

Roland Omnès

**Comprendre
la mécanique
quantique**





COMPRENDRE

LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

Roland Omnès



7, avenue du Hoggar
Parc d'activité de Courtabœuf, BP 112
91944 Les Ulis Cedex A, France

Couverture : Eric Bonnet
Composition : Soft Office, Patricia Cordini

© EDP Sciences 2000

La version anglaise a été publiée en 1999 par Princeton University Press

ISBN : 2-86883-470-1

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés, réservés pour tous pays. La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (alinéa 1^{er} de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du code pénal.

À Liliane

Table des matières

AVANT-PROPOS	7
PREMIÈRE PARTIE. Genèse de la mécanique quantique	9
La constante de Planck	11
L'atome de Bohr et ses limites	21
La mécanique des matrices	31
La mécanique ondulatoire	39
DEUXIÈME PARTIE. Un survol de l'interprétation, des origines à l'époque actuelle	45
L'interprétation de Copenhague	49
L'interprétation après Copenhague	61
L'interprétation aujourd'hui	73
TROISIÈME PARTIE. L'interprétation reconstruite	87
Principes	89
Propriétés quantiques	101

Propriétés classiques	109
La dynamique classique	121
Histoires	129
L'état d'un système	137
Les histoires rationnelles	149
La complémentarité	159
Déterminisme et sens commun	169
L'effet de décohérence	179
Théorie de la décohérence	189
Décohérence et mesures	201
Questions « de fond »	215
La théorie des mesures	225
Quelques expériences notables	235
NOTES ET COMMENTAIRES	253
RÉFÉRENCES	263
INDEX	271

Avant-propos

Ce livre a pour but d'offrir un exposé, aussi simple et direct que possible, de l'interprétation de la mécanique quantique. Il s'adresse à des lecteurs ayant déjà une connaissance préliminaire de la théorie quantique elle-même, telle qu'on la dispense dans un cours de licence ou dans les cours analogues des grandes écoles.

Un tel ouvrage m'a paru utile car, s'il existe un grand nombre d'exposés de la mécanique quantique, dont beaucoup d'excellents, ils ne laissent à l'interprétation (et à l'histoire) que la portion congrue. Or, l'une des définitions de l'interprétation est qu'elle se propose de comprendre la physique quantique, et l'expérience de tout enseignant lui montre que c'est là que le bât blesse et que les étudiants (parfois même des physiciens aguerris) rencontrent le plus de difficultés. Il m'a semblé qu'écrire un traité de plus sur la théorie quantique, ses fondements, ses méthodes et ses applications ne s'imposait pas et qu'il était préférable de circonscrire le projet en faisant de celui-ci un complément à d'excellents livres déjà publiés, comme par exemple ceux de Messiah, Basdevant ou Cohen-Tannoudji, Diu et Laloë mais, développant l'interprétation et esquissant l'histoire.

L'essentiel du livre porte sur l'interprétation. Bohr, Heisenberg et Pauli en ont posé les bases et rien n'est venu vraiment les ébranler depuis. Pourtant certains aspects de cette « interprétation de Copenhague » ont vieilli, d'autres se sont révélés fragiles, ou incomplets. Il ne saurait donc plus être question de répéter aujourd'hui les pensées des fondateurs, telles qu'elles furent écrites. On est, sans doute, plus fidèle à leur esprit en rafraîchissant leurs dires qu'on ne l'est en les pérennisant.

Deux découvertes importantes ont conduit à renouveler l'interprétation de Copenhague (un nom qui est devenu courant dans les années cinquante et que je réserverai à l'œuvre de Bohr, Heisenberg et Pauli pour éviter les confusions). La première fut la décohérence, un effet responsable de l'absence d'interférences quantiques au niveau macroscopique et du salut des chats (de Schrödinger). L'effet a été récemment confirmé par l'expérience, et on ne peut plus l'ignorer, si l'on veut comprendre ce qu'est une mesure en physique quantique. La seconde fut la dérivation, maintenant achevée, de la physique classique à partir du quantique, le déterminisme classique s'insérant en particulier dans le probabilisme quantique. Ces résultats, qui sont l'issue d'un long travail auquel de très nombreux chercheurs ont contribué, éclairent toute l'interprétation d'un jour nouveau.

Si les deux points précédents sont à ma connaissance incontestés, il n'en va pas toujours de même d'un autre apport important : celui des histoires de Griffiths qu'on appellera ici histoires rationnelles. Certains ont pu croire qu'il s'agissait d'un effort (désespéré d'avance) pour réintroduire un réalisme simpliste dans le monde quantique, alors qu'il s'agit de bien autre chose. Les histoires fournissent, à mon sens, une méthode, un moyen pour apporter plus de clarté et d'organisation dans une interprétation qui risquerait trop aisément de se muer en labyrinthe. On peut, certes, se passer des histoires, comme on peut se passer d'une pelleuse et préférer la pelle pour creuser les fondations d'un immeuble. Les utiliser ou non est une simple question de méthode, ou plutôt de langage, car on verra que les histoires ne sont rien d'autre que le langage qui convient le mieux à l'interprétation.

J'ai voulu écrire ici un manuel commode et non un traité savant, ce qui entraîne plusieurs conséquences. Les développements techniques sont écartés et les arguments se veulent simples, autant que possible. Je n'ai pas voulu faire œuvre d'érudition ni rendre compte de toutes les recherches sur l'interprétation qui vont dans de multiples directions, souvent spéculatives. Des conseils de lecture tentent de remédier, en partie, à ces omissions. L'histoire de la mécanique quantique et de son interprétation est cependant présentée ici, parce qu'elle est souvent négligée dans les ouvrages dont celui-ci se voudrait le complément, mais aussi parce qu'elle éclaire de manière irremplaçable des questions toujours présentes depuis près d'un siècle.

L'attention sera centrée sur la physique et il y aura donc peu d'incursions dans le domaine de l'épistémologie, bien qu'on ne puisse entièrement l'ignorer. On ne s'interrogera pas sur l'explication dernière de la réalité que la mécanique quantique pourrait apporter ou escamoter, car on envisage, avant tout, celle-ci comme une science empirique. Cela ne dispense évidemment pas de signaler les problèmes qui demeurent, ou les points de vue nouveaux qui sont apparus récemment, mais jamais au-delà de ce que la majorité des physiciens s'accordent à juger digne d'intérêt.

Ce livre s'appuie surtout sur les travaux de Roger Balian, Bernard d'Espagnat, Murray Gell-Mann, Robert Griffiths, Serge Haroche, James Hartle, Lars Hörmander, Jean-Michel Raimond, Hans Dieter Zeh et Wojciech Zurek et les miens également. Il doit beaucoup aux échanges que j'ai eu, avec ces auteurs. D'autres physiciens, chimistes ou philosophes, trop nombreux pour les citer tous, m'ont éclairé en de nombreuses occasions. Je voudrais évoquer, pour terminer, la mémoire d'Edmond Bauer, dont je fus le collaborateur lors de la traduction d'un ouvrage de Bohr. C'est grâce à lui, à sa finesse aimable et sa profondeur pénétrée de clarté que je réalisai n'avoir pas compris la mécanique quantique, bien que sachant m'en servir convenablement.

Peu après, Feynman écrivait que « personne ne comprend la mécanique quantique » (*I can safely say that nobody understands quantum mechanics*, Feynman, 1965, page 129 dans l'édition Dover). Je pense, avec quelques-uns dont le nombre va croissant, qu'on peut beaucoup comprendre grâce aux découvertes intervenues depuis, et ce livre est aussi un peu une réflexion sur la signification du mot « comprendre ».

PREMIÈRE PARTIE

GENÈSE DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

Pourquoi s'appuyer sur l'histoire ?

1. La distance qui sépare la physique classique de son homologue quantique est si grande qu'on s'étonne encore qu'elle ait pu être franchie. Ce sont deux conceptions du monde que tout semble opposer. La première repose concrètement sur ce qu'on peut voir et toucher, sur quoi aussi on peut agir. Elle est foncièrement causale, en poussant la causalité à l'extrême du déterminisme. La seconde physique pénètre dans un monde inaccessible à nos sens et que, seules, des mathématiques abstraites décrivent. Ce qu'on voit y est remplacé par des fonctions d'onde ; des quantités telles qu'une position ou une vitesse qu'on exprimait par des nombres deviennent des matrices, des opérateurs, des notions de mathématique pure. Au lieu de la certitude excessive du déterminisme, on a affaire à un hasard absolu. L'antagonisme semble total.

Ces deux visions du monde concordent cependant et l'on sait, à présent, que la physique classique se déduit de la physique quantique. Dans les circonstances familières de notre environnement ordinaire, très loin de l'échelle des atomes, le quantique devient classique. L'opposition n'en reste pas moindre et, pour comprendre la physique quantique comme nous en avons l'intention, une première question s'impose. C'est celle de comprendre comment on a pu parvenir à pénétrer le monde atomique tellement éloigné de toute intuition et comment apparurent les concepts étranges qui y ont cours. Comprendre ces concepts sera plus tard notre tâche principale et il convient donc de voir, au préalable, comment ils en sont venus à s'imposer.

Au dix-neuvième siècle, la majorité des chimistes s'étaient convaincus peu à peu de l'existence d'atomes se liant pour former des molécules et passant d'une molécule à une autre lors des réactions. On était même parvenu à connaître la forme géométrique de certaines d'entre elles. Les physiciens avaient compris, à leur tour, que la multitude des molécules permettait de comprendre les lois de la thermodynamique par le seul jeu des grands nombres. Des questions lancinantes restaient cependant sans réponse. Ainsi, il existe des corps solides ; c'est donc que les atomes

refusent de se pénétrer. Mais les atomes s'accrochent pour former des molécules. Quelles forces engendrent, à la fois, cette répulsion et cette attraction qu'on ne semble pas pouvoir attendre des forces électriques ? On se demandait aussi comment des électrons se déplacent au travers de l'empilement serré des atomes dans un fil de cuivre, alors qu'ils sont bloqués dans un diélectrique.

On pourrait allonger indéfiniment cette liste de questions qui se résume en une seule : que deviennent les lois de la physique au niveau des atomes ?

L'histoire détaillée de la réponse, c'est-à-dire de la découverte de la physique quantique, est complexe. Elle est semée d'événements étonnants, d'idées géniales et d'obstacles qui parurent infranchissables. Elle recèle cependant la clef d'un changement majeur dans les modes de pensée de la science. Si l'on fait l'économie de cette histoire, on peut certes arriver plus vite aux connaissances actuelles mais, quand vient le désir de vraiment comprendre, on se retrouve toujours, d'une manière ou d'une autre, à reparcourir des chemins, des questions déjà rencontrés autrefois. La difficulté de vraiment comprendre une idée, une vision, un concept, se mesure toujours au temps et à l'effort qu'il fallut à l'humanité pour les créer et les maîtriser. Jamais hommes ne s'impliquèrent davantage dans l'effort de comprendre que les découvreurs, et ils refusaient de se contenter de peu. En résumé, il faut bien plus de profondeur et d'intelligence pour parvenir à comprendre en se passant de l'histoire qu'il ne faut de patience pour se laisser instruire par elle.

Il vaut mieux cependant que l'histoire, ainsi mise à contribution pour mieux comprendre la science, éclaire l'esprit sans le perdre dans les détails. Il faut y retrouver l'essentiel. C'est pourquoi, en puisant dans le patient et rigoureux travail des historiens, nous allons parcourir cette histoire en la simplifiant et la structurant sans vergogne au vu du savoir acquis. Une telle démarche serait hérétique pour l'historien s'il s'agissait de conter une histoire strictement humaine, accidentelle et sans lois sous-jacentes. Elle se justifie lorsque d'autres lois, celles de la nature, sont en jeu et qu'elles peuvent éclairer les circonstances de leur découverte.

On songe, à ce propos, à la fameuse phrase d'Einstein : « Dieu est subtil, mais il n'est pas méchant ». Il semble en effet qu'existaient, dans le labyrinthe des atomes, certains passages privilégiés, certains problèmes providentiellement simples, révélateurs, et peut-être les seuls qui puissent conduire de la pensée classique à la quantique. C'est par eux qu'est passé le chemin de l'histoire et, encore à présent, avec tout le savoir accumulé, nous avons peine à imaginer quelle autre voie aurait pu être suivie. Ces problèmes fatidiques ne sont qu'au nombre de deux. Le premier est l'oscillateur harmonique grâce auquel la pierre de touche du quantique, la constante de Planck, apparaît pour la première fois, sans aucun mélange. L'autre « paradigme » est l'atome d'hydrogène, grâce au fait que les lois quantiques y prennent l'apparence de lois classiques simplement augmentées de quelques compléments. C'est une circonstance unique et étonnamment favorable alors que, partout ailleurs, les lois quantiques n'ont rien qui soit aussi propice.

2. La première partie de l'histoire de la mécanique quantique est donc celle du premier problème parfait et elle commence au dix-neuvième siècle. Elle passe par une étape essentielle en 1900 et on peut la considérer comme achevée en 1911. Son bilan est facile à décrire : des lois physiques, plus subtiles qu'on ne pensait, gouvernent un oscillateur harmonique. Ces lois sont régies par une seule quantité, outre la fréquence ν de l'oscillateur : la constante de Planck qu'on désigne par h et qui a les dimensions d'une « action » (de la forme $ML^2 T^{-1}$).

Cette constante est très petite ($6,6262 \times 10^{-34}$ joule–seconde). Les valeurs que peut prendre l'énergie de l'oscillateur sont discrètes et de la forme $n h \nu$, n étant un nombre entier.

Quelques commentaires s'imposent avant d'examiner comment ces résultats furent trouvés. Notons d'abord la surprise ressentie à voir une action prendre une telle importance. Aucun appareil ne mesure une action. On n'en avait rencontré, jusque là, que dans des considérations théoriques de mécanique comme le « principe de moindre action » de Lagrange qui paraissait lui-même bien obscur au début du vingtième siècle. Précisons aussi le vocabulaire : le mot *quantum* (au pluriel *quanta*) que Planck introduit signifie en latin une quantité qui ne prend que des valeurs entières, comme le nombre entier n qui entre dans l'énergie de l'oscillateur.

Il y a ainsi des quanta d'énergie et non des valeurs continues de cette énergie. C'est de là que vient le nom de *mécanique quantique*, lequel est partiellement trompeur car il n'est pas nécessaire qu'on y rencontre partout des nombres entiers, ou même simplement discrets. Mieux vaut dire que le domaine de cette physique est celui des phénomènes où la valeur finie de la constante de Planck joue un rôle essentiel. C'est une mécanique « planckienne ».

Quant à l'oscillateur harmonique, on sait en quoi il consiste en principe : c'est un système mécanique, *a priori* classique, qu'on définit de manière purement théorique. Il dépend d'une variable de position x , son énergie cinétique est $\frac{1}{2} m (dx/dt)^2$ et son énergie potentielle $\frac{1}{2} m \omega^2 x^2$, de sorte que x varie au cours du temps comme une fonction oscillante de la forme $x_0 \cos(\omega t - \text{constante})$, de fréquence $\nu = \omega/(2\pi)$. La variable x n'est pas nécessairement une longueur, de sorte que le coefficient m n'est pas non plus nécessairement une masse (on peut penser à un oscillateur électrique où x représente une charge et m une self). Cette liberté laissée aux dimensions de m peut expliquer en partie pourquoi, sous sa forme quantique, les propriétés de l'oscillateur ne dépendent pas de ce paramètre.

Les oscillateurs harmoniques qu'on allait rencontrer au cours de la première partie de cette histoire étaient de trois types : les uns abstraits, d'autres de nature électromagnétique et d'autres très concrets : de vraies vibrations. Les oscillateurs abstraits, purs modèles de théoricien, servirent à Planck pour modéliser la matière. Les oscillateurs électromagnétiques constituent, quant à eux, une manière commode de représenter le champ électromagnétique du rayonnement.

Ils ne sont qu'une façon de formuler différemment les équations de Maxwell dans le vide et ne contiennent donc rien de plus ni de moins que les équations de Maxwell elles-mêmes.

On peut dire, de manière simple, qu'un champ électromagnétique est équivalent du point de vue de la dynamique à un ensemble (infini) d'oscillateurs pouvant avoir toutes les fréquences possibles. Ces oscillateurs, une fois quantifiés, se révéleraient être les photons. Le troisième et dernier type d'oscillateurs sera fourni par les modes de vibration élastique d'un cristal. Dans leur version quantique, ils portent le nom de *phonons*.

Le corps noir

3. L'histoire commence en 1859, lorsque Gustav Kirchhoff essaie de comprendre le rayonnement thermique issu du soleil ou d'une braise dans un foyer. La seule théorie dont il dispose est la thermodynamique, mais il sait en faire bon usage. La surface d'un corps à l'équilibre thermodynamique, à température T , émet un rayonnement et nous appellerons $E(\nu)\Delta\nu$ l'énergie émise par unité de surface et de temps dans la bande de fréquence $\Delta\nu$. Kirchhoff fait entrer en ligne de compte le coefficient d'absorption $a(\nu)$ du corps, lequel est défini ainsi : si la surface reçoit de l'extérieur un rayonnement de fréquence ν , elle absorbe une fraction $a(\nu)$ de son intensité et réfléchit la fraction $(1 - a(\nu))$.

Kirchhoff considère alors la situation suivante : deux plaques planes infinies faites de substances différentes sont placées, en regard l'une de l'autre, et maintenues à la même température T . Le rayonnement présent entre les plaques doit être à l'équilibre thermique avec elles. Kirchhoff établit par un raisonnement simple de thermodynamique que cet équilibre ne peut se maintenir que si le rapport $E(\nu)/a(\nu)$ est le même pour les deux substances. C'est donc une donnée universelle, indépendante de la composition des corps. Dans le cas d'une substance parfaitement noire (c'est-à-dire dont le coefficient d'absorption est égal à 1 quelle que soit la fréquence) l'émissivité $E(T, \nu)$ est égale à cette donnée universelle. C'est là l'origine du nom de « rayonnement du corps noir » qu'on donne souvent au rayonnement thermique idéal.

Plus tard, en 1894, Willy Wien fait une autre remarque importante qui s'appuie à nouveau sur la thermodynamique. Il considère une enceinte à température T où se trouve une sphère de matière parfaitement réfléchissante ($a(\nu) = 0$). Il suppose que la sphère se dilate, puis se recontracte lentement (adiabatiquement). Le rayonnement se déplace alors en fréquence par effet Doppler, lors de ses réflexions sur la sphère si peu que ce soit, et ceci relie entre elles des fréquences voisines. Pour que le cycle complet décrit par tout le système soit réversible, Wien constate que $E(T, \nu)$ ne doit dépendre que d'une seule variable, ou plus précisément

$$E(T, \nu) = \nu^3 F(\nu/T). \quad (1.1)$$

Cette relation porte le nom de *loi du déplacement de Wien*.

La fonction F est de toute évidence fondamentale. On fit de nombreuses expériences pour mieux la connaître et les théoriciens cherchèrent à l'établir. Il n'est pas question ici de rapporter les difficultés qu'on rencontra ni les progrès des appareils de mesure qui permirent de les surmonter. Notons seulement un résultat crucial de Rayleigh qui, en juin 1900, semble trouver la fonction F . Il s'appuie sur un résultat solide de la mécanique statistique classique (l'égalité ou équipartition de l'énergie partagée entre tous les degrés de liberté) et l'applique aux oscillateurs du rayonnement électromagnétique. Il trouve que F devrait être une constante. Le résultat est correct autant qu'aberrant car l'énergie totale du rayonnement thermique dans une enceinte, proportionnelle à $\int E(T, \nu) d\nu$, serait alors infinie. Inutile d'ajouter que ce résultat ne ressemblait guère à l'allure générale des données expérimentales. Ainsi, les principes sur lesquels Rayleigh s'appuyait, ceux d'une physique classique qu'on croyait bien établie, étaient remis en question. Le problème se révélait donc encore plus important qu'on ne l'avait supposé.

