_1}$$

En introduisant l'intervalle optique  $\Delta$ , on a :

$$\gamma_1 = -\frac{\Delta}{f_1'}$$

Nous en déduisons finalement la valeur de la distance focale image  $f'$  de S :

$$f' = - \frac{f_1' f_2'}{\Delta}$$

#### 4 Formule de Gulstrang

Par définition, la vergence d'un système optique centré est donnée par :

$$V = - \frac{n_0}{f} = \frac{n_i}{f'}$$

où  $n_0$  est l'indice du milieu objet et  $n_i$  l'indice du milieu image. Notons  $n$  l'indice du milieu intermédiaire compris entre  $H_1'$  et  $H_2$  (Fig. 6.18). Nous pouvons exprimer les vergences de  $S_1$  et  $S_2$  :

$$V_1 = \frac{n}{f_1'} \quad \text{et} \quad V_2 = - \frac{n}{f_2}$$

La vergence  $V$  du système S s'écrit :

$$V = - \frac{n\Delta}{f_1' f_2}$$

Il est possible de remplacer l'intervalle optique par la valeur de  $\overline{H_1' H_2} = e$ , appelé inters-tice. Nous écrivons :

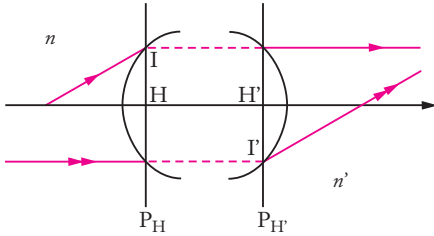
$$e = \overline{H_1' H_2} = \overline{H_1' F_1'} + \overline{F_1' F_2} + \overline{F_2 H_2} = f_1' + \Delta - f_2.$$

**Relation :** L'expression de la vergence  $V$  du système S équivalent aux deux systèmes  $S_1$  (de vergence  $V_1$ ) et  $S_2$  (de vergence  $V_2$ ) séparés par un milieu intermédiaire d'indice  $n$  est donnée par la formule de Gulstrang :

$$V = V_1 + V_2 - \frac{e}{n} V_1 V_2$$

# Résumé du cours

## Systèmes dioptriques



◆ Si  $f$  et  $f'$  sont les distances focales objet et image d'un système dioptrique et  $n$  et  $n'$  les indices des milieux extrêmes, on a la relation :

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}$$

◆ La vergence  $V$  du système optique est alors définie par :

$$V = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f}$$

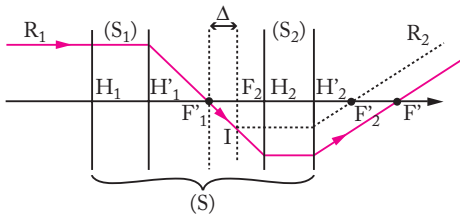
◆ Si les points  $A$  et  $B$  ont pour images respectives  $A'$  et  $B'$  par le système dioptrique, on peut écrire :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = -\frac{f}{\overline{FA}} = \frac{n}{n'} \frac{\overline{H'A'}}{\overline{HA}}$$

$$\overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = ff'$$

$$\frac{\frac{n'}{H'A'}}{\frac{n}{HA}} = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f}$$

## Association de deux systèmes centrés



◆ Si  $F$  et  $F'$  sont les foyers objet et image de l'association de deux systèmes centrés, leurs positions, avec  $\Delta = \overline{F_1'F_2}$ , sont données par les relations :

$$\overline{F_1F} = \frac{f_1 f_1'}{\Delta} \quad \text{et} \quad \overline{F_2'F'} = -\frac{f_2 f_2'}{\Delta}$$

◆ Les distances focales objet,  $f$ , et image,  $f'$ , sont égales à :

$$f = \overline{HF} = \frac{f_1 f_2}{\Delta} \quad \text{et} \quad f' = \overline{H'F'} = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta}$$

◆ La vergence  $V$  du système  $S$  équivalent aux deux systèmes  $S_1$  (de vergence  $V_1$ ) et  $S_2$  (de vergence  $V_2$ ) séparés par un milieu intermédiaire d'indice  $n$  est donnée par la formule de Gulstrang :

$$V = V_1 + V_2 - \frac{e}{n} V_1 V_2$$





# Les lentilles épaisses

Dans le chapitre précédent nous avons présenté une étude générale des systèmes centrés. Les lentilles épaisses sont un cas particulier de tels systèmes. Elles sont constituées de l'association de deux dioptries qui sont en général sphériques, mais qui peuvent également être paraboliques, elliptiques, hyperboliques, etc.

Nous présentons dans ce chapitre les principaux résultats relatifs aux lentilles épaisses. Rappelons cependant que, dans la plupart des cas, les lentilles sont assimilées à des lentilles minces. Celles-ci seront étudiées dans le chapitre 8. Mais les conditions qui permettent de considérer qu'une lentille est mince sont discutées dans ce chapitre.

## 7.1. Caractéristiques d'une lentille épaisse

- 1 Définitions
- 2 Vergence d'une lentille épaisse
- 3 Condition de l'approximation « lentille mince ». Paramètre de forme
- 4 Épaisseur d'une lentille

## 7.2. Les lentilles convergentes et divergentes

- 1 Les différents types de lentille
- 2 Signe de la vergence

## 7.3. Relation de conjugaison d'une lentille épaisse

## 7.4. Points focaux d'une lentille épaisse

### Mots-clés

- Lentille épaisse
- Divergence
- Convergence
- Lentille convexe
- Lentille concave

## 7.1. Caractéristiques d'une lentille épaisse

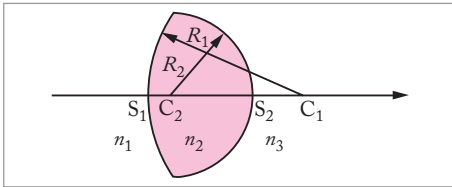


Fig. 7.1. Lentille épaisse.

Ces deux dioptries délimitent la lentille (Fig. 7.1), milieu d'indice  $n_2$ , généralement du verre, plongée entre deux milieux d'indice  $n_1$  et  $n_3$ ; souvent, les deux milieux qui entourent la lentille sont identiques, par exemple de l'air ( $n_1$  et  $n_3$  sont alors voisins de 1).

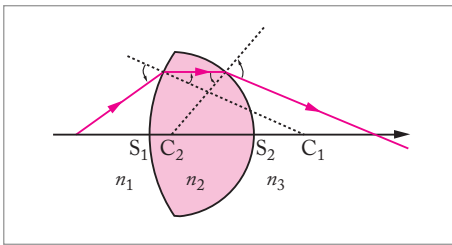


Fig. 7.2. Trajectoire d'un rayon dans une lentille.

Par définition, l'axe passant par les centres et les sommets des deux dioptries est appelé axe optique de la lentille. On ne s'intéresse pas aux rayons réfléchis par les dioptries (Fig. 7.2). Donc, les lois régissant le comportement des rayons lumineux à travers une lentille sont uniquement données par la loi de la réfraction au passage de chacun des dioptries et les relations de conjugaison des lentilles ne concernent que l'image d'un objet correspondant aux rayons se propageant toujours dans le même sens. Les réflexions au passage des dioptries peuvent également donner lieu à la formation d'images. Mais dans la plupart des cas, ces images sont moins lumineuses que celles obtenues par réfraction, ce qui justifie qu'on les néglige. Cependant elles peuvent être gênantes puisqu'elles sont des images parasites.

### 2 Vergence d'une lentille épaisse

Considérons une lentille épaisse dont les faces ont pour rayon de courbure  $R_1 = \overline{S_1C_1}$  et  $R_2 = \overline{S_2C_2}$ . Les vergences  $V_1$  et  $V_2$  des dioptries d'entrée et de sortie s'écrivent (voir chapitre 5) :

$$V_1 = \frac{n_2 - n_1}{R_1} \quad \text{et} \quad V_2 = \frac{n_3 - n_2}{R_2}$$

On pose  $e_0 = \overline{S_1S_2}$ . Appliquons la formule de Gulstrang (établie en 6.4) pour déterminer la vergence  $V$  de la lentille :

$$V = \frac{n_2 - n_1}{R_1} + \frac{n_3 - n_2}{R_2} - \frac{e_0(n_2 - n_1)(n_3 - n_2)}{n R_1 R_2}$$

Notons que si la lentille, d'indice  $n_2 = n$ , plonge dans l'air ( $n_1 = n_3 = 1$ ), la vergence prend la forme :

$$V = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{e_0(n-1)^2}{n R_1 R_2}$$

Nous reviendrons sur l'expression de la vergence dans l'étude des points focaux d'une lentille épaisse.

### 3 Condition de l'approximation « lentille mince ». Paramètre de forme

Une lentille est considérée comme mince lorsque sa vergence se réduit au terme :

$$V_0 = \frac{n_2 - n_1}{R_1} + \frac{n_3 - n_2}{R_2}$$

ce qui implique en toute rigueur  $e_0 = 0$ . Cette condition est bien sûr irréalisable et cette lentille mince reste une lentille théorique.

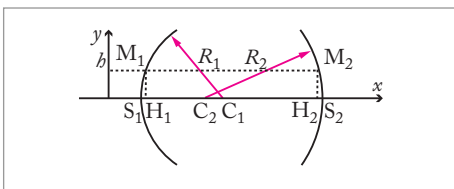
Cependant, au premier ordre, nous pouvons dire qu'une lentille est mince si, sa vergence vaut  $V_0$ , ce qui revient à dire  $e_0 \ll R_1$  et  $e_0 \ll R_2$ .

**Définition :** Une lentille épaisse peut donc être considérée comme mince si son épaisseur est négligeable devant les rayons de courbure des dioptries qui la limitent.

La vergence d'une lentille étant donnée, nous pouvons remarquer qu'il existe une infinité de lentilles dont l'indice et la convergence sont identiques. Pour les caractériser plus précisément, il est utile de définir le paramètre de forme  $g_f$  :

$$g_f = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Dès lors, l'indice, la convergence et le paramètre de forme étant connus, la lentille correspondante est unique.



**Fig. 7.3.** Variation de l'épaisseur  $M_1M_2$  d'une lentille épaisse.

### 4 Épaisseur d'une lentille

$S_1$  et  $S_2$  sont les sommets des deux dioptries d'entrée et de sortie de la lentille, de rayon de courbure  $R_1 = \overline{S_1C_1}$  et  $R_2 = \overline{S_2C_2}$  (Fig. 7.3).  $C_1$  et  $C_2$  sont les centres des deux dioptries d'entrée et de sortie. Notons

$e_0 = \overline{S_1S_2}$ , l'épaisseur de la lentille au centre

et  $e(h)$  son épaisseur à la hauteur  $h$  de l'axe optique. Nous pouvons exprimer l'épaisseur de la lentille  $e(h)$  en fonction de  $h$ ,  $e_0$ ,  $R_1$  et  $R_2$  au voisinage de l'axe (nous précisons cette notion de voisinage). Exprimons les distances  $x_1 = \overline{C_1H_1}$  et  $x_2 = \overline{C_2H_2}$ ,  $H_1$  et  $H_2$  étant les projections de  $M_1$  et  $M_2$  situés respectivement sur les dioptries d'entrée et de sortie à la hauteur  $h$ .  $M_1$  est sur le cercle de centre  $C_1$  et de rayon  $R_1$  donc :  $x_1^2 + h^2 = R_1^2$ .

De même pour  $M_2$  sur le cercle de centre  $C_2$  et de rayon  $R_2$  :  $x_2^2 + h^2 = R_2^2$ .

Nous en déduisons l'épaisseur  $e(b) = \overline{M_1M_2} = \overline{H_1H_2}$  :

$$e(b) = \overline{H_1C_1} + \overline{C_1C_2} + \overline{C_2H_2} = -x_1 + x_2 + \overline{C_1C_2}$$

$$e(b) = \pm(\sqrt{R_1^2 - b^2} \mp \sqrt{R_2^2 - b^2}) + \overline{C_1C_2}$$

On a  $+\sqrt{R_1^2 - b^2}$  si  $x_1 < 0$ , c'est-à-dire  $R_1 > 0$ , et  $-\sqrt{R_1^2 - b^2}$  si  $R_1 < 0$ . De même, on a  $-\sqrt{R_2^2 - b^2}$  si  $x_2 < 0$ , c'est-à-dire  $R_2 > 0$ , et  $+\sqrt{R_2^2 - b^2}$  si  $R_2 < 0$ .

Au voisinage de l'axe, c'est-à-dire pour  $b \ll R_1$  et  $b \ll R_2$ , nous pouvons effectuer le développement limité de  $e(b)$  :

$$e(b) \approx \pm|R_1|\left(1 - \frac{b^2}{2R_1^2}\right) \mp |R_2|\left(1 - \frac{b^2}{2R_2^2}\right) + \overline{C_1C_2}$$

$$e(b) \approx R_1\left(1 - \frac{b^2}{2R_1^2}\right) - R_2\left(1 - \frac{b^2}{2R_2^2}\right) + \overline{C_1C_2}$$

Avec  $e_0 = e(0) = R_1 - R_2 + \overline{C_1C_2}$ , nous obtenons finalement :

$$e(b) \approx e_0 - \frac{b^2}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

## 7.2. Les lentilles convergentes et divergentes

### 1 Les différents types de lentille

**Définition :** Une lentille est dite convergente lorsqu'un faisceau de rayons parallèles à l'axe optique émerge de la lentille sous la forme d'un faisceau convergent. Elle est dite divergente si un faisceau de rayons parallèles à l'axe optique émerge de la lentille sous la forme d'un faisceau divergent.

Les figures 7.4 et 7.5 représentent les combinaisons de dioptries possibles pour fabriquer une lentille ainsi que sa nature, convergente ou divergente, dans le cas d'une lentille d'indice  $n$  plongée dans un milieu moins réfringent.

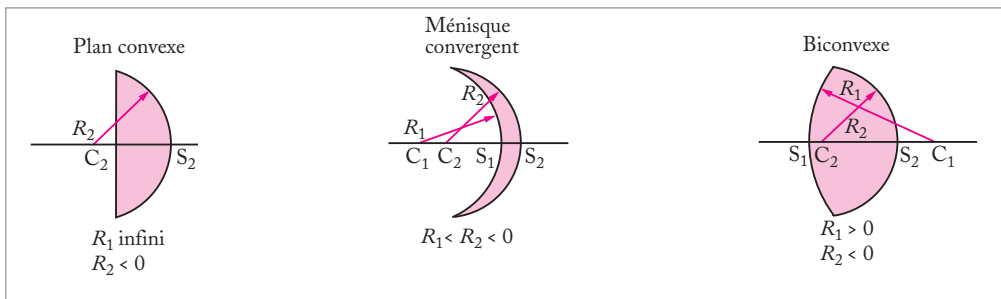


Fig. 7.4. Les différents cas de lentilles convergentes.

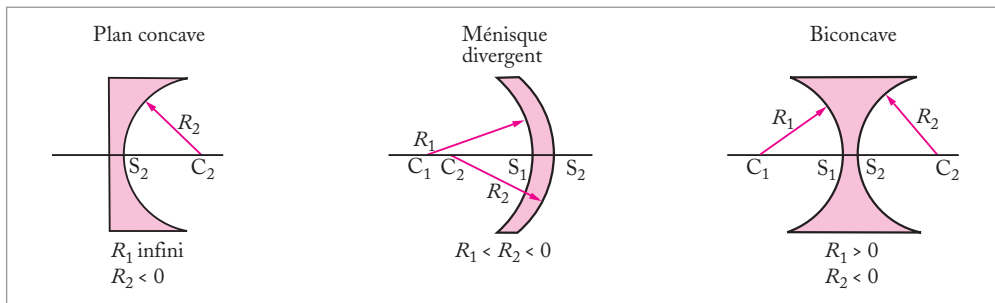


Fig. 7.5. Les différents cas de lentilles divergentes.

## 2 Signe de la vergence

Une lentille est convergente si sa vergence  $V$  est positive. Lorsque les rayons de courbure sont grands devant l'épaisseur de la lentille, c'est-à-dire lorsque la lentille peut être considérée comme mince, cette condition s'écrit :

$$\frac{n_2 - n_1}{R_1} + \frac{n_3 - n_2}{R_2} > 0$$

## 7.3. Relation de conjugaison d'une lentille épaisse

Précisons, avant de développer le calcul permettant de déterminer la position de l'image  $A'$  d'un objet  $A$  à travers une lentille épaisse, qu'il n'existe pas de relation « simple » de conjugaison pour les points  $(A, A')$  et que nous présentons ce calcul à titre d'exercice. Pour simplifier les expressions, nous nous plaçons dans le cas où la lentille est plongée dans l'air, de sorte que  $n_1 = n_3 = 1$  et nous posons  $n_2 = n$ .

Pour connaître la position de  $A'$ , il suffit d'appliquer deux fois la relation de conjugaison d'un dioptre sphérique (le cas du dioptre plan se déduit du cas du dioptre sphérique en faisant tendre le rayon de courbure du dioptre vers l'infini). Le point objet  $A$  donne, après réfraction des rayons lumineux par le premier dioptre, une image intermédiaire  $A_1$  et après réfraction des rayons par le second dioptre, l'image définitive  $A'$ .

Pour le premier dioptre (milieu objet d'indice 1, milieu image d'indice  $n$ ), de sommet  $S_1$  et de rayon de courbure  $R_1$ , on a dans le cadre de l'approximation de Gauss :

$$\frac{1}{\overline{S_1 A}} - \frac{n}{\overline{S_1 A_1}} = \frac{1 - n}{R_1}$$

Pour le second dioptre (du milieu d'indice  $n$  vers l'air), de sommet  $S_2$  et de rayon de courbure  $R_2$ , on a dans le cadre de l'approximation de Gauss :

$$\frac{n}{\overline{S_2 A_1}} - \frac{1}{\overline{S_2 A'}} = \frac{n - 1}{R_2}$$

Pour éliminer  $A_1$  à partir des deux relations, nous pouvons exprimer  $\overline{S_1 A_1}$  dans les deux égalités, avec  $e_0 = \overline{S_1 S_2}$  :

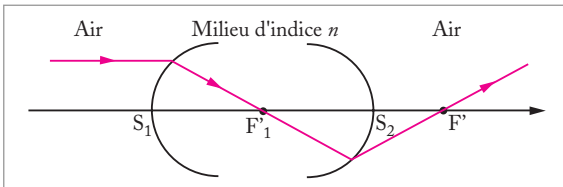
$$\frac{\overline{S_1 A_1}}{n} = \frac{R_1 \overline{S_1 A}}{R_1 - (1-n)S_1 A} = \frac{e_0}{n} + \frac{R_2 \overline{S_2 A'}}{R_2 + (n-1)S_2 A'}$$

Posons  $p' = \overline{S_2 A'}$  et  $p = \overline{S_1 A}$ . Nous obtenons finalement :

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{\left(\frac{1}{p} + \frac{(n-1)}{R_1}\right) - \frac{e_0}{n}} - \frac{(n-1)}{R_2}$$

Comme nous l'avons dit plus haut, cette relation de conjugaison n'est pas une expression « sympathique », mais nous constatons qu'elle se simplifie « agréablement » pour  $e_0 \approx 0$ , qui correspond au cas des lentilles minces !

## 7.4. Points focaux d'une lentille épaisse



**Fig. 7.6.** Construction du point focal image d'une lentille.

Nous nous plaçons à nouveau dans le cas où la lentille, d'indice  $n$ , est plongée dans l'air. Par définition, le point focal image d'une lentille correspond au point de convergence, sur l'axe optique, d'un faisceau de rayons incidents parallèles à l'axe optique.

Le faisceau de rayons parallèles forme une image qui coïncide avec le point focal image  $F'_1$  du premier dioptré sphérique (Fig. 7.6) :

$$\overline{S_1 F'_1} = \frac{n}{n-1} R_1$$

Il nous reste à déterminer la position de l'image  $F'$  de  $F'_1$  par le second dioptré. Pour cela, on écrit la relation de conjugaison pour le second dioptré :

$$\frac{n}{S_2 F'_1} - \frac{1}{S_2 F'} = \frac{n-1}{R_2}$$

Nous obtenons finalement :

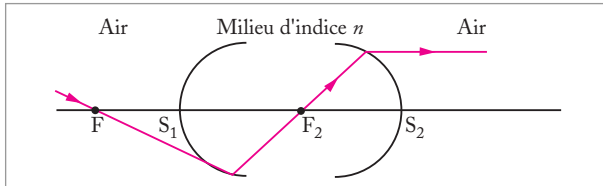
$$\frac{1}{S_2 F'} = (n-1) \left[ \frac{1}{R_1 - \frac{n-1}{n} e_0} - \frac{1}{R_2} \right]$$

Remarquons que cette expression se déduit de la relation de conjugaison obtenue au paragraphe précédent en faisant tendre  $\overline{S_1 A_1}$  vers l'infini. Avec :

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{\left(\frac{1}{p} + \frac{(n-1)}{R_1}\right) - \frac{e_0}{n}} - \frac{(n-1)}{R_2}$$

et pour  $p'$  infini et  $A' = F'$ , nous obtenons également :

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{\overline{S_2 F'}} = \frac{1}{\left(\frac{R_1}{(n-1)} - \frac{e_0}{n}\right)} - \frac{(n-1)}{R_2}$$



**Fig. 7.7.** Construction du point focal objet d'une lentille.

Le point focal objet est obtenu, de la même façon, en cherchant la position du point objet  $F$  situé sur l'axe optique et qui, à travers l'ensemble des deux dioptries, forme une image à l'infini. Le point objet intermédiaire, dont l'image par le second dioptre est à l'infini, coïncide par définition avec le point focal objet  $F_2$  du second dioptre.  $F_2$  est également l'image par le premier dioptre du point focal objet  $F$  de la lentille, suivant le schéma synoptique :

Le point focal objet est obtenu, de la même façon, en cherchant la position du point objet  $F$  situé sur l'axe optique et qui, à travers l'ensemble des deux dioptries, forme une image à l'infini. Le point objet intermédiaire, dont l'image par le second dioptre est à l'infini, coïncide par définition avec le point focal objet  $F_2$  du second dioptre.  $F_2$  est également l'image par le premier dioptre du point focal objet  $F$  de la lentille, suivant le schéma synoptique :

$$F \xrightarrow{\text{dioptre 1}} F_2 \xrightarrow{\text{dioptre 2}} \infty$$

La position du point focal objet  $F_2$  est donné par :

$$\overline{S_2 F_2} = \frac{n}{n-1} R_2$$

Il nous reste à exprimer le fait que les points  $F$  et  $F_2$  sont, pour le premier dioptre, des points conjugués ce qui conduit à l'expression de  $\overline{S_1 F}$  :

$$\frac{1}{\overline{S_1 F}} = -(n-1) \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2 + \frac{n-1}{n} e_0} \right]$$

Remarquons à nouveau que cette expression se déduit de la relation de conjugaison obtenue au paragraphe précédent en faisant tendre l'image  $A'$  vers l'infini. Avec :

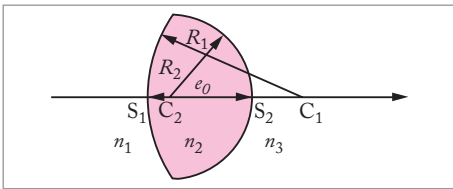
$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{\left(\frac{1}{p} + \frac{(n-1)}{R_1}\right) - \frac{e_0}{n}} - \frac{(n-1)}{R_2}$$

et pour  $p'$  infini et  $A = F$ , nous obtenons :

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{p} + \frac{(n-1)}{R_1}\right) - \frac{e_0}{n}} = \frac{R_2}{(n-1)}$$

qui conduit à la même expression de  $p = \overline{S_1 F}$ .

# résumé du cours



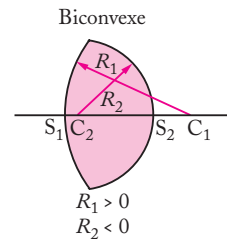
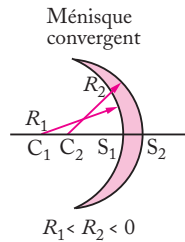
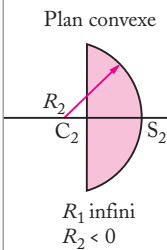
◆ Une lentille est formée par l'association de deux dioptries sphériques ou plans.

◆ La vergence  $V$  d'une lentille épaisse s'exprime en fonction de ces caractéristiques géométriques par :

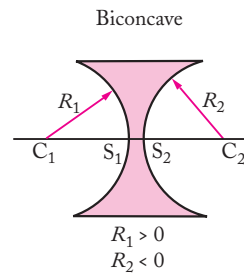
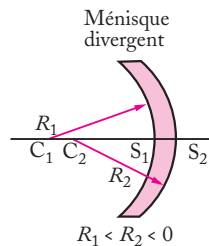
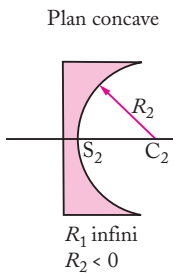
$$V = \frac{n_2 - n_1}{R_1} + \frac{n_3 - n_2}{R_2} - \frac{e_0 (n_2 - n_1)(n_3 - n_2)}{n_2 R_1 R_2}$$

◆ Une lentille est dite convergente lorsqu'un faisceau de rayons parallèles à l'axe optique émerge de la lentille sous la forme d'un faisceau convergent. Elle est dite divergente si un faisceau de rayons parallèles à l'axe optique émerge de la lentille sous la forme d'un faisceau divergent.

## Lentilles convergentes



## Lentilles divergentes





# Les lentilles minces dans l'approximation de Gauss

Nous étudions dans ce chapitre les lentilles minces dans l'approximation de Gauss. Bien sûr, certains résultats établis dans ce chapitre se déduisent de ceux obtenus pour les lentilles épaisses. Cependant, nous ne reprendrons pas les résultats du chapitre précédent, essentiellement parce que les démonstrations sont beaucoup plus simples dans le cas des lentilles minces.

## 8.1. Caractéristiques d'une lentille mince

- 1 Notion de lentille mince
- 2 Approximation de Gauss
- 3 Notations

## 8.2. Image d'un objet à travers une lentille mince

- 1 Relation de conjugaison en fonction des rayons de courbure des dioptries
- 2 Grandissement d'une lentille mince

## 8.3. Points cardinaux d'une lentille mince

- 1 Centre optique. Points principaux et points nodaux
- 2 Points focaux. Plans focaux
- 3 Points antiprincipaux et points antinodaux

## 8.4. Distance focale, relation de conjugaison de Descartes d'une lentille mince

- 1 Distance focale
- 2 Relation de conjugaison
- 3 Commentaire sur le signe de la distance focale

## 8.5. Construction géométrique de l'image d'un objet à travers une lentille mince

- 1 Image d'un objet à l'infini
- 2 Image d'un objet situé dans le plan focal objet
- 3 Image d'un objet quelconque

## 8.6. Relations de conjugaison d'une lentille mince symétrique

- 1 Relation de conjugaison de Descartes
- 2 Grandissement
- 3 Grandissement angulaire
- 4 Formule de conjugaison de Newton

## 8.7. Lentilles accolées. Vergence

## 8.8. Association de lentilles. Application aux oculaires

- 1 Construction de l'image d'un objet
- 2 Grandissement
- 3 Points cardinaux du système
- 4 Cas particulier de deux lentilles
- 5 Applications aux oculaires

## 8.9. Les systèmes afocaux

- 1 Définition
- 2 Image d'un objet à travers un système afocal formé de deux lentilles
- 3 Grandissement d'un système afocal
- 4 Grandissement angulaire d'un système afocal
- 5 Image d'un objet rectangulaire

## Mots-clés

- Lentille mince
- Formule de Newton
- Grossissement
- Grandissement
- Système afocal

## 8.1. Caractéristiques d'une lentille mince

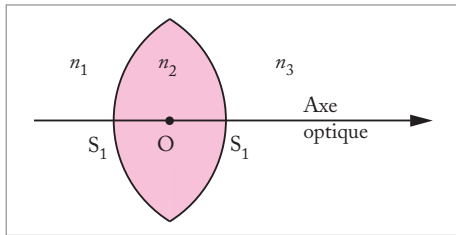


Fig. 8.1. Lentille mince ( $S_1S_2 = e_0$ ).

### 1 Notion de lentille mince

**Définition :** une lentille mince correspond à une lentille dont l'épaisseur maximum est très petite devant les rayons de courbure des deux dioptries.

La distance entre les sommets des dioptries  $e_0 = S_1S_2$  est prise égale à zéro et les points  $S_1$  et  $S_2$  sont assimilés au même point  $O$ , appelé centre optique de la lentille (Fig. 8.1). Le plan passant par  $O$  et perpendiculaire à l'axe optique est appelé plan de la lentille.

### 2 Approximation de Gauss

Les lentilles minces sont étudiées en général dans l'approximation de Gauss. Dans le cadre de cette approximation, les points objets sont situés au voisinage de l'axe optique. De plus, les rayons considérés sont limités à ceux qui restent proches de l'axe (rayons paraxiaux). Nous rappelons que, dans le cadre de cette hypothèse, tout point  $A$  admet un point conjugué  $A'$  : c'est la **condition de stigmatisme**.

### 3 Notations

Une lentille mince est symbolisée par un trait perpendiculaire à l'axe optique et passant par le centre optique  $O$ . À l'extrémité du trait, des flèches orientées indiquent la nature de la lentille : si elles sont orientées dans le sens opposé au centre optique, la lentille mince symbolisée est convergente ; si elles sont orientées vers le centre optique, la lentille mince est divergente.

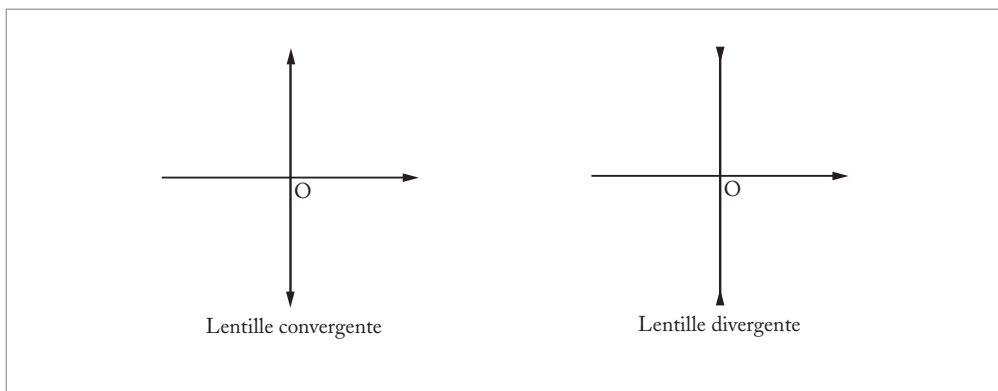


Fig. 8.2. Convention de représentations d'une lentille mince convergente ou divergente.