4. Depuis plusieurs années déjà, Max Planck cherchait une théorie du phénomène. Il se fondait sur le fait que le rayonnement thermique dans une enceinte ne dépend pas de la matière des parois. Il semblait donc indiqué de ne pas porter la réflexion sur la matière réelle, toujours compliquée et encore bien mal connue, mais plutôt sur un modèle facile à contrôler : une matière abstraite constituée d'oscillateurs harmoniques de diverses fréquences. Il tenait déjà un résultat qui sera plus clair si on l'exprime sous une forme établie peu après par Poincaré : l'énergie moyenne d'un des oscillateurs de la paroi est nécessairement égale à l'énergie moyenne d'un oscillateur du champ électromagnétique ayant la même fréquence. Ce résultat ne faisait appel qu'aux lois de l'électrodynamique et il ramenait toute l'étude à celle d'un seul oscillateur à un degré de liberté dont l'énergie moyenne U est directement liée à la fonction cherchée, U étant proportionnel à $E(T, \nu)/\nu^2$.

En octobre 1900, Planck découvre une formule empirique qui reproduit parfaitement les données expérimentales et qu'on peut écrire sous la forme

$$U = \frac{h\nu}{\exp(h\nu/kT) - 1} \quad (1.2)$$

où apparaît une nouvelle constante h . Il obtient cette formule de manière assez bizarre, mais qu'on peut comprendre si l'on remarque que la fonction $E(T, \nu)$ tend vers des fonctions très simples quand le rapport $h\nu/k_B T$ est petit ou grand devant 1 (ce qu'indiquaient aussi les données expérimentales). Or, Planck savait comment obtenir ces lois limites en supposant une forme simple pour l'entropie des oscillateurs, proportionnelle à E ou à E^2 . Il lui suffit alors d'*interpoler* entre les deux expressions de l'entropie, de résoudre une équation différentielle élémentaire (car l'entropie donne la dérivée E/T) et le résultat (1.2) s'ensuivait. La constante k qui intervient dans U est la constante de Boltzmann déjà connue en physique statistique, la quantité kT étant une énergie. La nouveauté essentielle de la formule obtenue est évidemment la présence de la nouvelle constante h , telle que le produit $h\nu$ soit également une énergie.

La démarche purement empirique qui avait conduit Planck à la formule (1.2) ne permettait pas d'en pénétrer la signification. La formule souligne sans doute l'importance d'une certaine énergie de référence $h\nu$ pour un oscillateur de fréquence ν , mais rien ne lui correspond dans la théorie classique de l'oscillateur. Son intervention inattendue semble pourtant être la clef des contradictions que Rayleigh avait rencontrées avec la théorie classique.

Un véritable trait de génie inspire alors à Planck une idée radicale : se pourrait-il que l'énergie d'un oscillateur ne soit pas une quantité continue, capable de prendre n'importe quelle valeur et d'en changer de manière graduelle comme le veut la physique classique, mais qu'elle soit toujours un multiple entier de cette énergie $\varepsilon = h\nu$? Si tel est le cas, le calcul est facile : on sait, grâce aux travaux de Boltzmann, que la probabilité pour qu'un système à l'équilibre thermique ait une énergie E est proportionnelle à $\exp(-E/kT)$. Si E ne prend que les valeurs $nh\nu$, n étant un nombre entier, la probabilité correspondante est $p_n = A \exp(-nh\nu/kT)$, A étant une constante de normalisation. L'énergie moyenne de l'oscillateur est alors donnée par

$$U = \sum nh\nu p_n / (\sum p_n) \quad (1.3)$$

et cela donne bien l'expression (1.2). C'est ce résultat étonnant que Planck fait paraître en décembre 1900.

Le calcul indiqué plus haut n'est pas exactement celui que Planck présenta, mais ses résultats furent immédiatement repris, fouillés et réexprimés de multiples façons, dont celle qu'on vient de donner. En fait, comme Henri Poincaré devait le montrer peu de temps après, on ne peut obtenir la distribution (1.2) qu'en admettant que l'énergie des oscillateurs est « quantifiée » (ce qui est une propriété mathématique, $U(\nu)$ étant liée à la « transformée de Laplace » de la probabilité $p(E)$ et l'expression (1.2) conduisant à la nécessité de valeurs discrètes pour E)^{*}.

Le photon

5. Planck supposait que la quantification ne concerne que les oscillateurs de « matière », et non pas ceux du rayonnement. On peut aisément comprendre son attitude. On savait si peu de chose des atomes qu'il était tentant de leur imputer tout ce que la nouvelle découverte pouvait avoir de mystérieux, alors, qu'en revanche, le rayonnement, parfaitement bien décrit par les équations de Maxwell, semblait intouchable.

Cette échappatoire commode ne put convaincre Einstein. Le fait que l'énergie moyenne d'un oscillateur de matière soit la même que celle d'un oscillateur du champ électromagnétique de même fréquence inspirait un soupçon hardi : pourquoi

^{*} On indiquera par une astérisque les remarques, sections ou chapitres qui peuvent être omis sans nuire à la compréhension du texte.

ne pas supposer que les oscillateurs du champ électromagnétique sont eux-mêmes quantifiés ?

Les propriétés remarquables de l'effet photoélectrique allaient donner corps à l'idée. On sait en quoi cet effet consiste : lorsque un rayonnement lumineux ou ultraviolet frappe la surface d'un métal, il peut en arracher des électrons, détectés par le courant qu'ils transportent. On constate que ce courant (proportionnel au nombre d'électrons arrachés à chaque seconde) est expérimentalement proportionnel à l'intensité du rayonnement lumineux. Cela est attendu en vertu de la conservation de l'énergie. Beaucoup plus surprenant est un effet de « tout ou rien » qu'on observe en faisant varier la fréquence du rayonnement : si celle-ci est inférieure à une certaine valeur ν_0 qui dépend du métal, aucun courant n'est produit. Au-dessus de cette valeur de la fréquence, le courant s'établit aussitôt.

Einstein proposa une explication des faits en 1905. Supposons que, dans une onde monochromatique de fréquence ν , l'énergie arrive en « grains » d'énergie $h\nu$. Alors les faits deviennent clairs. Il faut en effet fournir une énergie minimale W à un électron pour l'arracher du métal, ce qu'on savait déjà grâce à l'émission d'électrons par une plaque métallique chauffée. Il faut donc que le « grain » de lumière apporte au moins cette énergie W pour pouvoir arracher un électron, d'où l'effet de seuil : l'énergie du « grain » $h\nu$ doit être supérieure à W , qu'on identifie à $h\nu_0$.

L'existence des « grains de lumière », ou « quanta de lumière » qui ne devaient recevoir le nom de *photons* que plus tard, était bien plus difficile à admettre que les quanta de Planck. Contrairement à l'ignorance qu'on avait des atomes, la théorie ondulatoire maxwellienne de la lumière paraissait parfaitement établie. En fait, c'est dans le milieu des physiciens des rayons X que, sans être nécessairement acceptée, l'hypothèse des photons devait rencontrer le plus de sympathie. On observe en effet que des rayons X durs ionisent la matière en laissant une trace rectiligne qui fait inévitablement penser au parcours d'une particule.

Il faudra, néanmoins, attendre 1921 pour que l'idée du photon s'impose définitivement devant l'évidence expérimentale. C'est alors en effet qu'Arthur Compton établit que des rayons X, lorsqu'ils se diffractent sur un électron, subissent un changement de fréquence qu'on n'explique que par la collision de deux particules.

La chaleur spécifique des solides

6. Les quanta de matière étaient étranges et semblaient intimement liés aux mystères non démêlés de l'atome. Peut-être ne rendaient-ils compte après tout que d'apparences qu'on pourrait un jour expliquer de manière compréhensible. Les quanta de lumière étaient, au contraire, presque incroyables. Aussi, sachant le scepticisme des physiciens, il est remarquable de constater qu'au conseil Solvay de 1911 où se trouvaient réunis les plus grands physiciens de l'époque, l'existence de

quanta fut pratiquement admise par tous. Cela tient à ce qu'on avait enfin mis la main sur des oscillateurs concrets, connus, où la quantification de l'énergie se manifeste de manière parfaitement claire : il s'agit des ondes élastiques dans un cristal.

La diffraction des rayons X avait permis de bien connaître la structure des cristaux. Un cristal est un réseau régulier d'atomes (ou de molécules). Chaque atome y occupe une position qui minimise son énergie et, s'il s'écarte un peu de cette position d'équilibre d'une distance a , la variation correspondante de l'énergie potentielle doit être proportionnelle à a^2 (puisque a est petit et que l'énergie ne serait pas minimale dans la position d'équilibre s'il y avait un terme dans cette énergie proportionnel à a). Il est facile de se convaincre que, dans ces conditions, les petits mouvements de l'ensemble des atomes peuvent être décrits comme une collection d'oscillateurs harmoniques dont chacun n'est autre, concrètement, qu'une onde élastique de fréquence et de longueur d'onde définies.

En appliquant à chacun de ces oscillateurs la formule de Planck, il est facile d'établir leur énergie moyenne à l'équilibre thermique et d'en tirer la chaleur spécifique du cristal selon la température. C'est ce que fit Einstein en 1907, à l'aide d'un modèle grossier des ondes élastiques qui leur attribuait à toutes une même fréquence. Peu de temps après, Peter Debye améliora le modèle en précisant ce que doit être la distribution des fréquences. Les résultats obtenus s'accordaient parfaitement aux données expérimentales qui avaient paru, jusque alors, inexplicables.

Notre but n'est pas d'entrer dans les détails de l'histoire et nous n'essaierons donc pas d'expliquer pourquoi ces résultats sur la chaleur spécifique des solides emportèrent une adhésion, presque unanime, aux principes qui les fondaient. Qu'il suffise de dire qu'on faisait à l'époque des progrès rapides dans la physique et la technologie des basses températures, et que tout physicien, digne de ce nom, en avait une bonne connaissance. Le fait que ces experts aient été convaincus nous dispense d'aller au-delà dans une analyse qui nous entraînerait trop loin.

On peut signaler, pour terminer, un développement ultérieur important que l'on doit encore à Einstein (en 1916). Il s'agissait à nouveau du rayonnement thermique. Einstein supposa que les photons présents dans une cavité peuvent être absorbés de manière *aléatoire* par les atomes de la paroi. La probabilité d'absorption d'un photon, dans un mode donné (c'est-à-dire de nombre d'onde et de polarisation spécifiés), est évidemment proportionnelle au nombre N des photons de ce mode qui se trouvent dans la cavité. Einstein supposa que l'émission des photons par les atomes suivait une loi aléatoire analogue à celle qu'on connaissait pour la radioactivité. Pour retrouver la loi de Planck, il fallait alors admettre que la probabilité d'émission d'un photon par un atome est proportionnelle à $(N + 1)$. On ne pouvait comprendre ce résultat surprenant qu'en supposant que les $(N + 1)$ photons présents après l'émission sont tous rigoureusement identiques, indiscernables, sans que rien puisse dire lequel d'entre eux vient d'être émis. Ainsi, les probabilités entraient-elles, pour la première fois, dans la physique des quanta, bien que leur nature subtile restât dissimulée derrière la loi

de la radioactivité encore incomprise. L'idée de particules indiscernables était, elle aussi, destinée à durer et « l'émission stimulée » découverte par Einstein devait donner, bien plus tard, naissance au laser.

Un premier bilan

7. On prétend parfois que les débuts de l'histoire de la mécanique quantique sont obscurs, parce qu'imprégnés de thermodynamique. L'ordre des questions est en effet totalement renversé aujourd'hui. La thermodynamique découle à présent de la mécanique statistique, laquelle concerne un grand nombre de particules qui obéissent aux lois quantiques.

L'enseignement a donc tendance à laisser de côté ces débuts, préférant faire appel à des expériences plus frappantes, plus récentes, qui suggèrent les lois quantiques de manière plus immédiate. Il semble pourtant qu'à bien l'examiner, la démarche suivie lors des premières découvertes était plus contraignante, pour un esprit exigeant, qu'aucun « truc » pédagogique élaboré depuis.

L'oscillateur harmonique n'a cessé d'être au centre de cette première période de l'histoire. C'est aussi le thème qu'on rencontre toujours le plus fréquemment en physique quantique où il représente ce qu'il y a, à la fois, de plus simple et de plus utile. Il n'y entre par conséquent que la seule constante de Planck et sa quantification est la plus simple qui soit, les énergies n'étant essentiellement que des nombres entiers. Il est vrai que la mécanique quantique, une fois élaborée, montrera que les énergies d'un oscillateur sont de la forme $(n + \frac{1}{2}) h\nu$, plutôt que $nh\nu$, mais cette correction a relativement peu de conséquences.

Le bilan de cette époque essentielle était donc à la fois clair, riche d'inspiration pour l'avenir et destiné à durer. L'existence d'énergies discrètes, incompatible avec les conceptions classiques, montrait bien que celles-ci devaient être, dans leur application à l'atome, incomplètes ou erronées. La physique allait évidemment envisager la première hypothèse avant de devoir se résoudre à la seconde.

8. La seconde période de la théorie des quanta commence en 1913 et se prolonge jusqu'en 1925 alors qu'elle est déjà rejointe et dépassée par une « nouvelle mécanique des quanta » : la mécanique quantique actuelle. C'est à ce stade crucial que la physique suit sa voie la plus étroite en profitant, pourrait-on dire, de sa chance la plus grande. Elle s'avance en effet vers le monde quantique avec les modes de pensée du classique dont elle conserve les concepts presque intacts en leur ajoutant seulement des règles, des lois supplémentaires qui seraient censées n'affecter que les seuls objets atomiques. Nous savons à présent que rien n'était plus fondamentalement erroné qu'un tel programme. L'étonnant n'est donc pas qu'il ait finalement échoué, confronté à ses propres difficultés, mais qu'il ait pu aller très loin, assez loin en tout cas pour que des modes de pensée radicalement nouveaux deviennent concevables.

Le bilan de cette période est cependant très loin d'être médiocre car il s'alimente de résultats expérimentaux essentiels, définitivement acquis, qui forcent les esprits à l'imagination et à la souplesse. Ces circonstances, probablement uniques dans l'histoire, vont dicter la démarche qu'on suivra dans ce chapitre : on se gardera d'insister plus qu'il ne faut sur ce que fut le déroulement détaillé des faits et des idées de l'époque, car cela ne concerne vraiment que les historiens et les curieux d'histoire. On essaiera, en revanche, de souligner comment apparut ce qui était destiné à rester. On tâchera aussi de comprendre, en fin de compte, comment put se produire la chance, sans doute unique, qui offrit cette porte étroite pour aller du classique au quantique.

L'atome de Bohr

Le noyau et l'atome de Rutherford

9. À quoi ressemble un atome ? On avait cru d'abord avec J. J. Thomson qu'il pouvait s'agir d'une sphère homogène diffuse chargée positivement, à l'intérieur

de laquelle les électrons circuleraient. Ce modèle implique en effet que l'électron se comporte comme un oscillateur harmonique à trois dimensions et l'on pouvait penser que les fréquences de ces oscillateurs se retrouvaient dans le spectre du rayonnement de l'atome.

Une structure de l'atome très différente allait cependant ressortir d'études faites au moyen de sources radioactives. Deux étudiants, Hans Geiger et Ernest Marsden qui travaillent dans le laboratoire de J. J. Thomson, constatent, en 1909, un phénomène remarquable : lorsque des particules alpha émises par un noyau radioactif traversent une mince feuille de métal, il arrive souvent que leurs trajectoires soient si fortement déviées qu'elles repartent vers l'arrière.

La signification de ces faits apparaît à Ernest Rutherford en 1911. La forte déviation de la trajectoire suppose à la fois que « quelque chose » dans l'atome exerce une force très intense sur la particule alpha et que ce quelque chose est assez lourd pour supporter le recul de la déviation. Mais les électrons sont trop légers pour avoir la capacité de recul nécessaire et, si la force agissante est de nature coulombienne, elle ne peut être suffisamment intense qu'à de très courtes distances. L'idée de la présence d'une très petite particule chargée positivement à l'intérieur de l'atome (la particule alpha étant elle-même une particule de nature analogue) s'offre alors à Rutherford. Il y a un « noyau » très petit au centre de l'atome et il porte une charge positive. Il est alors possible, en s'appuyant sur ce modèle, de calculer les déviations des particules alpha et l'accord avec l'expérience se révèle excellent.

La grande analogie qui existe entre la force coulombienne et la force de gravitation newtonienne entraîne ainsi que l'atome ressemble à un système solaire en miniature. Rien ne semble à première vue plus simple, mais bien des problèmes vont se manifester en regardant les choses de plus près.

Les spectres atomiques

10. La spectroscopie atomique était à l'origine du modèle de l'atome que J. J. Thomson avait proposé, alors que celui de Rutherford ne semblait apporter aucun éclaircissement sur l'existence et la nature des spectres. Voyons donc en quoi consistait cette spectroscopie, alors déjà très développée. On disposait de tables précises donnant les fréquences du rayonnement que chaque atome peut émettre (comme par exemple les raies de lumière jaune du sodium chauffé). On commençait même à y distinguer un certain ordre.

Une découverte très importante avait été faite en 1890 par Johannes Rydberg, qui l'avait élevée au rang de principe de la spectroscopie : les fréquences d'émission (ou d'absorption) d'un atome peuvent être étiquetées par deux nombres n et m et il existe des fréquences de référence $\{v_n\}$ grâce auxquelles chacune des fréquences du spectre v_{nm} s'écrit simplement sous la forme $v_n - v_m$. Dans le cas de l'atome d'hydrogène, une formule encore plus simple découverte par Johann Balmer précisait que les fréquences de référence v_n sont de la forme R_0/n^2 , n étant un nombre entier et R_0 une constante. Il va sans dire qu'on n'avait aucune interprétation de ces résultats.

Le modèle de Bohr

11. Le modèle de Rutherford est particulièrement simple quand il s'applique au cas de l'atome d'hydrogène, avec un électron unique. L'électron devrait y avoir une trajectoire elliptique keplerienne. Niels Bohr, un jeune Danois travaillant dans le laboratoire de Rutherford, remarque pourtant une grave difficulté : l'électron subit évidemment une accélération lors de son mouvement. Or, d'après l'électrodynamique de Maxwell et Hertz, l'accélération d'une particule chargée devrait produire un rayonnement qui emporte de l'énergie. Pour compenser cette perte, l'électron doit accroître son énergie de liaison (négative), c'est-à-dire se rapprocher de plus en plus du noyau, aller de plus en plus vite, rayonner encore davantage et, finalement, s'effondrer sur le noyau. On peut aussi noter qu'au lieu du spectre de raies qu'on observe, le rayonnement ainsi prédit par l'électrodynamique devrait avoir un spectre continu. Bohr en conclut qu'un atome à la Rutherford devrait être instable et même, tous calculs faits, très instable, et que le modèle est en contradiction avec l'existence même des spectres atomiques.

Ce n'était heureusement pas la première fois que des lois supposées connues étaient mises en défaut, et Planck et Einstein étaient déjà passés par là. Aussi, plutôt que d'abandonner le modèle d'atome de Rutherford, Bohr va faire entrer en ligne de compte la constante de Planck. L'exemple de l'oscillateur harmonique, avec ses niveaux d'énergie quantifiés, suggère que l'énergie d'un atome puisse être, elle aussi, quantifiée. Soit donc E_n ces niveaux d'énergie possibles. Par analogie avec l'effet photoélectrique, on suppose qu'un photon ne peut être absorbé qu'en faisant passer l'atome d'un niveau d'énergie E_n à un autre E_m d'énergie plus élevée, et ceci uniquement lorsque la fréquence du photon est telle que son énergie $h\nu$ soit égale à l'énergie $E_m - E_n$ gagnée par l'atome. On aura bien ainsi l'expression de Rydberg pour les fréquences d'absorption :

$$h\nu = (E_m - E_n) ; \text{ avec } \nu = \nu_{mn} = \nu_m - \nu_n = E_m/h - E_n/h . \quad (2.1)$$

La réversibilité des lois de la physique élémentaire par renversement de sens du temps font de l'émission de la lumière le processus inverse de l'absorption. On peut donc supposer que la lumière n'est émise par l'atome qu'avec des fréquences ν_{mn} identiques à celles qui peuvent être absorbées, ce qui devrait interdire le rayonnement continu responsable de l'instabilité de l'atome. Ainsi, l'existence de niveaux d'énergie quantifiés pourrait expliquer à la fois l'existence d'un spectre de raies et la stabilité de l'atome dans son état d'énergie la plus basse.

Les valeurs des niveaux d'énergie E_n étaient connus par l'expérience (à une constante additive près) et il fallait donc comprendre quelles règles les gouvernaient. Dans son article fondamental de 1913, Bohr offre trois arguments différents pour les calculer qui conduisent au même résultat sans qu'aucun soit totalement convaincant, ce qui ne saurait surprendre. Le plus solide est fondé sur un principe de correspondance sur lequel on reviendra, et ce n'est qu'à titre de remarque que Bohr signale que le résultat peut être obtenu en posant comme règle que l'intégrale curviligne $\int p \, dl$ prise sur la trajectoire est un multiple entier n de la constante de Planck (p étant l'impulsion de l'électron et dl l'élément de

longueur sur sa trajectoire) :

$$\oint p \, dl = nh. \quad (2.2)$$

Le résultat qu'on obtient alors pour l'énergie, en supposant l'orbite circulaire, est le suivant :

$$E_n = \frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}, \quad (2.3)$$

où m est la masse de l'électron et e sa charge. Dans les unités MKSA, légales mais mal adaptées à la physique quantique, il faudrait remplacer e^2 par $e^2/(4\pi\epsilon_0)$.

On a également introduit dans cette formule la notation à présent universelle $\hbar = h/(2\pi)$.

Les premières confirmations

12. Les hypothèses de Bohr conduisaient ainsi aux règles (2.2) et elles rendaient bien compte, numériquement, du spectre de l'hydrogène. Si cela put suffire à Einstein pour reconnaître l'importance de la découverte, deux événements frappants allaient contribuer à faire partager cette conviction par beaucoup d'autres physiciens. Le premier fut la solution du « mystère de ζ Puppis ». Le spectre de cette étoile avait en effet révélé des raies qui ressemblaient fort à celles de l'hydrogène, hormis que, dans la formule (2.3), il fallait changer le facteur $1/2$ par 2 . Bohr n'eut guère de peine à interpréter ce fait en remplaçant simplement la charge e du noyau d'hydrogène par celle, $2e$, d'un noyau d'hélium, le facteur e^4 devenant $(Ze)^2 e^2$ avec $Z = 2$. Les raies vues dans le spectre de ζ Puppis pouvaient donc être celles de l'hélium ionisé, encore inconnues en laboratoire mais qu'on s'empressa d'observer pour y constater une pleine confirmation.

L'autre événement qui frappa les esprits tient à la grande précision qu'offraient déjà les données spectrales. Les formules (2.2) et (2.3) ne s'accordaient en effet qu'imparfaitement avec les données, le désaccord étant de l'ordre de $1/2\,000$. Or, en bonne mécanique classique, l'électron ne tourne pas strictement autour du noyau mais autour du centre de gravité de l'atome. L'inertie du mouvement relatif du noyau et de l'électron n'est pas gouvernée par la masse m du seul électron, mais par la « masse effective » $m' = mM/(m + M)$, où M est la masse du noyau. La correction est de l'ordre de m/M , c'est-à-dire $1/1\,836$ pour l'hydrogène et, lorsque Bohr en tint compte, l'accord avec les données devint encore meilleur.

La théorie de Bohr-Sommerfeld

13. Le cadre de pensée dans lequel la théorie de Bohr s'inscrivait ne ressemblait encore en rien à la mécanique quantique que nous connaissons à présent. La physique classique continuait d'y dicter les concepts et la représentation qu'on se faisait de l'atome. C'était vrai pour les trajectoires des électrons, pour la manière dont les positions et les vitesses étaient censées varier au cours du temps, pour l'expression des énergies cinétique, potentielle et totale. La constante de Planck n'intervenait que par des conditions supplémentaires qui sélectionnaient, parmi

toutes les trajectoires concevables, celles qui étaient, croyait-on, les seules permises. On peut donc caractériser cette physique comme une physique classique augmentée, complétée par des lois supplémentaires où la constante de Planck intervient, ces dernières portant à elles seules tout le poids du quantique.

Bohr lui-même n'était pas convaincu que telle serait la réponse finale, et une révision plus profonde de la physique lui semblait nécessaire à terme. Mais il fallait pour cela organiser et accroître les données expérimentales et c'est ce qui fut fait de 1913 à 1925.

Le principe de correspondance

14. Un principe, que Bohr avait mis en avant dès ses premiers travaux et qu'on a déjà signalé, allait prendre alors une grande importance. Il s'agit du *principe de correspondance* postulant que les lois de la physique quantique doivent se ramener à celles de la physique classique à la limite des grandes valeurs des nombres quantiques tels que n .

Un exemple permettra sans doute de mieux comprendre l'intérêt d'un principe de ce genre : on sait qu'une charge animée d'un mouvement périodique classique de fréquence ν ne peut émettre qu'un rayonnement ayant cette même fréquence. Or cette propriété est loin d'être vérifiée dans le modèle de Bohr, où la fréquence d'un rayonnement est la différence des fréquences du mouvement sur deux trajectoires quantifiées de nombres quantiques n et n' . Elle devient vraie cependant, à la limite où le nombre n devient grand et où $n' = n + 1$, c'est-à-dire quand l'atome passe, de manière pratiquement continue, d'une trajectoire quantifiée à la plus voisine. Le principe de correspondance s'applique bien dans ce cas car il résulte des formules (2.1) et (2.3) que la fréquence $\nu_{n,n+1}$ du rayonnement émis est bien celle de l'électron dans son mouvement périodique autour du noyau.

Les règles de Sommerfeld

15. Pour aller plus loin, il fallait étendre les découvertes de Bohr à d'autres systèmes que l'atome d'hydrogène et traiter également, pour celui-ci, le cas des trajectoires elliptiques. Arnold Sommerfeld parvint à résoudre ces problèmes en 1915, en mettant alors en évidence l'importance centrale de la condition (2.2), qui n'avait été pour Bohr qu'une remarque incidente.

Sommerfeld considère un système physique général qu'il conçoit à la manière classique comme décrit par des variables de position $q_k(t)$ dépendant du temps. Ces variables ne sont pas nécessairement des coordonnées cartésiennes ayant les dimensions d'une longueur, mais elles peuvent être par exemple des angles si, l'on songe à une toupie ou à un « rotateur » tel que peut l'être un atome tournant sur lui-même. Puisque la constante de Planck a les dimensions d'une action, le rôle joué par l'impulsion dans une condition de quantification telle que (2.2) doit être remplacé par autre chose qui ait les bonnes dimensions.

Quoi d'autre ? Fort de ses connaissances en mécanique classique, Sommerfeld introduit les « moments conjugués de Lagrange » des variables de position.

Rappelons-en le principe¹. On considère un système physique dont la position est définie par des variables $q = (q_1, q_2, \dots, q_N)$, les vitesses étant les dérivées par rapport au temps $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N)$. L'énergie du système est composée d'une énergie cinétique $T(q, \dot{q})$, dépendant en général des q et des \dot{q} , et d'une énergie potentielle $V(q)$. Le moment conjugué de la variable de position q_k est défini par :

$$p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} . \quad (2.4)$$

On notera qu'il possède automatiquement la bonne dimension pour que le produit $p_k q_k$ ait celle d'une action. On peut tirer de l'équation (2.4) l'expression des vitesses \dot{q} en fonction des coordonnées q et des moments $p = (p_1, p_2, \dots, p_N)$. L'énergie $T + V$, lorsqu'elle est écrite comme une fonction $H(q, p)$ de ces variables, porte le nom de *fonction de Hamilton* et les équations de la dynamique prennent alors la forme des équations de *Hamilton* :

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k} ; \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} . \quad (2.5)$$

L'emploi systématique de ces notions de mécanique classique, plus abstraites que celles de Newton, s'imposait donc et les physiciens allaient s'habituer au formalisme hamiltonien.

Dans le cas de l'atome d'hydrogène, les variables de position naturelles sont les coordonnées cartésiennes x_k de la position de l'électron, dont les composantes p_k de l'impulsion sont les moments conjugués. On peut également prendre des coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) . Sur l'ellipse parcourue par l'électron, l'angle ϕ varie de 0 à 2π , l'angle θ et le rayon r oscillant tous deux entre deux limites extrêmes. Sommerfeld constate que l'on peut remplacer l'unique condition (2.2) par un système de trois conditions de la forme :

$$\int p_r dr = n_1 h ; \int p_\phi d\phi = n_2 h ; \int p_\theta d\theta = n_3 h \quad (2.6)$$

où les intégrales sur r et θ portent sur l'intervalle des valeurs parcourues par la variable mise en jeu dans un de ses aller-retour et l'intégrale pour ϕ est prise entre 0 et 2π . Les quantités n_j sont des nombres entiers.

On peut combiner ces conditions pour retrouver la condition de Bohr (2.2), ce qui donne $n = n_1 + n_2 + n_3$. Que dire alors des deux nombres quantiques supplémentaires qui ont été introduits ? Ils ont une interprétation physique simple : le nombre n_3 , qu'on désigne conventionnellement par m (à ne pas confondre avec la masse), est relié directement à la composante z du moment cinétique par $L_z = m\hbar$. Quant à la quantité $(n_2 + n_3)^2 \hbar^2$, c'est le carré du vecteur moment cinétique L^2 . On voit ainsi apparaître trois nombres quantiques qu'on désigne d'ordinaire par (n, l, m) et qui caractérisent, à eux trois, un état stationnaire de l'atome d'hydrogène. On sait l'importance que ces nombres étaient destinés à prendre.

En introduisant des trajectoires elliptiques plutôt que de se limiter à des cercles, Sommerfeld a fait évidemment un pas important. Il propose d'aller plus loin en appliquant sa méthode à n'importe quel système physique décrit par des coordonnées générales $\{q_k\}$, à condition que celui-ci possède des propriétés mathématiques analogues à celles qu'il a exploitées. Il pose ainsi, pour de tels systèmes, des conditions de « quantification » du type :

$$\int p_k dq_k = n_k h . \quad (2.7)$$

Malheureusement, et malgré le gain incontestable obtenu, la méthode de Sommerfeld ne pouvait prétendre être générale. Les systèmes physiques auxquels

1. Les parties du texte en petits caractères apportent des compléments ou des exemples qui peuvent éclairer certains lecteurs. Elles ne sont pas indispensables.

elle s'applique restent exceptionnels. Ces systèmes, qu'on appelle « multipériodiques » ou « séparables »¹, sont en effet très loin de représenter la totalité des systèmes dynamiques possibles, ne serait-ce par exemple qu'un atome à plusieurs électrons. Ils constituent, en revanche, la presque totalité des systèmes que l'on peut « résoudre », c'est-à-dire traiter complètement de manière analytique au moyen de la dynamique classique. Cette dernière circonstance avait un avantage en ce sens que beaucoup de systèmes, déjà bien connus en mécanique classique grâce aux moyens de calcul analytique de l'époque, devenaient accessibles à la « théorie des quanta ». Il fut ainsi possible de bien exploiter la théorie, mais l'espoir d'en découvrir une généralisation convenable devait aller en s'amenuisant à mesure que le temps passait. Les conditions de Sommerfeld étaient liées à des circonstances trop particulières pour se poser vraiment en lois de la physique.

Les règles de Lande

16. La méthode de Sommerfeld eut néanmoins des succès notables avec l'effet Stark et l'effet Zeeman pour l'atome d'hydrogène. L'effet Stark se produit quand un atome est placé dans un champ électrique extérieur, et il se manifeste par la résolution d'une raie de l'atome en plusieurs raies très voisines qui forment ce qu'on appelle un « multiplet », les raies étant d'autant plus proches que le champ imposé est plus faible. L'effet Zeeman est analogue, l'atome étant placé cette fois dans un champ magnétique extérieur. On observe aussi des multiplets différents de ceux de l'effet Stark.

C'est pendant cette période que le cadre de pensée offert par le formalisme de Hamilton s'impose définitivement. Le choix des variables qui permettent l'emploi des règles de quantification à la Sommerfeld n'est plus celui des coordonnées ordinaires de position dans l'espace. Pour l'effet Stark, il faut employer des coordonnées paraboliques. Pour tenir compte des effets relativistes du mouvement de l'électron dans un atome d'hydrogène, il faut recourir à un véritable changement de variables canoniques caractéristique de la dynamique analytique et mettant en jeu à la fois la position et l'impulsion ordinaires. Le résultat, c'est-à-dire la structure fine des niveaux de l'hydrogène, fut un des plus encourageants dans la voie nouvelle.

L'étude expérimentale systématique de l'effet Zeeman allait être particulièrement féconde. En utilisant des coordonnées sphériques dont l'axe est dirigé dans la direction du champ magnétique B , on constate que les différents niveaux d'énergie du multiplet sont donnés par la formule simple

$$E_{nlm}(B) = E_n - m\omega\hbar, \quad (2.8)$$

1. La définition précise des systèmes dynamiques séparables en mécanique classique passe par la considération de l'équation d'Hamilton-Jacobi. Il est sans doute plus conforme à l'esprit de ce livre d'en indiquer la version quantique : pour ces systèmes, il existe une base d'états propres de l'énergie dont la fonction d'onde $\psi(q)$ est un produit de la forme $f_1(q_1) f_2(q_2) \dots f_k(q_k)$. On leur donne encore, dans ce contexte, le nom de systèmes séparables.

ω étant une fréquence égale à eB/m_e , m_e désignant la masse de l'électron. Comme le nombre m peut prendre, selon Sommerfeld, toutes les valeurs entières entre $-l$ et $+l$, on peut atteindre les valeurs possibles de l en comptant les composantes du multiplet. Ceci est particulièrement intéressant pour les niveaux d'un atome autre que l'hydrogène où l'on observe expérimentalement des propriétés analogues, bien qu'on ne puisse en faire une théorie exacte par les méthodes de Bohr-Sommerfeld.

Les théoriciens se plongèrent donc dans les riches données que leur apportaient les spectroscopistes et ils se trouvèrent dans une situation troublante. Certains spectres étaient en accord avec la théorie, auquel cas on parlait par exemple d'effet Zeeman « normal ». D'autres données étaient en total désaccord avec cette même théorie et l'on parlait d'effet Zeeman « anomal ». Il y avait malheureusement davantage de cas anomaux que normaux. Comme le dit un jour Pauli à un ami qui le trouvait renfrogné : « Comment peut-on avoir l'air heureux quand on pense à l'effet Zeeman anomal ? »

Même si les données s'accordaient aussi capricieusement avec la théorie, elles offraient avec celle-ci assez d'analogies pour que l'effort de comprendre et l'imagination s'exercent. C'est alors, en particulier grâce à Alfred Lande, qu'un certain nombre de résultats importants se dégagent. Ce ne sont encore que des règles empiriques, troublantes autant qu'inspirantes, et que l'on peut résumer ainsi : la composante z d'un moment cinétique est toujours de la forme $m\hbar$, mais le nombre m n'est pas nécessairement entier ; il peut être semi-entier. Le carré d'un moment cinétique est en général de la forme $j(j+1)\hbar^2$, où j peut être un nombre entier ou semi-entier. Chaque niveau d'énergie d'un atome dans un champ magnétique est caractérisé par quatre nombres quantiques et non trois.

Nous ne tenterons pas de dire comment ces résultats furent obtenus, car ils comportent trop de finesses et sont propres à une théorie qui n'appartient plus qu'à l'histoire, avec trop de faits expérimentaux qu'on interprète, à présent, de manière beaucoup plus claire.

Des couches atomiques au spin

Les couches atomiques

17. Un examen attentif des différents spectres atomiques conduisit Bohr à reconnaître, en 1921, une structure simple des atomes, en comparant les changements qui y interviennent à mesure que leur nombre atomique Z augmente d'une unité. On se contentera d'indiquer ici ce qu'il constate pour les petites valeurs de Z . Trois nombres quantiques (n, l, m) peuvent être attribués à chaque électron individuel. L'énergie de l'atome dans l'état fondamental ne dépend pas des valeurs de m , mais on reconnaît la présence de ce nombre quantique par l'effet Zeeman. Pour l'hydrogène, $Z = 1$, on a $n = 1, l = 0$ (car $l \leq n - 1$), et de même pour l'hélium, $Z = 2$. Pour le lithium, $Z = 3$, deux des électrons sont dans une

« couche » semblable à celle de l'hélium et un troisième électron a les nombres quantiques, $n = 2, l = 0$. Il en va essentiellement de même pour le béryllium qui a deux électrons avec ces nombres quantiques $n = 2, l = 0$. Puis, du bore à l'argon, six électrons prennent successivement les nombres quantiques $n = 2, l = 1$.

Bohr examine ainsi toute la table de Mendeleïev où il rencontre des effets subtils qu'il parvient à dominer grâce aux règles de Lande et à l'intuition physique déjà accumulée. Il ne fait pratiquement aucun calcul, ce qui ne fut jamais son fort, et l'on peut se contenter de retenir l'essentiel, c'est-à-dire précisément la structure de l'atome en couches, trop connue à présent pour qu'on y insiste.

Une expérience décisive de James Franck et Gustav Hertz, déjà réalisée en 1916, mettait d'ailleurs ces couches en évidence grâce aux pertes d'énergie que les électrons subissent lors de collisions avec des atomes.

Le principe d'exclusion

18. Un problème majeur ressortait cependant des résultats de Bohr : pourquoi tous les électrons ne viennent-ils pas s'accumuler dans la couche la plus profonde, de manière à réaliser un minimum de l'énergie ? C'est la question à laquelle Wolfgang Pauli répond en proposant, en 1925, le principe d'exclusion qui porte son nom. Il ajoute ainsi un principe de plus à la physique quantique : deux électrons, au plus, peuvent partager les mêmes nombres quantiques (n, l, m). Cela rend très bien compte de la structure de la table de Mendeleïev, mais pourquoi justement deux électrons, et pourquoi les nombres quantiques semi-entiers qu'on rencontre dans l'effet Zeeman ?

Le spin

19. Deux jeunes Hollandais, George Uhlenbeck et Samuel Goudsmit apportent, en 1925, une réponse surprenante à cette question : l'électron aurait, selon eux, un moment cinétique propre, ou spin, correspondant à la valeur $j = 1/2$ et dont la projection sur un axe de coordonnée quelconque ne peut prendre que les valeurs $m_s = \pm 1/2$. Le principe d'exclusion de Pauli prend alors une forme très pure. Il ne peut y avoir qu'un seul électron dans un état où les quatre nombres quantiques (n, l, m, m_s) sont donnés.