## 8.2. Image d'un objet à travers une lentille mince

### 1 Relation de conjugaison en fonction des rayons de courbure des dioptries

Pour déterminer l'image d'un objet  $A$  par une lentille mince, il faut appliquer deux fois la relation de conjugaison d'un dioptré sphérique, le cas du dioptré plan correspondant à un rayon de courbure infini. Notons  $A_1$  l'image intermédiaire de  $A$  par le premier dioptré et  $A'$  l'image de  $A_1$  par le second dioptré.  $A'$  est l'image définitive de  $A$  par la lentille. Le premier dioptré sépare le milieu d'indice  $n_1$  du milieu  $n_2$ , qui constitue la lentille. Le second dioptré sépare le milieu d'indice  $n_2$  du milieu d'indice  $n_3$ . Le schéma synoptique s'écrit donc :  $A \xrightarrow{\text{dioptré 1}} A_1 \xrightarrow{\text{dioptré 2}} A'$ . Par conséquent, nous avons :

$$\frac{n_1}{\overline{OA}} - \frac{n_2}{\overline{OA_1}} = \frac{n_1 - n_2}{R_1}$$

$$\frac{n_2}{\overline{OA_1}} - \frac{n_3}{\overline{OA'}} = \frac{n_2 - n_3}{R_2}$$

Sommons simplement ces deux égalités :

$$\frac{n_1}{\overline{OA}} - \frac{n_3}{\overline{OA'}} = \frac{n_1 - n_2}{R_1} + \frac{n_2 - n_3}{R_2}$$

Cette relation est la relation de conjugaison d'une lentille mince sous sa forme la plus générale. Rappelons que  $R_1$  et  $R_2$  désignent des valeurs algébriques et peuvent donc être négatives ( $R_1 = \overline{OC_1}$  et  $R_2 = \overline{OC_2}$  où  $C_1$  et  $C_2$  désignent les centres respectifs du premier et du second dioptré). Nous donnons la relation de conjugaison, plus usuelle, obtenue pour une lentille d'indice  $n$  plongée dans l'air ( $n_1 = n_3 = 1$ ) :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

### 2 Grandissement d'une lentille mince

Le grandissement d'un objet transverse  $AB$  formant une image  $A'B'$  à travers la lentille dépend des grandissements  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  des deux dioptries. Écrivons les expressions des grandissements des dioptries :

$$\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{n_2 \overline{OA_1}}{n_1 \overline{OA}}$$

$$\gamma_2 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{n_3 \overline{OA'}}{n_2 \overline{OA_1}}$$

Nous avons donc :

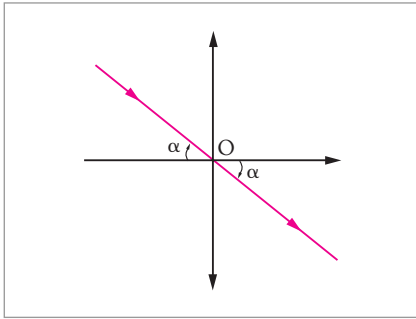
$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \gamma_1 \gamma_2$$

$$\gamma = \frac{n_3 \overline{OA'}}{n_1 \overline{OA}}$$

Pour  $n_1 = n_3 = 1$ ,  $\gamma$  prend la forme :

$$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

## 8.3. Points cardinaux d'une lentille mince



**Fig. 8.3.** Le centre  $O$  de la lentille coïncide avec les points nodaux objet et image. Par conséquent, un rayon passant par  $O$  n'est pas dévié (Fig. 8.3).

### 1 Centre optique.

#### Points principaux et points nodaux

Le centre optique de la lentille correspond pour une lentille mince aux points principaux objet  $H$  et image  $H'$  et aux points nodaux objet  $N$  et image  $N'$  de la lentille.  $O$  est donc son propre conjugué par la lentille. Son grossissement angulaire et son grandissement sont unitaires. Une conséquence est qu'un rayon passant par  $O$  n'est pas dévié (Fig. 8.3).

### 2 Points focaux. Plans focaux

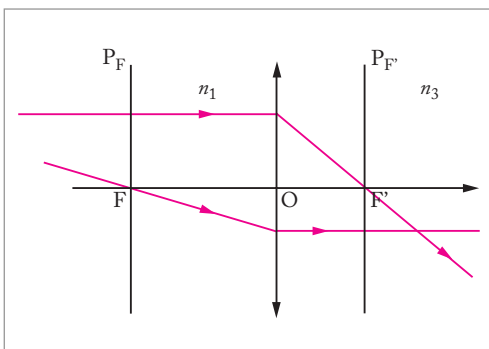
Pour déterminer la position des points focaux d'une lentille mince, il suffit de reprendre la relation de conjugaison établie précédemment (p. 138). En l'appliquant au cas d'un objet situé sur l'axe optique à l'infini, nous obtenons la position du point focal image  $F'$  de la lentille. En l'appliquant au cas d'une image dans la direction de l'axe optique à l'infini, nous obtenons la position du point focal objet  $F$  de la lentille (Fig. 8.4).

Ainsi, la position du point focal image  $F'$  de la lentille est donnée par :

$$\frac{1}{OF'} = -\frac{1}{n_3} \left( \frac{n_1 - n_2}{R_1} + \frac{n_2 - n_3}{R_2} \right)$$

et celle du point focal objet  $F$  par :

$$\frac{1}{OF} = \frac{1}{n_1} \left( \frac{n_1 - n_2}{R_1} + \frac{n_2 - n_3}{R_2} \right)$$



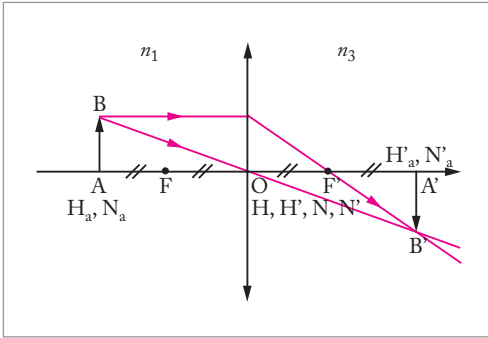
**Fig. 8.4.** Plans focaux objet  $P_F$  et image  $P_{F'}$  et points focaux objet  $F$  et image  $F'$  d'une lentille mince.

Les plans focaux, objet  $P_F$  et image  $P_{F'}$ , sont les plans parallèles au plan de la lentille passant respectivement par le point focal objet et par le point focal image.

Dans le cas où le milieu qui baigne la lentille d'indice  $n$  est l'air, nous obtenons :

$$\frac{1}{OF} = -\frac{1}{OF'} = (1 - n) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

et les plans focaux objet et image sont symétriques par rapport au centre optique de la lentille.



**Fig. 8.5.** Points antiprincipaux  $H_a$  et  $H'_a$  et points antinodaux  $N_a$  et  $N'_a$  d'une lentille mince.

### 3 Points antiprincipaux et points antinodaux

Une lentille mince étant schématisée par une épaisseur nulle, les points principaux  $H$  et  $H'$  d'une lentille mince sont confondus avec son centre optique  $O$ . Il en est de même pour les points nodaux  $N$  et  $N'$ . Les points antiprincipaux  $H_a$  et  $H'_a$  et antinodaux  $N_a$  et  $N'_a$  sont les symétriques du centre optique par rapport aux points focaux.

## 8.4. Distance focale, relation de conjugaison de Descartes d'une lentille mince

### 1 Distance focale

Par définition, les distances focales objet, notée  $f$ , et image, notée  $f'$ , sont des quantités égales aux valeurs algébriques :

$$f = \overline{OF} \text{ et } f' = \overline{OF'}$$

Lorsque la lentille d'indice  $n$  est immergée dans l'air, la lentille mince est dite symétrique et nous obtenons :

$$f = -f' = \frac{1}{n-1} \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2}$$

### 2 Relation de conjugaison

La relation conjugaison que nous avons établie en 8.2, peut s'écrire en fonction des distances focales de la lentille :

$$\frac{n_3}{\overline{OA'}} - \frac{n_1}{\overline{OA}} = \frac{n_3}{f'} = -\frac{n_1}{f}$$

Dans le cas d'une lentille symétrique, la relation de conjugaison prend une forme plus simple :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f}$$

Nous proposerons plus loin une autre démonstration de cette relation de conjugaison,

appelée relation de conjugaison de Descartes (démonstration fondée sur la construction géométrique de l'image d'un objet lumineux).

### 3 Commentaire sur le signe de la distance focale

Nous avons donné dans le chapitre précédent les deux catégories des lentilles : convergentes et divergentes. Nous allons voir que cette classification correspond à des positions gauche et droite des points focaux par rapport au centre optique de la lentille. Pour simplifier, nous considérons le cas où la lentille, d'indice  $n > 1$ , est plongée dans l'air. La distance focale image de la lentille est alors donnée par :

$$f' = \frac{1}{n-1} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Avec  $(n-1) > 0$ , la position du point focal image (à droite ou à gauche du plan de la lentille) est donnée par le signe de la quantité  $\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$ . Reprenons la classification du chapitre précédent :

	Type de lentille	$R_1$	$R_2$	$\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$
<b>Lentilles convergentes</b>	Plan convexe	$\infty$	Négatif	$\approx -R_2 > 0$
	Ménisque convergent	Négatif	Négatif, supérieur à $R_1$	$> 0$
	Biconvexe	Positif	Négatif	$> 0$
<b>Lentilles divergentes</b>	Plan concave	$\infty$	Positif	$< 0$
	Ménisque divergent	Négatif	Négatif, inférieur à $R_1$	$< 0$
	Biconcave	Négatif	Positif	$< 0$

Les lentilles convergentes correspondent à une distance focale image positive, c'est-à-dire que le point focal image  $F'$  est à droite de la lentille et le point focal objet à gauche de la lentille. Les lentilles divergentes ont une distance focale image négative. Le point focal image est à gauche de la lentille et le point focal objet à droite de la lentille.

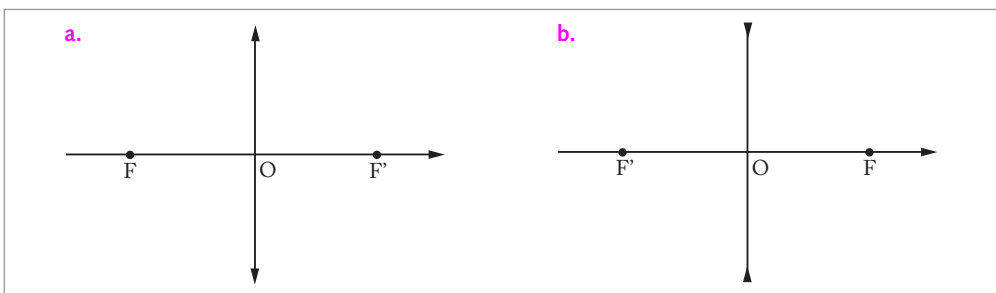


Fig. 8.6. Positions des points focaux objet F et image F' d'une lentille mince a. convergente et b. divergente.

## 8.5. Construction géométrique de l'image d'un objet à travers une lentille mince

Nous nous plaçons dans le cas d'une lentille symétrique. Les positions des points focaux objet et image sont donc symétriques par rapport à l'axe optique.

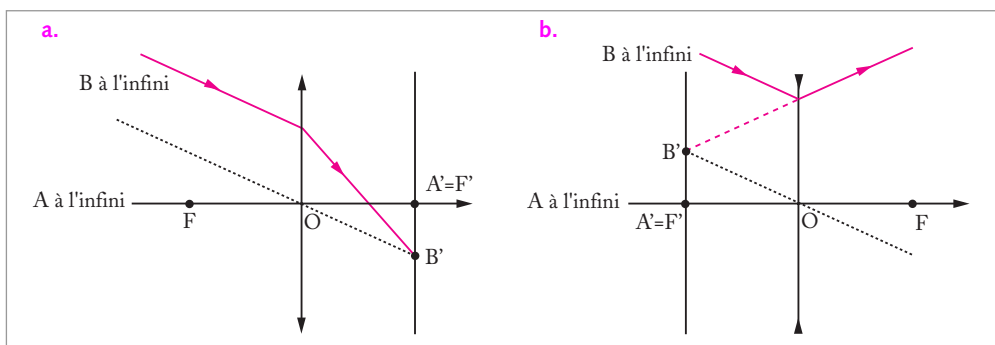
Pour effectuer la construction de l'image d'un objet A à travers une lentille mince, convergente ou divergente, nous utilisons les propriétés de rayons particuliers :

- un rayon passant par le centre optique de la lentille n'est pas dévié ;
- un rayon incident parallèle à l'axe optique émerge de la lentille en passant par le point focal image ;
- un rayon incident passant par le point focal objet de la lentille émerge parallèle à l'axe optique.

### 1 Image d'un objet à l'infini

**Définition :** le plan focal image est le plan conjugué des points situés à l'infini. Un point A situé à l'infini sur l'axe optique forme son image A' au point focal image F' de la lentille.

Pour construire l'image B' d'un point B situé à l'infini hors de l'axe optique, nous utilisons le rayon issu de B passant par le centre optique de la lentille : ce rayon n'étant pas dévié, son intersection avec le plan focal image correspond au point image B' puisque l'on sait que tous les rayons convergent en un point du plan focal image (Fig. 8.7).



**Fig. 8.7.** Image A'B' d'un objet AB étendu transverse, situé à l'infini, à travers une lentille mince a. convergente et b. divergente (le point A est sur l'axe optique).

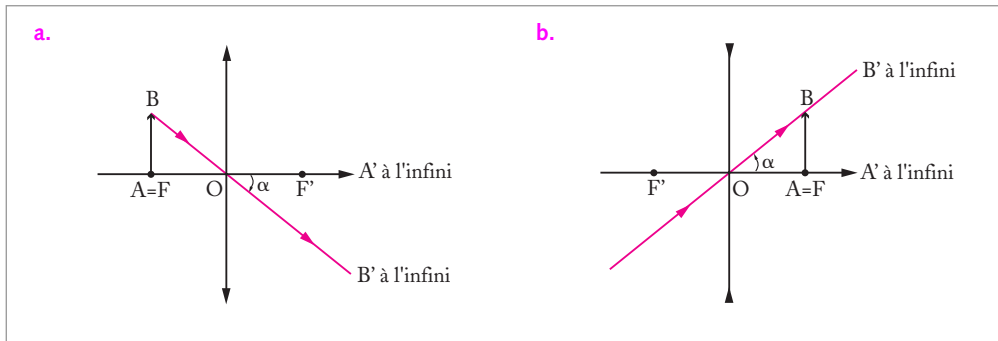
### 2 Image d'un objet situé dans le plan focal objet

**Définition :** un point situé dans le plan focal objet d'une lentille forme son image à l'infini. Le point objet A coïncidant avec le point focal objet forme son image à travers la lentille à l'infini sur l'axe optique.

Le point B situé dans le plan focal objet hors de l'axe optique forme son image à l'infini. Pour déterminer la direction d'émergence du faisceau de rayons issus de B, on trace le



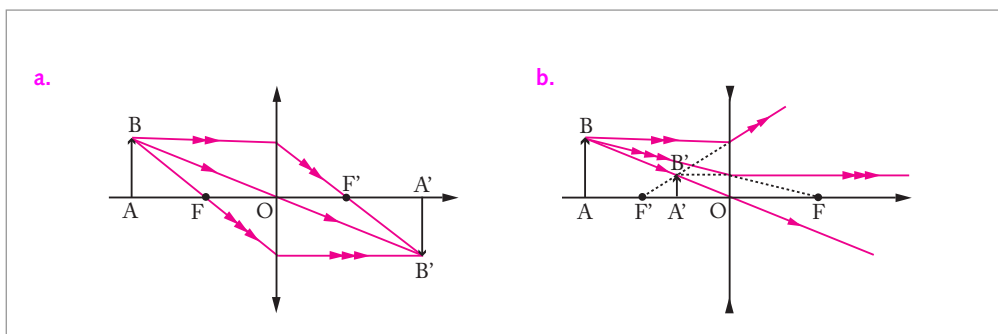
rayon issu de B et passant par le centre optique de la lentille. Ce rayon n'étant pas dévié, il donne la direction  $\alpha$  du faisceau émergent (Fig. 8.8).



**Fig. 8.8.** Image  $A'B'$ , renvoyée à l'infini, d'un objet  $AB$  étendu transverse situé dans le plan focal objet d'une lentille mince **a.** convergente et **b.** divergente.

### 3 Image d'un objet quelconque

Considérons maintenant un objet étendu transverse  $AB$  quelconque, le point  $A$  étant sur l'axe optique. Nous savons que l'image  $A'B'$  de  $AB$  par la lentille est également transverse et que le point image  $A'$  est sur l'axe optique. Le plus simple pour déterminer la position de l'image  $A'B'$  consiste à construire l'image  $B'$  de  $B$ .  $A'$  se déduit de  $B'$  puisque nous savons que  $A'B'$  est transverse (Fig. 8.9).

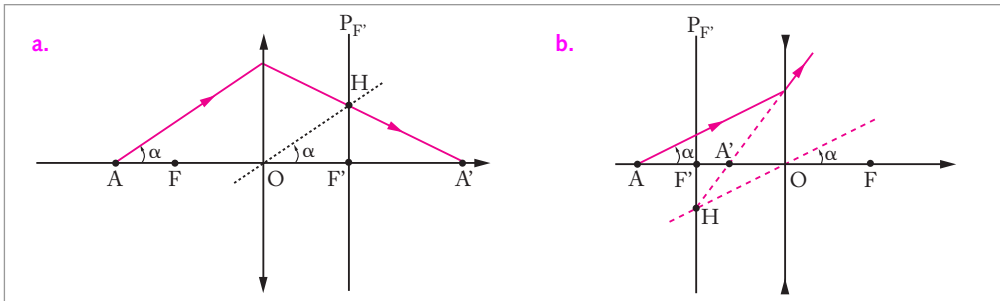


**Fig. 8.9.** Construction à trois rayons particuliers de l'image  $A'B'$  d'un objet transverse étendu à travers une lentille **a.** convergente et **b.** divergente.

Bien sûr, le tracé de deux des trois rayons de la figure 8.9 est suffisant pour déterminer la position de  $B'$ .

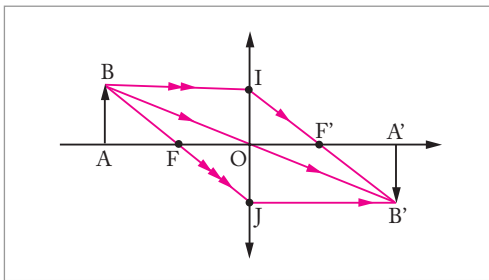
Nous donnons ici une méthode pour déterminer la position d'un objet  $A$  sur l'axe optique sans utiliser la construction de l'image d'un point  $B$  hors de l'axe optique (Fig. 8.10). Nous savons que l'image  $A'$  de  $A$  est sur l'axe optique. Il suffit donc de déterminer le trajet d'un rayon lumineux incident quelconque, faisant un angle  $\alpha$  avec l'axe optique. Dans quelle direction ce rayon émerge-t-il de la lentille ? Pour répondre à cette question, considérons un

rayon parallèle et passant par le centre optique. Le faisceau délimité par ces deux rayons nous ramène à un problème que nous connaissons déjà : celui d'un objet à l'infini émettant un faisceau de rayons parallèles entre eux et faisant un angle  $\alpha$  par rapport à l'axe optique. Tous les rayons faisant un angle  $\alpha$  émergent de la lentille en convergeant vers un point H du plan focal image, point obtenu comme nous l'avons dit plus haut, par l'intersection du rayon passant par le centre optique et du plan focal image. Revenons au problème qui nous intéresse. Le rayon issu de A et faisant un angle  $\alpha$  avec l'axe optique émerge donc de la lentille en convergeant vers le point H, ce qui nous permet de déterminer la position de son image A' par l'intersection de ce rayon avec l'axe optique.



**Fig. 8.10.** Construction à un rayon quelconque de l'image A' d'un objet A sur l'axe optique à travers une lentille mince **a.** convergente et **b.** divergente.

## 8.6. Relations de conjugaison d'une lentille mince symétrique



**Fig. 8.11.** Image A'B' de AB à travers une lentille mince convergente.

Nous avons obtenu la relation de conjugaison de Descartes en 8.4, grâce à la relation de conjugaison des dioptries sphériques. Nous proposons ici une démonstration plus classique qui utilise les propriétés des points focaux objet et image que nous avons établies. Ces démonstrations sont valables dans le cas où la lentille est symétrique, donc plongée dans le même milieu à sa droite et à sa gauche. Lorsque cela n'est pas le cas, il faut revenir à la relation de conjugaison des dioptries sphériques.

### 1 Relation de conjugaison de Descartes

Reprenons la construction de l'image A'B' de AB par la lentille (Fig. 8. 11). Le rayon de B passant par O n'est pas dévié. Le rayon issu de B et parallèle à l'axe optique, intercepte

la lentille au point I. Ce rayon émerge de la lentille suivant IF'. L'intersection des rayons BO et IF' coïncide avec le point B'. Sur la figure 8.11, nous représentons également le rayon incident BFJ émergeant à la hauteur de J parallèlement à l'axe optique.

Il apparaît que les triangles, ABO et A'B'O d'une part, et, F'OI et F'A'B' d'autre part, sont homothétiques. Nous avons donc :

$$\frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OI}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

Comme  $\overline{OI} = \overline{AB}$  :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

Par ailleurs,  $\overline{F'A'} = \overline{OA'} + \overline{F'O}$  et  $\overline{F'O} = -f'$ , donc :

$$-\frac{\overline{OA'}}{f'} + 1 = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

En divisant cette égalité par  $\overline{OA'}$ , on obtient finalement :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

Nous retrouvons la relation de conjugaison de Descartes.

## 2 Grandissement

**Définition :** le grandissement  $\gamma$  d'une lentille symétrique est donné par :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

Nous avons vu dans le paragraphe 1. l'égalité :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

Nous donnons ici deux autres expressions du grandissement en fonction des distances focales objet  $f$  et image  $f'$ .

Les triangles BAF et JOF sont homothétiques (Fig. 8.11) et  $\overline{OJ} = \overline{A'B'}$ , donc :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OJ}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}}$$

Nous en déduisons l'expression de  $\gamma$  en fonction de  $f$  :

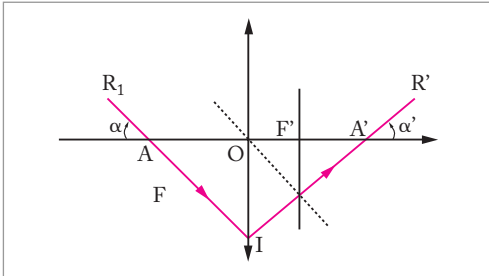
$$\gamma = -\frac{f}{\overline{FA}}$$

Les triangles OIF' et A'B'F' sont homothétiques, donc :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}$$

Nous en déduisons l'expression de  $\gamma$  en fonction de  $f'$ :

$$\gamma = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}$$



**Fig. 8.12.** Grandissement angulaire  $g(\alpha) = \frac{\alpha'}{\alpha}$  d'une lentille mince.

### 3 Grandissement angulaire

**Définition :** soit un rayon  $R_1$  incident sur la lentille et  $R'_1$  son conjugué par la lentille.  $R_1$  coupe l'axe optique en un point A et fait avec cet axe un angle  $\alpha$ .  $R'_1$  coupe l'axe optique en  $A'$ , point conjugué de A et fait un angle  $\alpha'$  avec l'axe optique (fig 8. 12). Le grandissement angulaire  $g(\alpha)$  est par définition :

$$g(\alpha) = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

Dans l'approximation paraxiale, les angles s'assimilent aux tangentes :

$$\alpha' \approx \frac{\overline{IO}}{\overline{OA'}} \quad \text{et} \quad \alpha \approx \frac{\overline{IO}}{\overline{OA}}$$

Nous avons donc :

$$g(\alpha) = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\gamma}$$

### 4 Formule de conjugaison de Newton

La formule de conjugaison de Newton est la relation de conjugaison des lentilles avec origine aux foyers. Reprenons les résultats du paragraphe précédent, à savoir les deux expressions obtenues pour le grandissement :

$$\gamma = -\frac{f}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}$$

Nous obtenons immédiatement la relation de conjugaison de Newton :

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = +ff'$$

Pour une lentille symétrique,  $f' = -f$ , ce qui conduit à :

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f^2$$

## 8.7. Lentilles accolées. Vergence

L'association de  $N$  lentilles accolées ( $L_1, \dots, L_N$ ) et de même axe optique est équivalente à une seule lentille  $L$ . Le centre  $O$  de  $L$  est le centre des  $N$  lentilles.

La vergence  $V$  de  $L$  est égale à la somme des vergences  $V_1, \dots, V_N$  des  $N$  lentilles associées :

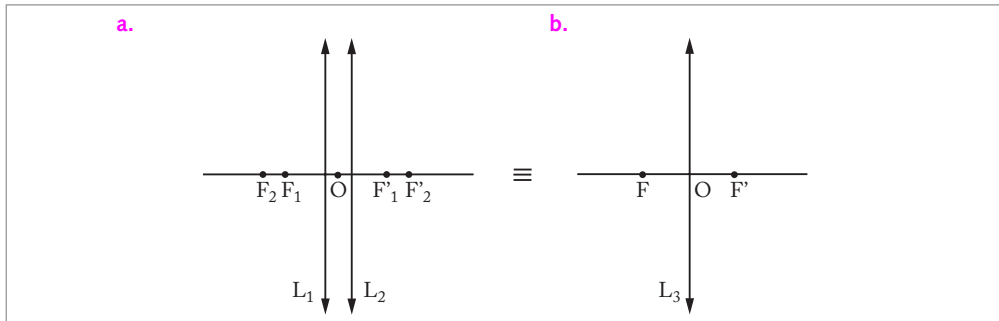
$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_N$$

Le grandissement  $\gamma$  de  $L$  est égal au produit des grandissements  $\gamma_1, \dots, \gamma_N$  des  $N$  lentilles :

$$\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_N$$

Nous allons montrer les résultats dans le cas où  $N = 2$ , la généralisation se faisant aisément à  $N$  quelconque.

### Distance focale de la lentille équivalente



**Fig. 8.13.** Lentille équivalente (b.) à l'association de deux lentilles accolées (a.).

Considérons un point objet  $A$  dont l'image intermédiaire par la première lentille est notée  $A_1$  et l'image définitive par les deux lentilles est notée  $A'$ , suivant le schéma synoptique :

$$A \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A'$$

Écrivons deux fois la relation de conjugaison de Descartes pour les lentilles minces de même centre optique  $O$  :

$$\frac{1}{OA_1} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f_1}$$

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA_1} = \frac{1}{f_2}$$

Il suffit de sommer les deux égalités précédentes pour obtenir :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f'}$$

Nous reconnaissons la relation de conjugaison pour les points  $(A, A')$  conjugués par une lentille équivalente de centre optique  $O$  et de distance focale  $f'$  telle que :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

Ce résultat se généralise à l'association de  $N$  lentilles accolées de centre optique  $O$  et de

distance focale  $f'_1, f'_2, \dots, f'_N$ . Cette association est équivalente à une lentille unique de centre O et de distance focale  $f'$ :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} + \dots + \frac{1}{f'_N}$$

et la vergence équivalente  $V$  est la somme des vergences :  $V = V_1 + V_2 + \dots + V_N$ .

### Grandissement de la lentille équivalente

Le grandissement  $\gamma$  d'un objet transverse AB donnant, à travers le système formé des deux lentilles, une image définitive A'B' s'écrit :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \gamma_1 \gamma_2$$

où  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont les grandissements respectifs des lentilles  $L_1$  et  $L_2$ . À nouveau, ce résultat se généralise immédiatement à l'association de  $N$  lentilles :

$$\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_N$$

## 8.8. Association de lentilles. Application aux oculaires

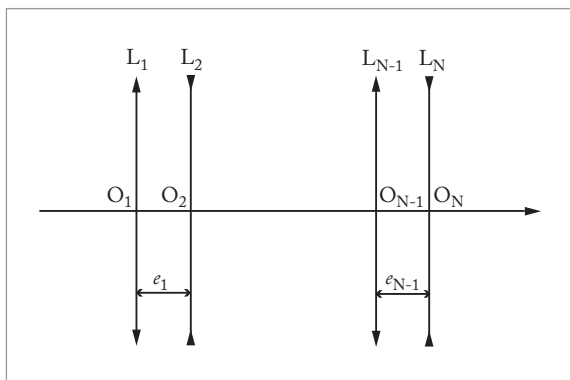


Fig. 8.14. Association de  $N$  lentilles.

Considérons l'association de  $N$  lentilles minces  $L_1, L_2 \dots L_N$  de même axe optique de centres  $O_1 \dots O_N$  et de distances focales  $f'_1 \dots f'_N$ . Deux lentilles successives sont distantes de  $O_n O_{n+1} = e_n$  pour  $n$  compris entre 1 et  $N-1$  (Fig. 8.14).

### 1 Construction de l'image d'un objet

Considérons un objet transverse étendu AB, A étant sur l'axe optique commun à la distance  $\overline{AO_1}$  de

la première lentille. Nous considérons le schéma synoptique suivant :

$$AB \xrightarrow{L_1} A_1B_1 \xrightarrow{L_2} A_2B_2 \dots \xrightarrow{L_N} A_NB_N$$

Appliquons la relation de conjugaison de Descartes pour les points A et  $A_1$  de l'axe, conjugués à travers  $L_1$  :

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'_1}$$

Nous avons donc :

$$\overline{O_1A_1} = \frac{\overline{O_1A} f'_1}{\overline{O_1A} + f'_1}$$

Avec  $\overline{O_2A_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1} = -e_1 + \frac{\overline{O_1A}f'_1}{\overline{O_1A} + f'_1}$ , il vient pour les points  $A_1, A_2$  conjugués à travers  $L_2$  :

$$\frac{1}{\overline{O_2A_2}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f'_2}$$

Soit

$$\overline{O_2A_2} = \frac{\overline{O_2A_1}f'_2}{f'_2 + \overline{O_2A_1}} = \frac{(-e_1 + \overline{O_1A_1})f'_2}{-e_1 + \overline{O_1A_1} + f'_2}$$

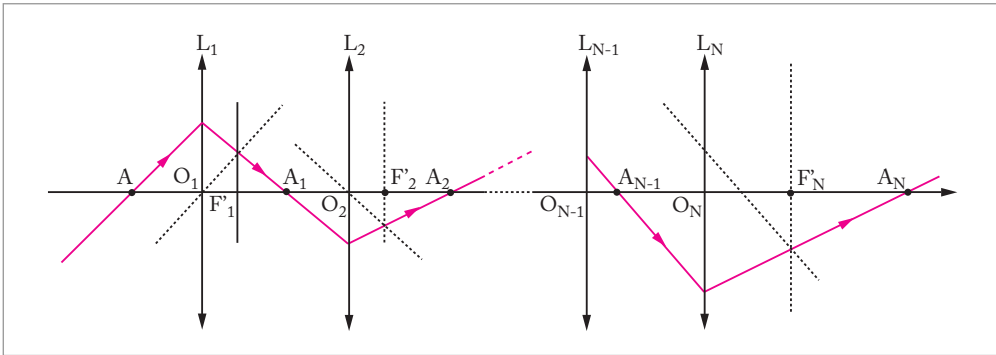
Par itération de ce processus,  $\overline{O_nA_n}$  étant déterminé, nous appliquons la relation de conjugaison de Descartes aux points  $A_n, A_{n+1}$  conjugués par  $L_{n+1}$  :

$$\frac{1}{\overline{O_{n+1}A_{n+1}}} - \frac{1}{\overline{O_{n+1}A_n}} = \frac{1}{f'_{n+1}}$$

Nous avons donc :

$$\overline{O_{n+1}A_{n+1}} = \frac{\overline{O_{n+1}A_n} \cdot f'_{n+1}}{\overline{O_{n+1}A_n} + f'_{n+1}} = \frac{(-e_n + \overline{O_nA_n})f'_{n+1}}{-e_n + \overline{O_nA_n} + f'_{n+1}}$$

Il est ainsi possible de déterminer, de proche en proche, les images intermédiaires données par les  $N$  lentilles jusqu'à l'image définitive  $A_N$ .



**Fig. 8.15.** Construction de l'image d'un objet à travers une succession de lentilles

## 2 Grandissement

Le grandissement obtenu à travers la succession de  $N$  lentilles s'écrit :

$$\gamma = \frac{\overline{A_N B_N}}{\overline{A B}}$$

Nous pouvons écrire le grandissement  $\gamma$  en fonction du grandissement de chaque lentille

$$\gamma_n = \frac{\overline{A_{n+1} B_{n+1}}}{\overline{A_n B_n}} :$$

$$\gamma = \frac{\overline{A_N B_N}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A_N B_N}}{\overline{A_{N-1} B_{N-1}}} \frac{\overline{A_{N-1} B_{N-1}}}{\overline{A_{N-2} B_{N-2}}} \dots \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{AB}}$$

$$\gamma = \gamma_N \gamma_{N-1} \dots \gamma_1$$

Le grandissement à travers une succession de lentilles est donc égal au produit des grandissements de chaque lentille.

### 3 Points cardinaux du système

La détermination des points cardinaux du système composé de l'association de  $N$  lentilles ne présente pas de difficulté particulière. Le système est centré et les règles énoncées dans le chapitre 6 sont directement applicables.

### 4 Cas particulier de deux lentilles

Il est bien sûr possible d'appliquer les résultats obtenus pour  $N$  lentilles à  $N = 2$ . Précisons, dans ce cas d'importance pratique, la position des points cardinaux. Soit donc le système composé de l'association de deux lentilles  $L_1$  et  $L_2$ , de distances focales images  $f'_1$  et  $f'_2$ . Les deux lentilles sont distantes de  $e$ .