L'idée n'était pas facile à admettre. On imaginait en effet sur la foi de considérations classiques que l'électron devait être une sphère chargée d'un rayon de l'ordre de 10^{-15} mètre (rayon pour lequel l'énergie électrostatique de la sphère chargée est égale à l'énergie de masse $m_e c^2$). Si le spin de l'électron correspond à une rotation de cette sphère, la vitesse à la surface de celle-ci devrait être supérieure à celle de la lumière. En acceptant le spin, il fallait donc renoncer à se faire un modèle de l'électron et, chose plus grave encore, admettre l'existence d'un moment cinétique qui ne correspond pas à une rotation de matière. L'idée s'imposa peu à peu cependant grâce à la lumière qu'elle jetait sur de nombreuses données empiriques. Mais on était déjà en 1925 et la physique avait commencé à changer de face.

Un bilan

20. On peut tenter un bilan de cette période. En ce qui concerne la connaissance des lois fondamentales de la physique, ce qui devait subsister est fort mince. On a surtout gardé le principe d'exclusion de Pauli et l'existence du spin. Quant aux principes sur lesquels on avait cru pouvoir s'appuyer avec le modèle de Bohr et les règles de Sommerfeld, ils se révélaient trop particuliers, impossibles à généraliser et invalidés par trop de données. Le cadre de pensée où ils s'inscrivaient, avec sa représentation et sa description classiques des objets atomiques auxquelles s'ajouteraient des règles spéciales, montrait trop son insuffisance¹.

Un article signé de Bohr, Henryk Kramers et John Slater marque en quelque sorte, en 1924, la fin définitive de cette période. Il démontrait qu'on ne peut combiner des trajectoires d'électron quantifiées avec une description explicite de l'émission et l'absorption du rayonnement. Les idées employées jusqu'alors menaient, en effet, à une contradiction avec la conservation de l'énergie et de l'impulsion.

La période n'en est pas moins très féconde si on la considère comme une préparation du terrain. Elle a, certes, surtout permis une vaste accumulation de données expérimentales, mais le guide de la théorie, pour fragile que celle-ci ait été, a permis de trouver des règles empiriques essentielles. La liste serait longue, de l'existence des nombres quantiques aux propriétés des moments cinétiques en passant par les couches électroniques et une multitude de détails qui offraient autant de pierres de touche pour tester les nouvelles théories à venir.

En ce sens, la théorie de Bohr-Sommerfeld a été une passerelle bénéfique pour accéder aux véritables lois quantiques. On peut se demander à quoi tient ce rôle et il semble qu'on puisse en juger ainsi. Nous connaissons à présent la mécanique quantique et il est possible d'en déduire les conséquences dans des situations où la constante de Planck apparaît comme relativement petite, par ce qu'on appelle des approximations semi-classiques. On peut calculer par exemple les niveaux d'énergie correspondants et l'on constate que pour deux systèmes physiques, et deux seulement, ces formules semi-classiques se prolongent sans changement jusqu'aux niveaux d'énergie les plus profonds, ceux qui sont réellement quantiques. Ces deux systèmes ne sont autres que l'oscillateur harmonique et l'atome d'hydrogène, ceux par lesquels l'histoire est passée, les deux seuls pour lesquels le mode de vision, la représentation classique des choses, pouvait revêtir momentanément une apparence de validité.

1. L'idée devait être cependant reprise par Louis de Broglie et David Bohm qui reviendront à la physique classique pour les électrons et les noyaux, en faisant seulement de la fonction d'onde une forme de « pilote », c'est-à-dire la responsable de certaines forces agissant sur les particules. Nous y reviendrons.

21. Au début des années vingt, l'échec de la « première théorie des quanta » faisait de moins en moins de doute et Bohr insistait dans ses conférences sur l'urgent besoin de trouver une théorie plus profonde qui romprait plus hardiment avec les modes de pensée traditionnels. Cette théorie nouvelle allait naître sous deux formes d'apparences très différentes dont les histoires s'entremêlent. La première à paraître est la « *mécanique ondulatoire* » qui associe une onde à une particule et dont l'idée essentielle fut proposée par Louis de Broglie en 1924. Il fallut cependant un certain temps avant qu'elle prenne véritablement forme, en 1926, entre les mains d'Erwin Schrödinger. Dans l'intervalle, c'est-à-dire en 1925, la mécanique des matrices de Werner Heisenberg était apparue et, dans la même année, elle avait pris une forme quasiment définitive dans un « *Drei-Männer Arbeit* », un travail à trois, écrit par Max Born, Heisenberg et Pascual Jordan.

La méthode de Heisenberg est certainement plus difficile à saisir que celle de De Broglie et Schrödinger, et, par bien des côtés, beaucoup plus hardie. Nous n'en commencerons pas moins par Heisenberg, pour des raisons qui ne sont pas toutes historiques. Amorcer le sujet grâce à des fonctions d'onde peut paraître plus clair mais il n'en reste pas moins que la mécanique quantique exigera, à un certain stade, de rompre avec les modes de pensée traditionnels (Schrödinger lui-même croyait avoir apporté la simplicité pendant une brève période et Bohr dut lui ouvrir les yeux). La méthode de Heisenberg, en remettant d'emblée en question la notion de quantité physique, manifeste immédiatement qu'elle ouvre une des grandes révolutions de la pensée. Elle donne sa vraie mesure à ce qui sera notre principal sujet : l'interprétation de cette théorie.

On passera donc en revue dans ce chapitre, sans doute trop rapidement, les travaux qui fondèrent la première théorie quasiment définitive de la physique quantique. Comme précédemment, on veut insister sur la signification plutôt que sur le détail des événements. Un tel choix implique un prix à payer car il est impossible, sans des longueurs excessives, de restituer le cadre exact des connaissances de l'époque et, particulièrement, ce que les principaux protagonistes savaient exactement à un moment donné.

La recherche d'une certaine clarté nous fera ainsi préférer parfois à des arguments avancés à l'époque, d'autres qui vinrent bientôt après. Il est préférable aussi, de ne pas découper une pensée créatrice entre ses étapes momentanées, c'est-à-dire les articles successifs où elle trouve sa forme. C'est pourquoi nous n'avons pas séparé nettement l'œuvre première de Heisenberg de son exploitation immédiate et sa mise au point par Born, Heisenberg et Jordan.

Les matrices de Heisenberg

22. On peut distinguer trois sources dans les conceptions de Heisenberg : son expérience préalable de la physique, le principe de correspondance de Bohr et une certaine conviction quant à la nature de la physique.

On a déjà vu ce qu'est le principe de correspondance. Heisenberg peut faire également fond sur une expérience personnelle qui vient de ses premiers travaux, importants déjà, où il fut le collaborateur de Kramers. Tous deux avaient mené à bien l'étude de la dispersion de la lumière (c'est-à-dire la variation de l'indice de réfraction avec la fréquence) en prenant en compte la réaction individuelle de chaque atome à la lumière (le cadre était évidemment la théorie de Bohr-Sommerfeld). Enfin, la conviction qui guidait Heisenberg reflétait un strict positivisme, en supposant qu'une théorie juste ne doit faire emploi que de quantités directement observables. Cette idée lui était inspirée à la fois par certaines affirmations de Bohr et par ce qu'il croyait être l'esprit de la démarche d'Einstein quand celui-ci construisit la théorie de la relativité. Peu importe le fait que Heisenberg ait plus tard renoncé à cette conviction qu'Einstein refusait, d'ailleurs, de se voir attribuer. L'essentiel est que ce cadre de pensée fut propice à un grand moment de découverte.

Les tableaux de Heisenberg

23. Qu'est-ce que Heisenberg pouvait considérer comme assez bien assuré pour servir de point de départ ? Une donnée sûre était l'existence d'états « stationnaires » d'un atome, dont chacun a une énergie E_n bien définie. La conservation de l'énergie lors d'une transition d'un état n vers un état m , par émission ou absorption de rayonnement, exige que le rayonnement ait une fréquence $\nu_{nm} = (E_n - E_m)/h$.

Inspiré par le principe de correspondance, Heisenberg revient à l'idée d'un caractère résonant de l'interaction entre la lumière et l'atome, ce qui suggère que certaines quantités relevant de l'atome doivent pouvoir résonner avec le champ électrique oscillant. Chacune de ces quantités atomiques possède donc une des fréquences ν_{nm} . Il y a autant de ces quantités qu'il y a de fréquences, et donc autant que de couples de niveaux (E_n, E_m) . En considérant un atome complexe dans un champ magnétique, dont tous les niveaux d'énergie sont distincts, on se convainc qu'en fait il y a autant de quantités capables de résonner que de couples d'états

stationnaires distincts, et non pas seulement de couples de niveaux d'énergie distincts. On va donc considérer que l'indice n est simplement une manière d'étiqueter tous les états possibles, plusieurs états d'indices différents pouvant avoir éventuellement la même énergie. Cette convention étant faite, on désignera par :

$$X_{nm}(t) = X_{nm} \exp(-2\pi i \nu_{nm} t), \quad (3.1)$$

la collection des quantités physiques qui doivent entrer en jeu.

C'est un tableau de nombres complexes à deux entrées n et m . Le facteur $\exp(-2\pi i \nu_{nm} t)$ est là pour souligner leur variation dans le temps avec une fréquence de résonance ; la lettre X pourrait n'être pour l'instant que le symbole communément attribué à ce qui est encore inconnu ; quant aux indices n et m , on a vu leur nécessité.

Intervient alors à nouveau le principe de correspondance. Restreignons-nous à un système en situation classique qui ressemble à l'atome d'hydrogène, c'est-à-dire comporte une charge q dont la position se déplace. On sait que l'énergie d'interaction entre un champ électrique $E(t)$ et cette charge est de la forme $-q E(t) x(t)$, x étant la composante de la position dans la direction du champ. Ainsi, au niveau classique, seule la position de la charge intervient dans le couplage au champ. Dans l'atome d'hydrogène où il n'y a qu'un seul électron, le rôle joué classiquement par la coordonnée de position $x(t)$ est assumé au niveau quantique par la collection correspondante des quantités $\{X_{nm}(t)\}$. De là à dire qu'une quantité physique classique quelconque $a(t)$ doit être remplacée au niveau quantique par une collection du type $\{A_{nm}(t)\}$, il n'y a qu'un pas à franchir, pour aussi vertigineux qu'il soit.

En quoi ceci se relie-t-il au présupposé méthodologique de Heisenberg ? La position exacte d'un électron dans l'atome n'a, selon lui, aucune signification car aucune expérience ne permet de la connaître. Il s'agit pour Heisenberg d'une impossibilité de principe et non pas seulement d'une conséquence de nos moyens limités d'expérimentation. Ainsi s'explique, de son point de vue positiviste, le rejet de l'inobservable $x(t)$. Mais que dire alors des quantités X_{nm} ? Sont-elles accessibles à l'expérience ? C'est là qu'intervient l'expérience antérieure de Heisenberg. Il a, en effet, déjà rencontré avec Kramers des quantités très proches des X_{nm} , dont le correspondant au niveau classique est le moment dipolaire électrique de l'atome (c'est-à-dire $qx(t)$ dans le cas de l'hydrogène). Il pense que l'expérience permet de connaître ces $qX_{nm}(t)$, et il a raison en ce qui concerne leur module car une mesure fine d'un indice de réfraction peut le fournir. Heisenberg croit, de plus, qu'on peut atteindre expérimentalement la phase des X_{nm} , ce qui est inexact et qu'on ne peut mieux qualifier que d'erreur heureuse.

L'algèbre de Heisenberg

24. Il est pour le moins étrange de remplacer un nombre, une quantité physique aussi intuitive et naturelle que la coordonnée de position d'un électron, par un tableau de nombres complexes et même autant de tableaux différents qu'il y a d'atomes. Que va-t-il rester, dans le principe de correspondance, du fait que x , tel que nous le connaissons classiquement, soit un nombre ?

Un exemple sera utile. Imaginons qu'au lieu de l'effet d'un champ électrique dont le couplage classique est linéaire en x , nous puissions réaliser un couplage quadratique en x^2 . C'est concevable avec les oscillations élastiques d'un solide qui sont quantifiées, comme on l'a vu au chapitre 1. (Il suffit de soumettre un cristal à une pression et, si celle-ci est assez forte, l'effet résultant est essentiellement équivalent à un terme en x^2 dans l'énergie d'un atome).

Peu importe néanmoins car il suffit de supposer que cette quantité x^2 puisse apparaître directement comme une quantité physique et qu'elle entre ainsi dans le cadre de pensée de Heisenberg. On désignera par $\{X_{nm}^2(t)\}$ le tableau qui correspond à la quantité physique $x^2(t)$.

Il va sans dire que $x^2(t)$ est le carré de $x(t)$. Pour des raisons de dimensions, on s'attend à ce que les quantités $\{X_{nm}^2(t)\}$ soient des fonctions quadratiques des $\{X_{kl}(t)\}$. Autrement dit, on attend une relation de la forme :

$$X_{nm}^2(t) = \sum_{klk'l'} c_{nmklk'l'} X_{kl}(t) X_{k'l'}(t),$$

les coefficients $c_{nmklk'l'}$ étant à trouver. Remarquant que le produit $X_{kl}(t) X_{k'l'}(t)$ dépend du temps avec la fréquence $(E_k - E_l + E_{k'} - E_{l'})/h$ et comparant ceci à la fréquence $(E_n - E_m)/h$ de $X_{nm}^2(t)$, on voit que pour que les deux membres de l'équation aient la même fréquence, il faut avoir simplement :

$$X_{nm}^2(t) = \sum_k c_{nmk} X_{nk}(t) X_{km}(t).$$

Les coefficients c_{nmk} peuvent-ils dépendre de l'atome ? Ce serait surprenant alors qu'ils n'assurent qu'un rôle purement algébrique. Heisenberg les pose donc tous égaux à 1, ce choix étant selon lui « presque inévitable » pour assurer le principe de correspondance. On a donc finalement

$$X_{nm}^2(t) = \sum_k X_{nk}(t) X_{km}(t). \quad (3.2)$$

On reconnaît la règle de multiplication de deux matrices (infinies). Heisenberg ignorait tout des matrices, mais son directeur de recherche Max Born l'éclaira sur ce sujet. L'aspect le plus surprenant de cette règle algébrique était, sans aucun doute, qu'elle ne soit pas commutative quand on l'étend au produit de deux quantités physiques différentes. La suite allait révéler toute l'importance de ce fait.

La dynamique

25. Parmi toutes les quantités physiques représentées par des matrices de Heisenberg, il en est une dont la forme est simple : c'est l'énergie de l'atome. On s'attend à ce que la collection des $\{E_n\}$ suffise à caractériser l'énergie mesurable de l'atome et que la matrice correspondante soit diagonale. On désignera par H cette quantité physique « énergie de l'atome », par référence au formalisme classique de Hamilton. Les $\{E_n\}$ ne dépendent évidemment pas du temps à cause de la conservation de l'énergie d'un atome libre.

Cela a pour conséquence immédiate la forme que doit prendre la dynamique dans la nouvelle physique. Ainsi, demandons-nous quelle matrice doit correspondre à la quantité physique classique qu'est la vitesse $v = dx/dt$. La règle la plus simple qu'on puisse supposer est d'avoir :

$$\begin{aligned} V_{nm}(t) &= \frac{d}{dt} X_{nm}(t) = -2\pi i v_{nm} X_{nm}(t) = -\frac{2\pi i}{\hbar} (E_m - E_n) X_{nm}(t) \\ &= \frac{i}{\hbar} (E_n X_{nm}(t) - X_{nm}(t) E_m). \end{aligned}$$

Réécrit sous forme de matrices, cela devient :

$$\frac{dX}{dt} = \frac{i}{\hbar} (HX - XH) \equiv \frac{i}{\hbar} [H, X]. \quad (3.3)$$

On étend immédiatement cette règle à n'importe quelle autre quantité physique. Comme la matrice H commute avec elle-même, il en résulte automatiquement que $dH/dt = 0$, ce qui exprime bien la conservation de l'énergie. Les autres quantités physiques conservées sont celles qui commutent avec H . Au total, la non-commutativité se révèle être une vertu puisqu'elle est la clef de la dynamique.

Les règles de commutation canoniques

26. La théorie qui vient d'être décrite est encore purement formelle. Il faut quelque chose de plus pour pouvoir calculer effectivement les niveaux d'énergie et les éléments de matrice des quantités physiques importantes. Le plus simple est de considérer pour cela le cas d'une particule libre dans un espace à une dimension où la position est associée à la matrice X et l'impulsion à la matrice P . Le principe de correspondance suggère de prendre pour la matrice représentant l'énergie la forme $H = P^2/2m$. D'après la loi (3.3) pour la dynamique, on a :

$$\frac{dX}{dt} = \frac{i}{2m\hbar} [P^2, X] = \frac{i}{2m\hbar} (P[P, X] + [P, X] P).$$

On voit que l'on peut ainsi obtenir la formule $dX/dt = P/m$ que suggère le principe de correspondance si l'on pose :

$$[P, X] = \frac{\hbar}{i} I, \quad (3.4)$$

où I est la matrice identité. La grande généralité de la « règle de commutation canonique » (3.4) se vérifie immédiatement. Supposons en effet que la particule en question soit soumise classiquement à un potentiel $V(x)$. Si ce potentiel est donné par un polynôme en x , ou même par une série entière $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$, les règles algébriques de la théorie lui font correspondre la matrice $V(X) = a_0 I + a_1 X + a_2 X^2 + \dots$ qui est bien définie. Il est alors facile de constater à l'aide de la règle (3.4) que l'on a :

$$[P, V(X)] = \frac{\hbar}{i} V'(X),$$

où $V'(x) = dV(x)/dx$. En prenant pour expression de l'énergie la matrice

$H = P^2 / 2m + V(X)$, on constate que l'on a :

$$\frac{dX}{dt} = P/m ; \frac{dP}{dt} = -V'(X), \quad (3.5)$$

c'est-à-dire les équations du mouvement classique.

Les règles de commutation canoniques, étendues à un système dynamique quelconque de coordonnées $\{Q_1, Q_2, \dots\}$ avec les moments conjugués $\{P_1, P_2, \dots\}$ seront données en général par :

$$[P_k, Q_k] = \frac{\hbar}{i} I, [P_j, Q_k] = 0 \text{ pour } j \neq k. \quad (3.6)$$

Les prédictions de la théorie

La théorie complétée par les règles de commutation canoniques permet de calculer les niveaux d'énergie et les éléments de matrice des quantités physiques essentielles au moyen de manipulations algébriques parfois très habiles. Ces calculs exigent de la virtuosité et ils ont été supplantés, dans la plupart des cas, par les méthodes de la mécanique ondulatoire utilisant l'équation de Schrödinger. Ce n'est pourtant pas toujours le cas et on retrouve certains calculs particulièrement élégants de la mécanique des matrices dans les cours modernes de mécanique quantique. Citons le calcul des valeurs propres des opérateurs de moment angulaire J^2 et J_z et des matrices qui représentent les deux autres composantes J_x et J_y . Il en va de même pour le calcul algébrique des niveaux de l'oscillateur harmonique, utile en mécanique quantique élémentaire et indispensable en électrodynamique quantique. Le calcul des niveaux de l'atome d'hydrogène qui fut réalisé par Pauli exige une habileté de magicien, mais l'important est qu'il puisse être fait et qu'il s'accorde aux données.

Le bilan

27. Nous ne dirons rien des applications de la « mécanique des matrices » que firent Born, Heisenberg, Jordan, Pauli, et d'autres après eux. Une physique, destinée à rester, venait en effet d'être découverte et tout ce qui vint par la suite peut lui être désormais imputé, en tout ou partie.

Cette « nouvelle théorie des quanta » rompait avec les modes de pensée traditionnels, d'une manière à la fois franche et subtile. Il y avait rupture franche avec l'intuition, la représentation visuelle de l'objet physique. Plus subtiles étaient les analogies qui subsistaient. Ainsi, les éléments de matrice expriment un processus de transition résonnante au moyen de quantités oscillantes, sous une forme mathématique parfaitement conventionnelle, conforme à l'analyse de Fourier qui avait été rejetée dans le modèle de Bohr. Les produits de matrices ne sont pas non plus sans signification intuitive : un produit analogue avait été en effet déjà écrit dans le travail de Heisenberg et Kramers sur la dispersion de la lumière. Il s'appuyait sur l'effet Raman dans lequel un atome passe d'un niveau initial n à un niveau intermédiaire k , puis aboutit finalement à un niveau m . Chacune de ces transitions est décrite par un élément de matrice, et la sommation qui entre dans un produit de matrice correspond à la diversité des stades intermédiaires.

Heisenberg put s'inspirer de la signification de ce premier produit quand il en écrivit d'autres. Ainsi, tout produit de matrice pouvait se concevoir comme l'image d'une série de processus physiques, même si ceux-ci n'appartiennent qu'au domaine de la pensée (cette représentation mentale des opérations mathématiques allait réapparaître plus tard avec les processus virtuels de la théorie quantique des champs)*.

L'abstraction de la mécanique des matrices, en revanche, même si elle n'était aucunement le produit de la volonté de ses créateurs, n'en était pas moins frappante et Paul Dirac devait en apporter la signification en revenant sur la notion de quantité physique. Trois siècles de succès de la physique classique avaient ainsi rendu à la longue banal et simpliste l'usage du quantitatif, où toute notion destinée à décrire le monde physique se doit d'être exprimée par un nombre, qu'il s'agisse d'une coordonnée, d'une vitesse ou de quoi que ce soit d'autre. On avait oublié les interrogations premières que cette réduction du physique au quantitatif avait pu soulever à l'époque de Galilée et Descartes.

Dirac revient à ces bases de la pensée physique. Il admet qu'il existe des « objets » physiques réels qui sont essentiellement des particules, électrons, protons, photons, et dont le catalogue s'agrandira par la suite. Il admet également que les objets physiques doivent être décrits par des « objets de pensée » purement mathématiques. Par une réflexion analogue à celle qui conduit aux matrices de Heisenberg, il identifie ce qui sera désormais le noyau dur de toute la mécanique quantique : les notions qui permettent de représenter les particules, ou si l'on préfère les quantités physiques qui les caractérisent, sont des objets mathématiques qui ne se réduisent pas à des nombres ordinaires.

Dirac les appelle des q -nombres, dont un exemple est fourni par les matrices de Heisenberg ; plus tard ce seront des opérateurs avec la mécanique ondulatoire. Ce ne sont pas des nombres ordinaires (des c -nombres dans le langage de Dirac) puisqu'ils ne commutent pas. Leur lien avec la physique expérimentale tient à ce que les q -nombres recèlent en leur structure les valeurs numériques, les c -nombres qui peuvent ressortir d'une mesure. Dans le cas de la matrice qui représente l'énergie d'un atome chez Heisenberg, la matrice elle-même est le q -nombre assimilable à la notion physique d'énergie alors que les valeurs propres de cette matrice constituent les c -nombres que l'on peut atteindre expérimentalement.

Pour revenir à la théorie de Born, Heisenberg et Jordan, on notera qu'il y manquait encore une notion essentielle, celle de « l'état » d'un système. La nouvelle mécanique des quanta permettait de décrire la structure d'un objet physique, ses niveaux d'énergie, la nature des quantités physiques représentées par des matrices. En revanche, l'état de ce système, c'est-à-dire la situation dans laquelle il se trouve à un instant donné, n'était pas encore apparu et ne le serait qu'avec la « mécanique ondulatoire ». Il est vrai qu'on ne pouvait manquer de s'en préoccuper tôt ou tard et certaines questions, qu'on se posait déjà à propos de la trajectoire d'un électron dans un détecteur, auraient immanquablement conduit à noter qu'une matrice peut agir sur des vecteurs et que ces derniers ont sans doute une signification physique. La fonction d'onde serait ainsi apparue sous la forme d'un vecteur d'état ; mais tout allait très vite et les choses ne se passèrent pas ainsi.

L'onde de Louis de Broglie

28. Même s'ils n'admettaient pas tous, sans réserve, l'hypothèse du photon, les physiciens des rayons X s'y intéressaient tout particulièrement. La nature ondulatoire des rayons X s'affirmait bien en effet dans leur diffraction sur les cristaux, mais on pouvait aussi constater que des rayons X durs ionisent la matière le long de lignes droites qui évoquent des trajectoires de particules. L'existence du photon avait, en outre, été confirmée par Arthur H. Compton en 1921, et Louis de Broglie, familier de ce milieu des rayons X, se pose alors la question : si la lumière, dont on sait le caractère ondulatoire, peut se manifester sous forme de particules, existe-t-il d'autres ondes associées à d'autres particules ?

Il envisage ainsi la possibilité qu'une onde soit associée à un électron libre. La conséquence essentielle qu'il en tire est que le vecteur nombre d'onde k de cette onde doit être relié à l'impulsion p de la particule par :

$$p = \hbar k, \quad (4.1)$$

soit encore la relation $\lambda = h/p$ donnant la longueur d'onde en fonction de la grandeur de l'impulsion.

Il se fonde sur des considérations de relativité pour établir ce résultat : l'électron, qu'on considère comme une particule réelle, est accompagné d'une onde. De Broglie introduit deux observateurs. Le premier observe l'électron au repos et l'onde, supposée en forme de « paquet d'onde », est localisée pour cet observateur au voisinage de la position de la particule. La fréquence de l'onde est supposée donnée par la relation $\nu = E/h$ qu'Einstein avait posée pour le photon. Pour le premier observateur, l'énergie de l'électron est égale à l'énergie au repos $E_1 = mc^2$, de sorte que la fréquence de l'onde est $\nu_1 = mc^2/h$.

Un second observateur voit l'électron se déplacer à la vitesse v , son énergie étant donnée par $E_2 = mc^2 \sqrt{1-v^2/c^2}$ et la fréquence de l'onde est alors E_2/h . Comme les quatre quantités (ω, k) , où l'on a posé $\omega = 2\pi\nu$, forment un quadrivecteur, le nombre d'onde devient $k_2 = v\omega_1/(\sqrt{1-v^2/c^2})$ dans le second référentiel, ce qui donne la relation (4.1). La particularité qui convainc de Broglie de la vraisemblance de l'onde qu'il a imaginée est de supposer l'onde localisée au voisinage de l'électron. C'est alors un « paquet d'onde » qui met en jeu une superposition d'ondes de longueurs d'onde voisines. La vitesse d'ensemble du

paquet d'onde (sa vitesse de groupe) est donnée par $\partial\omega_2 / \partial k_2$ et elle est bien égale à v . Il est donc tout à fait concevable qu'une onde puisse accompagner l'électron.

De Broglie note aussi que la condition de quantification de l'atome d'hydrogène posée par Bohr, $\int p dl = nh$, peut signifier que la trajectoire fermée de l'électron supporte une onde stationnaire, telle qu'au moins pour n grand, la longueur de la trajectoire soit égale à un nombre entier de longueurs d'onde.

Qu'en dit l'expérience ?

29. La présence d'une onde associée à l'électron devrait se traduire en principe par l'existence de phénomènes d'interférences ou de diffraction. Certaines données expérimentales pouvaient laisser supposer l'existence d'effets de ce genre, mais elles n'étaient pas vraiment convaincantes et il fallut attendre 1927 pour qu'une expérience, faite par Clinton Davisson et Lester Germer, se montre réellement décisive en révélant des similitudes de comportement entre les électrons et les rayons X.

On sait qu'un cristal se présente, à l'échelle microscopique, comme un réseau périodique d'atomes. Lorsqu'une onde plane électromagnétique arrive sur un atome unique, elle est diffusée et elle produit une ondelette secondaire, de forme sphérique et centrée sur l'atome. Dans un cristal, il y a une multitude d'atomes et toutes les ondelettes interfèrent entre elles. Pour des rayons X dont la longueur d'onde est comparable au pas du cristal, ces interférences sont destructives dans presque toutes les directions mais constructives dans certaines « direction de Bragg » où toutes les ondelettes réémises par les atomes sont en phase. Les rayons X se concentrent à la sortie du cristal dans ces directions privilégiées qui ne dépendent que de la longueur d'onde, de l'orientation, de la symétrie et du pas du réseau cristallin.

L'expérience de Davisson et Germer montrait que les mêmes effets de diffraction dans les mêmes directions se produisaient pour des électrons, en supposant qu'une onde ayant la longueur d'onde (4.1) était présente. En fait, quand l'expérience fut publiée, elle apporta davantage une confirmation qu'une révélation, tant la théorie des « ondes de matière » avait fait de progrès dans l'intervalle, comme on va le voir.

L'équation de Schrödinger

L'équation de Schrödinger aux valeurs propres

30. Pour donner corps aux idées de L. de Broglie, il fallait établir la dynamique qui gouverne l'évolution des ondes de matière. Erwin Schrödinger est bien armé pour résoudre ce problème grâce à de solides connaissances en physique mathématique. Il possède en particulier la maîtrise des équations aux valeurs propres qui déterminent les fréquences de résonance en élasticité et en acoustique. Or, c'est justement un problème de cette nature qu'il va rencontrer.

De Broglie n'avait étudié que l'onde d'une particule libre et ce qu'il disait de l'atome d'hydrogène, bien que suggestif, ne permettait pas de déterminer l'onde d'un électron lié. C'est le problème auquel Schrödinger s'attaque. En partant des considérations relativistes de L. de Broglie, il construit d'abord une théorie relativiste de l'atome d'hydrogène qui se révèle, malheureusement, un échec (du fait qu'il n'avait pu tenir compte du spin de l'électron). Schrödinger réétudie le problème et le reprend sous sa forme non relativiste.

Il montre que celui-ci se ramène à une équation aux valeurs propres qui, cette fois, est bien la bonne.

La première publication de Schrödinger, en janvier 1926, porte un titre révélateur : *La quantification comme problème aux valeurs propres*. Il considère l'onde $\psi(q)$ associée à un système physique dont la fonction de Hamilton, c'est-à-dire l'énergie classique, est de la forme $H(q_k, p_k)$.

Longtemps avant, Hamilton avait proposé une méthode pour déduire l'optique géométrique de l'optique ondulatoire. Il décrivait ainsi les rayons lumineux comme la trajectoire d'un point mouvant. En systématisant ses résultats, il avait abouti aux célèbres équations de Hamilton pour la dynamique classique. Schrödinger reprend le raisonnement de Hamilton à l'envers pour trouver quelle équation d'onde (analogue de l'optique ondulatoire) peut correspondre à un mouvement classique de particule. La démarche ne peut être démonstrative dans ce cas, mais seulement suggestive. Il faut également s'aider du principe de correspondance. Sans entrer dans le détail de ce processus de véritable devinette, nous dirons simplement qu'il amène Schrödinger à proposer l'équation que la fonction d'onde devrait satisfaire quand le système est dans un état stationnaire d'énergie E . Il s'agit de l'équation de Schrödinger :

$$H\left(q_k, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_k}\right) \psi(q) = E \psi(q). \quad (4.2)$$

Dans le cas de l'électron libre, les coordonnées $\{q\}$ sont celles de la position x et on a $H = p^2/2m$. Donc :

$$H\left(x_k, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_k}\right) \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi,$$

Δ étant l'opérateur de Laplace $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Si ψ est une fonction périodique (sinus, cosinus ou exponentielle complexe) de nombre d'onde (4.1), on constate que l'équation (4.2) est effectivement satisfaite avec $E = p^2/2m$. La nouvelle équation généralise donc bien l'hypothèse de L. de Broglie.

L'atome d'hydrogène

31. Dans le cas de l'atome d'hydrogène, l'équation (4.2) s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V(r) \psi = E \psi, \quad (4.3)$$

avec un potentiel coulombien $V(r) = -Ze^2/r$. Schrödinger n'a aucune peine à résoudre cette équation. Elle ressemble à l'équation de Helmholtz, $\Delta \psi + k^2 \psi = 0$

qui détermine les fréquences de résonance d'une cavité en électrodynamique ou en acoustique. L'invariance de l'équation (4.3) par rotation autour de l'origine commande de passer en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) . Or, on sait que l'opérateur Δ agit très simplement sur certaines fonctions $Y_{lm}(\theta, \phi)$, les harmoniques sphériques dépendant de deux indices entiers (l, m) qu'on connaît depuis longtemps. Schrödinger cherche donc une solution de la forme $\psi = f(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$. Il obtient alors une équation différentielle pour la fonction $f(r)$, de la forme :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} f \right) - \frac{Ze^2}{r} f = Ef.$$

Il reconnaît une équation connue dont les solutions se ramènent à des « fonctions hypergéométriques confluentes ». Les propriétés asymptotiques de ces fonctions, pour de grandes valeurs de r , permettent de fixer les valeurs possibles de E .

En effet, la fonction $f(r)$ croît en général exponentiellement, avec r , sauf pour des valeurs exceptionnelles du paramètre E pour lesquelles, au contraire, il existe une solution qui décroît exponentiellement. C'est seulement dans ce cas que la fonction $\psi(x)$ peut représenter une onde localisée au voisinage du noyau. Les valeurs correspondantes de E sont les énergies possibles de l'atome d'hydrogène et leurs valeurs sont bien celles que l'on attend.

Schrödinger complète cette étude en traitant simultanément l'électron et le noyau comme des particules associées chacune à une onde, ce qui fait apparaître le rôle de la masse réduite ; il traite l'effet Stark par une méthode des perturbations. Il écrit l'équation qui détermine en principe les niveaux d'un atome à plusieurs électrons.

L'équation de la dynamique

32. Dans son dernier article de juin 1926, Schrödinger écrit l'équation qui détermine l'évolution d'une fonction d'onde quelconque $\psi(q, t)$ au cours du temps. S'inspirant à nouveau du principe de correspondance et d'analogies avec la mécanique classique, il pose pour cela :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \left(q_k, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_k} \right) \psi. \quad (4.4)$$

Dans la mesure où l'on admet que la fonction d'onde détermine tout ce qu'on peut observer des particules, cette équation de Schrödinger constitue la nouvelle forme que prend l'équation fondamentale de la dynamique.

L'apparition de nombres complexes devient nécessaire alors que, dans le cas stationnaire (4.3), les nombres i qui figuraient dans $H \left(q_k, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_k} \right)$ pouvaient encore conduire souvent à des fonctions d'onde réelles.

En particulier, la fonction d'onde d'un état stationnaire d'énergie E dépend du temps de manière périodique par un facteur $\exp(-iEt/\hbar)$.

La fonction d'onde et les probabilités

33. La fonction d'onde semblait effectivement détenir la clef de la physique quantique, mais il restait à comprendre sa signification. Schrödinger put croire pendant une brève période que les « aberrations » de la physique des matrices allaient se trouver balayées pour laisser la place à une physique enfin compréhensible.

L'équation dynamique de Schrödinger (4.4) semblait en effet pouvoir s'interpréter en supposant que l'électron, au lieu d'être une particule, soit une espèce de fluide électronique. Ce fluide aurait eu une densité de masse $\rho(x) = m\psi^*(x)\psi(x)$ et une densité de courant massique $J(x)$ de composantes

$$J_k = \frac{m\hbar}{2i} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x_k} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x_k} \psi \right). \quad (4.5)$$

On pouvait en effet déduire de l'équation de Schrödinger pour un électron une relation de conservation bien connue en mécanique des fluides,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } J = 0. \quad (4.6)$$

Cette idée d'un fluide électronique heurtait Max Born car elle ne pouvait rendre compte de l'observation universelle d'électrons bien individualisés avec une charge bien définie. Born propose donc une autre interprétation en juillet 1926. Il reconnaissait l'importance des résultats de Schrödinger et il avait aussitôt apprécié ce qu'ils apportaient de nouveau : la possibilité de décrire l'état physique d'un système que la mécanique des matrices n'avait pu fournir. Or justement, Born cherchait à comprendre cette question à propos des collisions entre particules.

Les collisions avaient joué un grand rôle dans l'histoire de la physique quantique, puisqu'elles étaient à l'origine du modèle de Rutherford de l'atome. Bohr ne manquait pas de souligner, pour sa part, que toutes les questions de principe rencontrées en physique quantique devaient se retrouver dans une description des collisions. C'est ce que Born avait cherché à comprendre, sans succès, avec les méthodes de la mécanique des matrices et il reprend la question en s'appuyant cette fois sur la fonction d'onde.

Il analyse une onde plane qui représente l'état initial d'un électron libre d'impulsion donnée avant qu'il n'entre en collision avec un atome. Born est familier avec les mathématiques de la physique des ondes et il applique à l'équation de Schrödinger des méthodes auparavant mises au point pour la diffusion de la lumière sur un obstacle. Il modélise l'interaction de l'atome avec l'électron par un potentiel, ce qui le conduit à une équation de Schrödinger. Il étudie (au moyen de ce qu'on appellera plus tard *l'approximation de Born*) le comportement asymptotique de la fonction d'onde à grande distance du diffuseur après la collision. Il constate que toutes les observations possibles de l'électron après collision, dont chacune est exprimée par une onde plane qui décrit une particule émise dans une certaine direction, sont présentes dans la fonction d'onde sous forme de

superposition. Sans transition, il affirme alors : « Une seule interprétation est possible, la fonction d'onde $\psi(x)$ donne la probabilité pour que la particule soit détectée au point x ». Il ajoute, dans une note en bas de page, que cette probabilité est proportionnelle à $|\psi(x)|^2$.

Ainsi, d'après Born, la signification de l'onde de Schrödinger est la suivante : la quantité $\rho = \psi^* \psi$ représente la densité de probabilité de présence d'une particule aux divers points de l'espace.

Plus précisément, la probabilité p pour qu'une particule se trouve dans une région V de l'espace à un instant donné t est déterminée par :

$$p = \int_V |\psi(x, t)|^2 d^3x, \quad (4.7)$$

à condition que la fonction d'onde soit *normalisée* par la condition :

$$\int |\psi(x, t)|^2 d^3x = 1, \quad (4.8)$$

l'intégrale portant sur tout l'espace. Cette condition (4.8) assure, en effet, que la probabilité de présence de l'électron dans tout l'espace est égale à 1.

La notion de probabilité que Born venait ainsi d'introduire révélait un aspect essentiel et nouveau de la physique quantique. Il le dit dans ce même article : « Ici se pose tout le problème du déterminisme [...]. J'incline pour ma part à abandonner le déterminisme dans le monde des atomes. Mais c'est là une question philosophique pour laquelle des arguments tirés de la seule physique ne sont pas décisifs ». Avec ces mots, on entrait dans l'ère de l'interprétation.