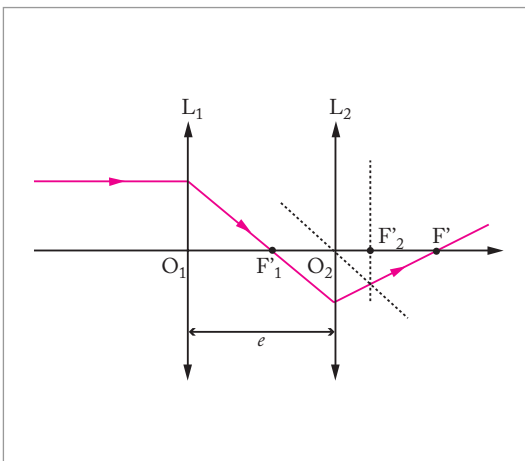
#### Image d'un point de l'axe par $L_1 L_2$

De la section précédente, il est immédiat que la position de l'image  $A'$  d'un point  $A$  sur l'axe est donnée par :

$$\overline{O_2 A'} = \frac{(-e + \overline{O_1 A_1})f'_2}{-e + \overline{O_1 A_1} + f'_2}$$

$$\overline{O_1 A_1} = \frac{\overline{O_1 A} f'_1}{\overline{O_1 A} + f'_1}$$

où  $A_1$  est l'image (intermédiaire) de  $A$  par  $L_1$ .



**Fig. 8.16.** Construction du point focal image  $F'$  du système formé de l'association de deux lentilles.

#### Points focaux de $(L_1, L_2)$ .

Pour construire les points focaux d'un oculaire, nous considérons les schémas synoptiques suivants.

- Pour le point focal image  $F'$  :

$$\text{objet à l'infini} \xrightarrow{L_1} F'_1 \xrightarrow{L_2} F'$$

$F'$  est l'image à travers la seconde lentille du point focal image  $F'_1$  de la première lentille (Fig. 8. 16). Appliquons la relation de conjugaison de Newton aux points  $F'_1, F'$ , conjugués par  $L_2$  :

$$\overline{F_2 F'_1} \cdot \overline{F_2 F'} = -f_2'^2$$

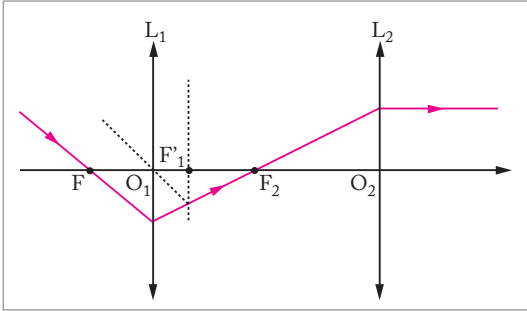


Avec  $\overline{F_2F'_1} = \overline{F_2O_2} + \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F'_1} = f_2' + f_1' - e$ , il vient :

$$\overline{F'_2F} = \frac{f_2'^2}{e - f_1' - f_2'}$$

• Pour le point focal objet :

$F \xrightarrow{L_1} F_2 \xrightarrow{L_2} \text{image à l'infini}$



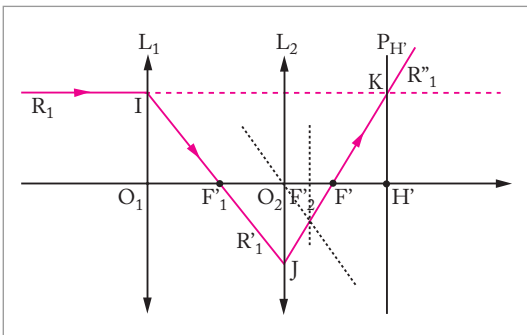
**Fig. 8.17.** Construction du point focal objet  $F$  du système formé de l'association de deux lentilles.

$F$  est l'objet qui donne, à travers la première lentille, une image au point focal objet  $F_2$  de la seconde lentille (Fig. 8.17). Utilisons la relation de conjugaison de Newton pour les points  $F_2, F$ , conjugués par  $L_1$  :

$$\overline{F_1F} \cdot \overline{F'_1F_2} = -f_1'^2$$

Avec  $\overline{F'_1F_2} = \overline{F'_1O_1} + \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2} = -f_1' + e - f_2'$ , il vient :

$$\overline{F_1F} = -\frac{f_1'^2}{e - f_1' - f_2'}$$



**Fig. 8.18.** Construction du point principal image  $H'$  du système formé de l'association de deux lentilles.

### Points principaux de $(L_1, L_2)$

• Point principal image

Considérons un rayon incident  $R_1$  parallèle à l'axe optique (Fig. 8.18). Le rayon rencontre la première lentille  $L_1$  en  $I$ . Il est dévié dans la direction  $IF'_1$  ( $R'_1$ ) et rencontre la seconde lentille  $L_2$  en  $J$ . Le rayon  $R'_1$  est à nouveau dévié et émerge de  $L_2$  dans la direction  $JF'$  ( $R''_1$ ). Par définition, le plan principal image  $P_{H'}$  est le plan perpendiculaire à l'axe optique contenant  $KH'$ , où  $K$  est l'intersection du rayon  $R''_1$  émergent

du système et du prolongement du rayon incident  $R_1$  correspondant.  $H'$  est la projection de  $K$  sur l'axe optique.  $H'$  est, par définition, le point principal image du système composé des deux lentilles.

Sur la figure 8.18, les triangles  $F'_1O_1I$  et  $F'_1O_2J$  d'une part, et,  $F'O_2J$  et  $F'H'K$  d'autre part, sont semblables. Nous avons donc :

$$\frac{\overline{O_1I}}{\overline{O_2J}} = \frac{\overline{F'_1O_1}}{\overline{F'_1O_2}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{F'H'}}{\overline{F'O_2}} = \frac{\overline{H'K}}{\overline{O_2J}}$$

Par définition  $\overline{H'K} = \overline{O_1I}$ ,

$$\frac{\overline{F'H'}}{\overline{F'O_2}} = \frac{\overline{O_1I}}{\overline{O_2J}} = \frac{\overline{F'_1O_1}}{\overline{F'_1O_2}} = \frac{-f'_1}{-f'_1 + e}$$

Comme nous l'avons montré (8.8.4), la position du point focal image  $F'$  est donnée par :

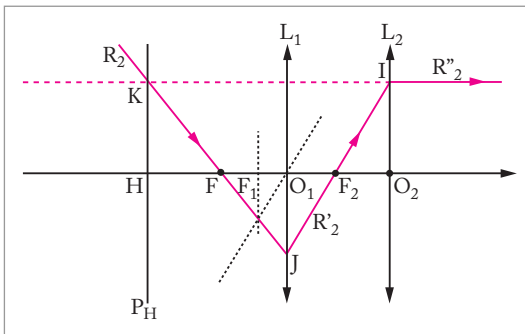
$$\overline{F'_2F'} = \frac{f_2'^2}{e - f'_1 - f_2'}$$

soit

$$\overline{F'O_2} = \overline{F'_2F'} - f_2' = \frac{-f_2'(e - f'_1)}{e - f'_1 - f_2'}$$

Nous en déduisons finalement la position du point principal image  $H'$  :

$$\overline{F'H'} = \frac{f_1'f_2'}{e - f'_1 - f_2'}$$



**Fig. 8.19.** Construction du point principal objet  $H$  du système formé de l'association de deux lentilles.

• Point principal objet

Considérons un rayon  $R'_2$  émergent du système composé des deux lentilles ( $L_1, L_2$ ) parallèlement à l'axe optique à la hauteur du point  $I$  sur la lentille  $L_2$  (Fig. 8.19). Nous pouvons appliquer le même raisonnement que précédemment en utilisant le principe de retour inverse de la lumière, les points focaux objets devenant alors des points focaux images. Nous notons  $J$  le point d'intersection du rayon  $R'_2$  et de la lentille  $L_1$ .

$K$  est le point appartenant au rayon incident  $R_2$  avant la lentille  $L_1$  à la hauteur du point  $I$ .

La projection de  $K$  sur l'axe optique est, par définition, le point principal objet  $H$  du système composé des deux lentilles. Le plan principal objet  $P_H$  est le plan perpendiculaire à l'axe optique passant par  $K$ .

Sur la figure 8.19, les triangles  $F_2O_2I$  et  $F_2O_1J$  d'une part, et  $FO_1J$  et  $FHK$  d'autre part sont semblables. Nous avons donc :

$$\frac{\overline{O_2I}}{\overline{O_1J}} = \frac{\overline{F_2O_2}}{\overline{F_2O_1}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{HK}}{\overline{O_1J}} = \frac{\overline{FH}}{\overline{FO_1}}$$

Par définition  $\overline{HK} = \overline{O_2I}$ , donc

$$\frac{\overline{FH}}{\overline{FO_1}} = \frac{\overline{O_2I}}{\overline{O_1J}} = \frac{\overline{F_2O_2}}{\overline{F_2O_1}} = \frac{f_2'}{f_2' - e}$$

La position du point focal objet F est donnée par  $\overline{F_1F} = \frac{-f_1'^2}{e - f_1' - f_2'}$ , soit :

$$\overline{FO_1} = -\overline{F_1F} + f_1' = \frac{f_1'(e - f_2')}{e - f_1' - f_2'}$$

Nous en déduisons finalement la position du point principal image H' :

$$\overline{FH} = -\frac{f_1' f_2'}{e - f_1' - f_2'}$$

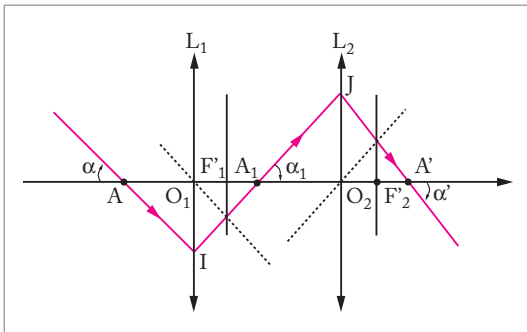
### Distances focales

Les distances focales objet  $f$  et image  $f'$  du système constitué des deux lentilles sont définies par :

$$f' = \overline{H'F'} = -\frac{f_1' f_2'}{e - f_1' - f_2'}$$

$$f = \overline{HF} = \frac{f_1' f_2'}{e - f_1' - f_2'}$$

Le système est symétrique :  $f' = -f$ .



**Fig. 8.20.** Grandissement angulaire  $g(\alpha) = \frac{\alpha'}{\alpha}$  du système formé de l'association de deux lentilles.

### Grandissement angulaire

Nous rappelons que les points nodaux sont, par définition, les points conjugués du système tels que le grandissement angulaire  $g(\alpha)$  soit égal à 1.

Considérons l'image  $A'$  de  $A$  à travers le système composé des deux lentilles (Fig. 8.20). Le rayon incident passant par  $A$  fait un angle  $\alpha$  avec l'axe optique. Il rencontre la lentille  $L_1$  en  $I$  ; il est alors dévié et se propage entre les deux lentilles suivant la direction  $IJ$ , le point  $J$  étant sur la lentille  $L_2$ . Le rayon émergent du système composé des deux lentilles  $L_1$  et  $L_2$  est porté par  $JA'$  et forme un angle  $\alpha'$  avec l'axe optique.

Le grandissement  $g(\alpha)$  est défini par :

$$g(\alpha) = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

avec, dans l'approximation de Gauss,

$$\alpha = \frac{\overline{IO_1}}{\overline{O_1A}} \quad \text{et} \quad \alpha' = \frac{\overline{JO_2}}{\overline{O_2A'}}$$

Il vient donc

$$g(\alpha) = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\alpha'}{\alpha_1} \frac{\alpha_1}{\alpha} = g_2(\alpha_1) g_1(\alpha)$$

où  $g_1(\alpha) = 1/\gamma_1$  et  $g_2(\alpha_1) = 1/\gamma_2$  sont les grandissements angulaires de chaque lentille.

Les grandissements s'expriment (8.6.2) :

$$\gamma_1 = \frac{f_1'}{\overline{F_1A}}$$

$$\gamma_2 = \frac{f_2'}{\overline{F_2F_1'}} = \frac{f_2'}{\overline{F_2F_1'} - \frac{f_1'^2}{\overline{F_1A}}}$$

Il vient finalement :

$$g(\alpha) = \frac{\overline{F_1A}(f_1' + f_2' - e) - f_1'^2}{f_1'f_2'}$$

### Points nodaux de ( $L_1, L_2$ )

Au point nodal objet N,  $g(\alpha) = 1$  donc

$$\overline{F_1N} = \frac{(f_1' + f_2')f_1'}{e - f_1' - f_2'}$$

Les points N et N' étant conjugués, le point nodal image est obtenu en utilisant la relation de conjugaison de Newton pour  $L_1$  (pour les points conjugués N, N<sub>1</sub>) puis  $L_2$  (pour les points conjugués N<sub>1</sub>, N'). On calcule alors :

$$\overline{F_2'N'} = \frac{(f_1' + f_2')f_2'}{e - f_1' - f_2'}$$

Nous retrouvons un résultat établi pour les systèmes centrés :

$$\overline{F_1'N'} = \overline{HF} = \frac{f_1'f_2'}{e - f_1' - f_2'} = f$$

$$\overline{FN} = \overline{H'F'} = -\frac{f_1'f_2'}{e - f_1' - f_2'} = f'$$

Le système étant symétrique ( $f = -f'$ ), les points nodaux N et N' sont confondus avec les points principaux : N = H et N' = H'.

## 5 Applications aux oculaires

Un exemple pratique d'association de lentilles est l'oculaire. Les instruments usuels sont en effet composés d'un objectif et d'un oculaire. Une première image (agrandie) de l'objet est formé par l'objectif. Cette image, appelé image objective, est placée au foyer d'un système focal de faible distance focale, appelé l'oculaire, qui permet d'observer l'objet sous un angle plus grand. Un oculaire est dit positif si son utilisation permet d'observer des objets réels et négatif si elle permet d'observer des objets virtuels.

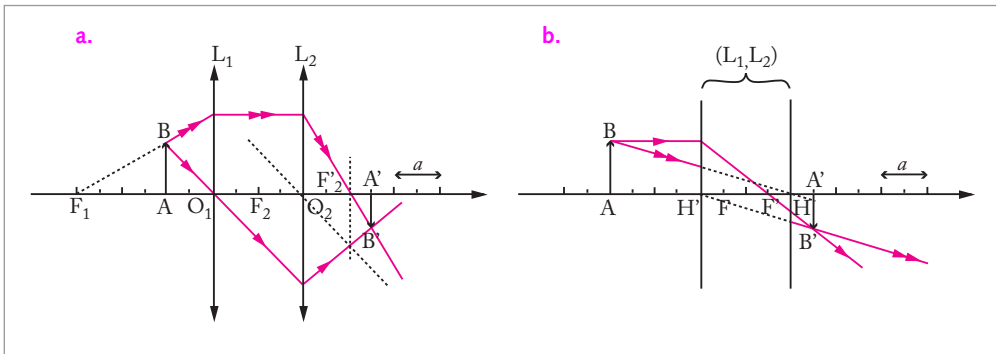
Les oculaires sont des associations de lentilles, le plus souvent, de deux lentilles. L'oculaire est symbolisé par trois nombres ( $N_1, N_2, N_3$ ) qui vérifient :

$$\frac{f_1'}{N_1} = \frac{e}{N_2} = \frac{f_2'}{N_3} = a$$

### Étude de l'oculaire de Huyghens

Les grandeurs caractéristiques de ce système sont :  $f'_1 = 3a$  ;  $e = 2a$  ;  $f'_2 = a$ . Pour cette raison, ce système est également appelé (3, 2, 1).

La figure 8.21a montre la position relative des lentilles et celles des points focaux ainsi que le tracé des rayons à travers les deux lentilles. La figure 8.21b indique les positions des points cardinaux du système centré équivalent ainsi que le tracé des rayons en utilisant les propriétés des points nodaux et du point focal image du système équivalent. Pour l'oculaire de Huyghens, la distance focale du système équivalent est  $f' = 3a/2$ . L'oculaire de Huyghens est négatif.

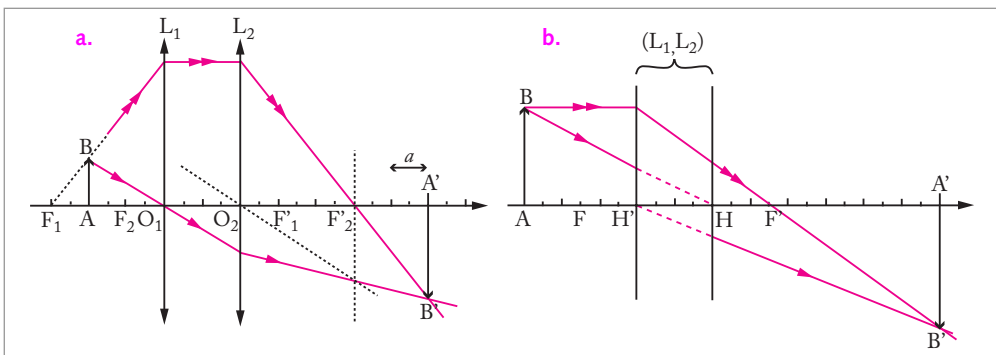


**Fig. 8.21. Oculaire de Huyghens.** a. Construction de l'image A'B' de AB à travers l'oculaire de Huyghens. b. Constructions des points focaux et principaux de l'oculaire de Huyghens.

### Oculaire de Ramsden

Les grandeurs caractéristiques de ce système sont :  $f'_1 = 3a$  ;  $e = 2a$  ;  $f'_2 = 3a$ . Pour cette raison, ce système est également appelé (3, 2, 3).

La figure 8.22a représente la position relative des lentilles et celles des points focaux ainsi que le tracé des rayons à travers les deux lentilles. La figure 8.22b indique les positions des points cardinaux du système centré équivalent ainsi que le tracé des rayons en utilisant les propriétés des points nodaux et du point focal image du système équivalent. Pour l'oculaire de Ramsden, la distance focale du système équivalent est  $f' = 9a/4$ . L'oculaire de Ramsden est négatif.



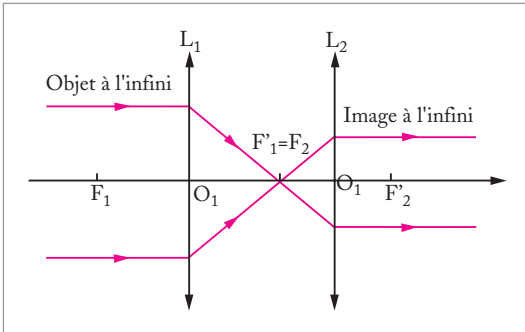
**Fig. 8.22. Oculaire de Ramsden.** a. Construction de l'image A'B' de AB à travers l'oculaire de Ramsden. b. Constructions des points focaux et principaux de l'oculaire de Ramsden.

# 8.9. Les systèmes afocaux

## 1 Définition

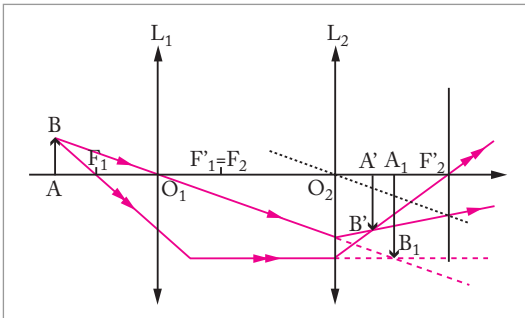
Un système afocal est un système, formé par l'association de plusieurs lentilles, qui donne, d'un objet à l'infini, une image à l'infini.

Dans le cas de l'association de deux lentilles, le système afocal est obtenu lorsque le point focal image  $F'_1$  de la première lentille est confondu avec le point focal objet  $F_2$  de la seconde lentille (Fig. 8.23). Notons que cette définition peut se généraliser à l'association de système focaux dont les lentilles sont un cas particulier.



**Fig. 8.23. Système afocal.** L'association de deux lentilles minces telle que le point focal image  $F'_1$  de la première lentille coïncide avec le point focal objet  $F_2$  de la seconde lentille : l'image d'un objet à l'infini est renvoyée à l'infini.

Nous étudions dans cette partie l'association de deux lentilles donnant un système afocal. Lorsque le système est constitué de plus de deux lentilles, on peut utiliser le résultat du paragraphe précédent et construire de proche en proche deux lentilles équivalentes à partir de  $N$  lentilles.



**Fig. 8.24. Construction de l'image  $A'B'$  d'un objet étendu transverse  $AB$  à travers un système afocal formé de l'association de deux lentilles minces ;  $A_1B_1$  est l'image intermédiaire de  $AB$  à travers la première lentille.**

## 2 Image d'un objet à travers un système afocal formé de deux lentilles

Pour déterminer la position de l'image  $A'$  d'un objet  $A$  situé à distance finie sur l'axe optique, nous appliquons la relation de conjugaison de Newton suivant le schéma synoptique :

$$A \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A'$$

Les points  $(A, A_1)$  sont conjugués à travers  $L_1$  et les points  $(A_1, A')$  sont conjugués à travers  $L_2$  (Fig. 8.24) :

$$\overline{F'_1 A_1} = -\frac{f_1^2}{\overline{F_1 A}} \quad \text{et} \quad \overline{F'_2 A'} = -\frac{f_2^2}{\overline{F_2 A_1}}$$

Avec  $F_2 = F'_1$ , il vient :  $\overline{F'_2 A'} = -\frac{f_2'^2}{F'_1 A_1} = \frac{f_2'^2}{f_1'^2} \overline{F_1 A}$

### 3 Grandissement d'un système afocal

L'expression du grandissement transversal  $\gamma$  à travers le système afocal est donné en fonction des grandissements  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  des deux lentilles associées :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{AB} = \frac{\overline{A'B'}}{A_1 B_1} \frac{\overline{A_1 B_1}}{AB} = \gamma_1 \gamma_2$$

Exprimons les grandissements en fonction de la position de l'image intermédiaire  $A_1$  :

$$\gamma_1 = -\frac{\overline{F'_1 A_1}}{f_1'} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = -\frac{f_2}{\overline{F_2 A_1}}$$

Avec  $F'_1 = F_2$ , nous obtenons finalement

$$\gamma = \frac{f_2}{f_1'} = -\frac{f_2'}{f_1'}$$

La valeur du grandissement d'un système afocal est indépendante de la position de l'image. Ce résultat est valable pour tous les systèmes afocaux.

### 4 Grandissement angulaire d'un système afocal

L'expression du grandissement angulaire  $g(\alpha)$  à travers le système afocal est donné en fonction des grossissements  $g_1(\alpha)$  et  $g_2(\alpha)$  des deux lentilles associées :

$$g(\alpha) = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\alpha' \alpha_1}{\alpha_1 \alpha} = g_1(\alpha) g_2(\alpha) .$$

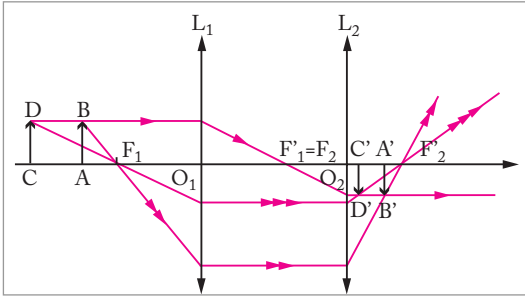
Reprenons l'expression du grandissement angulaire établie pour deux lentilles distantes de  $e$  (8.8.4) :

$$g(\alpha) = \frac{\overline{F_1 A} (f_1' + f_2' - e) - f_1'^2}{f_1' f_2'}$$

Avec  $f_1' + f_2' - e = 0$  (car le système est afocal), il vient :

$$g(\alpha) = -\frac{f_1'}{f_2'}$$

Le grandissement angulaire est indépendant de la position de l'objet. Ce résultat est valable pour tous les systèmes afocaux.



**Fig. 8.25. Raccourcissement des objets à travers un système afocal.** L'image A'C' de l'objet AC le long de l'axe optique à travers le système afocal formé de deux lentilles minces convergentes (avec  $F_1 = F_2$ ) est plus courte que son objet AC.

## 5 Image d'un objet rectangulaire

Considérons l'objet rectangulaire ABCD de la figure 8.25, dont l'image à travers le système afocal ( $L_1, L_2$ ) donne une image rectangulaire A'B'C'D'.

Le rectangle image a une dimension transverse :

$$A'B' = |\gamma| AB = \frac{f_2'}{f_1'} AB$$

Sa dimension le long de l'axe est A'C'.

La position de l'image A' de A est donnée par  $\overline{F_2'A'} = \frac{f_2'^2}{f_1'^2} \overline{F_1'A}$ . De même, la position de l'image C' de C est donnée par  $\overline{F_2'C'} = \frac{f_2'^2}{f_1'^2} \overline{F_1'C}$ . Nous en déduisons la taille de A'C' :

$$A'C' = \gamma^2 AC = \frac{f_2'^2}{f_1'^2} AC$$

On en déduit que si  $\gamma < 1$ , le rectangle est d'avantage raccourci le long de l'axe que dans la direction transverse. Si  $\gamma > 1$ , le rectangle est d'avantage agrandi le long de l'axe.

## résumé du cours

### Lentille mince

- ◆ La formule de conjugaison d'une lentille mince s'écrit :

$$\frac{n_1}{OA} - \frac{n_3}{OA'} = \frac{n_1 - n_2}{R_1} + \frac{n_2 - n_3}{R_2}$$

- ◆ Son grandissement  $\gamma$  est égal à  $\gamma = \frac{A'B'}{AB} = \frac{n_1 OA'}{n_3 OA}$  :

- ◆ La distance focale objet  $f$  et la position du foyer objet F sont définies par la relation :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{OF} = \frac{1}{n_1} \left( \frac{n_1 - n_2}{R_1} + \frac{n_2 - n_3}{R_2} \right)$$

- ◆ La distance focale objet  $f'$  et la position du foyer objet F' sont définies par la relation :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{OF'} = -\frac{1}{n_3} \left( \frac{n_1 - n_2}{R_1} + \frac{n_2 - n_3}{R_2} \right)$$



- ◆ La relation de conjugaison de Newton s'écrit :

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = +ff'$$

### Lentille mince plongée dans l'air

- ◆ La formule de conjugaison s'écrit :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

- ◆ Le grandissement  $\gamma$  est égal à :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

- ◆ La relation de conjugaison de Newton s'écrit :

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2$$

- ◆ La vergence  $V$  est définie par :

$$V = \frac{1}{f'}$$

### Association de lentilles accolées

- ◆ L'association de  $N$  lentilles accolées ( $L_1, \dots, L_N$ ) et de même axe optique est équivalente à une seule lentille  $L$ . Le centre  $O$  de  $L$  est le centre des  $N$  lentilles.

- ◆ La vergence  $V$  de  $L$  est égale à la somme des vergences  $V_1, \dots, V_N$  des  $N$  lentilles associées :

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_N$$

- ◆ La distance focale  $f'$  est telle que :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} + \dots + \frac{1}{f'_N}$$

- ◆ Le grandissement  $\gamma$  de  $L$  est égal au produit des grandissements  $\gamma_1, \dots, \gamma_N$  des  $N$  lentilles :

$$\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_N$$

### Systèmes afocaux

- ◆ Un système afocal est un système, formé par l'association de plusieurs lentilles, qui donne, d'un objet à l'infini, une image à l'infini.

## Exercices

**1** À partir de la construction de l'image d'un objet réel situé en amont du plan focal objet d'une lentille mince convergente, retrouver les relations de conjugaison de Descartes.

**2** Déterminer le diamètre  $d$  de l'image du Soleil dont le diamètre apparent  $\alpha$  est de  $1/100$  radian à travers une lentille convergente de distance focale  $f' = 10$  cm.

**3** Un objet AB de 1 cm est placé à 8 cm d'une lentille convergente dont la distance focale est de 12 cm. Déterminer son image.

**4** À l'aide d'une lentille convergente de 20 cm de distance focale, on veut obtenir d'un objet réel une image réelle 4 fois plus grande que l'objet. À quelles distances de l'objet faut-il placer la lentille et l'écran ?

**5** Une lentille convergente est placée entre une source lumineuse et un écran séparés par la distance  $D = 50$  cm. En déplaçant la lentille, on constate que l'on obtient une image A'B' nette de la source AB pour deux positions  $O_1$  et  $O_2$  de la lentille séparées de la distance  $d = 30$  cm.

1. Montrer géométriquement la relation  $O_1B' = BO_2$  et  $BO_1 = O_1B'$ .
2. Calculer la distance focale de la lentille.
3. En déduire les dimensions des deux images sachant que la source lumineuse est un objet AB perpendiculaire à l'axe optique de longueur  $l = 2$  cm.

**6** Derrière une lentille convergente et perpendiculairement à son axe optique se trouve un miroir plan. On note O le centre de la lentille.

1. Construire géométriquement l'image à travers un tel système d'un objet AB perpendiculaire à son axe optique situé entre l'infini et le plan focal objet de la lentille.
2. Préciser, dans le cas général, la positions OB' et la dimension de l'image A'B' en fonction de celle de l'objet AB et de la distance  $D$  entre le plan de la lentille et le miroir.

**7** Un objet réel BA ( $BA = 1$  cm) est placé devant une lentille convergente perpendiculairement à l'axe optique, la distance focale  $f$  de la lentille est égale à 50 cm. On observe alors sur un écran une image nette de 5 cm de longueur.

1. Quelle est la distance de l'objet à la lentille ?
2. Entre cet objet et la lentille, on intercale une lame de verre d'épaisseur  $e = 30$  cm et l'on constate que l'image est rejetée à l'infini. En déduire l'indice  $n$  de la lame.

**8** Une lentille mince convergente donne d'un objet AB réel normal à son axe optique une image réelle A'B'. BO et OB' sont respectivement égaux à 120 cm et 60 cm.

1. Calculer la distance focale  $f'$  de cette lentille.
2. Où doit-on placer sur l'axe optique le centre optique  $O_1$  d'une seconde lentille, de distance focale  $f'_1$  égale à 3 cm, pour qu'elle donne de A'B' une image réelle A''B'' cinq fois plus grande que A'B'.

**9** Un objet réel AB est placé à la distance  $D = 4$  m d'un écran. Selon sa position, une lentille donne sur l'écran une image réelle de l'objet trois fois plus grande ou trois fois plus petite que l'objet.

1. Quelle est la nature de la lentille ?
2. Déterminer les deux positions de la lentille. Calculer sa distance focale  $f'_1$ .
3. Déterminer la distance focale  $f'_2$  d'une deuxième lentille qui accolée à la première ne donnerait sur l'écran une image nette que pour une seule position du système des deux lentilles accolées.

**10** On considère un ensemble de deux lentilles, l'une convergente et l'autre divergente, de distances focales respectives  $f'_1$  et  $f'_2$ . La distance entre les centres optiques de ces lentilles est  $d$  telle que  $d > f'_1 + f'_2$ . Déterminer les foyers objet et image de cet ensemble.

**11** Soit un ensemble de deux lentilles convergentes dont les centres optiques  $O_1$  et  $O_2$  sont distants de  $d$ .

1. Comment les positionner pour obtenir un système optique dit "afocal", c'est-à-dire sans foyers? Peut-on avoir un système afocal avec une lentille convergente et une lentille divergente ?
2. Quel est, dans ce cas, le rapport entre le diamètre d'un faisceau entrant parallèle à l'axe optique et celui du faisceau sortant, les distances focales des deux lentilles étant notées  $f'_1$  et  $f'_2$  ?

# Propriétés générales des instruments d'optique

Bon nombre d'instruments optiques ont un fonctionnement lié à l'œil. Ces instruments sont appelés instruments oculaires. L'œil est alors le récepteur des images formées à travers ces instruments oculaires. Mais l'œil est lui-même un instrument optique. Aussi, pour décrire les instruments oculaires, utiliserons-nous certaines propriétés de l'œil que nous rappellerons et qui seront développées dans le chapitre suivant.