DEUXIÈME PARTIE

UN SURVOL DE L'INTERPRÉTATION,
DES ORIGINES À L'ÉPOQUE ACTUELLE

En suivant l'histoire des débuts de la mécanique quantique, nous avons vu son évolution irrésistible vers une science d'une espèce nouvelle. Son aboutissement était une science formelle, étrangère au sens commun, dont les concepts de base avaient perdu tout contact avec l'intuition pour devenir des symboles mathématiques. Jamais auparavant une science n'avait exigé une autre science spécifique, l'interprétation, pour pouvoir être comprise. Aucune théorie antérieure n'avait de plus conservé de telles tensions internes – entre le formel et le réel, le hasard et la causalité – ni de tels paradoxes, comme ces équations linéaires dont les effets de superposition disparaissent à grande échelle. Les relations d'incertitude interdisaient toute représentation visuelle du monde atomique, et les penseurs les plus perspicaces comprenaient que les fondations même de la connaissance venaient de changer profondément.

Je continuerai de m'en tenir à un compte-rendu historique dans cette introduction à l'interprétation, quitte à l'approfondir plus loin et à en donner une version moderne. Il y a plusieurs raisons pour adopter cette méthode narrative plutôt qu'une autre plus didactique : parce que des idées, apparemment d'une époque, sont souvent l'aboutissement d'autres, plus anciennes ; parce que les problèmes essentiels furent identifiés par quelques-uns des plus grands penseurs de l'histoire de la physique, et qu'il vaut mieux les entendre plutôt que prétendre partir d'une page blanche ; et, finalement, parce que les éléments les plus profonds de l'interprétation actuelle sont mieux compris quand on se réfère aux anciennes questions primordiales.

Il y eut toujours deux tendances principales dans l'interprétation, sous les égides respectives de Bohr et d'Einstein. Il semble qu'on puisse essentiellement réduire leur opposition à une divergence sur une unique question : la mécanique quantique est-elle complète ? Si tel n'est pas le cas, le processus de recherche des véritables principes de la théorie n'est pas terminé et il devrait se poursuivre. Si au contraire la théorie est complète, cela devrait se manifester par une cohésion logique incontestable de l'interprétation. La plupart des autres questions controversées se ramènent à celle-ci. C'est vrai en particulier du statut de la réalité physique car on ne peut le discuter qu'après avoir répondu à cette question de la complétude.

Bohr, Heisenberg et Pauli considéraient les bases de la mécanique quantique comme complètes. Ils avaient bien conscience qu'une telle conviction implique une rupture avec la philosophie classique de la connaissance. L'école adverse, qui tenait pour l'incomplétude, était menée par Einstein et Schrödinger. Au travers d'un magnifique échange dialectique, où le seul but de chacun était la quête de la vérité, ils légèrent aux générations suivantes un petit nombre de questions précises. Il n'est pas inutile de noter que de nombreuses découvertes ont été faites depuis et que le champ de la physique quantique s'est énormément accru, tant par l'étendue que par la précision, mais les principes acquis en 1926 ont passé toutes les épreuves sans que jamais rien ne révèle chez eux une quelconque insuffisance.

Notre revue historique de l'interprétation sera centrée sur quatre problèmes spécifiques dont l'évolution a été notable.

- Le premier concerne le langage. Existe-t-il un langage, à la fois sensé et universel qui permette l'interprétation ? Entendons par sensé que ce langage obéit aux règles de la logique et, par universel, qu'il peut rendre compte à la fois du macroscopique et du microscopique, c'est-à-dire aussi bien d'un appareil de laboratoire que d'un atome. Cette question a peut-être reçu de Bohr une réponse prématurée et insuffisante en la remplaçant par la seule notion de complémentarité.

- Le second problème a trait à la correspondance entre le quantique et le classique. La physique classique se déduit-elle entièrement des principes quantiques ? La difficulté majeure de cette question n'est pas tant de trouver une correspondance mathématique entre l'équation de Schrödinger et les lois de la dynamique classique, mais de réconcilier le probabilisme quantique et le déterminisme classique.

- La troisième question est le célèbre problème du chat de Schrödinger. Les mathématiques de la mécanique quantiques sont linéaires, ce qui implique une présence universelle d'effets d'interférence. Mais on ne voit pas ces interférences au niveau macroscopique, et cette absence est même essentielle pour que des faits expérimentaux puissent exister. Comment lever une contradiction aussi fondamentale ?

- Et finalement, comment peut-on comprendre la mécanique quantique ? Y a-t-il un cadre de pensée bien défini, une épistémologie qui permette de concevoir la mécanique quantique (et donc l'ensemble de la physique) comme un corps de connaissances clair, cohérent et complet ?

L'histoire de l'interprétation sera divisée en trois parties. Elle commence au chapitre 5 avec l'interprétation de Copenhague. Le chapitre 6 décrit la période tumultueuse qui suit et les contributions d'Einstein, Schrödinger, von Neumann, de Broglie, Bohm et Bell pour ne nommer que ceux-là. Le chapitre 7 esquisse, pour finir, certaines des réponses qui ont été apportées aux quatre problèmes qui viennent d'être mentionnés, dans une période plus récente. Ces réponses seront développées avec des explications plus complètes et plus précises dans la troisième partie du livre.

À peine la mécanique quantique vient-elle d'apparaître que déjà, en 1927, on commence à se soucier de son interprétation. S'il fallait définir ce qu'est une interprétation, le plus simple serait de dire qu'elle consiste à comprendre vraiment une théorie. On essaiera d'être plus précis en examinant quelles difficultés doivent être surmontées, comment on peut préciser le programme d'une interprétation et, enfin, comment ce programme fut rempli pour la première fois par Bohr, Heisenberg et Pauli. Ils se rencontraient souvent à Copenhague où Bohr avait son laboratoire, d'où le nom *d'interprétation de Copenhague* qu'on donna plus tard à leur œuvre. Le terme est malheureusement ambigu pour avoir été étendu sans discernement à des contributions d'autres auteurs qui se contredisaient parfois. On évitera ce genre de risque en réservant explicitement le nom d'interprétation de Copenhague aux seuls écrits de Bohr, Heisenberg ou Pauli.

Les difficultés de l'interprétation

Physique quantique et mathématiques

34. Le caractère extrêmement abstrait de la théorie était sans doute ce qui frappait le plus les esprits dans la nouvelle physique quantique. On s'étonnait devant les fonctions d'onde complexes, les matrices infinies ou les opérateurs qui remplacent les bonnes et honnêtes variables dynamiques. Lorsque Schrödinger et Dirac eurent montré l'équivalence de la mécanique des matrices et de la mécanique ondulatoire, on sut que cette difficulté était destinée à rester et on parla alors, pendant quelque temps, d'une mécanique « symbolique », en entendant par là le symbolisme des mathématiques.

Des symboles mathématiques étaient utilisés partout en physique depuis longtemps, mais ils n'avaient jamais eu ces caractères inévitables, envahissants, indépassables, opaques, et d'autres qualificatifs qu'on leur reprochait. La nouvelle physique se révélait *formelle*. On peut dire qu'une science est formelle (ou

symbolique) quand ses notions fondamentales et les lois sur lesquelles elle s'appuie ne peuvent être exprimées pleinement que dans le langage des mathématiques.

Le cas s'était déjà présenté auparavant avec la théorie de la relativité et la théorie relativiste de la gravitation (ou relativité générale) qui en est le prolongement. On avait constaté la nécessité de fournir une interprétation en complément d'une science formelle, l'interprétation apparaissant alors comme une branche de la théorie qui relie le formalisme abstrait à la réalité concrète de l'expérience. L'interprétation n'avait pas présenté de difficultés majeures dans le cas de la relativité. Il suffisait d'imaginer des observateurs placés dans différents systèmes de référence pour traduire les quantités mathématiques de la théorie à l'aide de ce que ces observateurs pouvaient mesurer.

Dans le cas de la mécanique quantique, Bohr, Heisenberg et Pauli voyaient d'abord dans la mathématisation une crise du concept. Ce mot de concept, fréquent dans leurs écrits, y a un sens très riche. Il désigne une certaine accumulation cohérente de sens, nourrie de multiples perceptions, d'expériences et d'associations mentales, comme on peut en trouver autour de mots comme « objet, substance, espace, temps, mouvement, cause... ». Le concept, dans son foisonnement, s'opposait pour les penseurs de Copenhague à l'unicité et l'aridité des symboles (ou notions) mathématiques. La physique s'éloignait des concepts et perdait une grande partie de son sens en se réduisant, avec trop d'excès, aux mathématiques.

35. Si la relativité avait pu récupérer les concepts ordinaires d'espace et de temps en les enrichissant d'une synthèse grâce au recours aux observateurs, la méthode ne s'appliquait malheureusement pas à la mécanique quantique.

En physique classique, les mathématiques contribuent souvent à éclairer notre vision des choses. Quand il s'agit de représenter classiquement des positions et des vitesses ou d'exprimer les lois de la dynamique, les outils mathématiques que sont les coordonnées, les dérivées et les équations différentielles permettent de préciser une image que nous avons au préalable en l'esprit. Il y a ainsi un accord total entre l'outil théorique et l'intuition, et les mathématiques ne font qu'enrichir les concepts physiques en les précisant.

Il n'y a plus rien de tel avec les mathématiques de la physique quantique. Aucune intuition ne se rattache vraiment aux matrices ou aux opérateurs qui prennent la place des variables dynamiques d'antan. Il est vrai qu'alors notre intuition devient impuissante devant les étrangetés du monde atomique ; les mathématiques apportent le moyen d'aller plus loin grâce justement, à leur abstraction. Mais elles restent très éloignées des concepts.

C'est le cas, par exemple, des nombres complexes qui font leur entrée en physique avec la fonction d'onde. En effet, si ces nombres avaient pu être parfois utilisés auparavant, ce n'était jamais qu'à titre d'outils accessoires, comme lorsque un signal oscillant est assimilé à la partie réelle d'un nombre complexe $a \exp(-i\omega t)$. Avec la fonction d'onde, l'utilisation des nombres complexes devient indispensable. Elle révèle l'insuffisance d'une description de la physique qui n'emploierait que des nombres réels, bien que ceux-ci aient été associés de tout temps aux

quantités physiques, elles aussi qualifiées de réelles. En fait, l'apparition du même mot signale la présence d'un même concept, celui de réalité, avec tout son poids de signification qui se trouve remis en question.

On peut voir à l'aide d'un exemple simple qu'on ne peut se contenter de fonctions d'onde réelles. Supposons que la fonction d'onde d'une particule non relativiste soit de la forme $\cos[(px - Et)/\hbar]$. À l'instant zéro, elle s'annule en des points séparés par la distance $\lambda/2 = \pi\hbar/p$. La probabilité de présence de la particule est nulle en ces points, ce qui peut être, en principe, vérifié par l'expérience. Or si l'on observe la même particule dans un référentiel animé d'une vitesse V , l'impulsion devient $p' = p - mV$ et les points où la probabilité de présence de la particule est nulle sont séparés par une distance $\lambda'/2 = \pi\hbar/p'$. Ceci est évidemment impossible, puisque la distance de deux points est un invariant en physique non relativiste. L'existence d'une fonction d'onde et son interprétation probabiliste sont donc incompatibles avec la description de cette onde par des nombres réels. La difficulté disparaît avec une exponentielle complexe.

Le hasard absolu

36. La signification probabiliste de la fonction d'onde suscitait d'autres difficultés qui semblaient vertigineuses. Si l'on s'accordait à reconnaître à la fonction d'onde un rôle central dans la théorie, il fallait bien admettre aussi la présence sous-jacente de probabilités et celle d'un hasard partout à l'œuvre en physique quantique.

Le hasard avait été présent dès l'origine dans la première théorie des quanta, que ce soit dans les sauts quantiques d'un électron passant d'une orbite de Bohr à une autre, ou dans les travaux d'Einstein sur l'émission du corps noir. La présence du hasard restait cependant discrète et on pouvait l'attribuer à une connaissance encore imparfaite des lois quantiques. Ce n'était plus le cas avec la mécanique quantique enfin achevée où il fallait faire face à l'existence d'un hasard, en quelque sorte absolu.

Le hasard quantique avait peu de chose en commun avec celui qu'on connaissait auparavant, et Born en avait bien conscience en posant la question du déterminisme à la fin de son article mémorable. Le déterminisme est en effet inséparable de la physique classique. La forme même des équations de la dynamique classique entraîne que l'existence, à un certain moment, d'une position et d'une vitesse bien définies détermine d'autres valeurs pour ces quantités, tout aussi bien définies, à un moment ultérieur. Il n'est donc pas possible que le hasard existe vraiment en dynamique classique et il ne s'introduit qu'au travers de notre ignorance des valeurs exactes que possèdent les données réelles.

Quand par exemple un dé est lancé, on pense classiquement que ce dé possède au départ, objectivement, une position et une vitesse *parfaitement* définies. Les nombres qui donnent ces diverses quantités « existent » avec une infinité de décimales concevables, mais on ne peut les connaître, avec la précision qui serait nécessaire pour prédire avec certitude, par la dynamique classique, la face sur laquelle le dé va finalement s'arrêter. En d'autres termes, la dynamique classique est parfaitement déterministe « en soi » et le hasard n'est qu'une manifestation de

notre incapacité à pouvoir mesurer et calculer parfaitement. L'idée de chaos, qui a été développée depuis, ne remet pas en cause cette vision classique des probabilités et elle en donne, au contraire, un excellent exemple.

Ce que Born avait découvert se révélait très différent. On pouvait imaginer de connaître parfaitement une fonction d'onde arrivant sur un atome, ainsi que tous les détails de l'interaction de cette onde avec l'atome. L'équation de Schrödinger est parfaitement déterministe du point de vue mathématique, puisque la donnée d'une onde, à un certain instant, détermine son devenir à tout instant ultérieur. Pourtant, quand cette onde se manifeste concrètement par l'arrivée d'un électron dans un détecteur, cela ne peut être que de manière totalement aléatoire. Il s'agit d'un hasard intrinsèque, sans qu'il y ait de causes ignorées ou cachées, ni de mécanisme concevable bien qu'incontrôlé : un hasard absolu. C'est ce qu'Einstein ne put jamais accepter et que traduisait son célèbre refus : « Dieu ne joue pas aux dés ».

37. L'existence d'un hasard absolu présentait un obstacle majeur pour l'interprétation. Il se trouve en effet qu'aucune expérience, et aucune expérience de physique quantique en particulier, n'est concevable si l'on ne peut s'appuyer sur le déterminisme. La vérification d'une théorie du hasard absolu semblait donc devoir s'appuyer sur son contraire !

Précisons ce point important. Il n'y aurait pas d'instruments de physique dignes de ce nom si l'on ne pouvait se fier à leur mode d'emploi, ainsi qu'aux vérifications des montages assurant que chaque instrument fonctionne comme prévu. Qu'il s'agisse d'un appareil électronique ou d'un dispositif mécanique, cette prévisibilité n'est autre que le déterminisme, assurant que tout va se passer comme déterminé d'avance.

Il en va de même pour d'autres applications du déterminisme où l'on revient en arrière sur le passé. Ainsi, pour vérifier les prédictions de la théorie quantique qui consistent surtout en des probabilités, il faut faire un grand nombre de mesures afin de comparer les fréquences des événements effectivement observées avec les probabilités prédites. Or, en pratique, on calcule toujours les fréquences à partir de certains enregistrements des données, qu'il s'agisse de notes de laboratoire sur un cahier, de photographies ou du contenu de mémoires d'ordinateur. Ces enregistrements sont évidemment supposés fournir un témoignage fiable des événements de mesure passés. Or qu'est-ce que cette fiabilité, sinon un autre aspect du déterminisme allant cette fois du présent vers la reconstitution du passé ?

Le principe de correspondance

38. Les difficultés tenant au symbolisme et au hasard qu'on vient de signaler font toutes deux apparaître un autre problème de l'interprétation, qui est de devoir prendre en compte deux mondes distincts. L'un est celui du laboratoire et de la vie ordinaire, macroscopique, causal, clair. L'autre est celui des particules et des atomes, formel et soumis au hasard absolu. En fait, il s'agit bien du même monde réel et toute la difficulté est là.

On a vu que Bohr avait souligné la continuité qui existe entre ces deux mondes, ou plutôt ces deux visions d'un seul monde. C'est ce qu'il appelait le principe de correspondance mais, là encore, une difficulté considérable apparaissait. L'idée de correspondance exprime que physique classique et physique quantique s'accordent dans des conditions où la constante de Planck est relativement petite, et ceci est clair. Ce qui l'est moins est de rendre l'idée explicite. Si l'on revient une fois encore sur l'exemple de la relativité, on constate qu'il est parfaitement clair d'y considérer la limite $c \rightarrow \infty$. Mais quand on imagine de manière analogue que $h \rightarrow 0$, on se trouve bien embarrassé de dire comment un opérateur peut tendre vers un nombre, ou ce que devient la fonction d'onde et, inversement, ce qui reste de la richesse des concepts classiques quand h est relativement petit mais non nul. La correspondance n'est pas simplement une limite.

Qu'est-elle alors ? Bohr et Heisenberg ne parviennent pas à le dire et le principe de correspondance ne fut jamais énoncé par eux comme une règle à appliquer avec certitude et clarté. Il se présentait comme une nécessité vague qu'on devait reformuler chaque fois qu'on voulait l'employer, sans être tout à fait sûr que ces versions multiples n'étaient pas contradictoires entre elles.

Les relations d'incertitude

39. Le premier résultat substantiel des recherches sur l'interprétation fut la découverte des « relations d'incertitude » (ou d'indétermination) par Heisenberg en 1927. Puisque la fonction d'onde permet de calculer des probabilités, on peut introduire la notion d'incertitude sur une quantité comme on le fait en calcul des probabilités, c'est-à-dire comme un écart quadratique. Heisenberg étudie ainsi les incertitudes Δx et Δp_x pour des composantes de la position et de l'impulsion d'une particule sur un même axe. Il fait le calcul pour une fonction d'onde gaussienne et constate que le produit $\Delta x \Delta p_x$ est égal à $\hbar/2$. Il se demande quelle peut être la forme générale de ce résultat, ce qui l'amène à imaginer plusieurs expériences idéales (*gedanken*), dont le fameux « microscope de Heisenberg ».

Le microscope de Heisenberg.

Un électron est situé approximativement dans le plan focal objet d'un microscope d'axe z et on cherche à connaître sa coordonnée x dans ce plan. On éclaire pour cela l'électron par une lumière monochromatique de longueur d'onde λ , laquelle est diffusée par l'électron et vue au travers du microscope. On peut ainsi connaître la valeur de x , avec une incertitude Δx qui tient au pouvoir séparateur limité de l'instrument. En ce qui concerne l'impulsion, on note que la lumière est formée de photons, lesquels possèdent une impulsion. La diffusion d'un photon par l'électron se produit avec un recul p pour l'électron. Cette impulsion de recul ne pourrait être connue qu'en déterminant l'impulsion du photon diffusé, mais tout ce que l'on sait sur celui-ci est qu'il est passé par le diaphragme d'entrée du microscope. L'angle sous lequel le diaphragme apparaît depuis le plan focal

définit une incertitude Δp_x de la composante x de p . En tenant compte de la théorie d'Einstein (qui donne l'impulsion du photon) et de la valeur connue du pouvoir séparateur d'un microscope, on constate que le produit $\Delta x \Delta p_x$ est de l'ordre de h . Telle est donc bien l'expression de la relation d'indétermination.