## 9.1. Les différents instruments optiques

- 1 Les instruments de projection
- 2 Les instruments oculaires
- 3 Caractéristiques des instruments optiques

## 9.2. Grandissement, grossissement et puissance d'un instrument optique

- 1 Grandissement
- 2 Puissance
- 3 Grossissement angulaire

## 9.3. Champs en largeur des instruments optiques

- 1 Définition
- 2 Pupilles d'entrée et de sortie d'un instrument
- 3 Champ de pleine lumière
- 4 Champ total
- 5 Diaphragmentation du champ

## 9.4. Profondeur de champ

- 1 Profondeur de foyer et profondeur de champ des instruments de projection
- 2 Profondeur de champ des instruments oculaires

### Mots-clés

- Instrument optique
- Grandissement
- Grossissement angulaire
- Puissance
- Profondeur de champ

## 9.1. Les différents instruments optiques

Il existe de très nombreux types d'instruments optiques que nous pouvons regrouper en deux grandes familles. La première est celle des instruments destinés à former des images, que ce soit pour aider l'œil dans l'observation des objets, par exemple le microscope, (on parle alors d'instrument oculaire) ou pour fixer ces images, par exemple l'appareil photographique ou le photocopieur (on parle d'instrument de projection). La seconde famille regroupe les détecteurs et correspond aux analyseurs de radiations lumineuses ou d'énergie lumineuse.

Nous ne développerons pas dans cet ouvrage les instruments de détection car leur étude nécessite la connaissance des ondes lumineuses.

### 1 Les instruments de projection

Les instruments de projection forment à partir d'un objet une image réelle, qui peut être reçue sur un écran. Ce sont donc des systèmes focaux. Parmi les instruments de projection, on peut citer l'appareil photographique qui correspond à un écran imprimable (surface photosensible), les projecteurs de cinéma, les photocopieurs... Bien sûr, l'œil lui-même appartient à cette catégorie.

### 2 Les instruments oculaires

Les instruments optiques oculaires sont conçus pour fonctionner en association avec l'œil. Ces instruments fournissent d'un objet une image virtuelle qui est regardée directement par l'œil. La plupart de ces instruments, hormis la loupe, sont constitués d'un objectif et d'un oculaire. Nous trouvons dans cette catégorie les microscopes, les lunettes, les jumelles...

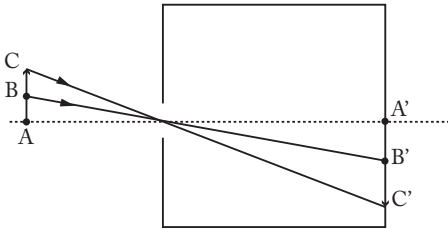
### 3 Caractéristiques des instruments optiques

Les performances des instruments optiques sont caractérisées par un certain nombre de grandeurs :

- le grossissement, le grandissement et la puissance sont des grandeurs qui permettent de caractériser la nature de l'image obtenue pour un objet donné. Le grossissement est utilisé pour les instruments afocaux, lorsque grandissement et puissance ne peuvent pas être définis ;
- le champ rend compte des caractéristiques de l'objet susceptible d'être correctement visualisé à l'aide de l'instrument ;
- la limite de résolution rend compte de la finesse des détails observables par l'instrument, ce qui définit la qualité des images formées.

### De la boîte noire à l'appareil photographique

La boîte noire est probablement le plus ancien instrument optique de projection puisque la première observation d'un phénomène de projection solaire, à l'aide d'une boîte noire, est attribuée au philosophe chinois Mozi aux environs du 5<sup>e</sup> siècle av. J.-C.. Une boîte noire est constituée d'une



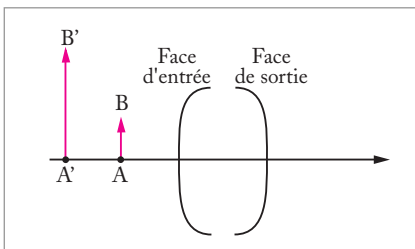
boîte fermée de dimension quelconque. Sur une des faces, un petit trou est percé. Si le trou est assez petit, l'image B' d'un point B à

l'extérieur de la boîte est formé par un seul rayon : celui qui, issu de B passe par le trou et rencontre le fond de la boîte, qui joue le rôle d'écran.

Au 11<sup>e</sup> siècle ap. J.-C., le savant arabe Alhazen reprend le principe de la boîte noire pour effectuer l'étude des éclipses du Soleil. En 1490, Léonard de Vinci décrit la « camera oscura » dans tous ses détails. Son principe a été utilisé par différents artistes italiens dont le peintre et graveur Canaletto qui décalquait l'image projetée au fond d'une chambre noire puis réfléchiée par un jeu de miroirs.

En 1540, Jérôme Cardan remplace le trou par une lentille optique qui permet d'obtenir une image plus claire et plus nette, marquant ainsi un pas décisif vers le principe de l'appareil photographique.

## 9.2. Grandissement, puissance et grossissement d'un instrument optique



**Fig. 9.1.** Image A'B' de AB à travers un instrument optique, symbolisé par ses faces d'entrée et de sortie.

### 1 Grandissement

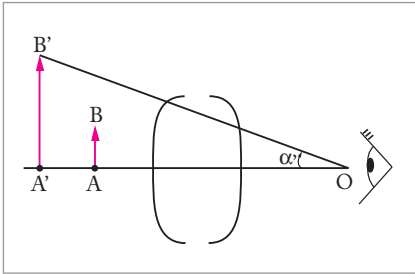
Soit AB un objet transverse et A'B' son image à travers l'instrument (Fig. 9.1). Le grandissement  $\gamma$  est défini par :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

Cette caractéristique est importante pour les instruments optiques qui donnent une image réelle de l'objet observé, par exemple pour les instruments de projection.

## 2 Puissance

La puissance d'un instrument optique ne peut être définie que si cet instrument est destiné à l'observation d'objets situés à distance finie.



**Fig. 9.2.** Image  $A'B'$  de  $AB$  à travers un instrument optique. La puissance de l'instrument est définie par  $P = \frac{\alpha'}{AB}$ .

Considérons un objet transverse  $AB$ . L'image de l'objet à travers l'instrument est vue sous un angle  $\alpha'$  (Fig. 9.2). La puissance  $P$  de l'instrument s'écrit alors :

$$P = \frac{\alpha'}{AB}$$

La puissance a pour unité la dioptrie (symbole  $\delta$ ) lorsque  $AB$  est exprimé en mètre.

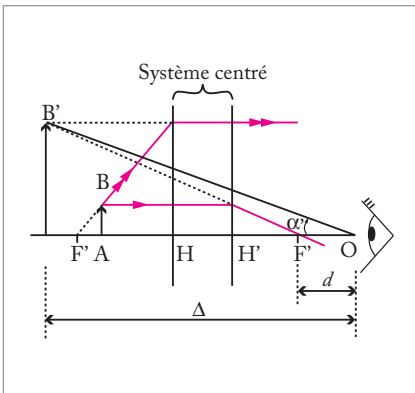
La puissance est un critère de qualité pour un instrument optique ; un instrument est d'autant plus puissant qu'il forme, d'un objet, une image vue sous un grand diamètre apparent.

La puissance peut s'écrire en fonction du grandissement :

$$P = \frac{\alpha'}{AB} \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\alpha'}{AB} \gamma$$

Notons  $\Delta = \overline{OA'}$  la distance de l'image  $A'B'$  à l'œil, placé en  $O$ . Dans l'approximation des faibles angles, nous avons :  $\frac{\alpha'}{\overline{A'B'}} \approx \frac{1}{\Delta}$ . La puissance s'écrit alors en fonction de  $\Delta$  :

$$P = \frac{\gamma}{\Delta}$$



**Fig. 9.3.** Observation de l'image  $A'B'$  de  $AB$  à travers un instrument optique, symbolisé par ses points principaux  $H$  et  $H'$  et ses points focaux  $F$  et  $F'$ . La puissance de l'instrument s'écrit

$$P = -\frac{1}{f'} \left( 1 + \frac{d}{\Delta} \right).$$

### Puissance d'un système centré

Considérons maintenant le cas usuel où l'instrument optique est un système centré de distance focale image  $f'$  (Fig. 9.3). Le grandissement  $\gamma$  s'écrit alors :

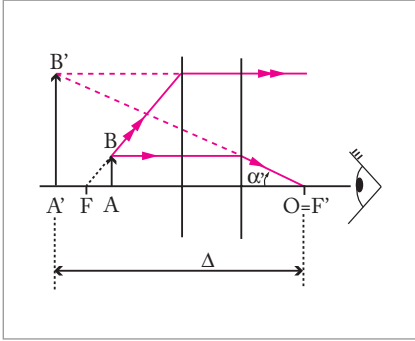
$$\gamma = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} = -\frac{\overline{F'O} + \overline{OA'}}{f'} = -\frac{d + \Delta}{f'}$$

où  $d$  est la distance de l'observateur au point focal image  $F'$  :  $d = \overline{F'O}$ .

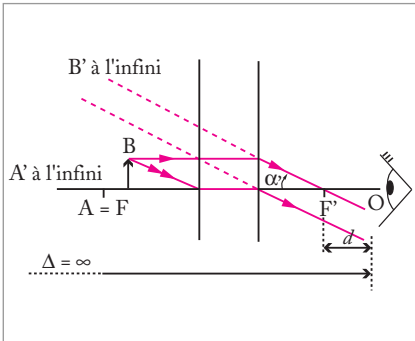
La puissance de l'instrument s'écrit, pour un système centré :

$$P = -\frac{1}{f'} \left( 1 + \frac{d}{\Delta} \right)$$

Cette puissance dépend de la position de l'image de l'objet à travers l'instrument et de la position de l'œil de l'observateur (Fig. 9.3).



**Fig. 9.4.** Observation de l'image A'B' de AB à travers un instrument optique, symbolisé par ses plans principaux; l'observation se fait depuis le point focal image de l'instrument.



**Fig. 9.5.** Observation de l'image A'B' d'un objet AB dans le plan focal objet de l'instrument optique, symbolisé par ses plans principaux; l'image est renvoyée à l'infini.

### Puissance intrinsèque

On dit que l'instrument est utilisé avec sa puissance intrinsèque lorsque le rapport  $\frac{d}{\Delta}$  est nul. La puissance intrinsèque  $P_i$  est donnée par :

$$P_i = -\frac{1}{f'}$$

Cette condition est obtenue dans deux cas :

- $d = 0$ . L'œil est situé au point focal image du système centré (Fig. 9.4). Quelle que soit la position de l'objet AB, le rayon conjugué du rayon parallèle à l'axe passe par le point focal image  $F'$  où est situé l'œil. Ce rayon définit l'angle  $\alpha'$  sous lequel est vue l'image A'B'. Il est indépendant de la position de A sur l'axe optique. L'angle  $\alpha'$  est donc également indépendant de la position de l'objet ;
- $\Delta = \infty$ . L'image A'B' est renvoyée à l'infini (Fig. 9.5). Quelle que soit la position de l'œil, cette image est vue sous un angle constant  $\alpha'$ . Notons que l'objet AB est alors dans le plan focal objet du système centré.

### 3 Grossissement angulaire

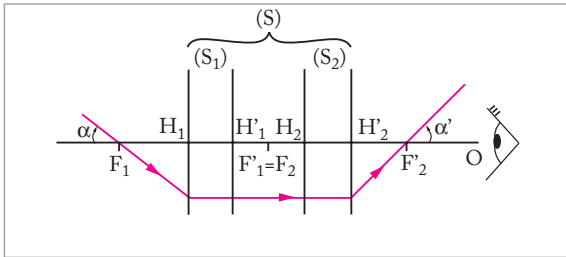
Le grandissement et la puissance d'un instrument ne sont pas définis lorsque l'objet observé est à l'infini. En effet, la quantité  $\overline{AB}$  n'est pas définie

si A et B sont renvoyés à l'infini ou, autrement dit, si la taille  $\overline{AB}$  de l'objet devient infiniment grande lorsqu'il s'éloigne infiniment. Il est alors utile de définir le grossissement angulaire qui s'applique aux objets et images situés à distance finie et devient particulièrement pertinent lorsque objet ou image sont renvoyés à l'infini. Le grossissement angulaire repose sur la notion de diamètre apparent, angle sous lequel l'objet ou l'image est vu.

**Définition :** Le grossissement angulaire  $g(\alpha)$  est le rapport du diamètre apparent  $\alpha'$  de l'image sur le diamètre apparent de l'objet  $\alpha$ .

$$g(\alpha) = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

Il est intéressant d'étudier séparément le grossissement des instruments afocaux et des instruments focaux.



**Fig. 9.6. Trajectoire d'un rayon à travers un système afocal.** Un objet de diamètre apparent  $\alpha$  et situé à l'infini, forme son image, de diamètre apparent  $\alpha'$ , à l'infini.

### Grossissement d'un instrument afocal

Rappelons qu'un système afocal (S) est constitué de deux systèmes centrés focaux ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) tels que le point focal image  $F'_1$  de ( $S_1$ ) est confondu avec le point focal objet  $F_2$  de ( $S_2$ ). Ainsi, un objet à l'infini forme son image à travers le système (S) à l'infini.

La figure 9.6 montre que la valeur du grossissement  $g(\alpha)$  est alors donnée par :

$$g(\alpha) = -\frac{f'_1}{f_2}$$

### Recherche & Développement

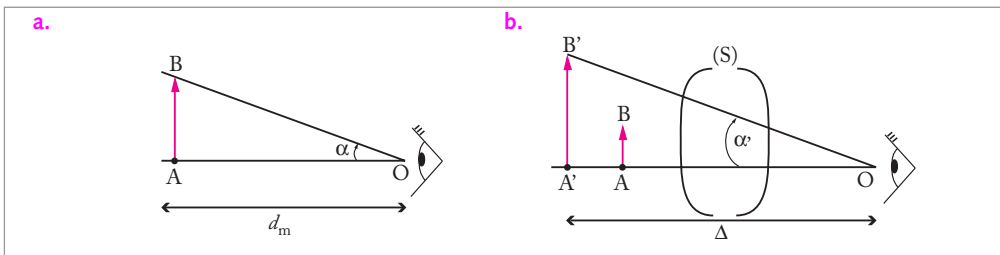
#### Caractéristiques d'un instrument visuel

Les instruments visuels, tels que les jumelles ou les télescopes, destinés à l'observation d'objets éloignés, sont caractérisés par leur valeur de grossissement intrinsèque  $G_i$ . Il est usuel d'indiquer également la valeur, en millimètres, du diamètre de la pupille

d'entrée. En général, ces valeurs sont signalées sur le tube de l'instrument, séparées par le symbole  $\times$ . Ainsi, l'indication  $8 \times 30$  désigne un instrument dont le grossissement intrinsèque est de 8 et dont la pupille d'entrée a un diamètre de 30 mm.

### Grossissement d'un instrument focal

La notion de grossissement peut être étendue aux instruments focaux mais la définition des angles  $\alpha$  et  $\alpha'$  est alors un peu différente. Dans le cas d'un instrument focal, l'angle  $\alpha$  est défini par l'angle sous lequel est vu l'objet à l'œil nu, c'est-à-dire sans l'aide d'un instrument optique tandis que  $\alpha'$  est toujours l'angle sous lequel l'œil voit l'image de cet objet à travers l'instrument optique (S) (Fig. 9.7).



**Fig. 9.7. a.** Observation direct de l'objet AB à la distance minimale de vision distincte  $d_m$  : l'objet est vu sous un angle  $\alpha$  ; **b.** Observation de AB à travers un instrument focal (S) : l'image A'B' de AB est vue sous un angle  $\alpha'$ .



En général, l'angle  $\alpha$  est défini dans les conditions les plus favorables pour l'observation à l'œil nu, c'est-à-dire lorsque la distance de l'œil à l'objet est minimum. Cette distance est appelée distance minimale de vision distincte et elle est notée  $d_m$ . Sa valeur dépend de l'observateur. L'expression du grossissement est toujours :

$$g(\alpha) = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

avec

$$\alpha = \frac{\overline{AB}}{d_m} \quad \text{et} \quad \alpha' = \frac{\overline{A'B'}}{\Delta}$$

Nous avons donc :

$$g(\alpha) = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \frac{d_m}{\Delta} = \gamma \frac{d_m}{\Delta}$$

Nous avons vu que  $\gamma = -\frac{d+\Delta}{f'}$ , d'où l'expression du grossissement :

$$g(\alpha) = -\frac{1}{f'} \left(1 + \frac{d}{\Delta}\right) d_m$$

La valeur du grossissement de l'instrument dépend des conditions d'observation (valeurs de  $d$  et  $\Delta$ ) et de l'observateur (valeur de  $d_m$ ). Le grossissement intrinsèque  $G_i$  est obtenu, comme pour le système afocal, lorsque le rapport  $d/\Delta$  est nul. Les conditions d'obtention sont les mêmes que précédemment : lorsque l'image est renvoyée à l'infini (l'objet est alors dans le plan focal objet de (S)) ou lorsque l'œil est placé au point focal image de (S). La valeur du grossissement intrinsèque est donnée par :

$$G_i = -\frac{d_m}{f'}$$

Dans le cas d'un instrument focal, le grossissement intrinsèque dépend encore de l'observateur. En fixant la valeur de la distance minimum de vision distincte à 25 cm, nous obtenons la valeur du grossissement commercial  $G_c$ . Cette valeur de  $d_m$  correspond à la distance minimum de vision distincte d'un œil emmétrope (c'est-à-dire « normal »). La valeur du grossissement commercial est liée à la valeur de la puissance intrinsèque :

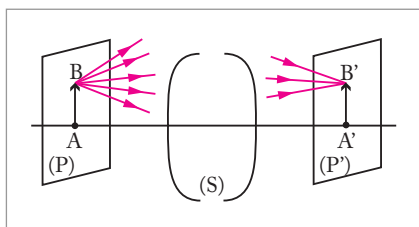
$$G_c = -\frac{0,25}{f'(\text{m})} = \frac{P_i(\delta)}{4}$$

Les constructeurs donnent en général la valeur du grossissement commercial pour caractériser un instrument focal. Cette indication permet de remonter à la valeur de la distance focale  $f'$  du système focal :

$$f' = -\frac{0,25}{G_c}$$

## 9.3. Champs en largeur des instruments optiques

Le champ d'un instrument désigne l'ensemble des points de l'espace que l'instrument est capable de reproduire correctement. Nous distinguons le champ en largeur qui donne la limitation de l'instrument perpendiculairement à son axe optique et le champ en profondeur mesuré dans la direction de l'axe optique (étudié en 9.4). Le champ en largeur est dû aux diaphragmes et aux montures ; ceux-ci restreignent en effet l'ouverture du faisceau lumineux qui contribue à la luminosité de l'image. Nous nous limiterons ici au cas d'un instrument à deux diaphragmes.



**Fig. 9.8.** Rayons lumineux issus de B. À travers le système optique S, une partie de ces rayons parviennent en B', image géométrique de B par S.

### 1 Définition

Nous savons qu'un instrument optique conjugue deux plans P et P' perpendiculaires à son axe optique. Si A est le point de P sur l'axe, son conjugué A' appartient à P' et il est également situé sur l'axe optique. Soit B un point de P situé hors de l'axe. L'image géométrique de B est un point B' situé dans le plan P'. En fait, nous savons que tous les rayons issus de B ne parviennent pas en B'. En admettant que la luminosité d'une image soit liée au nombre de rayons qui la définisse,

nous voyons que l'image B' ne sera visible que si suffisamment de rayons issus de B parviennent en B' (Fig. 9.8).

Nous dirons que le point objet B est en dehors du champ en largeur lorsque son image B' n'est pas observable car pas assez lumineuse. Le problème de la détermination du champ en largeur est donc un problème lié à la propagation de l'énergie lumineuse à travers l'instrument.

La condition pour qu'un rayon traverse l'instrument, et donc contribue à la visibilité des images, est que les éléments qui constituent l'instrument transmettent effectivement ce rayon. Ce sont bien sûr les diaphragmes et les montures des différentes pièces optiques qui limitent cette propagation.

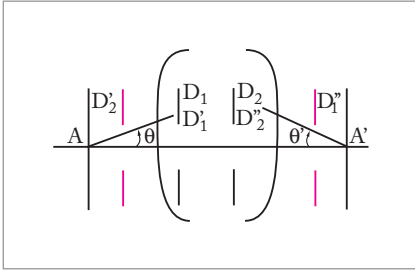
### 2 Pupilles d'entrée et de sortie d'un instrument

Considérons à titre d'exemple un instrument à deux diaphragmes  $D_1$  et  $D_2$ .

Sur la figure 9.9,  $D_1'$  et  $D_2'$  sont les diaphragmes images de  $D_1$  et  $D_2$  dans l'espace objet et  $D_1''$ ,  $D_2''$  les images de  $D_1$  et  $D_2$  dans l'espace image.

Ces diaphragmes, objets et images, portent différents noms :

- $D_2$  est le diaphragme de champ ;
- $D_1'$  est la pupille d'entrée ;
- $D_1''$  est la pupille de sortie ;
- $D_2''$  est la lucarne de sortie.

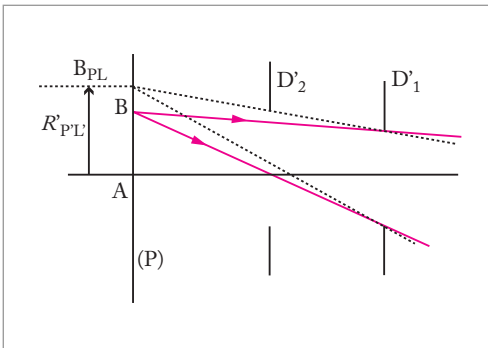


**Fig. 9.9.** Pupilles d'entrée et de sortie d'un instrument optique.

L'ensemble de ces diaphragmes, qu'ils soient objet ou image, limitent le nombre des rayons issus de A et parvenant en A'. Ainsi, le diaphragme  $D_1$  sélectionne un certain nombre de rayons qui entrent effectivement dans l'instrument S. Ces rayons forment un cône de centre A et d'angle d'ouverture  $\theta$ .  $D_1'$  est appelé la pupille d'entrée de l'instrument. Le diaphragme réel  $D_1$  dont  $D_1'$  est l'image (sur la figure,  $D_1$  et  $D_1'$  sont confondus) est appelé diaphragme d'ouverture.

L'ensemble des rayons sélectionnés par  $D_1'$  traversent le diaphragme  $D_2$  sans être obturés. Ils

sortent donc tous de l'instrument. L'image  $D_2'$  de  $D_2$  dans l'espace image est appelé la pupille de sortie de l'instrument. Elle limite l'ouverture image des rayons issus du système dans un cône de sommet A' et d'angle d'ouverture  $\theta'$ .



**Fig. 9.10.** Point B dans le champ de pleine lumière : le point B est situé dans un cercle de rayon  $R_{PL}$  centré sur A dans le plan P.

### 3 Champ de pleine lumière

Considérons maintenant un objet ponctuel B situé hors de l'axe optique dans le plan transverse contenant le point A (Fig. 9.10). Les rayons issus de B sont limités dans un cône par la pupille d'entrée  $D_1'$ . Par définition, le point B appartient au champ de pleine lumière si tous les rayons de ce cône sortent effectivement de l'instrument, c'est-à-dire s'ils ne sont pas limités par la pupille de sortie  $D_2'$ . Cette condition est vérifiée si le point B est situé dans un cercle de rayon  $R_{PL}$  centré sur A dans le plan P. Le point limite  $B_{PL}$  sur le

cercle de rayon  $R_{PL}$  est sur le prolongement de la droite tangente à la pupille d'entrée  $D_1'$  et au diaphragme  $D_2'$  sur leurs bords le plus proche du point  $B_{PL}$  (Fig. 9.10).

### 4 Champ total

La condition pour qu'un point B du plan P appartienne au champ total est qu'au moins un rayon issu de B traverse l'instrument pour converger en B'. Bien sûr, le champ total contient le champ de pleine lumière. Cette condition est vérifiée si le point B est situé dans un cercle de rayon  $R_{CT}$  centré sur A dans le plan P (Fig. 9.11). Le point limite  $B_{CT}$  sur le cercle de rayon  $R_{CT}$  est sur le prolongement de la droite tangente à la pupille d'entrée  $D_1'$  sur son bord le plus éloigné de  $B_{CT}$  et au diaphragme  $D_2'$  sur son bord le plus proche.

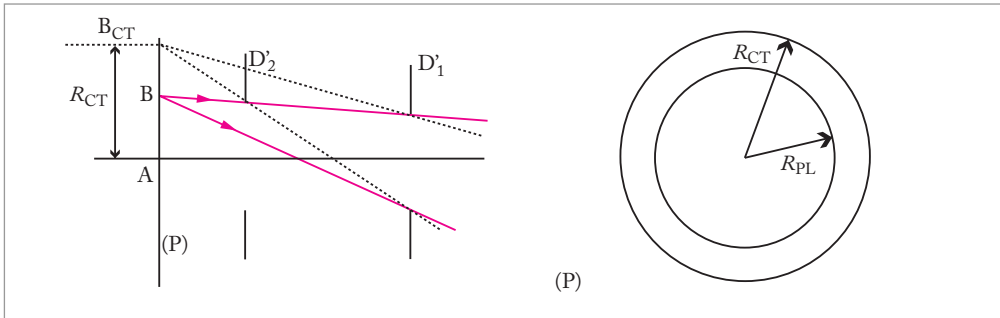


Fig. 9.11. Champ total et champ de pleine lumière.

## Recherche & Développement

### Diaphragme de champ et diaphragme d'ouverture

Un diaphragme est une pièce mécanique qui limite l'ouverture du faisceau lumineux d'un système optique. Il existe deux types de diaphragme : le diaphragme de champ, qui définit les dimensions de l'image, et le diaphragme d'ouverture, qui contrôle l'angle du cône des rayons lumineux qui concourent à former cette image. Dans les objectifs photographiques, le diaphragme de champ est fixe et correspond au cadre de l'émulsion photosensible. Le diaphragme d'ouverture est en général réglable. La couche photosensible reçoit d'autant plus de lumière que ce diaphragme est grand. Plus il est petit, plus la profondeur de champ est grande. L'ouverture s'exprime par un nombre sans

dimension qui est le rapport de la distance focale du système centré formant l'appareil photographique à la dimension du diaphragme ramené dans l'espace objet. Un diaphragme de  $f/22$  est très fermé. L'ouverture maximale des objectifs courants est  $f/1$ .

Les premiers diaphragmes étaient des diaphragmes fixes sur revolver, mais ils ne sont plus utilisés de nos jours. La plupart des objectifs photographiques sont équipés aujourd'hui de diaphragmes iris. Enfin, les diaphragmes à guillotine, dont l'ouverture est à réglage automatique, sont utilisés dans les caméras et les zooms.

## 5 Diaphragmentation du champ

Comme nous l'avons vu, l'intensité lumineuse d'un point image dépend de la position du point objet (dans le champ de pleine lumière, dans le champ total ou à l'extérieur du champ total). Il est parfois utile de limiter le champ de l'instrument au champ de pleine lumière : c'est la diaphragmentation du champ de l'instrument. Pour cela, un diaphragme est placé dans le plan d'une image réelle afin de délimiter le champ dit « utile », c'est-à-dire réellement considéré pour former des images. Ainsi, la limitation du champ d'un objectif photographique est-il obtenu en plaçant un cadre au niveau de l'émulsion photosensible.

## 9.4. Profondeur de champ

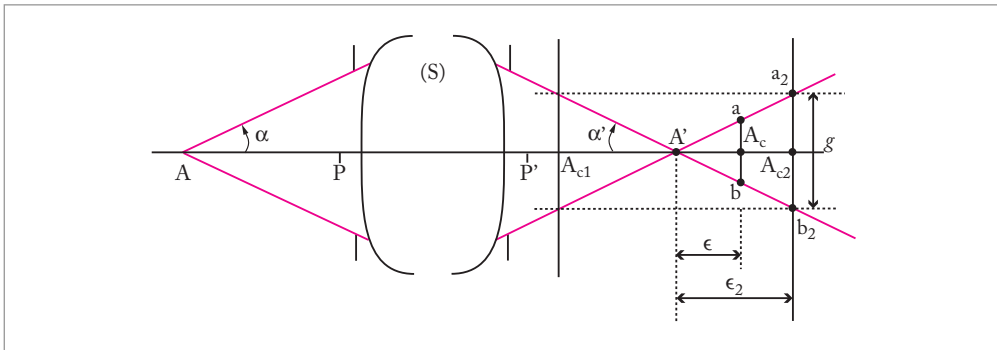
La résolution horizontale d'un instrument optique, appelée profondeur de champ, est définie par la plus grande distance, comptée suivant l'axe optique, pour laquelle la netteté des détails perçus dans l'espace objet reste acceptable. Pour calculer la profondeur de champ, nous distinguerons le cas des instruments oculaires et des instruments de projection.

### 1 Profondeur de foyer et profondeur de champ des instruments de projection

Pour parler de profondeur de champ, il nous faut préciser la notion d'images acceptables. Nous savons que, dans la plupart des cas, l'image d'un objet ponctuel n'est pas ponctuelle mais forme une tache. Cependant, cette tache, de diamètre  $D$ , projetée sur un détecteur, sera perçue comme ponctuelle si son diamètre est inférieur à la taille de résolution du détecteur (appelé souvent le grain). Si  $g$  désigne la taille du grain du détecteur, la netteté de l'image est dite acceptable tant que la condition suivante est vérifiée :

$$D < g$$

Dans ce cas, le détecteur enregistre de façon identique la tache image et une image ponctuelle.



**Fig. 9.12. Profondeur de foyer d'un instrument de projection.** L'instrument (S) donne d'un objet A une image A'. Le défaut de mise au point du récepteur fait que la réponse de l'instrument est une tache de diamètre  $ab$  et la taille du grain est  $g = a_2 b_2$  ; cette réponse est perçue comme ponctuelle tant que  $ab < g$  (ce qui est le cas sur la figure).

### Profondeur de foyer d'un instrument de projection

Considérons un système optique formant d'un objet A de l'axe optique une image A'.  $\alpha$  est l'ouverture objet et  $\alpha'$  l'ouverture image de l'instrument. P et P' repèrent les positions des pupilles d'entrée et de sortie du système (Fig. 9.13).

Supposons que le récepteur présente un défaut de mise au point tel que  $A'A_c = \epsilon$  (Fig. 9.12). La réponse de l'instrument défocalisé est une tache homothétique de la pupille de sortie dans le rapport  $\epsilon/A'P'$ . Pour une pupille circulaire, la tache est circulaire de diamètre  $ab = 2 \epsilon \alpha'$ . Tant que  $ab$  est inférieur au grain  $g$ , la réponse de l'instrument défocalisé est perçue comme ponctuelle par le détecteur. Les positions extrêmes sont données par les

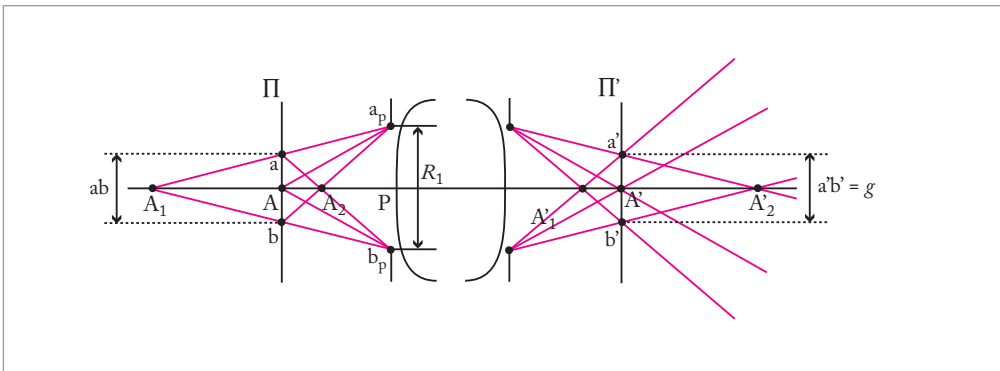
points  $A_{c1}$  et  $A_{c2}$ , pour lesquels les taches ont un diamètre égal au grain  $g$  du détecteur. La distance  $A_{c1}A_{c2}$  est appelée la profondeur de foyer. Cette profondeur de foyer est égale à  $2\varepsilon_2$  ; on calcule sa valeur dans triangle  $A'a_2b_2$  :

$$2\varepsilon_2 = \frac{g}{\alpha'}$$

La profondeur de foyer augmente avec la taille du grain et diminue avec l'ouverture image du système.