Le calcul est aisé. Soit d la distance du plan focal au diaphragme et a le rayon de celui-ci, en supposant $a \ll d$ pour simplifier. Le diaphragme est vu du plan focal sous un angle $\alpha \sim a/d$. L'incertitude Δp_x sur la composante x de l'impulsion du photon est égale à $p\alpha$ avec $p = h/\lambda$. Comme l'électron est dans le plan focal, l'incertitude sur sa position est $\Delta x \sim d\Delta\theta$, où $\Delta\theta$ est le pouvoir séparateur angulaire. Finalement, la théorie de la diffraction donne la relation $\Delta\theta \sim \lambda/a$ pour le pouvoir séparateur, et on constate bien que $\Delta x \Delta p_x$ est de l'ordre de h .

On remarquera que l'incertitude Δp_x résulte d'une incertitude sur l'impulsion du photon, considéré comme une particule, alors que Δx est dû à la limitation du pouvoir séparateur due à la diffraction de la lumière, laquelle est alors traitée comme une onde. La relation d'incertitude pour l'électron apparaît ainsi comme liée au caractère quantique de la lumière. L'argument du microscope de Heisenberg n'était donc pas une démonstration directe des relations d'incertitude, mais plutôt une condition de cohérence entre les limitations qui s'imposent, aussi bien à l'électron qu'à la lumière, par leur double caractère d'onde et de particule.

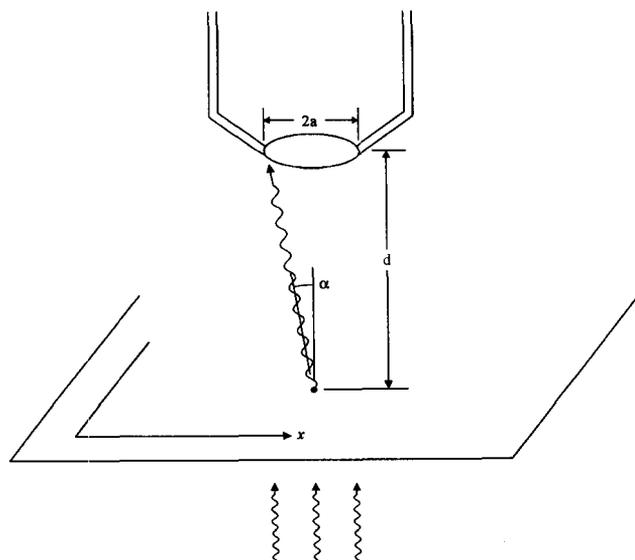


Figure 5.1 – Le microscope de Heisenberg.

L'expérience imaginaire de Bohr.

Un électron traverse un écran percé d'une fente de largeur Δx , de sorte que si l'on observe cet électron de l'autre côté de l'écran, on connaît sa position x au moment où il traverse l'écran avec une erreur Δx (la direction x étant évidemment parallèle à l'écran). Supposons que l'électron arrive normalement sur l'écran, avec une composante de son impulsion p_x initialement nulle. Cette impulsion peut changer de Δp_x par une interaction de l'électron avec l'écran lors de la traversée de la

fente. On peut connaître en principe cette modification en mesurant l'impulsion $\Delta p_x' = -\Delta p_x$ par l'écran. Mais pour mesurer $\Delta p_x'$, il faut que l'écran (constitué par une feuille de métal, par exemple) puisse se déplacer dans la direction x . Cela entraîne que, si l'écran est lui-même soumis à la mécanique quantique, il présente une incertitude de position $\Delta x'$, laquelle doit être au plus de l'ordre de la largeur de la fente pour que l'on puisse considérer que l'erreur sur x est bien de l'ordre de Δx . La relation d'indétermination pour l'écran ($\Delta x' \Delta p_x' \sim h$) entraîne alors la même relation pour l'électron.

Cet argument de Bohr établissait à nouveau la cohérence des relations d'incertitude en montrant l'impossibilité de les contourner par une mesure simultanée de la position et de l'impulsion, toute tentative de ce genre se heurtant à ces mêmes indéterminations dans l'appareil de mesure.

On démontra plus tard, de manière générale, les relations d'incertitude comme une borne inférieure imposée au produit $\Delta x \Delta p_x$, atteinte justement dans le cas d'une onde gaussienne. Vues sous cet angle, les relations d'incertitude apparaissent comme une propriété caractéristique des ondes qui était déjà connue en optique où elle est responsable des limitations du pouvoir séparateur d'un instrument d'optique (ou d'autres effets de diffraction), tel qu'elles interviennent dans le microscope de Heisenberg.

L'essentiel, pour l'interprétation, est que les relations d'incertitude interdisent de se représenter une particule de manière intuitive comme un point dans l'espace. Il est impossible de l'imaginer car l'idée même de trajectoire implique l'existence simultanée d'une position et d'une vitesse bien définies. C'est donc bien le « concept » de particule, au sens où on l'entendait classiquement qui se trouve rejeté.

Une remise en question philosophique

40*¹. Il apparaît très tôt à Bohr, Heisenberg et Pauli que l'interprétation de la mécanique quantique ne peut pas se réduire à une simple traduction du formalisme dans une pratique de l'observation, comme on avait pu se contenter de le faire pour la relativité. Il leur faut reconnaître que la philosophie de la connaissance, l'épistémologie, est remise en question jusque dans ses fondements.

C'est sans doute à Pauli qu'on doit l'analyse la plus poussée de cette révision et de sa nécessité, dans sa correspondance d'abord, puis dans des articles plus tardifs. Elle porte sur la genèse et l'évolution des concepts de la physique entre l'époque de Kepler et celle de Newton, pour mieux les comparer à ce que la physique quantique réclame à son tour.

1. Cette section est marquée de l'astérisque qui signale des développements techniques non indispensables. Je suppose en effet que tout lecteur n'est pas nécessairement intéressé par les à-côtés philosophiques de l'interprétation, surtout quand on fait appel, comme ici, à certaines données « techniques », quoique élémentaires de la philosophie.

Elle comporte aussi un retour sur la philosophie classique de la connaissance dont le représentant le plus marquant fut Emmanuel Kant. C'est seulement sur ce dernier point que nous rapporterons certaines des remarques de Pauli parmi les plus instructives.

Pour Pauli, le sommet de la philosophie classique de la connaissance est la *Critique de la Raison pure*, et il procède donc à une critique de cette Critique. On trouve d'abord chez Kant les « jugements catégoriques *a priori* » qui concernent l'espace et le temps. Si on le résume grossièrement, Kant affirme que la raison ne peut connaître un objet physique qu'en le pensant comme parfaitement situé dans l'espace et le temps. (L'espace et le temps seraient propres à la raison elle-même sans avoir une existence propre si l'on en croit Kant, mais il n'est pas nécessaire de le suivre aussi loin ; il suffit de reconnaître qu'ils constituent un cadre de pensée dont l'exactitude n'avait jamais été contestée.) Mais alors que le philosophe néo-kantien Ernst Cassirer avait pu montrer l'accord de ce principe avec la relativité restreinte, il était évident que les relations d'incertitude, en éliminant la notion de trajectoire, ne pouvaient plus l'admettre sans de profondes révisions.

Pauli examine également les catégories de la raison posées par Kant. Il s'agit en quelque sorte de conditions auxquelles la raison ne saurait en principe échapper, et que Kant a dérivées et analysées avec grand soin. Parmi ces douze catégories, deux au moins, et non des moindres, doivent être remises en question. Il y a d'abord la causalité, elle aussi considérée comme indispensable à toute pensée rationnelle. Il va de soi pourtant qu'elle n'est plus valable au niveau atomique.

Il y a aussi la catégorie de « réalité ». La mécanique quantique ne la nie pas en tant qu'affirmation de l'existence de « quelque chose » externe au penseur muni de raison. Le monde des atomes est sans aucun doute réel, mais cette réalité reste du domaine de l'existence et non des catégories de pensée. On ne peut la traduire par des concepts strictement définis car en effet, si un électron est réel, peut-on le penser au moyen d'un concept d'onde nécessairement étendue, ou bien d'un concept d'objet très petit, une particule ? Or Kant pose en principe que toute pensée est énonçable en totalité sous une forme cohérente et essentiellement unique. Ainsi, même si la réalité atomique existe, elle reste en grande partie inconcevable et ne se plie pas à la catégorie de pensée qu'on désignait auparavant par le même nom de réalité. Bernard d'Espagnat a approfondi de nos jours cette notion de « réalité voilée ».

Pauli aurait pu faire porter également sa critique sur la catégorie d'inhérence, présente chez Kant, qui semble bien proscrire toute possibilité pour deux objets d'être entièrement identiques. C'est un peu comme si le principe de Pauli lui-même avait été anticipé et nié d'avance, mais peut-être fais-je une erreur en proposant cette extension car Kant critique ailleurs la preuve d'inexistence des indiscernables chez Leibniz.

On arrêtera ici cette incursion dans un domaine qui nous éloigne trop de la physique. La leçon donnée par Pauli n'en est pas moins essentielle : l'interprétation de la mécanique quantique ne peut se limiter à une simple harmonisation du formalisme théorique avec les modes de pensée traditionnels qui proviennent de

notre expérience quotidienne et s'expriment par le sens commun. D'une façon ou d'une autre, elle devra s'appuyer sur une manière nouvelle de penser et de comprendre.

La complémentarité

41. Lors d'un congrès tenu à Côme en 1927, Bohr fait connaître ce qui, selon lui, constitue le caractère essentiel de la nouvelle manière de penser que requiert la mécanique quantique. Il s'agit de ce qu'il appelle la complémentarité. Malheureusement, tout comme le principe de correspondance, le principe de complémentarité reste assez flou, bien que supposé fondamental et universel.

Ce principe pose en tout cas que des modes de langage différents, mutuellement incompatibles, peuvent s'appliquer à un seul et même objet atomique selon les circonstances. Il s'exprime plus aisément à l'aide d'exemples que par une règle générale. Ainsi, on peut parler de l'électron comme d'une onde, ou bien comme d'une particule, mais on ne peut employer les deux langages simultanément. Cela s'étend à l'intérieur d'un des modes de pensée puisque, en parlant de la particule électron, on peut faire référence à sa position ou à sa vitesse, mais pas simultanément à la position et la vitesse (à cause des relations d'incertitude).

Bohr soulignait que l'appareillage expérimental détermine le mode de langage correct dans chaque cas d'espèce. Ainsi, un écran percé de deux trous amène à employer le langage des ondes et un détecteur oblige à parler de particule. Il redonnait ainsi un rôle central à la notion classique de « phénomène », qui signifie (chez Kant) une chose qu'on perçoit, et la seule dont on puisse parler légitimement. De la même manière, pour Bohr, les seules données auxquelles on puisse avoir accès sont fournies par des appareils (de mesure ou de conditionnement d'une expérience : un détecteur ou un écran). On continue d'appeler phénomènes ces données évidentes, et elles seules.

L'idée de complémentarité est profonde et subtile. Elle limite considérablement la manière dont on peut se représenter les objets physiques. On aura l'occasion plus loin de l'approfondir en tentant de la clarifier.

42. Le langage de l'interprétation que Bohr avait d'abord recherché fut bientôt découvert par John von Neumann dès 1929-1930. Les *prédicats élémentaires* que celui-ci introduisait (chapitre suivant) fournissaient l'intermédiaire nécessaire entre le langage ordinaire, bien adapté aux phénomènes expérimentaux, et le formalisme abstrait de la théorie. Malheureusement, cette idée se heurtait à deux catégories de problèmes, ceux des interférences macroscopiques rendues célèbres plus tard par l'exemple du chat de Schrödinger, et aussi des problèmes de logique sur lesquels on aura l'occasion de revenir en détail. De nombreuses années allaient être nécessaires avant que ces obstacles puissent être levés et l'idée resta donc longtemps infructueuse, sans que Bohr, Heisenberg et Pauli lui attachent de l'importance.

L'interprétation ne pouvait attendre cependant, car elle était indispensable à la compréhension des expériences. Des possibilités magnifiques s'offraient à la

science nouvelle, aussi bien en physique qu'en chimie (la structure atomique, la nature de la liaison chimique, les propriétés optiques et électriques de la matière, le ferromagnétisme...). Elles ne pouvaient être retardées ou entachées de doute à cause de scrupules philosophiques. Bohr proposa donc les règles nécessaires telles qu'il les concevait.

Il était profondément conscient des problèmes de logique que l'interprétation entraîne. Il mit donc en avant ce qu'il y avait de plus essentiel en ce domaine selon lui, c'est-à-dire la notion de vérité. La vérité, dans les sciences de la nature, repose avant tout sur la constatation des faits, et elle peut même être identifiée en premier lieu avec les faits. Compte tenu des limites que la complémentarité impose aux considérations quantiques, le mode de pensée classique apparaît comme le seul qui puisse donner à ces faits un cadre et une formulation indéniables et dépourvus d'ambiguïté. Bohr posa donc, en accord avec sa vision des phénomènes, que le langage de la physique, pour donner toute sa place à la vérité, doit être celui de la pensée classique.

43. La proposition de Bohr s'accordait parfaitement avec les habitudes de pensée de la physique expérimentale, et la plupart des théoriciens de l'époque répugnaient à s'embarasser de questions de fond n'ayant aucune répercussion sur la pratique de la recherche. Elle fut donc adoptée sans grande objection, sinon celles d'Einstein, de Broglie et Schrödinger sur lesquelles on reviendra. Il y avait pourtant plusieurs inconvénients à cette décision.

Tout d'abord, elle revenait à renoncer à l'idéal d'un langage universel pour toute la physique, que Bohr lui-même avait recherché et dont la préoccupation se retrouvait chez Pauli. On s'arrêtait au contraire à un langage adapté à l'expérience, classique et bien pourvu en concepts, mais n'ayant, en contrepartie, que des symboles mathématiques ou les options de la complémentarité quand on devait passer au monde atomique.

On pouvait aussi se demander si la valeur absolue donnée au langage classique était logiquement cohérente, compte tenu de ce qu'on signalait plus haut à propos du déterminisme et du hasard. Mais où aurait-on pu mettre à l'épreuve cette cohérence logique quand toutes les bases restaient floues, qu'il s'agisse du principe de correspondance ou de la complémentarité ? Heisenberg fut sans doute celui que ce problème préoccupa le plus et il tenta de compléter l'idée du principe de correspondance en supposant l'existence d'une frontière, définie par le nombre d'atomes qu'on suppose former un tout classique. Cette frontière sépare le domaine où la pensée classique est valable et un autre où il faut recourir au formalisme quantique. Elle n'est pas entièrement fixée. On peut penser classiquement tout un ampèremètre, ou seulement une portion de conducteur visible au microscope, ou même descendre plus bas en déplaçant la frontière de pensée, mais celle-ci ne peut descendre jusqu'au niveau d'un électron. L'idée était juste, toutefois, elle ne put être exploitée que plus tard, quand on sut donner une signification quantitative aux différences qu'entraînent les différents choix de frontière.

Remarquons enfin que les physiciens ne cessèrent jamais de parler en toute liberté du monde atomique, sans trop se soucier des avertissements et des

interdits de Bohr. Comme le faisait remarquer Feynman, on décrit toujours une expérience d'interférences comme si l'objet qui intervient était bien défini, hormis qu'on en parle comme d'une onde pour décrire la traversée des trous d'Young et comme d'une particule quand il est détecté. Les spécialistes sourcilleux de l'interprétation ont déploré ce laxisme. En fait, comme on le verra, les praticiens dénués de complexes étaient davantage dans le vrai mais, là encore, beaucoup de temps allait être nécessaire pour qu'on s'en convainque.

La réduction de la fonction d'onde

44. En maintenant dans son intégralité la physique classique pour exprimer les données manifestes de l'expérience, Bohr soulevait un nouveau problème. Puisque, en effet, les données classiques sont des nombres ordinaires, comment peut-on les utiliser pour connaître la fonction d'onde du système microscopique qu'on observe ? Or il faut absolument connaître cette fonction d'onde pour donner un contenu à la théorie. Comment faire ? L'importance de cette question eut pour conséquence de faire porter l'intérêt sur les mesures en les mettant, peut-être avec excès, au centre de l'interprétation. Celle-ci se réduisit alors purement et simplement pour beaucoup de physiciens à une « théorie des mesures ».

La théorie de la mesure qui résulte des travaux de l'école de Copenhague se présente comme une série de règles qui figurent dans tous les traités de mécanique quantique et qu'on appellera brièvement.

1. Le résultat de la mesure d'une observable A est aléatoire.
2. La valeur a que ce résultat peut prendre appartient au spectre de A .
3. Dans le cas simple où a est une valeur propre discrète et non dégénérée de A , sa probabilité est donnée par $|\langle a | \psi_i \rangle|^2$, en désignant par ψ_i la fonction d'onde du système mesuré au début de la mesure et par $|a\rangle$ la fonction (ou vecteur) propre associé à a .

La règle de réduction de la fonction d'onde se propose alors de définir la fonction d'onde après la mesure. Elle est facile à énoncer dans le cas d'une mesure idéale, où l'appareil de mesure a la vertu de pouvoir redonner le même résultat a si la première mesure est répétée immédiatement. Les règles précédentes impliquent alors que la fonction d'onde ψ_f après la première mesure est nécessairement la fonction propre de A associée à la valeur a . C'est là l'énoncé de la règle de réduction de la fonction d'onde dans le cas le plus simple.

Les quelques règles qui viennent d'être énoncées ne peuvent faire l'objet d'aucun doute, car elles ont pu être vérifiées par d'innombrables expériences faites dans des conditions extrêmement variées pendant trois quarts de siècle. Leur énoncé précis, que ce soit par Bohr, Heisenberg ou Pauli, a effectivement permis d'exploiter les conséquences de la mécanique quantique sans qu'il fût nécessaire d'entrer dans les subtilités de l'interprétation.

45. La règle de réduction introduisait pourtant une difficulté, à la fois nouvelle et considérable, dans l'interprétation. Pouvait-on d'ailleurs encore parler d'interprétation, alors qu'on venait peut-être de passer subrepticement à une autre

théorie que la mécanique quantique ? Celle-ci repose en effet sur une dynamique parfaitement explicite, donnée par l'équation de Schrödinger. Or une mesure, pour autant qu'on la considère avec l'œil d'un physicien, n'est jamais qu'une interaction d'un type particulier entre deux systèmes physiques, dont l'un est l'objet mesuré et l'autre l'appareil de mesure. On s'attendrait à ce que cela obéisse à une équation de Schrödinger, même compliquée, mais ce n'est pas ce que dit la règle de réduction.

Considérons en effet le cas où le résultat de la mesure est une valeur propre a qui est dégénérée et désignons par P l'opérateur de projection sur les fonctions propres correspondantes. En prenant en compte la normalisation des fonctions d'onde, la règle de réduction pose alors que

$$\psi_f = \frac{P\psi_i}{\|P\psi_i\|}. \quad (5.1)$$

Or cette relation est non linéaire, et on ne voit pas comment elle pourrait résulter d'une dynamique de Schrödinger strictement linéaire.

Bohr était parfaitement conscient de la difficulté qu'il assumait en totalité sans y voir une remise en question de sa réflexion. Oui, disait-il, la règle de réduction est une règle unique en son genre dans toute la physique ! Elle seule autorise à donner un contenu à la théorie quantique en permettant de connaître la fonction d'onde sur quoi toute la théorie repose. Il n'hésitait donc pas à voir dans la réduction un véritable effet physique, entérinant ainsi la violation de la dynamique linéaire de Schrödinger par l'apparition d'un phénomène externe qui ne se produit que lors d'une mesure. Le fait que cet effet soit immédiat et puisse étendre aussitôt ses conséquences à une distance quelconque sans obéir aux contraintes relativistes fut évidemment l'objet de bien des questions mais, telle qu'elle était, la règle resta.