### Profondeur de champ d'un instrument de projection

Un objet  $A$  forme une image  $A'$  à travers un instrument optique (Fig. 9.13). Le détecteur utilisé est mis rigoureusement au point sur l'image  $A'$  (plan  $\Pi'$ ). Un point voisin de  $A$  sur l'axe optique forme sur le plan du détecteur une tache image due à un défaut de mise au point. Cependant, tant que la tache a une taille inférieure à celle du grain, le détecteur enregistre l'image comme si elle était ponctuelle. Nous notons  $A_1$  et  $A_2$  les points de l'axe autour de  $A$  qui forment à travers l'instrument des images  $A'_1$  et  $A'_2$  telles que le détecteur enregistre une tache dont la taille est égale au grain  $g$  du détecteur. L'ensemble des points compris entre  $A_1$  et  $A_2$  constitue la profondeur de champ de l'instrument associé au récepteur considéré : en dehors de l'intervalle  $A_1A_2$ , les points de l'axe forment une image dont la taille est supérieure à celle du grain du détecteur.



**Fig. 9.13. Profondeur de champ  $A_1A_2$  d'un instrument de projection.** L'instrument est rigoureusement mis au point sur  $A'$ , image de  $A$ .  $A_1$  et  $A_2$  forment, à travers l'instrument, des images  $A'_1$  et  $A'_2$  perçues par le détecteur comme des taches dont la taille est égale au grain  $g$  du détecteur. Tous les points entre  $A_1$  et  $A_2$  forment, à travers l'instrument, des images qui sont perçues comme ponctuelles par le détecteur.

Les rayons issus de  $A_1$  et de  $A_2$  sont limités par des cônes qui s'appuient sur la pupille d'entrée ; l'intersection de ces cônes avec le plan transverse  $\Pi$  passant par  $A$  est une tache de diamètre  $ab$  dont l'image à travers l'instrument est une tache dans  $\Pi'$  de diamètre  $a'b'$  égal, par définition, à celui du grain  $g$  du détecteur. Si  $\gamma$  désigne le grandissement de l'instrument, nous avons donc  $g = \gamma ab$ . Les positions des points  $A_1$  et  $A_2$  sont alors calculées dans les triangles semblables  $A_1ab$  et  $A_1a_p b_p$  d'une part,  $A_2ab$  et  $A_2a_p b_p$  d'autre part :

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{PA_1}} = \frac{ab}{2R_1} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{AA_2}}{\overline{PA_2}} = -\frac{ab}{2R_1}$$

Avec  $ab = g/\gamma$ , nous en déduisons les positions des points  $A_1$  et  $A_2$  et la profondeur de champ  $A_1A_2$  :

$$\overline{AA_1} = \frac{g}{2\gamma R_1 - g} \overline{PA}$$

$$\overline{AA_2} = -\frac{g}{2\gamma R_1 + g} \overline{PA}$$

$$\overline{A_1A_2} = \frac{4\gamma g R_1}{g^2 - 4\gamma^2 R_1^2} \overline{PA}$$

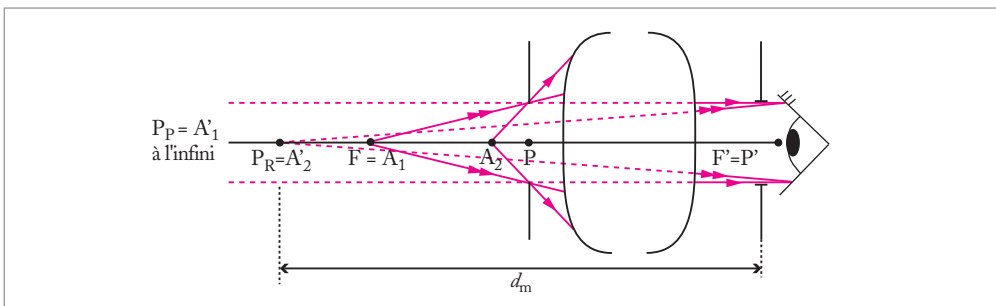
Les points  $A_1$  et  $A_2$  ne sont pas symétriques par rapport au point A, qui réalise la mise au point. Autrement dit, la profondeur de champ est dissymétrique par rapport au plan de mise au point parfaite. Ce principe est bien connu des photographes qui choisissent d'effectuer la mise au point sur le premier tiers d'un objet en longueur pour l'avoir net dans sa totalité.

## 2 Profondeur de champ des instruments oculaires

Dans le cas d'un instrument oculaire, les calculs précédents sont encore valables. En effet, l'œil est un détecteur à grain, la taille du grain correspondant au diamètre de la cellule visuelle. Cependant, l'œil est un instrument plus performant qu'un simple écran de projection, car il est doté du pouvoir d'accommodation, c'est-à-dire qu'il est capable de faire une mise au point sur tous les points situés entre son *Punctum Proximum*  $P_p$  et son *Punctum Remotum*  $P_R$ . Ainsi, dans le cas d'un instrument oculaire, tout point de l'espace objet dont l'image à travers l'instrument est située entre le  $P_p$  et le  $P_R$  de l'œil fait partie de la profondeur de champ de l'instrument oculaire. Lorsqu'on se souvient qu'un œil emmétrope est capable de voir entre 25 cm devant lui et l'infini, il paraît clair que la profondeur de champ d'un instrument oculaire est considérablement augmenté grâce à cette faculté de l'œil !

Calculons la profondeur de champ d'un instrument oculaire utilisé par un œil emmétrope, capable de faire la mise au point sur un objet situé de l'infini à  $d_m = 25$  cm (en moyenne) devant lui. L'œil est placé à la pupille de sortie  $P'$  de l'instrument, que l'on suppose confondue avec le point focal image  $F'$  du système (Fig. 9.14).

L'œil est capable de voir nettement tous les points dont les images à travers l'instrument sont situées entre son  $P_p$  et son  $P_R$ . Soit  $A_1$ , le point focal objet du viseur, et  $A_2$  le point tel que son image  $A'_2$  se forme à 25 cm devant l'œil : l'intervalle  $[A_1A_2]$  correspond alors à l'espace des objets visibles distinctement par l'œil grâce au phénomène d'accommodation.



**Fig. 9.14. Profondeur de champ  $A_1A_2$  d'un instrument oculaire utilisé par un œil emmétrope.**  $A_1$  forme son image à travers l'instrument à l'infini (*punctum remotum* de l'œil emmétrope) et  $A_2$  forme son image à travers l'instrument au *punctum proximum* (à 25 cm de l'œil emmétrope).

La distance  $\overline{A_1A_2} = \overline{FA_2}$  est donnée par la formule de conjugaison de Newton :

$$\overline{A_1A_2} = -\frac{f_2'^2}{F'A_2'} = \frac{f_2'^2}{d_m}$$

Cette valeur  $\overline{A_1A_2}$  correspond à la profondeur de champ de l'œil. À cette profondeur de champ, il faut ajouter celle qui est liée à la taille du grain de l'œil. En effet, comme tout instrument de projection, l'œil perçoit une tache comme ponctuelle tant que le diamètre de la tache est inférieur à celui du grain de la cellule visuelle.

## Recherche & Développement

### Profondeur de champ d'un œil totalement presbyte

La profondeur de champ d'un œil totalement presbyte, c'est-à-dire qui est complètement privé de sa faculté d'accommodation, n'est pas nul. Elle se réduit alors à la profondeur de champ d'un instrument de projection,

c'est-à-dire que la rétine accepte une tache liée à un faible défaut de mise au point (tant que la taille de la tache ne dépasse pas celle de la cellule visuelle).

À titre d'exemple, calculons la profondeur de champ d'un viseur, un instrument oculaire. Nous considérons un viseur de puissance intrinsèque égale à 100 dioptries, utilisé par un œil emmétrope, capable de faire la mise au point sur un objet situé de l'infini à  $d_m = 25$  cm devant lui. Utilisons la relation précédente, avec  $f_2' = \frac{1}{P_i} = 1$  cm :

$$\overline{A_1A_2} = \frac{f_2'^2}{d_m} = 0,04 \text{ cm.}$$

## Résumé du cours

### Instruments optiques

◆ Soit AB un objet transverse et A'B' son image à travers l'instrument. Le grandissement  $\gamma$  est défini par :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

◆ AB est un objet transverse. Son image par l'instrument est vue sous un angle  $\alpha'$ . La puissance  $P$  de l'instrument s'écrit alors :

$$P = \frac{\alpha'}{\overline{AB}}$$

◆ Le grossissement angulaire  $g(\alpha)$  est le rapport du diamètre apparent  $\alpha'$  de l'image sur le diamètre apparent de l'objet  $\alpha$ .

$$g(\alpha) = \frac{\alpha'}{\alpha}$$



# L'œil et la loupe

Du point de vue de l'optique géométrique, l'œil est modélisé par un système constitué d'un diaphragme (l'iris), d'une lentille convergente (le cristallin) dont la distance focale (de l'ordre de 15 mm) est variable et enfin d'un écran (la rétine).

Une loupe est une lentille mince convergente de faible distance focale, que l'on utilise couramment pour voir l'image virtuelle agrandie (on regarde à travers la loupe) d'un objet de petite dimension.

Ces deux exemples d'instruments optiques très simples, car constitués d'une seule lentille, sont étudiés en détail dans ce chapitre.

Bien sûr, les connaissances sur les lentilles minces, développées dans le chapitre 8, doivent être assimilées pour pouvoir aborder ce chapitre.

## 10.1. L'œil

- 1 Anatomie de l'œil
- 2 Accommodation
- 3 *Punctum proximum et punctum remotum*
- 4 L'œil vu comme un système centré
- 5 Les modèles de l'œil
- 6 Champ de vision distincte et amplitude d'accommodation
- 7 Œil normal ou emmétrope
- 8 La myopie
- 9 L'hypermétropie
- 10 La presbytie

## 10.2. La loupe

- 1 Construction de l'image d'un objet à travers une loupe. Distance de visée, latitude de mise au point
- 2 Puissance d'une loupe
- 3 Grossissement
- 4 Pouvoir séparateur à travers la loupe

## Mots-clés

- Œil ● Punctum proximum ● Punctum remotum ● Accommodation ● Loupe

## 10.1. L'œil

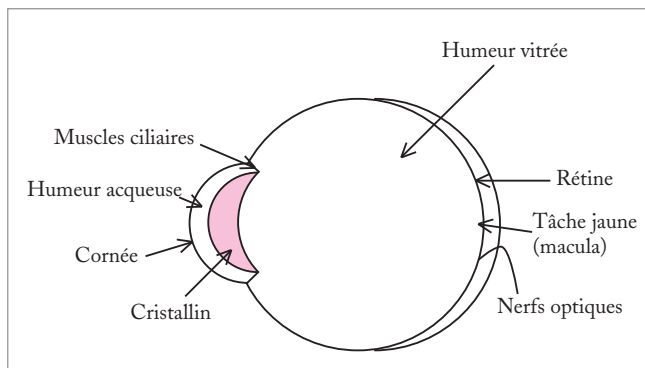
L'œil peut être assimilé à un système optique centré. Nous verrons qu'il existe des modèles simplifiés de ce système : le modèle réduit de Listing et le modèle de la lentille convergente à focale variable que nous présenterons plus loin.

### Un peu d'histoire

#### Descartes rend hommage à l'œil

« Toute la conduite de notre vie dépend de nos sens, entre lesquels celui de la vue étant le plus universel et le plus noble, il n'y a point de doute que les inventions qui servent à

augmenter sa puissance ne soient des plus utiles qui puissent être. » R. Descartes, *Dioptrique*, 1633.



**Fig. 10.1.** Anatomie de l'œil.

déformation permet la focalisation de l'image sur la rétine. Cette action du cristallin est rendue possible par le jeu de muscles appelés muscles ciliaires. De part et d'autre du cristallin, deux chambres distinctes sont remplies de liquide, l'humeur aqueuse pour la chambre antérieure et l'humeur vitrée, ou vitré, pour la chambre postérieure. Ces liquides sont très proches de l'eau salée. Enfin, la partie postérieure de la chambre est tapissée de cellules photosensibles constituant la rétine. Le stimulus lumineux agit sur des cellules photoréceptrices, les cônes et les bâtonnets, qui génèrent des impulsions nerveuses véhiculées par le nerf optique jusqu'à la zone visuelle du cerveau. Ce dernier traite l'information pour produire une sensation visuelle en trois dimensions.

### 2 Accommodation

D'un point de vue physiologique, un objet n'est vu nettement que si son image se forme sur la partie centrale de la rétine, appelée tache jaune. Ainsi, quelle que soit la position de l'objet, son image à travers l'œil devra se former à la même distance du centre optique ; vue

### 1 Anatomie de l'œil

L'œil est un organe sensible- ment sphérique, limité par une enveloppe extérieure constituée de la cornée. La lumière émise par un objet pénètre dans l'œil en traversant la cornée. L'iris fait office de diaphragme, l'ouverture s'appelant la pupille. Derrière ce diaphragme se trouve le cristallin, lentille biconvexe qui par sa

en tant qu'instrument optique de projection, il faut donc que l'œil adapte sa distance focale. C'est ce que fait le cristallin en modifiant sa courbure par l'action des muscles ciliaires. Ce phénomène s'appelle l'accommodation.

### Un peu d'histoire

#### Localiser votre tache aveugle

C'est au XVII<sup>e</sup> siècle, en procédant à la dissection d'un œil humain, que le physicien français Mariotte découvrit la tache aveugle, région de la rétine où le nerf optique se rattache au globe oculaire. Il déduisit qu'étant dépourvue de cellules photoréceptrices, cette région ne devait pas être stimulée par la lumière et qu'elle correspondait donc à une région du champ visuel où l'œil est aveugle.



Pour découvrir l'existence de votre tache aveugle, faites cette petite expérience :

Fermez l'œil gauche et fixez avec l'œil droit le cercle de la figure ci-dessous. Vous devez voir le carré. Approchez-vous lentement de l'image. Lorsque l'image du carré coïncide avec la tache aveugle de l'œil droit, il disparaît. Continuez de vous approcher, il réapparaît.



### 3 *Punctum proximum et punctum remotum*

Lorsque l'œil est au repos, c'est-à-dire lorsque les muscles ciliaires sont au repos, la distance focale de l'œil est maximum : l'œil peut voir distinctement un point objet appelé le *punctum remotum* ; ce point est en effet le point le plus éloigné que l'œil peut voir distinctement. En accommodant, il diminue sa distance focale. Ainsi, il pourra voir des objets plus rapprochés mais il ne peut rien faire pour voir des objets plus éloignés.

Par ailleurs et parce que l'élasticité des muscles ciliaires est limitée, si l'objet est approché trop près de l'œil, les muscles ne peuvent pas se contracter suffisamment pour atteindre la distance focale qui permettrait une vision nette. La limite de vision distincte est atteinte. Le point le plus proche de l'œil qui peut être vu distinctement est appelé le *punctum proximum*.

### Un peu d'histoire

#### L'accommodation et l'expérience du père Scheiner

En 1619, le père jésuite Scheiner effectue une expérience qui permet de démontrer que le phénomène d'accommodation est lié à une modification des caractéristiques optiques de l'œil. Il perce deux trous écartés d'un ou deux millimètres dans un morceau de carton placé

devant l'œil ; un objet placé à une dizaine de centimètres de l'œil donne selon que l'œil accommode ou pas, une ou deux images. Ce type d'expérience, fondé sur la notion de pseudo-images, est toujours utilisé dans la gymnastique oculaire.

#### 4 L'œil vu comme un système centré

Les caractéristiques que nous donnons ici concernent un œil emmétrope, c'est-à-dire dont la vision est normale. Ce critère de normalité est lié à la capacité de l'œil emmétrope à voir de loin sans accommoder.

L'œil est assimilable à un système optique centré. Dans ce modèle, les deux points principaux  $H$  et  $H'$  de l'œil sont confondus en un même point situé à 2 millimètres en arrière de la cornée. Le foyer  $F'$ , image d'un point objet  $A$  situé à l'infini sur l'axe, se forme sur la rétine. Bien que des variations importantes soient observées d'un individu à l'autre, nous donnons sur la figure 10.2, les dimensions moyennes d'un œil. La puissance moyenne de l'œil est voisine de 60 dioptries pour un œil emmétrope.

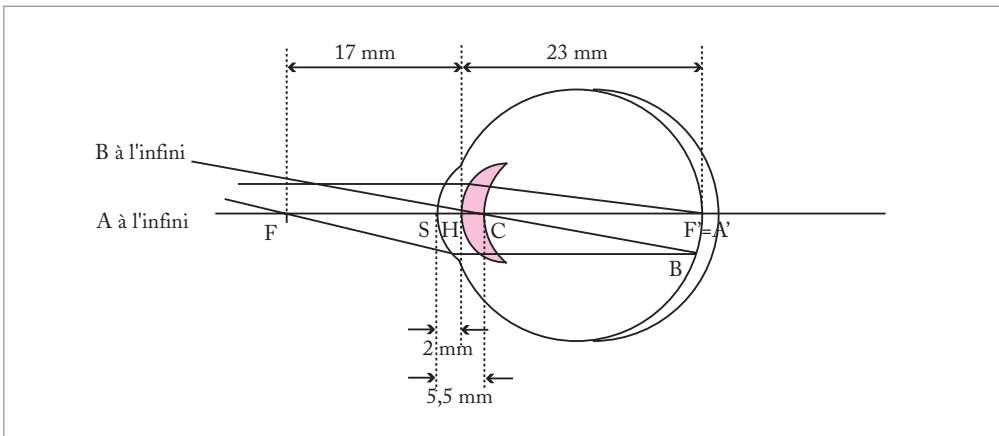


Fig. 10.2. Caractéristique d'un œil emmétrope vu comme un système centré.

Si l'image  $A'$  d'un point  $A$  se forme en avant ou en arrière de la rétine, le faisceau correspondant détermine sur celle-ci une tache de diffusion. Tant que cette tache est assez petite, elle est perçue comme un point, ce qui confère à la « mise au point », nécessaire pour que les images paraissent nettes, une certaine latitude. Comme presque tout système optique, un œil, même excellent, n'est pas rigoureusement « stigmatique », c'est-à-dire qu'il ne donne jamais d'un point une image parfaitement ponctuelle : ses aberrations contribuent à limiter la perception des détails, surtout quand la pupille est largement ouverte. Ces aberrations perdurent en lumière monochromatique, mais sont dues en partie, en lumière complexe, à ce que la puissance de l'œil est, pour les radiations bleues, plus grande (de 1 à 2 dioptries) que pour les radiations jaunes et à ce qu'elle est plus faible (d'environ une demi-dioptrie) pour les radiations rouges. Cette aberration, quoique importante, n'est habituellement pas perçue, sans doute parce que la sensibilité de l'œil, maximale au milieu du spectre visible, décroît très vite aux extrémités.

#### 5 Les modèles de l'œil

Différents modèles de l'œil ont été développés dans le cadre de l'optique géométrique, notamment en optique physiologique, discipline à la frontière entre la physique et la médecine.

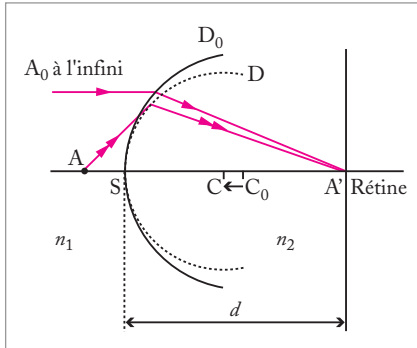
cine. Ces modèles ont bien sûr leur part d'arbitraire et leur intérêt dépend de leur utilisation. Mentionnons les principaux modèles.

- Le **modèle de l'œil théorique** : l'œil est assimilé à deux lentilles épaisses modélisant la cornée et le cristallin. Son intérêt est de mettre en évidence le rôle de chacun des composants : la cornée est responsable de la partie fixe de la vergence et le cristallin de la partie variable. Ce modèle est cependant souvent lourd à manipuler et on lui préfère des modèles plus simplifiés.

- Le **modèle de l'œil simplifié** a deux variantes : dans la première, l'œil est considéré comme l'association d'un dioptré sphérique (la cornée) et d'une lentille mince convergente (le cristallin) ; dans la seconde, l'ensemble cornée-cristallin est assimilé à une seule lentille mince.

- Dans le **modèle de l'œil réduit de Listing**, comme son nom l'indique, l'œil est réduit à sa plus simple expression, à savoir un dioptré sphérique (la cornée) mais le rôle du cristallin est complètement ignoré. Ce modèle est intéressant quand on se limite au calcul des images qui se forment exactement sur la rétine et il reste très utilisé dans les problèmes d'instrumentation.

Nous développons ici le modèle de l'œil réduit de Listing et le modèle de l'œil simplifié à une seule lentille. C'est ce dernier modèle que nous conserverons dans la suite du chapitre, car il permet d'expliquer la formation des images pour les yeux emmétropes et amétropes et peut être utilisé pour symboliser le fonctionnement de l'œil dans les instruments optiques oculaires.



**Fig. 10.3. Modèle de l'œil réduit.** L'œil est assimilé à un dioptré sphérique de sommet S et de centre C variable.

### *Le modèle le plus simple de l'œil réduit de Listing*

L'œil « réduit » à sa plus simple expression est, dans le modèle de l'œil réduit de Listing, représenté par un dioptré sphérique (la cornée) dont le rayon de courbure  $\overline{SC}$  est de l'ordre de 5,5 mm (Fig. 10.3). Ce dioptré est à la distance  $d$  fixe d'un écran qui figure la rétine. Dans certaines versions du modèle, le rayon de courbure reste fixe, ce qui limite son champ d'utilisation, le phénomène d'accommodation ne pouvant être décrit. Dans d'autres versions, la valeur du rayon de courbure varie suivant les conditions de vision. C'est de cette façon que l'on retrouve le rôle du cristallin

et des muscles ciliaires ; en revanche, le modèle est alors loin de la réalité physiologique de l'œil puisqu'il suppose que la cornée se déforme pour permettre l'accommodation !

Ainsi, pour un même individu, le rayon de courbure  $\overline{SC}$  peut être modifié. La distance focale  $f'$  du dioptré est liée au rayon de courbure par la relation :

$$f' = \overline{SF'} = \frac{n_2}{n_2 - n_1} \overline{SC}$$

avec  $n_1 = 1$  pour l'air et  $n_2 = 1,336$  pour l'humeur aqueuse (ou vitreuse). La distance focale du dioptré modélisant l'œil peut donc diminuer lorsque le rayon de courbure diminue, ce

qui permet à l'ensemble du système de former des images nettes d'objets situés à des distances variables de  $S$  : c'est le phénomène d'accommodation de l'œil.

Sur la figure 10.3, la position  $C_0$  du centre du dioptre correspond à une courbure minimum du dioptre  $D_0$ , telle que l'image d'un point  $A_0$  à l'infini se forme sur la rétine en  $R$ . En diminuant la courbure, à  $SR$  constant, le centre de courbure se déplace en  $C$  : l'œil réalise cette fois l'image nette d'un objet  $A$  à distance finie de  $C$ .

Quel est l'ordre de grandeur de la distance  $d$ ? Une coupe anatomique de l'œil montre que cette distance est de l'ordre de 2 cm. Vérifions-le sans scalpel !

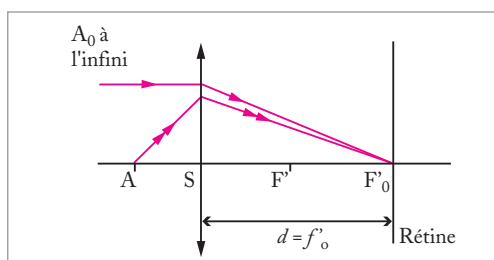
Un œil normal a un rayon de courbure de l'ordre de 5,5 mm lorsqu'il regarde un objet situé à l'infini. L'image de cet objet à l'infini se forme sur la rétine de sorte que  $\overline{SA'} = d$ . La relation de conjugaison d'un dioptre sphérique pour les points conjugués  $A$  et  $A'$  s'écrit :

$$\frac{n_1}{SA} - \frac{n_2}{SA'} = \frac{n_1 - n_2}{SC_0}$$

Avec  $\overline{SA} = \infty$  et  $\overline{SA'} = d$  (et  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 1,336$ ), nous obtenons:

$$d = \frac{n_2}{n_2 - n_1} \overline{SC_0} \approx 2,2 \text{ cm}.$$

Le résultat est bien celui attendu.



**Fig. 10.4. Modèle de l'œil simplifié à une lentille de centre  $S$  fixe et de distance focale  $SF'$  variable.**

### Le modèle de l'œil simplifié

Le modèle de l'œil simplifié consiste à assimiler l'œil à une lentille mince convergente dont la distance focale varie, le centre  $S$  de la lentille restant fixe par rapport à un écran de projection (la rétine). La distance focale  $d = f'_o$  de la lentille pour un œil emmétrope au repos (c'est-à-dire regardant un objet à l'infini) est égale à environ 2 cm.

La distance focale de la lentille peut varier pour permettre la vision d'un objet  $A$  situé à distance finie.

Dans la suite du chapitre, nous adopterons cette description de l'œil.

## 6 Champ de vision distincte et amplitude d'accommodation

L'ensemble des points visibles distinctement par l'œil, entre le *punctum proximum* et le *punctum remotum*, est appelé champ de vision distincte.

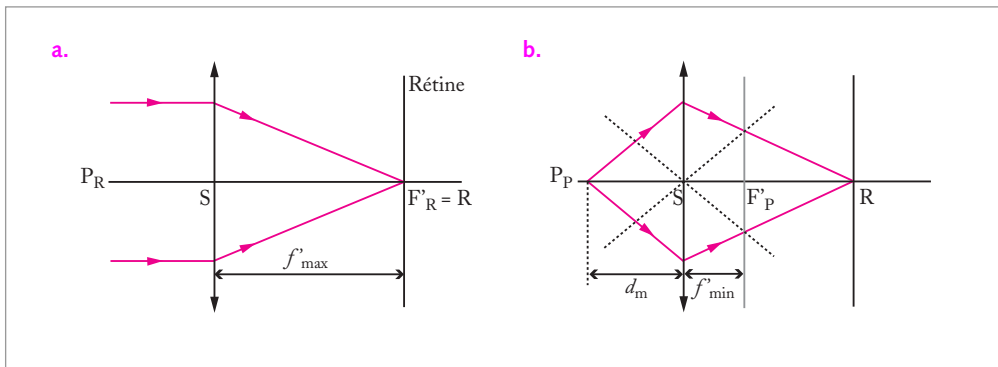
L'œil étant assimilé à une lentille de distance focale variable, l'amplitude d'accommodation est définie par la différence des vergences maximum et minimum de l'œil. La vergence maximum  $V_{\max} = \frac{1}{f'_{\min}}$  est atteinte pour le *punctum proximum* (la distance focale est minimum pour une contraction maximale des muscles ciliaires) ; lorsque l'œil est au repos, la vergence de l'œil est minimum  $V_{\min} = \frac{1}{f'_{\max}}$ . L'amplitude d'accommodation  $A$  est définie par :

$$A = V_{\max} - V_{\min}$$

Cette marge de vergence traduit la faculté de l'œil à voir les objets nettement. Elle donne les limites dans lesquelles l'œil peut accommoder pour une vision distincte.

## 7 Œil normal ou emmétrype

Un œil est dit normal, ou emmétrype, lorsque son *punctum remotum* est situé à l'infini. L'œil emmétrype est donc adapté à une vision de loin sans accommodation. Sa distance focale est maximale lorsque l'œil regarde un objet à l'infini ( $P_R$ ) (Fig. 10.5a). Le *punctum proximum*,  $P_P$ , de l'œil emmétrype est à environ 25 cm devant l'œil. Par définition, c'est la position de l'objet que l'œil voit distinctement lorsqu'il accommode au maximum ; sa distance focale est alors minimum (Fig. 10.5b).



**Fig. 10.5.** Fonctionnement de l'œil emmétrype a. en vision à l'infini (*punctum remotum* de l'œil emmétrype) et b. au *punctum proximum*.

Quelle est l'amplitude d'accommodation d'un œil normal ? S est le sommet de la lentille-œil, R le centre de la rétine. Nous avons  $\overline{SP_P} = -d_m = -25 \text{ cm}$  et  $\overline{SP_R} = -\infty$ .

Lorsque l'œil fait une mise au point à l'infini, la relation de conjugaison des lentilles minces donne :

$$\overline{SR} = f'_{max} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{\overline{SR}} = V_{min}$$

Lorsque l'œil accommode au maximum, nous avons :

$$\frac{1}{\overline{SR}} - \frac{1}{\overline{SP_P}} = \frac{1}{f'_{min}} = V_{max}$$

Il vient donc

$$V_{min} + \frac{1}{d_m} = V_{max}$$

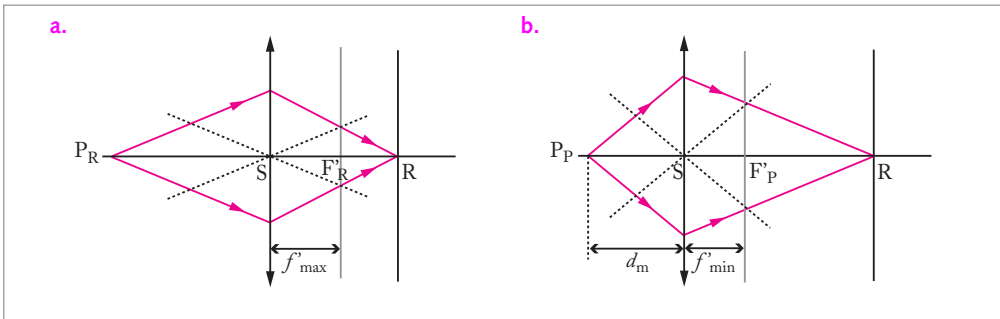
Nous en déduisons l'amplitude d'accommodation d'un œil normal :

$$A = V_{max} - V_{min} = \frac{1}{d_m} = 4\delta$$

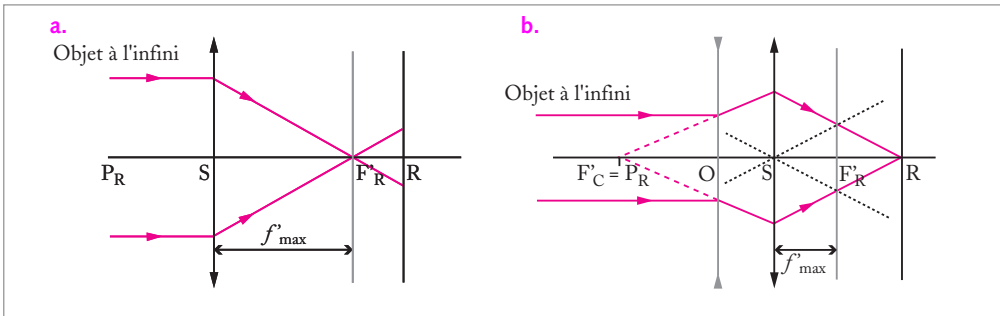
## 8 La myopie

Un œil qui n'est pas emmétrope est dit amétrope : il peut être myope ou hypermétrope, et/ou astigmatique et/ou presbyte.

La myopie est caractérisée par le fait que le système cornée - cristallin est trop convergent par rapport à l'œil normal, de sorte que l'image d'un objet à l'infini se forme en avant de la rétine (Fig. 10.7a). Un œil myope ne peut donc pas voir nettement un objet à l'infini même en accommodant, puisqu'il ne fait alors qu'éloigner davantage l'image de la rétine. L'objet le plus lointain qu'il voit nettement est placé, par définition, au *punctum remotum* à distance finie (Fig. 10.6a). La distance minimale de vision distincte  $d_m$  est sensiblement la même que celle d'un œil normal, voire légèrement plus faible (Fig. 10.6b).



**Fig. 10.6.** Fonctionnement d'un œil myope pour une vision sans correction **a.** à son *punctum remotum* et **b.** à son *punctum proximum*.



**Fig. 10.7.** **a.** Défaut de mise au point d'un œil myope regardant un objet à l'infini : l'image de l'objet ne se forme pas sur la rétine ; **b.** Correction d'un œil myope à l'aide d'une lentille de correction permettant à l'œil myope une vision à l'infini.

Corriger la myopie consiste à permettre à l'œil myope une vision à l'infini, c'est-à-dire à ramener son *punctum remotum* à l'infini. Pour cela, il faut placer devant l'œil une lentille de correction divergente, dont la distance focale  $f'_c$  est sensiblement égale à la distance de son centre optique au *punctum remotum* de l'œil (Fig. 10.7b, dans la pratique, les points O et S sont très proches de sorte que  $OP_R \approx SP_R$ ). Ainsi, sans accommodation, l'œil myope corrigé peut voir des objets situés à l'infini.



Le choix de la lentille est illustré par le schéma suivant :

Objet à l'infini  $\longrightarrow$  *Punctum remotum*  $\longrightarrow$  Rétine

Lorsque l'œil myope est au repos, il parvient à former d'un objet au *punctum remotum* une image nette sur la rétine (Fig. 10.6a). En réglant la lentille de façon à ce qu'un objet situé à l'infini forme son image à travers la lentille au *punctum remotum* de l'œil, on réalise un ensemble (lentille de correction + œil) équivalent à un œil emmétrope pour la vision à l'infini (Fig. 10.6b).

Dans le cas d'une lentille de correction accolée à l'œil (lentille de contact par exemple), les lois de conjugaison de Descartes donnent  $\overline{SP}_R = f_c'$ . Si la lentille n'est pas accolée à l'œil, il faut prendre en compte le fait que le centre optique O de la lentille n'est pas confondu avec celui, S, de l'œil ; on a alors :

$$\overline{SP}_R = \overline{SO} + \overline{OP}_R = \overline{SO} + f_c'$$

### Un peu d'histoire

#### L'histoire des lunettes

Les premières utilisations de verre grossissant remontent probablement à 2500 ans av. J.-C.. L'utilisation de verres correcteurs reste cependant très limitée jusqu'à ce que l'imprimerie n'apparaisse au XV<sup>e</sup> siècle et qu'avec l'habitude de la lecture se développe le besoin de porter des lunettes. Au cours des siècles, la forme des lunettes va évoluer avec le souci de mettre au point une monture stable et légère sur le nez. Au XVII<sup>e</sup> siècle, se diffusent dans toute l'Europe des lunettes conçues en Allemagne dont les montures sont en fil de fer très souple. Au XVIII<sup>e</sup> siècle, les opticiens sont réunis en association professionnelle, et continuent de développer des matériaux plus légers et plus souples. C'est également à cette époque que

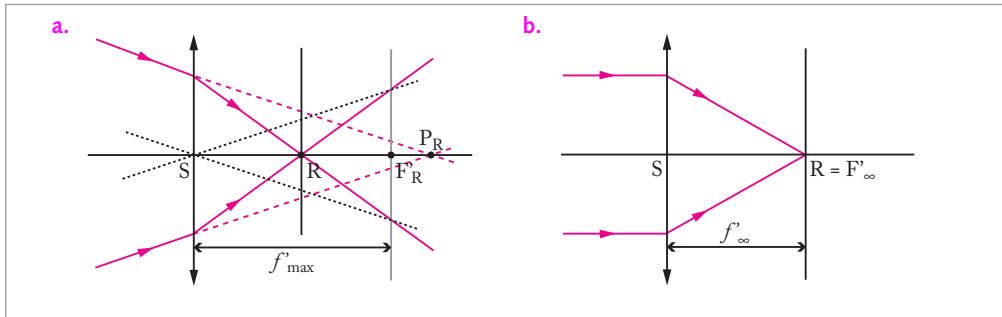
Benjamin Franklin, qui était à la fois myope et presbyte, réalise les premières lunettes à double foyer en taillant en deux les verres de ses deux paires de lunettes et en les assemblant sur une seule monture.

Le XIX<sup>e</sup> siècle est le siècle des « lunettes-ciseaux » que l'on tenait devant le visage à l'aide d'un manche. Napoléon I<sup>er</sup>, son frère Jérôme Bonaparte, l'écrivain allemand Wieland et Goethe portèrent ce type de lunettes. C'est seulement vers 1850 que les montures à branches latérales font leur apparition, en Angleterre grâce à l'opticien londonien Scarlett et en France grâce au lunetier parisien Thomin. La forme définitive de nos montures actuelles ne date finalement que du début du XX<sup>e</sup> siècle.

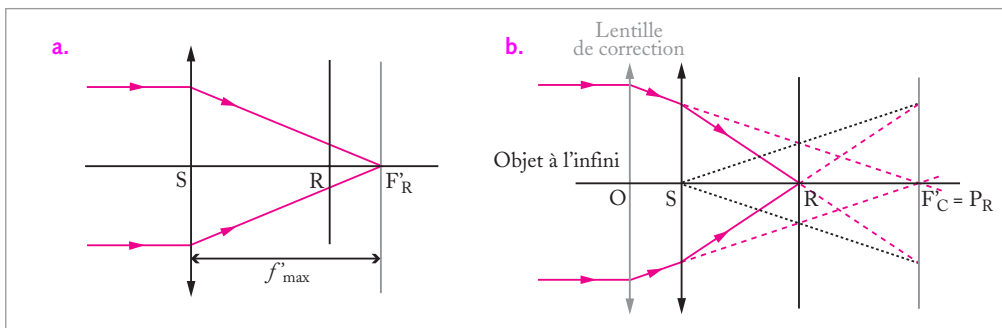
## 9 L'hypermétropie

Contrairement à la myopie, un œil hypermétrope, ou hyperope, a un système cornée-cristallin trop divergent par rapport à l'œil normal. Lorsqu'il est au repos, l'œil hyperope forme d'un objet à l'infini une image en arrière de la rétine (Fig. 10.9a). Le *punctum remotum* de l'œil hyperope étant, par définition, le point objet qui forme son image, à travers la lentille de l'œil, sur la rétine, le *punctum remotum* de l'œil hyperope est un objet virtuel : il se situe derrière l'œil (Fig. 10.8a). En accommodant, l'œil diminue sa focale ; l'œil hyperope peut donc voir un objet à l'infini en accommodant. Il réduit alors sa distance focale en déplaçant le point focal image de sa position de repos en  $F'_R$  à la position  $F'_\infty$  sur la rétine (Fig. 10.8b). Cependant, pour parfaitement corriger un œil hyperope, il faut arriver à ce que l'image

d'un objet à l'infini se forme sur la rétine sans que l'œil ait à accommoder. On utilise pour cela des lentilles convergentes (Fig. 10.9b).



**Fig. 10.8.** Fonctionnement d'un œil hypermétrope pour une vision sans correction a. à son *punctum remotum* (objet virtuel) et b. à l'infini (l'œil est alors en accommodation).



**Fig. 10.9.** a. Défaut de mise au point d'un œil hypermétrope au repos : l'image d'un objet à l'infini ne se forme pas sur la rétine ; b. Correction d'un œil hypermétrope à l'aide d'une lentille de correction permettant à l'œil une vision à l'infini sans accommodation.

## Recherche & Développement

### Lentilles de contact

La contactologie est la branche de l'optométrie qui concerne la correction de la vue par l'utilisation de lentilles de contact cornéenne. Les lentilles de contact sont des disques de silicone très fins posés à même les yeux et qui

adhèrent à l'œil grâce au liquide lacrymal présent en permanence entre la lentille et la cornée. L'histoire de la contactologie commence aux  $xvi^e$  et  $xvii^e$  siècles avec notamment, la contribution de Léonard de

Vinci qui, en 1508, évoque le principe d'une lentille de contact pour améliorer la vue. En 1632, René Descartes aborde les premiers principes mathématiques de son fonctionnement.

Au début du XVIII<sup>e</sup> siècle, Thomas Young réalise la première lentille au moyen d'un petit tube de verre rempli d'eau et contenant à son extrémité une minuscule lentille grossissante. Mais cette lentille de contact n'est pas réellement supportée par l'œil !

C'est peut-être le Suisse Eugène Fick qui mit au point la première lentille de contact utilisable. Sa motivation était de corriger sa propre vue et il porta les lentilles qu'il avait fabriqués. Les avancées dans le domaine de la contactologie sont essentiellement dues à une meilleure connaissance de la physiologie de

l'œil et notamment de la géométrie de la surface cornéenne ainsi qu'à la découverte de nouveaux matériaux, mieux supportés par l'œil. En 1940, les premières lentilles en Plexiglas apparaissent. En 1963, le chimiste tchécoslovaque Otto Wichterlé découvre un matériau souple et hydrophile, l'hydroxyéthylène (HEMA) : les lentilles souples sont nées. Dès lors, l'industrie de l'optique fera des progrès considérables dans la mise au point de lentilles de contact de plus en plus confortables et performantes. De nouveaux matériaux apparaissent et les techniques de fabrication améliorées permettent de produire des lentilles de très hautes performances optiques, qui laissent la cornée irriguée par les larmes et satisfont ainsi ses besoins en eau, oxygène et sels minéraux.

## 10 La presbytie

La presbytie est la perte progressive de l'accommodation, essentiellement parce que le cristallin se rigidifie avec l'âge. La presbytie se corrige par des verres convergents qui pallient le défaut d'augmentation de puissance du cristallin. Quand l'accommodation a totalement disparu, l'œil se comporte comme une lentille de focale constante qui permet de voir un objet nettement uniquement si l'objet est situé à une distance donnée de l'œil. Il faut donc corriger l'œil de façon à lui permettre une vision de près et une vision de loin. C'est pour cette raison que des verres à double foyer, ou plus récemment des verres dits progressifs, sont utilisés. Contrairement à une idée répandue, la presbytie ne « compense » pas la myopie puisque, dans le cas de la myopie, la vision des objets éloignés reste déficiente sans correction.

### & Développement

Recherche

#### La courbe de Donders

En 1864, Donders publie une étude clinique sur une population d'individus âgés de 35 à 50 ans. Il montre que l'amplitude d'accommodation  $A$ , exprimée en dioptrie, pour un individu d'âge  $N$  ( $N$  est exprimé en année,

$35 < N < 50$ ) vérifie la loi empirique :

$$A = 12,5 - 0,2/N.$$

Cette loi semble indépendante de la nature amétrope ou emmétrope de l'œil.

### Mesure de l'acuité visuelle

L'acuité visuelle  $a$  est mesurée par le plus petit angle  $\alpha$  sous lequel un sujet reconnaît un objet (schématiquement, l'angle sous lequel on voit un objet diminue lorsque l'objet s'éloigne). Parce que cet angle dépend de la nature de l'objet, des objets standard ont été choisis pour effectuer le test ; ces

objets s'appellent des optotypes et sont souvent des lettres majuscules, inscrites dans un carré et dont tous les traits sont de même largeur. L'acuité visuelle est donnée par le rapport :

$$a = \frac{5'}{\alpha}$$

## 10.2. La loupe

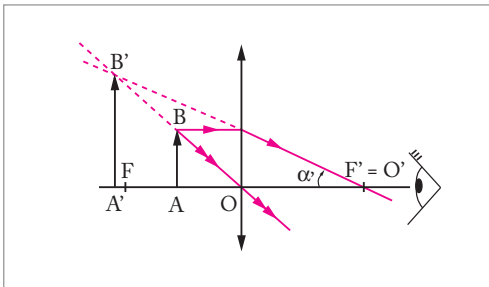
La loupe est l'instrument oculaire le plus simple. Elle consiste en une lentille convergente de faible distance focale, généralement biconvexe et elle est utilisée pour obtenir d'un objet réel une image virtuelle et agrandie. Ce cas est obtenu en plaçant l'objet entre le foyer objet et le centre optique de la lentille.

### 1 Construction de l'image d'un objet à travers une loupe. Distance de visée, latitude de mise au point

Pour que l'image  $A'B'$  d'un objet  $AB$  soit virtuelle, l'objet doit être placé entre le plan de la lentille et son plan focal objet. De plus, pour que cette image soit nette pour l'œil, elle doit être située entre le *punctum proximum*  $P_p$  et le *punctum remotum*  $P_R$  de l'œil en  $O'$ . La distance de visée  $\delta$  est, par définition, la distance entre l'œil et l'image :  $\delta = \overline{A'O'}$ . Notons  $D_R = \overline{P_R O'}$  et  $D_p = \overline{P_p O'}$ , on a donc :

$$D_R \leq \delta \leq D_p$$

La latitude de mise au point  $L$  est, par définition, la distance sur laquelle l'objet peut se déplacer pour satisfaire les contraintes imposées par la vision nette de son image à travers la loupe. Cette mise au point peut être réalisée de plusieurs manières, selon les positions relatives de l'œil, de la loupe et de l'objet.



**Fig. 10.10.** Œil placé au point focal image de la loupe et regardant l'image  $A'B'$  de l'objet  $AB$  à travers la loupe.

### Œil placé dans le plan focal image de la loupe

Pour évaluer l'amplitude de cette latitude de mise au point, supposons par exemple que l'œil soit placé au foyer image de la loupe (Fig. 10.10) et calculons les positions  $A_R$  et  $A_p$  de l'objet correspondant à une image comprise entre  $P_R$  et  $P_p$ . En utilisant les notations de la figure 10.10, la relation de conjugaison de Descartes donne :

$$\frac{1}{\overline{OO'} + \overline{O'A'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = -\frac{1}{\overline{O'A} - f'} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

La position de l'objet est caractérisée par :

$$\overline{AO} = \frac{(\overline{A'O'} - f')f'}{A'O'}$$

Les positions limites  $A_R$  et  $A_P$  de l'objet sont données par les positions limites  $P_R$  et  $P_P$  de l'image :

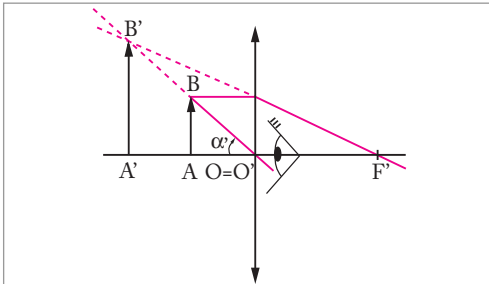
$$\overline{A_R O} = f' \left( 1 - \frac{f'}{D_R} \right)$$

$$\overline{A_P O} = f' \left( 1 - \frac{f'}{D_P} \right)$$

Ainsi la latitude de mise au point  $L$  a pour expression :

$$L = \overline{A_R O} - \overline{A_P O} = f'^2 \left( \frac{1}{D_P} - \frac{1}{D_R} \right)$$

La latitude de mise au point,  $L$ , est proportionnelle au carré de la distance focale. Ainsi, dans le cas d'un œil normal, pour lequel  $D_R = \infty$  (on a alors  $A_R = F$ ) et  $D_P = 25$  cm, la latitude de mise au point d'une loupe de lecture de distance focale  $f' = 10$  cm est égale à 5 cm.



**Fig. 10.11.** Œil placé au centre de la lentille-loupe et regardant l'image  $A'B'$  de l'objet  $AB$  à travers la loupe.

### Œil placé dans le plan de la lentille

Supposons maintenant que l'œil se situe juste derrière la loupe, confondu avec le centre optique  $O$  la lentille (Fig. 10.11). On a alors

$$O = O', \quad D_R = \overline{P_R O} \quad \text{et} \quad D_P = \overline{P_P O}.$$

Les relations de Descartes s'écrivent :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

La position de l'objet est caractérisée par :

$$\overline{AO} = \frac{\overline{A'O} f'}{\overline{A'O} + f'}$$

Les positions limites  $A_R$  et  $A_P$  de l'objet sont données par :

$$\overline{A_R O} = f' \left( 1 - \frac{f'}{D_R + f'} \right)$$

$$\overline{A_P O} = f' \left( 1 - \frac{f'}{D_P + f'} \right)$$

Ainsi, la latitude de mise au point  $L$  a pour expression :

$$L = \overline{A_R O} - \overline{A_P O} = f'^2 \left( \frac{1}{D_P + f'} - \frac{1}{D_R + f'} \right)$$

La latitude de mise au point est, une nouvelle fois, proportionnelle au carré de la distance

focale et pour un œil normal (toujours pour une loupe de lecture de distance focale  $f' = 10$  cm) elle est égale à 3,3 cm.

## 2 Puissance d'une loupe

La puissance  $P$  d'une loupe est, par définition, le rapport entre le diamètre apparent de l'image,  $\alpha'$ , et la dimension réelle de l'objet (Fig. 10.10 et 10.11). Elle est donnée en dioptrie :

$$P = \frac{\alpha'}{AB}$$

La puissance d'une loupe s'exprime facilement en fonction du grandissement linéaire  $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$  et de la distance de visée  $\delta$ . En effet, dans l'approximation des faibles angles,  $\alpha'$  s'identifie à sa tangente, et est égale à :

$$\alpha' = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'O'}} = \frac{\overline{A'B'}}{\delta}$$

Nous obtenons finalement :

$$P = \frac{\gamma}{\delta}$$

Nous pouvons donner une autre expression de la puissance de la loupe. En effet, avec  $\gamma = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}$  il vient :

$$P = \frac{1}{f'} \left( 1 - \frac{\overline{F'O'}}{\delta} \right)$$

Cette relation est sans doute préférable à la première. En effet, pour un œil normal, la distance de visée peut être infinie. Le grossissement linéaire est, dans ce cas, indéterminé, ce qui rend impossible le calcul de  $P$ . C'est d'ailleurs pour cette raison que la puissance plutôt que le grandissement linéaire est utilisée. La taille de l'image est mesurée par son diamètre apparent, angle sous lequel l'œil voit l'image, plutôt que par sa taille car l'image peut être renvoyée à l'infini, ce qui rend impossible la mesure de sa grandeur linéaire. En revanche, on peut toujours définir la taille linéaire  $\overline{AB}$  de l'objet car la loupe est utilisée pour des objets situés à distance finie. Nous trouverons une difficulté à définir une taille linéaire de l'objet dans le cas des lunettes astronomiques, pour lesquelles les objets étudiés sont à l'infini.

Reprenons les deux cas étudiés précédemment, à savoir lorsque l'œil est situé au point focal image de la lentille et lorsqu'il est au centre optique de la loupe et calculons la puissance pour un œil normal.

### *Œil placé dans le plan focal image de la loupe, puissance intrinsèque*

Si l'œil est placé au foyer image de la loupe ( $\overline{F'O'} = 0$ ), la puissance  $P$  ne dépend plus alors que de la distance focale ; elle est dite « intrinsèque » :

$$P_i = \frac{1}{f'}$$

Notons qu'il en est de même pour un œil normal lorsqu'il n'accomode pas puisque nous avons alors  $\delta$  infini.

### Œil placé dans le plan de la lentille

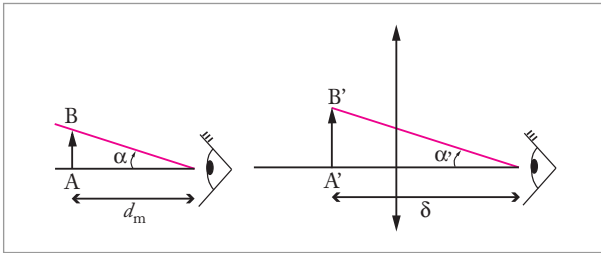
On a alors  $\overline{F'O'} = -f'$ , soit :

$$P = \frac{1}{f'} \left( 1 + \frac{f'}{\delta} \right)$$

## 3 Grossissement

Par définition, le grossissement  $G$  d'une loupe est le rapport entre le diamètre apparent de l'image  $A'B'$  de l'objet vu à travers la loupe à la distance  $\delta$ , dite distance de visée, et son diamètre apparent vu à l'œil nu (sans loupe) lorsqu'il est placé à la distance minimale de vision nette  $d_m$  :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}$$



**Fig. 10.12.** a. Vision directe de l'objet à la distance minimum de vision distincte: l'objet est vu sous l'angle  $\alpha$  ; b. Vision à travers la loupe de l'image  $A'B'$  de  $AB$ , l'image est vu sous l'angle  $\alpha'$  à la distance  $\delta$ .

Dans l'approximation des faibles angles, les angles  $\alpha$  et  $\alpha'$  sont donnés par (Fig. 10.12) :

$$\alpha = \frac{\overline{AB}}{d_m} \quad \text{et} \quad \alpha' = \frac{\overline{A'B'}}{\delta}$$

Nous obtenons donc :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = P d_m$$

### Œil amétrope placé dans le plan focal image de la loupe

Le grossissement dépend de  $d_m$  et donc de chaque œil. Le grossissement commercial,  $G_c$ , d'une loupe est défini pour un œil emmétrope, soit pour  $d_m = 25$  cm et un œil placé au foyer image de la loupe. Nous avons donc:

$$G = G_c = \frac{P_i}{4}$$

### Œil placé dans le plan de la lentille

Lorsque l'œil est placé dans le plan de la lentille, nous obtenons immédiatement :

$$G = \frac{d_m}{f'} \left( 1 + \frac{f'}{\delta} \right)$$

## 4 Pouvoir séparateur à travers la loupe

Le pouvoir séparateur de l'œil nu,  $\varepsilon$ , est amélioré par l'utilisation d'une loupe. En effet, le diamètre apparent à travers la loupe de l'objet AB correspondant à  $\varepsilon$  est égal à  $P \cdot AB$ . Il doit être supérieur ou égal à  $\varepsilon$  pour que l'image A'B' soit vue par l'œil. Ainsi, la dimension du plus petit objet AB pouvant être vue à travers la loupe est donnée par :

$$AB = \frac{\varepsilon}{P}$$

## Exercices

1 Dans un œil moyen, la distance  $d$  entre le cristallin et la rétine est égale à 15 mm, le  $P_P$  et le  $P_R$  sont égaux respectivement à 25 cm et l'infini.

1. Calculer les distances focales du cristallin lorsqu'il est au repos  $f'_1$  et en accommodation maximale  $f'_2$ .

2. Comment varie le  $P_P$  en fonction de la distance focale du cristallin en accommodation maximale ? Sachant qu'en moyenne, le  $P_P$  d'un individu de 50 ans est de 1 m, calculer la variation de cette distance focale par rapport à celle d'un individu moyen.

2 Un myope constate que l'objet le plus éloigné qu'il peut voir nettement est situé à 21 cm de ses yeux.

Quel type de lunettes doit-il choisir pour corriger cette myopie et voir à l'infini, sachant qu'elles sont posées à 1 cm de son œil ?

3 Un homme perçoit nettement un objet placé entre l'infini et 50 cm de ses yeux. Il place à la distance  $d = 1$  cm de ses yeux une paire de lunettes de 1 dioptrie de vergence.

À quelle distance  $D$  de ses yeux se trouve maintenant l'objet le plus proche qu'il peut voir distinctement ?

4 Un hypermétrope dont le *punctum proximum* est à 30 cm et le *punctum remotum* à 1 m derrière l'œil utilise une loupe de vergence  $V = 10 \delta$ . On note  $d$  la distance de l'œil à la loupe et on considère deux cas, celui où l'œil est collé à la loupe ( $d = 0$ ) et celui où l'œil est placé dans le plan focal image de la loupe ( $d = f'$ ).

1. Déterminer dans les deux cas la distance  $l$  de l'œil à l'objet le plus proche visible nettement avec la loupe.

2. Déterminer dans les deux cas la distance  $L$  de l'œil à l'objet le plus éloigné visible nettement avec la loupe.

5 En utilisant les hypothèses de l'exercice 4, calculer la puissance de la loupe lorsque l'œil est au repos dans chacun des deux cas proposés.

6 Les limites de vision distincte d'un jeune enfant, mesurées à partir du centre optique O de l'œil, varient entre 8,5 et 21 cm. Pour lui permettre de voir à l'infini sans accommoder, on lui met des lunettes dont le centre optique  $O_1$  est situé à  $d = 1$  cm de O.

1. Quelles sont la nature et la vergence de la lentille utilisée dans les lunettes ?

2. Quelle est la distance minimale  $l$  de vision nette de l'œil corrigé ?

3. En vieillissant, le cristallin se rigidifie, les limites de vision distinctes de l'œil nu deviennent alors 16 et 21 cm. Quel est alors le champ de vision distincte de l'œil appareillé des lunettes ?

7 Un homme muni de lunettes divergentes ( $f_1 = -f'_1 = 20$  cm) a un champ de vision distincte compris entre B (tel que  $\overline{BO_1} = 60$  cm) et l'infini, ces distances étant mesurées à partir du centre optique  $O_1$  de ses lunettes. Pour pouvoir lire de près un texte situé en B' à 30 cm de ce centre optique, il utilise une seconde lentille, superposée aux premières lunettes.

1. Quelle doit être la distance focale  $f'_2$  des lentilles constituant cette seconde paire de lunettes si les centres optiques des deux paires sont confondus ?

2. Si ce second dispositif optique est une loupe de puissance intrinsèque  $P_1 = 10 \delta$ , à quelle distance  $D$  de  $O_1$  doit-elle être placée ?



# Instruments optiques à deux lentilles : le microscope et la lunette

Dans le chapitre 8 nous avons présenté une étude des lentilles minces et des systèmes optiques constitués de l'association de lentilles. Nous développons dans ce chapitre le cas des instruments optiques à deux lentilles, dont les principaux représentants sont le microscope et la lunette. Il est essentiel pour comprendre ce chapitre d'avoir bien assimilé le chapitre 8.

## 11.1. Les différents types de microscope

- 1 Histoire de la microscopie
- 2 Microscopie électronique

## 11.2. Le microscope optique ou photonique

- 1 Constitution d'un microscope
- 2 Image à travers un microscope
- 3 Puissance d'un microscope, puissance intrinsèque
- 4 Grossissement
- 5 Pouvoir séparateur

## 11.3. Les lunettes d'approche

- 1 La lunette et le télescope

## 11.4. La lunette de Galilée

- 1 Histoire de la lunette de Galilée
- 2 Principe de fonctionnement
- 3 Construction géométrique de l'image d'un objet
- 4 Grossissement angulaire d'une lunette
- 5 Pouvoir séparateur

### Mots-clés

- Lunette ● Microscope ● Télescope

# 11.1. Les Différents types de microscope

## 1 Histoire de la microscopie

Au XVI<sup>e</sup> siècle, se développe l'idée de regarder les objets non plus directement mais à l'aide d'une loupe ; c'est de cette idée que naît la microscopie, du grec *skopein* (examiner) et *mikros* (petit). La microscopie optique (on dit aussi photonique) va rapidement s'imposer en biologie comme la technique d'observation indispensable (Fig. 11.1) et au cours du XIX<sup>e</sup> siècle, elle permet des découvertes importantes, comme la découverte par Pasteur des organismes vivants responsables de la fermentation (on pensait à l'époque qu'il s'agissait d'un processus de génération spontanée). Pasteur découvre ainsi qu'il est possible de détruire des ferments étrangers : la pasteurisation est née !

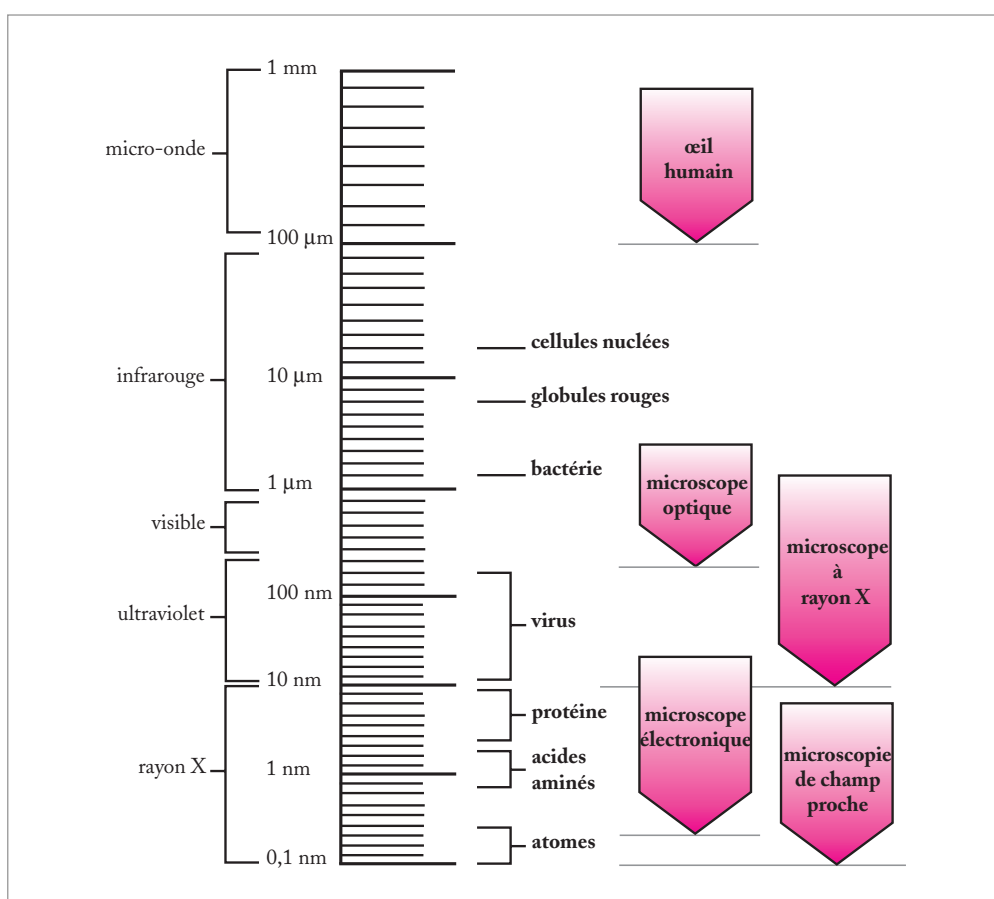


Fig. 11.1. Limite de résolution des différents microscopes.

La microscopie se développe considérablement au cours du XX<sup>e</sup> siècle grâce à des techniques nouvelles, notamment avec le développement de l'optique électronique. Né de cette discipline, le microscope électronique est conçu par analogie avec le microscope photonique.

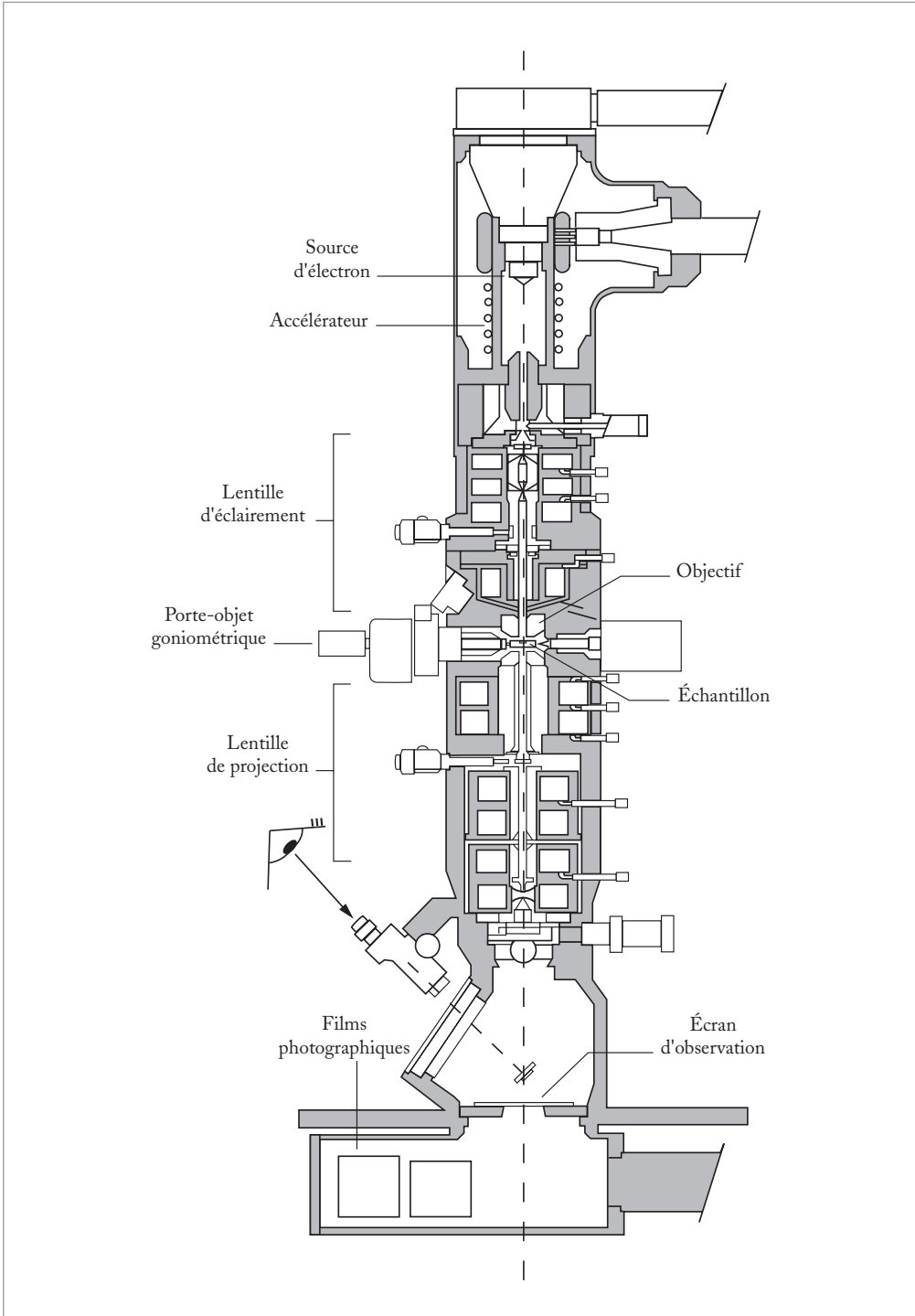
que classique. La résolution ainsi atteinte autorise, à son tour, le développement de la micro-analyse, c'est-à-dire l'étude de la matière à l'échelle atomique. Le microscope électronique se perfectionne avec la mise au point du principe de balayage par des faisceaux d'électrons très focalisés, donnant naissance à la microscopie électronique à balayage. Cette technique de balayage sera également appliquée à la microscopie photonique. Plus récemment, les travaux en mécanique quantique et notamment, sur l'effet tunnel, ont permis le développement de la microscopie par effet tunnel, puis vers 1980 de la microscopie de champ proche. Pour la première fois, les atomes étaient vus !

## **2** Microscopie électronique

De façon générale, le rayonnement utilisé dans un microscope détermine la limite théorique des détails perceptibles sur l'image. Cette limite est imposée par les phénomènes de diffraction : c'est le critère de Rayleigh. La classification des microscopes traditionnels repose sur la nature du rayonnement utilisé, c'est-à-dire de la longueur d'onde. La microscopie optique utilise les radiations électromagnétiques du spectre visible tandis que la microscopie électronique utilise les propriétés des faisceaux d'électrons accélérés, auxquels peut être associée une courte longueur d'onde (Fig. 11.1). La valeur de la longueur d'onde est donnée par la relation de De Broglie  $\lambda = h/mv$ , où  $h$  est la constante de Planck et  $mv$  la quantité de mouvement de l'électron. La microscopie électronique permet ainsi d'atteindre des résolutions bien meilleures que la microscopie optique.

Pour comprendre le principe de formation des images en microscopie électronique, il faut comprendre la nature de l'interaction entre les électrons et la matière qui constitue l'échantillon observé. Nous ne rentrerons pas dans le détail de cette étude car cela repose très largement sur des notions de physique qui sortent du cadre de l'optique. Rappelons simplement les résultats sur lesquels s'appuie la lecture d'une image électronique. Les électrons sont diffusés par la matière qu'ils rencontrent et cette diffusion permet de caractériser la nature de la matière. Très schématiquement, si l'échantillon est amorphe, c'est-à-dire s'il n'existe aucune relation entre les positions des atomes, alors l'intensité de l'onde diffusée dans une direction est égale à la somme des intensités diffusées par les atomes indépendamment. Au contraire, si l'échantillon est un cristal parfait, donc formé de l'arrangement périodique d'atomes, les électrons sont diffusés dans certaines directions privilégiées, définies par la loi de Bragg : le cliché de diffraction est alors constitué d'un ensemble de taches caractéristiques.

En sélectionnant différentes zones de l'échantillon dans le cliché de diffraction, il est possible par exemple de mettre en évidence les zones qui diffèrent du cristal parfait, et notamment les défauts de structure. C'est ainsi que dans les années 1950, les premières images directes de dislocations dans un métal furent obtenues.



**Fig. 11.2. Microscope électronique.**

### Microscopie par effet tunnel

C'est la réalisation, en 1982, d'une expérience prévue dès la fin des années 1920 comme une conséquence de la mécanique quantique, qui est à l'origine du développement de ces nouvelles microscopies. Gerd Binnig et Heinrich Rohrer, deux chercheurs des laboratoires I.B.M. Zürich, observent une manifestation directe de l'effet tunnel : un courant d'électrons entre deux électrodes métalliques séparées de quelques nanomètres dans le vide. Ils mesurent la dépendance exponentielle du courant en fonction de la distance qui sépare les électrodes.

Un microscope à balayage (le microscope à effet tunnel) sera développé à la suite de ce succès. Son principe est fondé sur le contrôle d'un courant qui s'établit, grâce à l'effet tunnel, entre une fine pointe métallique (sonde

locale) et la surface d'un échantillon (située à quelques distances atomiques). C'est le démarrage d'une microscopie nouvelle pour l'étude de matériaux conducteurs ou semi-conducteurs. Son essor a été grandement facilité par les connaissances déjà acquises en physique des surfaces. En quelques années, ces nouvelles microscopies conduisent à une vision nouvelle des surfaces, dans l'espace réel, à l'échelle atomique, qui répond ainsi à la quête des physiciens, métallurgistes et chimistes, et suscite l'intérêt des biologistes. L'intense activité autour de cette nouvelle instrumentation est aussi liée aux applications possibles dans le domaine des nanotechnologies. Les inventeurs de cette nouvelle microscopie, G. Binnig et H. Rohrer, ont reçu en 1986 le prix Nobel de physique.

## 11.2. Le microscope optique ou photonique

La microscopie optique utilise les radiations électromagnétiques du spectre visible, d'où son autre nom de microscopie photonique. La production d'images par les microscopes traditionnels suppose :

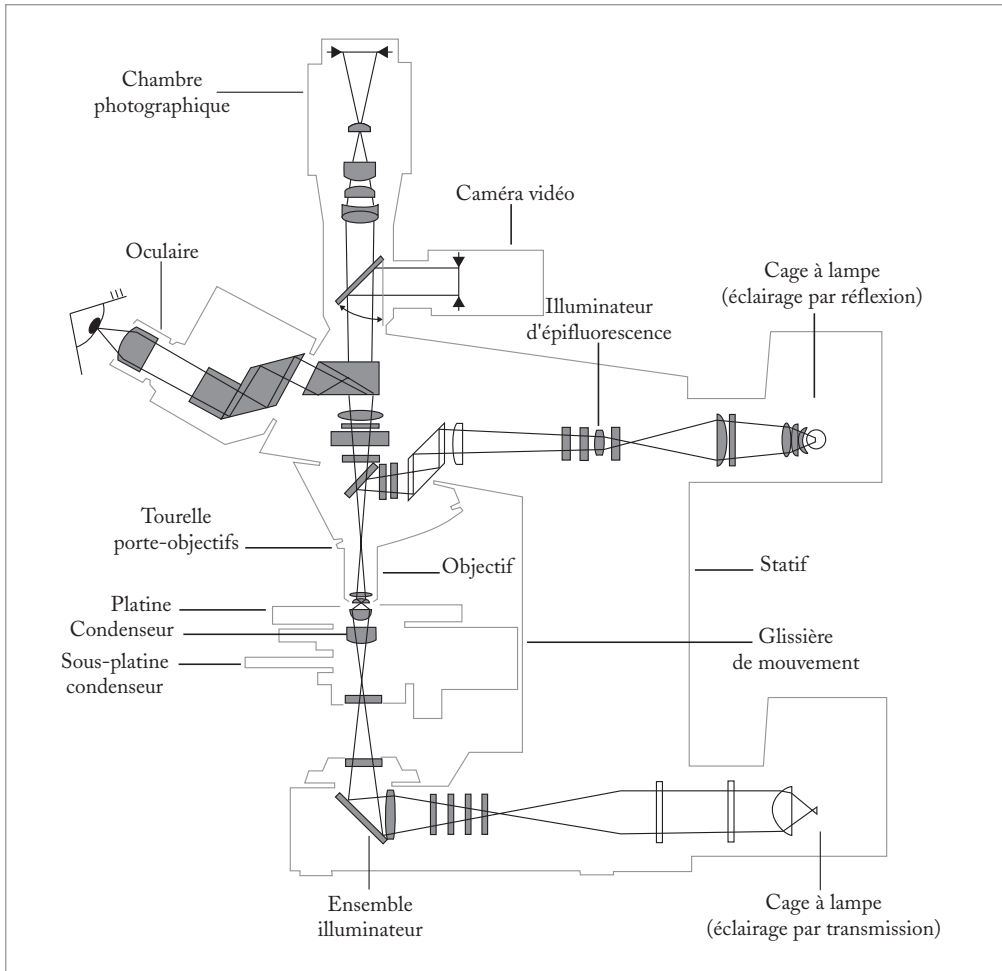
- une source de rayonnement et un dispositif d'éclairage de l'objet ;
- une optique de transmission assurant la fonction d'agrandissement ;
- un détecteur visualisant l'image sur un support : l'œil, une plaque photographique ou un écran d'ordinateur pour des images numérisées.

### 1 Constitution d'un microscope

Le statif est le support qui permet un positionnement précis et stable des différents éléments constitutifs du microscope (Fig. 11.3). Les microscopes disposant en général de plusieurs objectifs, ces derniers sont montés sur une tourelle qu'il faut tourner pour changer d'objectif. La tourelle est placée à l'extrémité d'un tube d'une longueur standardisée de 16 cm ; à l'autre extrémité du tube se trouve l'oculaire. Enfin, la platine sert de support à l'objet regardé.

L'observation au microscope nécessite que l'objet soit éclairé. L'éclairage se fait par un illuminateur constitué d'une lampe, d'un miroir sphérique au centre duquel se trouve la lampe de façon à ce que l'éclairage soit plus efficace et d'un collecteur qui forme l'image de la source dans le plan focal objet du condenseur ; l'ouverture du collecteur est la plus grande

possible de façon à couvrir l'aire maximale sur l'objet. Le condenseur est le système optique convergent destiné à faire passer la lumière sur le champ objet en formant un faisceau d'ouverture voisine de celle de l'objectif.



**Fig. 11.3. Microscope optique.**

Les pièces essentielles d'un microscope sont l'objectif et l'oculaire (nous ne représenterons un microscope que par ces deux éléments par la suite).

### *L'objectif*

Il existe différents types d'objectifs classés en fonction du milieu d'entrée pour lequel ils sont prévus et en fonction du degré de correction de leurs aberrations.

Les objectifs sont dits objectifs à sec si le milieu d'entrée est l'air et objectifs à immersion s'il s'agit d'un liquide.

L'objectif est une lentille très convergente, de distance focale typiquement égale à quelques millimètres. C'est la pièce maîtresse du microscope puisqu'elle peut atteindre un grandissement égal à  $-100$ . Parce que l'image intermédiaire que forme l'objectif de l'objet réel est regardée à travers l'oculaire comme à travers une loupe, il est important que la qualité de cette image soit parfaite. L'objectif doit donc être bien corrigé des aberrations. Ceci est d'autant plus délicat qu'il doit accepter des rayons lumineux très inclinés par rapport à son axe. Ce critère est mesuré par l'ouverture numérique qui est égale au produit  $n \sin \alpha$  et doit être la plus importante possible,  $n$  étant l'indice de réfraction du milieu d'entrée et  $\alpha$  étant l'angle formé par un rayon entrant dans l'objectif avec son axe. Avec, aujourd'hui, des ouvertures numériques qui atteignent 0,95 pour les objectifs à sec et qui dépassent 1 pour les objectifs à immersion, un objectif doit typiquement être corrigé des aberrations pour des angles de l'ordre de  $70^\circ$  !

Les objectifs achromats sont des objectifs corrigés de l'aberration chromatique primaire : leur distance focale est la même pour les radiations rouge et bleue.

Les objectifs apochromats sont corrigés de l'aberration chromatique secondaire (leur distance focale est la même pour trois radiations du spectre visible), de l'aberration sphérique pour deux de ces radiations et de la coma. Les objectifs à la fluorine utilisent ce composé qui permet de réduire le chromatisme secondaire.

Recherche & Développement

### Interpréter les indications sur un microscope

Un ensemble d'indications, qu'il est important de connaître, sont inscrites sur l'objectif et l'oculaire d'un microscope. L'oculaire porte en général la valeur de son grossissement commercial, typiquement égal à 5, 10, 15, 20 ou 25. Le type d'objectif est marqué en abrégé : « Apo » pour apochromat, « fluorine » ou « Néofluor » pour un objectif à la fluorine. Pour un objectif à immersion, le milieu est toujours spécifié, "Oel" ou "Ol" pour l'huile, "Wl" pour l'eau, "Gly" pour la glycérine. Sont également gravées sur l'objectif les valeurs du grandissement précédé du symbole  $\times$  et de l'ouverture numérique, précédée du symbole /. Ainsi, l'indication  $\times 10 / 0,2$  indique un objectif de grandissement 10 et d'ouverture angulaire 0,2. Nous donnons ci-

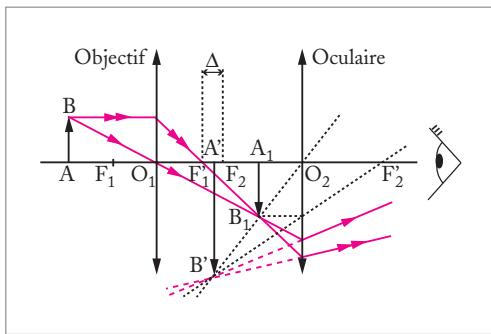
dessous les valeurs des grandissements et des ouvertures numériques usuelles en microscopie.

Grandissement de l'objectif	Ouverture numérique
2,5	0,06
4	0,09
5	0,10
10	0,20
20	0,50
40	0,65
100	1,25

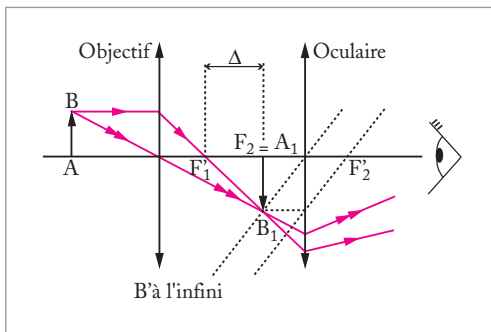
### L'oculaire

Le rôle de l'oculaire est comparable à celui d'une loupe. Il est utilisé pour regarder l'image intermédiaire formée par l'objectif. Son grossissement commercial est typiquement de l'ordre de 10. Lorsqu'il est prévu également pour compenser les aberrations résiduelles de

l'objectif, par exemple l'astigmatisme, il est appelé oculaire compensateur. Pour effectuer des mesures de dimensions sur l'image définitive, les oculaires sont parfois divisés en un réseau d'une centaine de graduations arbitraires dans le plan de l'image intermédiaire. Ils sont alors appelés micromètres oculaires. L'image de ce réseau est donc vue en même temps que l'image définitive, ce qui permet de mesurer l'image en terme de graduations. Pour connaître la dimension de ces graduations vues à travers l'oculaire, un micromètre objectif est utilisé. Ce micromètre objectif, constitué en général d'un réseau de 200 graduations de 2 mm, est vu dans les mêmes conditions que l'objet et sert donc de référence pour la mesure de la graduation du micromètre oculaire.



**Fig. 11.4.** Construction de l'image d'un objet à travers un microscope.



**Fig. 11.5.** Microscope en fonctionnement normal : l'image définitive A'B' de AB à travers le microscope est renvoyée à l'infini.

de l'oculaire est fixe, seule la distance entre l'objet et l'objectif est variable. Elle doit être réglée pour que l'image finale A'B' soit comprise entre les limites de la vision distincte de l'œil de l'observateur. Cette latitude de mise au point est faible et dépend de la puissance du microscope. En effet, la position de l'image  $A_1B_1$  ne peut varier que sur quelques cen-

## 2 Image à travers un microscope

Considérons un objet AB perpendiculaire à l'axe optique des deux lentilles (objectif et oculaire), le point A étant sur l'axe (Fig. 11.4). Pour que l'objectif donne de cet objet une image  $A_1B_1$  réelle et agrandie, il est nécessaire que l'objet soit placé avant le plan focal objet de l'objectif (les foyers de l'objectif sont notés  $F_1$  et  $F_1'$ ). Cette image  $A_1B_1$  joue le rôle d'objet réel pour l'oculaire. Pour que l'observateur en voie une image agrandie, il faut que cette image soit virtuelle et donc que  $A_1B_1$  soit situé entre l'oculaire et son plan focal objet.

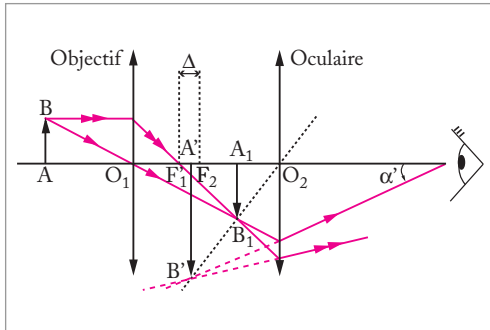
L'image A'B' de l'objet AB à travers les deux lentilles est une image virtuelle, inversée et agrandie.

Le fonctionnement du microscope est dit normal quand l'image intermédiaire  $A_1B_1$  se trouve dans le plan focal objet (en  $F_1'$ ) de l'oculaire, de sorte que l'image définitive A'B' soit rejetée à l'infini et qu'un œil emmétrope placé en  $F_1'$  puisse observer A'B' sans accommodation.

Dans un microscope, les deux lentilles étant solidaires et fixées dans un manchon métallique, la distance  $\Delta$  entre le foyer image  $F_1'$  de l'objectif et le foyer objet  $F_2$



timètres (elle doit être comprise entre l'oculaire et son plan focal objet) ce qui correspond à un déplacement de l'objet sur quelques millimètres de l'ordre des distances focales des objectifs. Pour les microscopes standard, cette latitude de mise au point est de l'ordre de quelques millimètres tandis qu'elle se réduit à quelques microns pour les microscopes les plus puissants.



**Fig. 11.6.** Image \$A'B'\$ de \$AB\$ à travers un microscope. \$A'B'\$ est vu par l'observateur sous un angle \$\alpha'\$.

### 3 Puissance d'un microscope, puissance intrinsèque

La puissance \$P\$ d'un microscope est le rapport entre le diamètre apparent \$\alpha'\$ d'un objet vu à travers le microscope et sa dimension \$AB\$ (Fig. 11.6) :

$$P = \frac{\alpha'}{AB}$$

Cette puissance s'exprime en dioptrie. Plus elle sera grande, plus le diamètre apparent de l'image sera important et les objets, pouvant être vus avec ce microscope, petits.

La puissance d'un microscope dépend des caractéristiques de l'objectif et de celles de l'oculaire et donc de la position particulière de l'objet. La puissance \$P\$ s'exprime comme le produit de la valeur absolue du grandissement \$\gamma\_1\$ de l'objectif par la puissance \$P\_2\$ de l'oculaire :

$$P = \frac{\alpha'}{AB} = \frac{\alpha'}{A_1B_1} \frac{A_1B_1}{AB} = \gamma_1 P_2$$

La puissance intrinsèque d'un microscope correspond à la puissance obtenue lorsque l'image \$A'B'\$ est renvoyée à l'infini, c'est-à-dire lorsque l'image \$A\_1B\_1\$ est dans le plan focal objet de l'oculaire (Fig. 11.5). Le grandissement \$\gamma\_1\$ de l'objectif et la puissance \$P\_2\$ de l'oculaire sont alors égaux à :

$$\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{AB} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{O_1I}} = \frac{\overline{F_1'F_2}}{\overline{F_1'O_1}} = \frac{\Delta}{f_1'}$$

$$P_2 = \frac{\alpha'}{A_1B_1} \sim \frac{\tan \alpha'}{A_1B_1} = \frac{1}{f_2'}$$

La puissance intrinsèque \$P\_i\$ du microscope, qui ne dépend que ses caractéristiques, sera donc égale à :

$$P_i = \frac{\Delta}{f_1' f_2'}$$

Cette puissance s'exprime en dioptrie si les distances \$\Delta, f\_1', f\_2'\$ sont exprimées en mètre. Pour fixer les idées, un microscope commercial moyen a une puissance intrinsèque moyenne de

l'ordre de quelques centaines de dioptries, celles des microscopes plus puissants pouvant atteindre plusieurs milliers de dioptries.

#### 4 Grossissement

Le grossissement  $G$  d'un microscope est, par définition, égal au rapport entre les diamètres apparents maximaux d'un objet vu à travers le microscope ou vu à l'œil nu à la distance minimum de vision distincte :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = P \overline{AB} \frac{d_m}{AB}$$

$$G = P d_m$$

où  $d_m$  est la distance minimale de vision distincte.

Ce grossissement dépendant de la distance  $d_m$ , pour pouvoir comparer les performances des microscopes, les fabricants ont choisi une distance minimale de vision distincte arbitraire de 25 cm. Le grossissement commercial correspondant est :

$$G_c = \frac{P_c}{4}$$

#### 5 Pouvoir séparateur

**Définition :** Le pouvoir séparateur d'un microscope caractérise la plus petite distance entre deux points pouvant être vus comme séparés.

Si le pouvoir séparateur de l'œil est  $\varepsilon$ , celui du microscope  $\varepsilon'$  est donné par :

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{P}$$

Notons que ce pouvoir séparateur, selon le critère dit de « Abbe », ne peut pas être inférieur à une distance de l'ordre du dixième de micron (sans entrer dans les détails, disons simplement que cette limite est due au caractère ondulatoire de la lumière). Ainsi, il serait inutile d'imaginer des microscopes optiques ayant une puissance supérieure à 5 000 dioptries, soit un grossissement commercial de 1250, puisque l'image d'un objet d'environ 1 micron serait alors de mauvaise qualité et non résolue.

## 11.3. Les lunettes d'approche

### 1 La lunette et le télescope

Le mot lunette désigne en France un instrument qui permet de réduire la distance apparente des objets éloignés mais dans la plupart des pays, un tel instrument est appelé télescope. La distinction en France entre lunette et télescope réside dans ce que le nom de lunette est réservé aux instruments formés exclusivement de lentilles. Les lunettes sont

donc des instruments qui mettent en jeu la réfraction de la lumière, tandis que les télescopes sont des instruments dont l'élément essentiel est un miroir sur lequel la lumière se réfléchit. Cette distinction, à l'étranger, se fait par l'emploi des mots réfracteur ou réflecteur ajoutés au terme générique de télescope. Nous étudierons en détail la lunette de Galilée en 11.4. Mais auparavant, nous allons examiner, des exemples de télescopes.

### Les télescopes (réflecteurs)

Les télescopes présentent l'avantage d'être exempts d'aberrations chromatiques, ce qui n'est pas le cas des lunettes. Ceci explique que les lunettes soient aujourd'hui tombées en désuétude. Les télescopes sont constitués de plusieurs miroirs, dits primaire, secondaire... Le miroir primaire est en général très grand ce qui pose des problèmes de réalisation : par exemple, la fabrication du miroir du télescope Hale sur le mont Palomar (Californie), de 5 mètres de diamètre, a nécessité cinq années de travail.

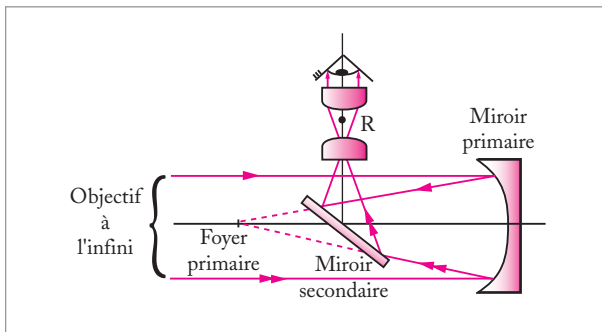


Fig. 11.7. **Télescope de Newton.**

Le plus simple des télescopes est constitué d'un miroir primaire sphérique concave. Mais ce dernier présente une aberration sphérique importante pour un objet à l'infini. C'est donc le miroir parabolique, rigoureusement stigmatique pour un point objet à l'infini sur son axe, qui est le plus utilisé. L'image se forme alors au foyer image du miroir primaire. L'observation de l'image peut être effectuée

directement en ce foyer, dit foyer primaire, mais elle nécessite l'installation d'une nacelle d'observation pour l'observateur et ses instruments auxiliaires, nacelle qui obture une fraction du faisceau lumineux. Aussi cette technique n'est-elle acceptable que si le diamètre du miroir primaire dépasse 4 m, car alors la fraction obturée n'est pas prohibitive. Lorsque l'observation au foyer primaire n'est pas possible, le télescope est doté d'un second miroir, dit secondaire. Ce miroir est plan et incliné à  $45^\circ$ . Sa fonction est de renvoyer le faisceau incident dans le plan focal primaire à angle droit vers l'observateur : c'est le principe du télescope de Newton (Fig. 11.7).

De nombreux télescopes ne diffèrent du télescope de Newton que par le choix du miroir secondaire. Parmi eux, citons :

- le télescope de Grégory : le miroir secondaire est concave et il renvoie dans l'axe du télescope une image droite (Fig. 11.8a) ;
- le télescope de Cassegrain : le miroir secondaire est un miroir hyperbolique dont le foyer coïncide avec le foyer image du miroir primaire (Fig. 11.8b) ;
- le télescope de Nasmyth est fondé sur le principe du télescope de Cassegrain mais dispose en plus d'un miroir tertiaire plan oblique. L'image est observée sur le côté, comme pour le télescope de Newton, ce qui évite de devoir percer le miroir primaire ;
- le télescope de Schmidt est formé d'un miroir primaire sphérique corrigé par une lame, dite de Schmidt (Fig. 11.8c).

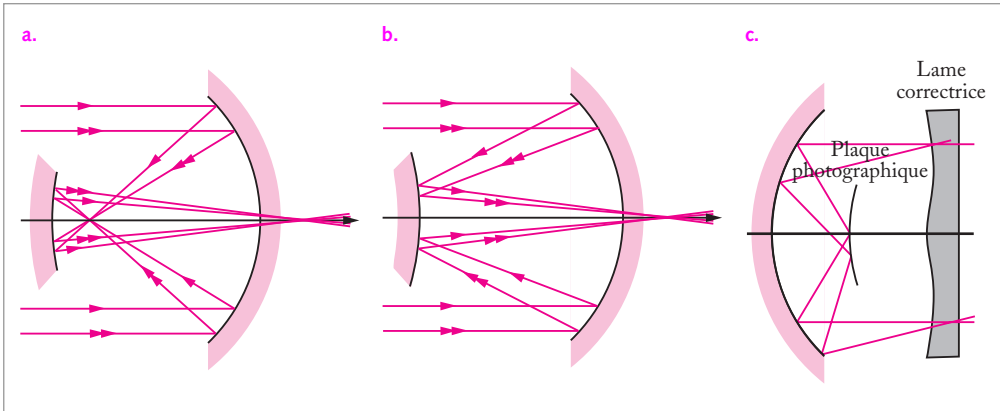


Fig. 11.8. a. Télescope de Grégory ; b. Télescope de Cassegrain ; c. Télescope de Schmidt.

## 11.4. La lunette de Galilée

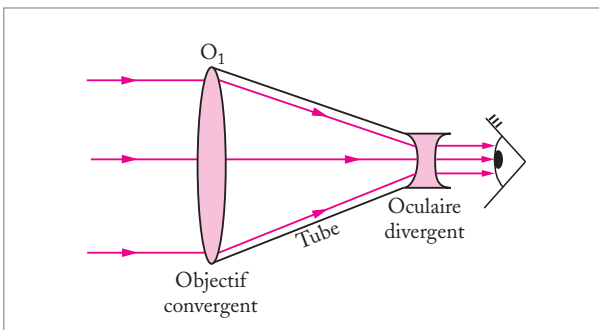


Fig. 11.9. Lunette de Galilée.

### 1 Histoire de la lunette de Galilée

La « lunette de Galilée » désigne l'instrument formé d'un tube comprenant, à l'une de ses extrémités, un objectif convergent et à l'autre extrémité, un oculaire divergent, l'ensemble étant utilisé pour l'observation d'objets lointains. C'est grâce à un instrument de ce type que le physicien et astronome italien

découvrit en 1610 les satellites de Jupiter, puis les phases de Vénus, les montagnes de la Lune, les étoiles dont est composée la Voie Lactée, ou encore l'aspect insolite de Saturne. Les observations de Galilée marquèrent un tournant dans l'histoire des sciences puisqu'elles apportaient la preuve de la réalité du système héliocentrique de Copernic.

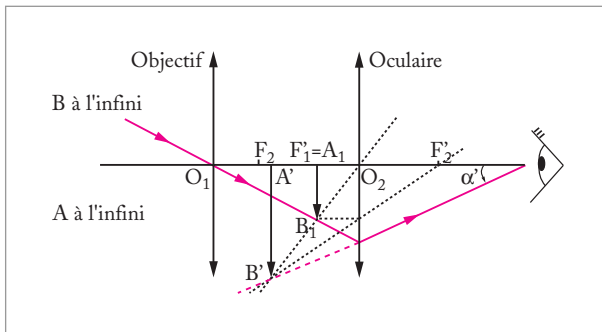
Ce n'est pourtant pas lui l'inventeur de la lunette qui porte son nom, même s'il en fut le premier utilisateur pour l'observation du ciel. C'est plus probablement Giambattista della Porta (1535-1615) qui eut l'idée d'une lunette d'approche vers 1590, lunette qui ne fut finalement révélé au grand public qu'en 1608 en Hollande. Galilée (1564-1642) prit connaissance de la conception de cette lunette et en fabriqua lui-même deux, qui sont aujourd'hui exposées au musée d'Histoire de la Science de Florence.

La lunette que Galilée construisit est constituée d'une lentille convergente formant l'objectif et donnant d'un objet à l'infini une image dans son plan focal image et d'un oculaire divergent placé de façon à donner une image définitive à l'infini que l'œil de l'observateur

peut voir sans accommoder (Fig. 11.9). Kepler montra en 1611 que l'on pouvait remplacer avantageusement l'oculaire divergent par un oculaire convergent. Mais il fallut attendre un demi-siècle pour que l'utilisation de cet instrument, qui correspond à une lunette astronomique, se répande. Le remplacement de l'objectif formé de lentilles par un miroir concave donna ensuite naissance au télescope, qui reste l'instrument fondamental des astronomes d'aujourd'hui. De nos jours, les lunettes de Galilée se sont plus utilisées que pour des jumelles.

## 2 Principe de fonctionnement

La lunette astronomique est un instrument optique constitué de deux lentilles convergentes ayant même axe optique et utilisé pour observer des objets très éloignés. L'objectif est une lentille de grande distance focale, de l'ordre du mètre, qui a pour rôle de donner de l'astre AB une image réelle réduite  $A_1B_1$ . Cette image est regardée par l'observateur à travers un oculaire de quelques centimètres de distance focale jouant le rôle de loupe.



**Fig. 11.10.** Construction de l'image d'un objet dans une lunette astronomique.

soit situé entre le plan de l'oculaire et son plan focal objet. L'image finale de l'astre à travers la lunette est inversée.

Dans une lunette, l'image intermédiaire occupe une position fixe dans le plan focal image de l'objectif. Le réglage se fait en déplaçant l'oculaire de manière à placer l'image définitive dans les limites de vision distincte nette pour l'œil. Par confort, la mise au point est faite afin que  $A'B'$  se forme au *punctum remotum*.

## 4 Grossissement angulaire d'une lunette

Le grossissement d'une lunette est par définition égal au rapport entre les diamètres apparents d'un objet vu à travers la lunette et vu à l'œil nu :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\alpha'}{A_1B_1} \frac{A_1B_1}{\alpha} = \frac{\alpha'}{A_1B_1} f_1$$

$$G = f_1 P_2$$

où  $P_2$  représente la puissance de l'oculaire.

## 3 Construction géométrique de l'image d'un objet

L'astre étudié peut être modélisé par un objet AB placé à l'infini (Fig. 11.10). Son image  $A_1B_1$  par l'objectif est une image réelle et renversée, située dans le plan focal image (passant par  $F_1$ ). Pour obtenir, par l'oculaire, une image virtuelle droite agrandie de  $A_1B_1$ , il faut que  $B_1$

Lorsque la lunette est afocale ( $F_1' = F_2$ ), la puissance de l'oculaire est égale à  $1/f_2'$ , le grossissement est alors intrinsèque et est égal à :

$$G = \frac{f_1'}{f_2'}$$

## 5 Pouvoir séparateur

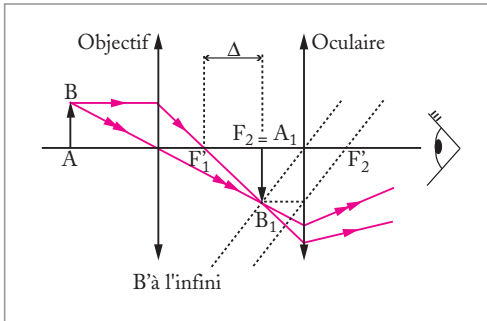
**Définition :** le pouvoir séparateur d'une lunette est la distance angulaire minimale entre deux astres dont la lunette donne des images distinctes.

On peut montrer qu'un objectif de rayon  $R$  sépare deux astres dont la distance angulaire  $\epsilon'$  (en minutes) est égale à  $\frac{1}{R}$ . Par ailleurs, le grossissement de l'oculaire doit être choisi pour satisfaire au pouvoir séparateur de l'œil  $\epsilon$ , c'est-à-dire :

$$G > \frac{\epsilon}{\epsilon'}$$

## Résumé du cours

### Le microscope



◆ La puissance  $P$  d'un microscope est le rapport entre le diamètre apparent  $\alpha'$  d'un objet  $AB$  vu à travers le microscope et sa dimension :

$$P = \frac{\alpha'}{AB}$$

◆ La puissance intrinsèque  $P_i$  d'un microscope correspond à la puissance obtenue lorsque l'image  $A'B'$  est renvoyée à l'infini :

$$P_i = \frac{\Delta}{f_1' f_2'}$$

◆ Le grossissement  $G$  d'un microscope est égal au rapport entre les diamètres apparents maximaux d'un objet vu à travers le microscope ou vu à l'œil nu à la distance minimale de vision distincte :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = P d_m$$

où  $d_m$  est la distance minimale de vision distincte.

## Exercices

**1** Un microscope a les caractéristiques suivantes : distance focale de l'objectif,  $f'_1 = 10$  mm ; distance focale de l'oculaire,  $f'_2 = 30$  mm ; distance entre le foyer image de l'objectif et le foyer objet de l'oculaire,  $L = 15$  cm. On suppose que le microscope est mis au point pour la vision à l'infini.

1. Calculer la puissance intrinsèque et le grossissement commercial de ce microscope.
2. Calculer la distance  $D$  de l'objet à l'objectif.
3. Dans ces conditions, calculer le grandissement  $\gamma$  de l'objectif, la puissance et le grossissement  $G$  de l'oculaire.

**2** Un œil normal dont le centre optique est au foyer image de l'oculaire, met au point un microscope de façon à ce que l'image se forme à la distance minimale de vision distincte, soit 20 cm. En supposant que le microscope a les caractéristiques suivantes : distance focale de l'objectif,  $f'_1 = 10$  mm ; distance focale de l'oculaire,  $f'_2 = 30$  mm ; distance entre le foyer image de l'objectif et le foyer objet de l'oculaire,  $L = 15$  cm.

1. Déterminer la distance  $D$  de l'objet à l'objectif.
2. En déduire la latitude de mise au point  $\delta$  de ce microscope.

**3** À l'aide d'une lentille convergente, de distance focale  $f'_1 = 20$  cm, on photographie une tour de hauteur  $h = 30$  m, située à une distance de 3 km.

1. Quelle sera sur le cliché la hauteur  $H$  de la tour ?

2. On place à  $D = 15,5$  cm en arrière de la première lentille, une lentille divergente, de distance focale  $f'_2 = -5$  cm. L'ensemble constitue un téléobjectif. Quelle est la hauteur  $H'$  de la nouvelle image ?

3. Quelle est la distance  $L$  de la première lentille à la plaque photographique (encombrement) ?

**4** Une lunette est constituée d'un objectif, assimilable à une lentille convergente  $L_1$  de distance focale 50 cm et d'un oculaire assimilable à une lentille divergente  $L_2$  de distance focale  $-5$  cm. La lunette est réglée pour que l'observation se fasse sans accommoder.

1. Comment obtenir ce réglage ?
2. Calculer le grandissement angulaire obtenu.
3. Sous quel angle voit-on une tour de 10 m de haut placée à 2 km ?

**5** On considère un microscope constitué de deux lentilles, l'objectif  $L_1$  et l'oculaire  $L_2$  de distances focales  $f'_1 = 5$  mm et  $f'_2 = 25$  mm. La distance entre les centres  $O_1$  et  $O_2$  des lentilles  $L_1$  et  $L_2$  est notée  $l$  et vaut 25 cm.

1. Un observateur place son œil au foyer image de l'oculaire et étudie un petit objet AB disposé dans un plan de front, le point A étant sur l'axe optique. Où doit-on placer A pour que l'œil effectue l'observation sans accommoder ?

2. On note  $\alpha'$  l'angle sous lequel on voit AB à travers le microscope et  $\alpha$  l'angle sous lequel il serait vu sans microscope. Calculer le rapport

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}.$$





# Les aberrations

Nous avons étudié les lois régissant la formation d'images par un système optique dans les conditions de Gauss. Nous avons vu également que, dans la plupart des cas, ces lois sont asymptotiques puisqu'elles résultent de développements limités valables uniquement dans l'approximation paraxiale (on parle d'images paraxiales). Dans le cas des systèmes optiques réels, les écarts à la théorie, pour laquelle un objet ponctuel donne une image ponctuelle, sont appelés les aberrations. Nous étudions dans ce chapitre deux types d'aberrations :

- les aberrations chromatiques, dues à la dispersion ;
- les aberrations géométriques, dues aux termes d'ordre supérieur ou égal à deux dans le développement limité du chemin optique (le premier ordre correspondant à l'approximation paraxiale).

## 12.1. Les aberrations chromatiques

- 1 Origine des aberrations
- 2 Les différentes aberrations chromatiques
- 3 Aberration chromatique de position. Exemple de la lentille et de la lame à faces parallèles
- 4 Aberration chromatique de grandeur

## 12.2. Aberrations géométriques

- 1 Généralités
- 2 Étude de l'aberration transversale ; aberration sphérique, coma, astigmatisme et distorsion

### Mots-clés

- Aberrations chromatiques
- Lumière polychromatique
- Dispersion

## 12.1. Les aberrations chromatiques

### 1 Origine des aberrations

Les aberrations chromatiques sont liées à la dispersion, c'est-à-dire à la variation de l'indice optique d'un milieu avec la longueur d'onde de la lumière.

Ainsi, en lumière polychromatique, le trajet des rayons est-il différent en fonction de la longueur d'onde. Ce phénomène est responsable des couleurs de l'arc-en-ciel ; nous l'avons également étudié pour le prisme. L'étude des aberrations chromatiques nécessite donc la connaissance du spectre de la lumière utilisée et de la courbe de dispersion des milieux constituant le système optique.

### 2 Les différentes aberrations chromatiques

Dans le cas général, la dispersion affecte l'image  $A'B'$  d'un objet  $AB$  à travers un système optique à la fois en position et en taille ; on parle de chromatisme axial ou chromatisme de position pour la dépendance de la position  $A'$  sur l'axe optique en fonction de la longueur d'onde et de chromatisme de grandeur pour la dépendance de la taille de l'image  $A'B'$  en fonction de la longueur d'onde.

### 3 Aberration chromatique de position.

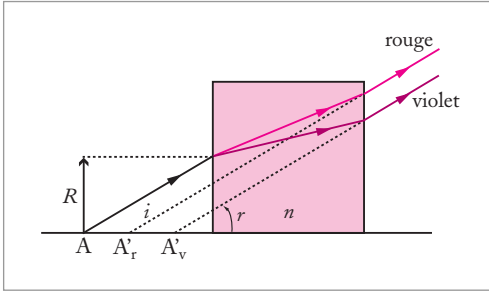
#### Exemple de la lentille et de la lame à faces parallèles

Si la mise au point de l'image est réalisée pour une longueur d'onde particulière. Le chromatisme de position implique que cette mise au point est perdue pour les autres longueurs d'onde ;

Si la mise au point est obtenue pour une longueur d'onde dans le rouge, le système est dit corrigé :

- du chromatisme primaire si la mise au point est obtenue pour une autre longueur d'onde,
- du chromatisme secondaire si la mise au point est obtenue pour deux autres longueurs d'onde.

S'il n'est pas du tout corrigé du chromatisme, la mise au point est perdue pour toutes les autres longueurs d'onde. Ainsi, pour un système non corrigé du chromatisme et dans le plan de mise au point pour le rouge, l'image verte est défocalisée et forme une tache de défaut de mise au point. Si le point  $A$  est sur l'axe optique, l'image  $A'$  rouge est également sur l'axe optique, au centre de la tache verte.



**Fig. 12.1.** Images rouge  $A'_R$  et violette  $A'_V$  de l'objet  $A$  à travers une lame à faces parallèles, en lumière polychromatique.

### Lame à faces parallèles

Prenons maintenant l'exemple d'une lame à faces parallèles, d'indice  $n$  et d'épaisseur  $e$ , limitée à l'entrée par un diaphragme circulaire de rayon  $R$ . Nous supposons que la taille du diaphragme est suffisamment petite pour que l'approximation paraxiale soit utilisée (Fig. 12.2). L'indice  $n$  de la lame dépend de la longueur d'onde  $\lambda$  de la lumière utilisée suivant la loi de Cauchy :

$$n^2 = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}$$

L'image  $A'$  d'un objet ponctuel  $A$  à travers la lame se forme, pour une radiation donnée, à la distance  $D$  de  $A$ , avec  $D = AA' = (n - 1)e$ . Nous voyons immédiatement que la distance  $D$  est une fonction de la longueur d'onde  $\lambda$ , puisque  $n$  dépend de  $\lambda$ . Ainsi, lorsque  $\lambda$  augmente, l'indice optique  $n$  de la lame diminue et la distance  $D$  entre l'objet  $A$  et son image  $A'$  diminue. L'image rouge  $A'_R$  est donc plus proche de son objet que l'image violette  $A'_V$ . Considérons le plan de mise au point de l'image violette et déterminons la taille de la tache rouge qui l'entoure (la plus large dans le spectre blanc puisque la plus défocalisée par rapport à la violette).

Le rayon  $r$  de la tache rouge dans le plan de mise au point de l'image violette est déterminé par le rayon extrême qui passe par le bord du diaphragme. L'angle  $i$  que forme ce rayon avec la normale à la lame est donné par  $\tan i = R/L$  où  $L$  est la distance de l'objet  $A$  à la lame (Fig. 12.1).  $r$  est alors obtenu simplement :

$$\tan i = \frac{r}{A'_R A'_V}$$

Nous avons donc :

$$r = \frac{R A'_R A'_V}{L}$$

Avec  $A'_R A'_V = D_V - D_R = (n_V - n_R)e$ , nous obtenons finalement :

$$r = R (n_V - n_R) \frac{e}{L}$$

La taille de la tache croît linéairement avec la taille  $R$  du diaphragme et décroît avec la distance  $L$  de l'objet  $A$  à la lame.

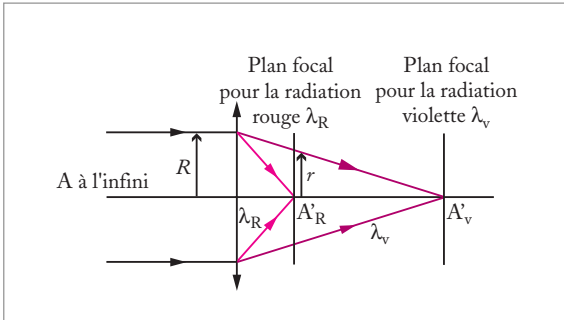
### Lentille mince

Dans le cas d'une lentille mince plongée dans l'air, la vergence  $C$  de la lentille est donnée par :

$$C = \frac{1}{f}, = (n - 1) \left( \frac{1}{S_1 C_1} - \frac{1}{S_2 C_2} \right)$$

On en déduit la variation relative de la distance focale  $f$  de la lentille en fonction de la longueur d'onde en effectuant la dérivée logarithmique de l'expression de  $C$  :

$$\frac{dC}{C} = -\frac{df'}{f'} = \frac{dn}{n-1}$$



**Fig. 12.2.** Images rouge  $A'_R$  et violette  $A'_V$  d'un objet  $A$ , situé à l'infini sur l'axe optique, à travers une lentille mince parallèles, en lumière polychromatique.

Suivant la loi de variation de Cauchy, qui prévoit que l'indice optique augmente lorsque la longueur d'onde diminue, nous voyons que la distance focale augmente avec la longueur d'onde (les points focaux correspondant à la radiation violette sont plus proches de la lentille que les points focaux correspondant à la radiation rouge). En conséquence, l'image d'un objet  $A$  à l'infini sur l'axe optique se forme pour la radiation rouge plus proche de la lentille que pour la radiation violette.

Le rayon  $r$  de la tache image de la radiation violette (Fig. 12.2) dans le plan de mise au point pour la radiation rouge (plan focale pour la radiation rouge) est donné en fonction du rayon  $R$  du diaphragme qui limite la lentille par :

$$r = R \frac{f'_R}{f'_v}$$

De façon générale, un système optique est dit sous corrigé pour l'aberration chromatique en position lorsque l'image se déplace dans le sens inverse de celui de la lumière lorsque la longueur d'onde diminue, soit du rouge au violet. Il est dit sur corrigé dans le cas contraire. Il apparaît ainsi que la lame à faces parallèles et la lentille mince pour un objet à l'infini sont des exemples de systèmes sur corrigés pour l'aberration chromatique en position.

## & Développement

Recherche

### Aberration chromatique de l'œil : le test duochrome

L'aberration chromatique de l'œil est à la base du test de vision duochrome. Dans ce test, on éclaire par derrière une surface translucide recouverte de deux filtres contigus, l'un vert et l'autre rouge. Sur chaque moitié, on dessine des cercles concentriques noirs. Un sujet emmétrope voit les cercles égale-

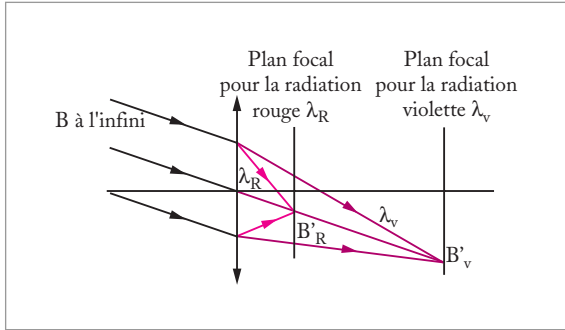
ment nets car il est emmétrope pour la radiation verte et hypermétrope pour la radiation rouge (il voit net sur le fond rouge en accommodant). Un sujet myope voit les cercles plus nets sur fond rouge pour lequel sa myopie est moins forte.

## 4 Aberration chromatique de grandeur

Le chromatisme de grandeur intervient lorsque le point objet  $B$  est hors de l'axe, ou lorsqu'on considère l'image  $A'B'$  d'un objet transverse  $AB$ , le point  $A$  étant sur l'axe. En effet,

dans le plan de mise au point de l'image rouge de B, l'image violette de B apparaît comme une tache dont le centre n'est plus, en général, confondu avec l'image rouge de B (Fig. 12.3).

Notons que le chromatisme de grandeur n'est pertinent que pour un système centré. Ainsi, dans l'exemple de la lame à faces parallèles, tous les points objets sont affectés par le chromatisme de position mais pas par le chromatisme de grandeur.



**Fig. 12.3.** Images rouge  $B'_R$  et violette  $B'_V$  d'un objet B, situé à l'infini hors de l'axe optique, à travers une lentille mince, en lumière polychromatique.

Dans le cas d'une lentille mince munie d'un diaphragme, on observe un chromatisme de grandeur mais pas le décentrement des taches images correspondant à différentes longueurs d'onde. Nous avons vu que la distance focale augmente avec la longueur d'onde ce qui a pour conséquence que l'image violette d'un objet AB à l'infini est plus petite que son image rouge.

De façon générale, on dit que le système optique est sous corrigé pour l'aberration chromatique en

grandeur si la taille de l'image d'un objet transverse augmente avec la longueur d'onde, c'est-à-dire en passant du violet au rouge ; le système est dit sur corrigé dans le cas contraire. Dans le cas de la lentille, le système est donc sur corrigé pour l'aberration chromatique en grandeur (Fig. 12.3).

## Recherche & Développement

### Dénomination des verres

Les verres optiques étaient anciennement classés dans deux catégories. La première catégorie regroupe les verres de relativement faible dispersion comme les crowns (verres ordinaires). La seconde catégorie concerne les verres de plus forte dispersion, tels que le flint, verre lourd au plomb.

Pour définir la dispersion d'un verre, on utilise un paramètre appelé nombre d'Abbe ou

$$\text{constringence } N = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C} . n_d \text{ désigne l'indice}$$

optique du verre pour la raie d de l'hélium à 587,6 nm,  $n_F$  et  $n_C$  les indices du verre pour les raies F et C de l'hydrogène, de longueurs d'onde respectives 486,1 nm et 656,3 nm.

La classification des verres optiques s'est enrichie récemment avec la découverte de nouveaux matériaux. Dans une première nomenclature, l'indice  $n_d$  d'un verre était repéré par une lettre (A pour  $n_d = 1,4$  ; B pour  $n_d = 1,5$  ; C pour  $n_d = 1,6$  etc.) à laquelle étaient accolés les deux chiffres suivants de  $n_d$  et les deux chiffres désignant la constringence. Ainsi, le verre  $n_d = 1,517$  et  $N = 64,2$  était repéré par B1764 (la constringence n'était alors repérée que par deux chiffres). Dans le système international actuel, le code X : Y désigne un verre d'indice  $1 + X/1000$  pour la raie d et de constringence  $Y/10$  ; ainsi, le code 517 : 642 désigne un verre tel que  $n_d = 1,517$  et  $N = 64,2$ .

## 12.2. Les aberrations géométriques

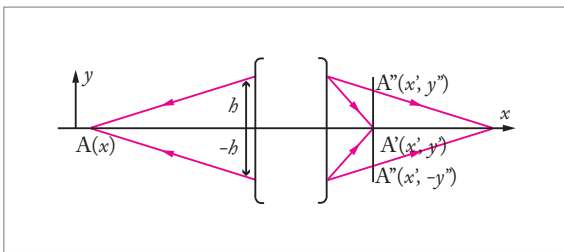
### 1 Généralités

L'utilisation courante des instruments optiques se fait souvent dans des conditions éloignées des conditions de Gauss, par exemple lorsque les images sont de grandes dimensions ou les pupilles de grande ouverture. Les écarts aux conditions de Gauss sont appelés aberrations géométriques. L'approximation de Gauss correspond à un développement limité au premier ordre du chemin optique. L'étude des aberrations géométriques consiste à prendre en compte les ordres supérieurs afin d'évaluer l'écart à ce comportement asymptotique.

### 2 Étude de l'aberration transversale ; aberration sphérique, coma, astigmatisme et distorsion

L'étude de l'aberration transversale consiste à évaluer le développement limité donnant l'intersection  $A''$  des rayons émergents avec le plan de front de  $A'$ , image de  $A$  à travers le système optique obtenue dans l'approximation de Gauss. Notons les coordonnées des points  $A(x, y)$ ,  $A'(x', y')$  et  $A''(x'', y'')$  ; l'aberration transversale correspond au vecteur  $A'A''$ . Supposons, pour simplifier, que l'objet se situe sur l'axe optique en  $y = 0$ .

L'aberration transversale est fonction de la position  $x$  de l'objet  $A$  et de la hauteur d'incidence  $h$  du rayon sur le système optique et est mesurée par  $dy' = y'' - y'$ . Dans l'approximation paraxiale, correspondant à un développement limité à l'ordre 1, cette différentielle  $dy'$  est nulle. On en déduit que  $dy'$  est au minimum d'ordre 2.



**Fig. 12.4. Aberration transversale.**  $A$  et  $A'$  sont conjugués à travers le système optique dans l'approximation de Gauss. Les rayons issus de  $A$ , incidents sur la face d'entrée du système optique à la hauteur  $h$  de l'axe optique, émergent du système optique et coupent le plan de front de  $A'$  en  $A''$ .  $A''$  diffère de  $A'$  si les rayons considérés ne sont pas paraxiaux.

Considérons maintenant un système centré. Le rayon incident symétrique de celui considéré donne un rayon émergent symétrique de celui, émergent, considéré. On en déduit que  $dy'$  est une fonction impaire de  $h$ . De façon plus générale, si le point objet n'est pas sur l'axe optique, par exemple un point  $B$  de coordonnées  $(x, y)$ , la différentielle  $dy'$  est fonction impaire de  $y$  et de  $h$ . Le terme non nul d'ordre le plus bas en  $dy'$  est donc celui d'ordre 3 composé des termes en  $h^3$ ,  $h^2y$ ,  $hy^2$  et  $y^3$ .

Par définition, on appelle « aberration sphérique », l'aberration due aux termes indépendants de  $y$ , c'est-à-dire, à l'ordre 3, au terme  $h^3$ . Cette aberration est purement liée à la taille du diaphragme, c'est-à-dire à la dimension maximum de  $h$ . Elle est appelée aberration d'ouverture. Lorsque l'intersection avec l'axe optique des rayons émergents se déplace dans le sens opposé à celui de la propagation de la lumière, on dit que le système est sous corrigé pour l'aberration sphérique ; le système est dit sur corrigé dans le cas contraire.

Correction	Type d'aberration
$h^3$	Aberration sphérique
$h^2y$	Coma
$hy^2$	Astigmatisme

**Fig. 12.5. Types d'aberration et corrections correspondantes.**  $h$  est la hauteur du rayon incident sur la face d'entrée du système optique par rapport à l'axe optique et  $y$  la hauteur du point objet par rapport à l'axe optique.

L'aberration due au terme proportionnel à  $y$  (terme  $h^2y$  à l'ordre 3) est appelé le « coma », aberration d'ouverture liée à la position transverse des objets. Les termes proportionnels à  $h$  sont responsables de l'« astigmatisme » et de la courbure de champ. Enfin, les termes indépendants de  $h$  sont responsables de l'aberration dite de « distorsion ».

### Approfondissement

L'approximation dans laquelle un objet ponctuel  $A$  forme une image ponctuelle  $A'$  se traduit de plusieurs façons :

- 1- les rayons émergeant du système optique forment un cône de sommet  $A'$  ;
- 2- les surfaces d'onde émergeant du système optique sont des sphères de centre  $A'$ .

Ces deux définitions d'un couple  $(A, A')$  de points conjugués correspondent à deux approches des aberrations géométriques. La première conduit à l'étude des aberrations transversales, la seconde à l'étude des écarts à la surface d'onde, les deux notions étant liées.

Pour étudier l'écart à la surface d'onde, c'est-à-dire l'écart entre la forme réelle des surfaces d'onde et celle, sphérique, de la surface d'onde sphérique obtenue dans l'approximation paraxiale, il faut déterminer l'expression de la variation  $dL$  de chemin optique aux ordres supérieurs à 1, qui est l'ordre retenu dans l'approximation paraxiale. On peut montrer que pour un objet situé à la distance  $y$  de l'axe optique, et en repérant en coordonnées sphériques  $(r, \theta)$  dans un plan de

coupe la surface d'onde, la variation  $dL$  du chemin optique se met sous la forme d'une somme de termes proportionnels à  $y^{2i+k}r^{2j+k}\cos^k\theta$ ,  $i, j$  et  $k$  étant des entiers avec  $(j, k)$  non nuls. Les termes  $r^2$  et  $r \cos \theta$  ne sont pas responsables de vraies aberrations, on parle de défaut de mise au point. On retrouve les aberrations classiques :

- l'aberration sphérique due au terme en  $r^4$  ( $i = 0, j = 2, m = 0$ ) ;
- la coma due au terme en  $yr^3\cos\theta$  ( $i = 0, j = 1, m = 1$ ) ;
- l'astigmatisme due au terme  $y^2r^2\cos^2\theta$  et  $y^2r^2$  ( $i = 0, j = 0, m = 2$  ou  $i = 1, j = 1, m = 0$ ) ;
- la distorsion due au terme en  $y^3r\cos\theta$  ( $i = 1, j = 0, m = 1$ ).

L'écart aberrant, lié à un écart au niveau de la surface d'onde, et l'aberration transversale, calculée au niveau de l'image, sont liés par les formules de Nijboer (qui prévoit notamment qu'un écart à la surface d'onde en  $r^m$  entraîne une aberration transversale en  $r^{m-1}$ ).





# Réponse aux exercices

## Chapitre 1

**1** Il s'agit d'une onde électromagnétique mais pas nécessairement d'une onde lumineuse.

**2** Même réponse que pour l'exercice 1 ; l'indice de l'eau est  $n = 1,33$ .

**3**  $f_1 = f_2 = 3,895 \cdot 10^{14}$  Hz,  $v_1 = 3 \cdot 10^8$  m.s<sup>-1</sup>,  $v_2 = 1,89 \cdot 10^8$  m.s<sup>-1</sup>,  $\lambda_2 = 486$  nm et  $\lambda_1 = 770$  nm.

## Chapitre 2

**1**  $d = e \sin i [(n^2 - \sin^2 i)^{1/2} - \cos i] / [n^2 - \sin^2 i]^{1/2}$

**2**  $i = \arctan n$

**3**  $b' = 15$  cm

**4** La formule approchée de Kepler convient jusqu'à  $i = 20^\circ$ .

**5** 1.  $d = R \sin(i/n)$ .

2. Le diamètre apparent est égal à  $2na$ .

**6** 1.  $n = (N^2 - \sin^2 i')^{1/2} = 1,5$ .

2.  $\Delta n = 1,8 \cdot 10^{-4}$ .

**7** 1.  $i_2 = 19,5^\circ$ ;  $i_3 = 22^\circ$ .

2. Quelle que soit la valeur de l'angle d'incidence  $i_1$ , les angles  $i_2$  et  $i_3$  existent.

3. En vertu du principe du retour inverse de la lumière, les rayons provenant de l'intérieur de l'aquarium sous une incidence supérieure à  $i_3 = 49^\circ$  seront réfléchis totalement.

**8** 1.  $\sin i_d = 1/(5)^{1/2} (n_2/n_1) = 30,29^\circ$ .

2. Pour des valeurs  $i < i_c$ , avec  $\sin^2 i_1 = (n_2/n_1)^2 - 1$ .

**9** Le vacancier doit choisir le chemin le plus rapide et non le chemin le plus court.

## Chapitre 3

**1** 1.  $D = 2i - 4r + \pi$ .

2.  $\cos^2 i_m = (n^2 - 1)/3$ .

3.  $i_m = 59^\circ 20'$  et  $r_m = 39^\circ 30'$ .

4.  $\Delta D = 3,35 \cdot 10^{-4}$  rad.

**2**  $D = (n - 1) A$

**3**  $D_m(\text{air}) = 37^\circ$  et  $D_m(\text{eau}) = 8^\circ$ .

**4** 1.  $n = (N^2 - \sin^2 i)^{1/2} = 1,5$   
avec  $n^2 + 1 > N^2$

2.  $\Delta n = 1,8 \cdot 10^{-4}$ .

**5** 1.  $n_0 < n \sin \beta = 1,23$ .

2.  $D = \pi/2 - i'' = 41,41^\circ$   
(avec  $i'' = -\arcsin(ncos(2\beta)) = 48,59^\circ$ ).

**6** 1.  $r = \arcsin(n \sin \beta) = 49^\circ$ .

2.  $\beta > \beta_1 = \arcsin(1/n) = 41,5^\circ$ .

3.  $\beta' = i = 45^\circ$ .

## Chapitre 4

**1** 1.  $L = nOA/\cos i - n'OA'/\cos i'$ .

2.  $OA/n = OA'/n'$ .

**2** 2.  $L = n [p^2 + 2x(R - p)]^{1/2} + n' [p'^2 + 2x(R - p')]^{1/2}$ .

3.  $L \approx -np + n'p'$ .

**3**  $p = (1 + n'/n)R$  et  $p' = (1 + n/n')R$ .

**4** 1.  $n \overline{AB} \sin \alpha = n' \overline{A'B'} \sin \alpha'$ .

2.  $n \overline{AC} \sin^2(\alpha/2) = n' \overline{A'C'} \sin^2(\alpha'/2)$ .

**5** 1.  $L = n[(R^2 + r^2 - 2rR \cos \alpha)^{1/2} + (R^2 + r'^2 - 2r'R \cos \alpha)^{1/2}]$ .

2.  $L \approx nR [2 - (r - r') \cos \alpha / R + (r^2 + r'^2) / 2R^2]$ , la condition de stigmatisme approché est obtenue pour des couples de points symétriques par rapport au centre C du miroir, tels que :  $L = 2nR + \varepsilon$

## Chapitre 5

**3** 1.  $f' = 0,5$  m.

2.  $D = RL / (2L - R)$ .

**4**  $D = 2(\pi - \theta)$

**5**  $R = d_2(d_2 - 2d_1) / (d_1 - d_2) = 80$  cm.

## Chapitre 8

**2**  $d = B'A' = f' \tan \alpha \approx f' \alpha$

**3**  $\overline{OB'} = -24$  cm,  $\overline{A'B'} = -3$  cm.

**4**  $\overline{OB} = -25$  cm,  $\overline{OB'} = 100$  cm.

**5** 2.  $f' = 8$  cm,

3.  $A'B' = 8$  cm et  $A'B'' = 0,5$  cm.

**6** 2.  $\overline{OB'} = -f' [2D(f' + \overline{OB}) - f' \overline{OB}] / [(2D - f')(f' + \overline{OB}) - f' \overline{OB}]$

$\overline{B'A'} = f'^2 \overline{AB} / [(2D - f')(f' + \overline{OB}) - f' \overline{OB}]$ .

**7** 1.  $\overline{OB} = -60$  cm.

2.  $n = 1,5$ .

**8** 1.  $f' = 40$  cm.

2.  $\overline{O_1B'} = -3,6$  cm et  $\overline{OO_1} = 63,6$  cm.

**9** 1. La lentille est convergente.

2.  $f'_1 = 0,75$  m.

3. La première lentille est convergente, l'objet est à 3 m ou à 1 m de la lentille,  $f'_1 = 1/1,33$  m ; la seconde lentille est

divergente et de distance focale  
 $f'_2 = -1/0,33 = -3$  m.

$$\mathbf{10} \quad \overline{O_1F} = f'_1(d - f'_2) / (f'_1 + f'_2 - d)$$

$$\overline{O_2F} = f'_2(f'_2 - d) / (f'_1 + f'_2 - d)$$

**11** 1. Pour obtenir un système afocal, il suffit de faire coïncider le plan focal image de la première lentille avec le plan focal objet de la seconde.

## Chapitre 10

**1** 1. Au repos  $f'_1 = 1,5$  cm ; en accommodation maximale  $f'_2 = 1,4$  cm.

2. On trouve une variation de 0,8 mm.

**2**  $f' = -20$  cm.

**3**  $D = 33,9$  cm.

**4** 1. Avec  $d = 0$ , nous obtenons  $l = 7,5$  cm ; avec  $d = f'$ , nous obtenons  $l = 16,7$  cm.

2.  $L(d = 0) = 11,1$  cm et  $L(d = f') = 21$  cm.

**5**  $P(d = 0) = 9 \delta$  et  $P(d = f') = 10 \delta$ .

**6** 1. La lentille est divergente avec  $f' = -20$  cm.

2.  $l = 13$  cm.

3. L'œil voit alors entre l'infini et une distance de 61 cm.

**7** 1.  $f'_2 = 60$  cm, la lentille est convergente.

2.  $D = 18$  cm.

## Chapitre 11

**1** 1.  $P_i = 500 \delta$  ;  $G_c = 125$ .

2.  $D = 1,06$  cm.

3.  $\gamma = 15$ ,  $G = 8,3$ .

**2** 1.  $D = -25,5$  mm.

2.  $\delta = 2 \cdot 10^{-5}$  m = 20  $\mu$ m.

**3** 1.  $H = 2$  mm.

2.  $H'' = 2$  cm.

3.  $L = 60,5$  cm.

**4** 2.  $\alpha'/\alpha \approx 10$ .

3.  $\alpha' = 5 \cdot 10^2$  rad.

**5** 1. L'objet A doit être placé à 5,11 mm avant l'objectif.

2.  $G = 493$ .









Imprimé en France par Chirat – 42540 Saint-Just-la-Pendue  
N° d'imprimeur : 6232 – N° d'édition : 003035-01  
Dépôt légal : Octobre 2002