Les problèmes qu'elle soulevait pouvaient prendre des formes variées. Certains physiciens portés à la logique, comme Einstein ou Schrödinger, restaient profondément mal à l'aise quant à la cohérence de la construction proposée. Ils s'interrogeaient sur ce qu'une mesure pouvait avoir de si particulier parmi toutes les interactions pour conduire à des conséquences aussi radicales. Existait-il vraiment un effet physique de réduction ? D'autres se demandaient si la fonction d'onde ne serait pas, en fin de compte, l'expression de l'information qu'un observateur possède, mais il leur était impossible de conjuguer cette idée avec la réalité de la dynamique. Tous butaient sur le problème de l'objectification, c'est-à-dire comment expliquer qu'une seule donnée apparaisse à l'issue d'une mesure, en se distinguant de toutes les autres valeurs qui étaient encore possibles un instant avant.

Le dernier mot, sans doute, n'était pas encore dit.

On a vu apparaître au chapitre précédent quelques problèmes qui pouvaient légitimement susciter un questionnement, et même une contestation de cette interprétation. Ce sont les étapes de cette « disputation » (comme on disait jadis) que nous nous proposons de décrire brièvement dans le présent chapitre, dans la mesure où elle a pu éclairer le sujet et le faire progresser. Cette revue ne prétend pas à être complète, surtout quand on s'approche de la période récente. Elle est même volontairement incomplète dans la mesure où certaines idées, qui allaient permettre de reconstruire plus solidement l'interprétation de Copenhague, ne seront abordées qu'au chapitre suivant.

L'apport de von Neumann

46. Les *Fondements mathématiques de la mécanique quantique* de John von Neumann (1932) constituent un apport majeur à l'interprétation. On les range parfois sous la bannière de l'interprétation de Copenhague mais cela ne peut que créer des confusions car certaines différences avec le trio Bohr-Heisenberg-Pauli portent sur des points qui se révéleront plus tard essentiels.

On notera d'abord qu'au contraire de Heisenberg et Pauli, tous deux très proches de Niels Bohr, von Neumann représente une autre filiation intellectuelle, celle du mathématicien David Hilbert. Cela se traduit dans la manière de concevoir ce qu'est une théorie physique. Pour Hilbert et ses disciples, une telle théorie devrait reposer sur des principes clairs et explicites, c'est-à-dire en fait des axiomes. Ces hypothèses fondatrices doivent être clairement séparées de leurs conséquences, lesquelles doivent être déduites avec une parfaite rigueur mathématique. Il convient également d'accorder une grande importance à la logique dans toutes les questions qui portent sur les fondements. Enfin cette logique est d'abord une logique formelle, bien codifiée, venue de Frege et développée par Hilbert, lui-même, et non la logique plus philosophique dont Bohr et même Pauli s'inspirent.

Cela entraîne plusieurs conséquences majeures pour l'interprétation : on ne peut admettre, dans une même théorie, deux catégories d'axiomes dont les uns relèveraient de la physique classique et d'autres seraient spécifiquement quantiques. La physique classique devrait donc pouvoir se déduire rigoureusement d'axiomes quantiques, dans le domaine macroscopique qui lui est propre. L'interprétation devrait être d'abord une sous-théorie à l'intérieur de la théorie quantique, plutôt qu'un commentaire inspiré de considérations philosophiques.

En fait, aucun de ces objectifs ne fut atteint dans l'immédiat, ce qui explique le peu d'intérêt que le trio de Copenhague accorda à ces vues dissidentes. On allait retenir plutôt deux apports de von Neumann à la théorie quantique proprement dite, portant sur le cadre formel des espaces de Hilbert et la théorie de la mesure.

Le cadre hilbertien

47. La théorie mathématique des espaces de Hilbert avait été inventée au début du vingtième siècle pour résoudre certains problèmes posés par les équations intégrales linéaires. Von Neumann sut reconnaître en elle le cadre qui convient à une formulation mathématique précise de la mécanique quantique.

Un autre cadre avait été proposé par Paul Dirac (1930). Les notions y étaient génialement simples et entièrement inventées pour la circonstance, avec les « fonctions delta », les « bras » et les « kets » que l'on retrouve encore aujourd'hui. Tout cela était malheureusement dépourvu de bases mathématiques précises qui ne seront établies que beaucoup plus tard. La proposition de von Neumann vient donc à point nommé pour permettre une analyse mathématique rigoureuse des fondements et des applications de la mécanique quantique. Elle s'accorde d'ailleurs sur la plupart des points avec celle de Dirac. Ainsi, un espace de Hilbert est un espace vectoriel, fait de vecteurs que l'on peut ajouter l'un à l'autre et multiplier par un nombre (complexe). Cela se rattache directement à la linéarité qu'on constate dans l'équation de Schrödinger, dont Dirac faisait le principe premier de la théorie (principe de superposition).

Parmi tous les espaces vectoriels complexes, un espace de Hilbert se distingue par le fait qu'un produit scalaire $\langle \alpha | \beta \rangle$ entre deux vecteurs α et β y est bien défini. Les espaces de Hilbert se présentent sous plusieurs aspects. Il peut s'agir d'un espace de dimension finie où les opérateurs (agissant linéairement sur les vecteurs) se forment comme des matrices. Cela convient parfaitement pour décrire, par exemple, les états de spin d'un électron. L'espace peut être aussi de dimension infinie ainsi que les matrices représentant les opérateurs et l'on retrouve ainsi les matrices introduites par Heisenberg, Born et Jordan. Enfin, les fonctions de carré sommable sur un espace de coordonnées constituent, elles aussi, un espace de Hilbert qui représente naturellement les fonctions d'onde.

La théorie mathématique des espaces de Hilbert était encore peu développée et von Neumann (1927) lui fit faire des progrès décisifs. Il établit en particulier le célèbre théorème spectral qui généralise à des opérateurs une propriété essentielle des matrices finies hermitiennes, celle d'admettre les vecteurs d'une base orthogonale pour vecteurs propres avec des valeurs propres réelles. Il définit les

opérateurs autoadjoints généralisant les matrices hermitiennes (un opérateur A est autoadjoint si $\langle \alpha | A\beta \rangle = \langle A\alpha | \beta \rangle$ pour tout couple de vecteurs α et β). Il définit aussi la notion de spectre (généralisant l'ensemble des valeurs propres d'une matrice), distingue un spectre discret d'un spectre continu et montre comment traiter rigoureusement le spectre continu. Les physiciens découvrent, à cette occasion, avec quelque contrariété, toute la complexité mathématique de la théorie quantique, car ils ont le choix entre le Charybde de von Neumann avec des intégrales de Lebesgue ou le Scylla de la fonction delta de Dirac, qui ne trouvera sa forme finale qu'avec les distributions de Laurent Schwartz (1950). En réglant en effet les problèmes délicats que soulèvent les opérateurs non bornés (dont des exemples immédiats sont les opérateurs de position et d'impulsion), von Neumann est amené à introduire des subtilités inattendues.

Signalons aussi les extensions que von Neumann (1940) donnera plus tard à une direction de recherche qui avait été, elle aussi, inaugurée par Dirac. Il s'agit de l'étude des algèbres engendrées par les opérateurs d'un espace de Hilbert et de leur abstraction, c'est-à-dire de certaines algèbres données *a priori*, dites C^* -algèbres, qui peuvent représenter, éventuellement, des quantités physiques sans qu'on les suppose, au départ, associées à un espace de Hilbert. Une des questions posées était de déterminer si, effectivement, on peut interpréter ainsi la C^* -algèbre dans un certain espace de Hilbert. Cette question mathématique destinée à de vastes développements revenait en somme à se demander si l'idée des q -nombres de Dirac est ou non identique à l'adoption d'un cadre hilbertien.

La logique

48. On a dit plus haut (section 42) que von Neumann avait proposé l'élément essentiel du langage de l'interprétation que Bohr avait lui-même recherché, sans le reconnaître quand il lui fut montré. L'idée consiste à considérer que toutes les phrases significatives qui entrent dans le discours de la physique, toutes les propositions de base doivent pouvoir entrer dans un cadre logique explicite. On sent là une forte influence de l'école logique de Hilbert et le nom de « prédicats élémentaires » que donne von Neumann aux propositions de base en est une illustration typique.

Un prédicat élémentaire ne fait intervenir qu'une certaine « observable » A (représentée mathématiquement par un opérateur autoadjoint) et un certain domaine Δ appartenant à l'ensemble des nombres réels. Le prédicat lui-même peut s'énoncer sous la forme verbale : la valeur de A est dans Δ . La remarque essentielle de von Neumann, inspirée par une des formes qu'il a donnée au théorème spectral, est d'associer un objet mathématique parfaitement défini à un prédicat de ce genre. C'est un opérateur de projection dans l'espace de Hilbert dont il donne l'expression explicite. Un opérateur de projection présente une analogie profonde avec une proposition de la logique, celle de ne pouvoir prendre que deux valeurs, « vrai » ou « faux » ou tout aussi bien 1 et 0, ce qui constitue le principe du tiers exclu. Or, un opérateur de projection a bien pour seules valeurs propres les nombres 1 et 0.

Nous aurons l'occasion de développer plus loin cette analogie, mais il faut reconnaître qu'elle avait encore peu d'arguments pour convaincre, et cela pour deux raisons. La première est qu'en dépit de ses efforts, von Neumann ne put faire entrer de manière convaincante les énoncés de la physique classique dans le cadre logique qu'il venait de créer. On semblait donc très loin d'avoir trouvé un langage universel.

La seconde raison tenait aux difficultés que la construction rencontrait avec la logique elle-même. Si l'on admet que tous les prédicats élémentaires puissent être énoncés, on constate qu'il est impossible de construire avec leur aide les opérations de base (et, ou, non) de la logique en respectant toutes les règles axiomatiques admises en logique. Cela tient évidemment encore une fois à la non-commutativité des opérateurs, c'est-à-dire des projecteurs dans le cas présent. Von Neumann, en collaboration avec George Birkhoff (1936), émit, en désespoir de cause, une proposition qui sut plaire à quelques chercheurs mais fut rejetée par la plupart. Il s'agissait de considérer que l'écart entre le mode de pensée quantique et le mode classique est si grand que ces modes n'obéissent pas aux mêmes règles logiques. Certaines règles, parmi celles connues depuis Aristote, ne seraient plus valables quand on décrit le monde quantique. La critique la plus naïve qu'on puisse faire de cette proposition extrême est qu'il serait bien étrange que l'accord entre une théorie, ayant des principes mathématiques, et la réalité expérimentale, obéissant au sens commun, dût se faire par l'intermédiaire d'une logique exotique alors que toutes deux se conforment à la logique ordinaire.

La théorie de la mesure

Le modèle de von Neumann

49. La contribution la plus décisive que von Neumann devait apporter dans l'immédiat à la problématique de l'interprétation fut sa théorie des mesures quantiques (on la trouve dans les toutes dernières pages des *Mathematische Grundlagen*, reproduites dans le livre de Wheeler et Zurek). Elle se fonde sur l'idée qu'il n'y a qu'une espèce de physique et qu'elle est quantique. Une expérience de mesure est donc une interaction entre deux systèmes quantiques. L'un d'eux, qu'on peut désigner par Q , est le système destiné à être mesuré. Parmi ses observables, figure un opérateur A . Un deuxième système, désigné par M , est l'appareil de mesure destiné à mesurer la valeur de A . Von Neumann prend pour cet appareil un modèle à un seul degré de liberté X qui représente la position d'un curseur sur une règle. Au début, le curseur est sur la position zéro et cela, compte tenu du caractère quantique de l'appareil, s'exprime en posant que la fonction d'onde initiale $\phi(x)$ du curseur est une fonction étroite centrée à la valeur $x = 0$.

Von Neumann propose un modèle élégant de l'interaction entre les deux systèmes Q et M . Il suppose, pour cela, que leur hamiltonien d'interaction est de la forme $H_{int} = -g(t) A.P$, où A est l'observable mesurée, et P l'observable canoniquement conjuguée à X , c'est-à-dire l'impulsion du curseur. La fonction $g(t)$ est positive et très grande, mais n'est différente de zéro que pendant un court

intervalle de temps Δt qui suit immédiatement l'instant $t = 0$. Pendant cette courte période, l'interaction domine sur les énergies propres de Q et de M et l'opérateur d'évolution

$$U(0, \Delta t) = \exp(- (i/\hbar) \int_0^{\Delta t} H(t) dt)$$

est pratiquement égal à $\exp(- i\lambda A.P/\hbar)$, où $\lambda = \int_0^{\Delta t} g(t) dt$ est une quantité qu'on peut prendre aussi grande qu'on veut.

Supposons alors que l'état initial du système Q est un état propre de A avec une valeur propre a_k et qu'on désigne cet état par $|k\rangle$. En agissant dessus, l'opérateur d'évolution prend la forme $\exp(- i\lambda a_k.P/\hbar)$, dans laquelle on reconnaît l'opérateur de translation en X d'une distance λa_k . Il en résulte qu'après l'interaction, la fonction d'onde $\phi_k(x)$ du curseur est toujours la même fonction étroite que précédemment, mais centrée, cette fois au point $x = \lambda a_k$. En somme, le curseur s'est déplacé de cette distance et sa nouvelle position indique explicitement quelle valeur propre de A était présente à l'entrée. Cela est bien conforme à ce qu'on attend d'un appareil de mesure.

50. Les choses se compliquent lorsqu'on considère un état initial du système mesuré qui n'est pas état propre de A , soit par exemple une combinaison de deux tels états propres

$$|\psi_0\rangle = c_1 |1\rangle + c_2 |2\rangle. \quad (6.1)$$

L'état initial du système complet $Q + M$ est de la forme $|\psi_0\rangle \otimes |\phi\rangle$ et il devient, immédiatement après l'interaction,

$$|\Psi\rangle = c_1 |1\rangle \otimes |\phi_1\rangle + c_2 |2\rangle \otimes |\phi_2\rangle. \quad (6.2)$$

Il y a une grande différence entre ce qu'exprime cet état et ce qu'on constate expérimentalement lors d'une mesure effective. Dans le second cas, on voit le curseur dans une seule des deux positions attendues, par exemple λa_1 , et il y a un effet du hasard dans le choix de cette position du curseur plutôt que l'autre. Rien de tel n'apparaît dans la formule (6.2) où les deux résultats possibles sont toujours présents sur le même pied.

On peut dire que la superposition interférentielle que l'on trouve dans l'état initial (6.1) se retrouve à présent dans l'appareil de mesure. Les situations d'interférences, en somme, se transmettent lors d'une mesure. Von Neumann montre alors qu'on ne peut échapper à la difficulté en mesurant l'appareil de mesure M à l'aide d'un second appareil M' car les situations interférentielles continuent d'être présentes. La situation correspondante où un appareil mesure un appareil qui mesure, etc., est appelée une chaîne de von Neumann. Qu'on la considère ou non, il est clair, de toute façon, que le fait d'avoir choisi au contraire de Bohr, une description quantique de l'appareillage, n'a pas éclairci les énigmes de la mesure.

Le recours à la conscience*

51. Une idée continue de parcourir le milieu de la physique, dans laquelle la fonction d'onde ne serait pas une quantité physique objective, mais traduirait l'information que possède un observateur. Il ne semble pas possible d'en donner

une formulation mathématiquement et physiquement satisfaisante, mais le plus près qu'on puisse s'en rapprocher est sans doute une réponse que von Neumann propose au problème qu'il rencontre. La chaîne de l'appareil qui mesure un appareil qui mesure... ne peut s'arrêter que si l'un de ces appareils est remplacé par un être conscient. L'introspection établirait, en effet, que notre conscience ne peut être multiple...

On a peine à comprendre aujourd'hui comment cette réponse, développée par London (1939) et Bauer, et soutenue par Wigner (1967), a pu séduire des esprits aussi perspicaces. Il faut probablement en chercher l'origine dans la culture philosophique allemande de l'époque, en particulier dans le simultanésisme de la conscience et de la réalité que prônaient Mach et Avenarius. À notre époque où les sciences cognitives rendent un peu moins obscur le fonctionnement du cerveau et où les données d'une mesure sont plus souvent lues par un ordinateur que par un être conscient, la proposition semble aberrante. Si l'on ajoute qu'elle a été exploitée en défense de la parapsychologie par des physiciens marginaux et des milieux occultistes, on doit certainement la classer comme la pire des déviations auxquelles l'interprétation de la mécanique quantique a pu conduire. Elle montre bien, en revanche, la difficulté des problèmes, si on la mesure au caractère extrême des réponses envisagées.

Le chat de Schrödinger

52. Le célèbre article de Schrödinger (1935) qui allait porter les difficultés de la théorie de la mesure à la connaissance de tous, est bien plus une réponse par l'absurde à von Neumann qu'un commentaire sur l'interprétation de Copenhague, au sens où nous l'entendons ici.

Rappelons-en l'essentiel. Il s'agit, ni plus ni moins, du modèle qu'on vient de décrire, à ceci près que l'observable A concerne un noyau radioactif et, dans l'équation (6.1), l'état 1 représente le noyau intact et l'état 2 le noyau désintégré. Le curseur est remplacé par un dispositif « diabolique » décrit par Schrödinger (un compteur Geiger actionne un marteau, lequel brise une fiole emplies de poison, lequel empoisonne un pauvre chat enfermé dans une boîte avec la machine infernale). Au lieu des deux positions d'un curseur, on a maintenant dans l'équation (6.2) un état d'un chat vivant superposé à un état de chat mort.

Schrödinger fait évidemment référence à von Neumann quand il décrit ainsi la théorie de la mesure : c'est au moment où un observateur ouvre la boîte que l'état de superposition (6.2) cesse d'exister pour que subsiste seulement un des deux états, chat mort ou chat vivant.

Il est vrai que la prise de conscience de von Neumann ressemble fort à la réduction de la fonction d'onde de Bohr, mais les différences n'en sont pas moins importantes. Pour Bohr, le chat macroscopique aurait dû être pensé uniquement en termes classiques et, à aucun moment, assimilé, comme nous l'avons fait, à un curseur à un seul degré de liberté. Heisenberg, de son côté, insistait justement sur l'erreur qu'il y a à modéliser par un système à un seul degré de liberté un appareil qui, dans la réalité, contient typiquement un milliard de milliards de milliards

d'atomes. Pour tous deux, la réduction de la fonction d'onde se produisait quand le compteur Geiger réagissait, de manière objective, bien avant qu'un observateur glisse un œil curieux dans la boîte.

Quoi qu'il en soit, le modèle de la mesure imaginé par von Neumann mettait l'accent sur un problème essentiel : en imposant une stricte description classique de l'appareil de mesure, l'interprétation de Copenhague dissimulait un problème de cohérence logique fondamental, celui de la compatibilité du classique global avec la nature atomique des appareils.

Il semble qu'on constate alors un écart entre les vues de Bohr et celles de Heisenberg. Le premier s'en tient strictement à ses idées initiales sur le rôle logique irréductible du classique dans la description des phénomènes. Le second fait, à diverses reprises, allusion aux conséquences que pourraient avoir les innombrables degrés de liberté d'un véritable appareil de mesure et il ne semble pas radicalement hostile à une formulation unique, quantique, des lois de la physique (voir, par exemple, Heisenberg, 1958). L'idée allait faire lentement son chemin.

Ondes pilotes

53. Ce que l'interprétation de Copenhague avait de plus rebutant pour certains, comme Einstein ou de Broglie, était l'idée de complémentarité. Elle remplace par une ambiguïté irréductible l'évidente clarté qu'on attribue d'instinct à la réalité. De Broglie, puis David Bohm (1952) et Jean-Pierre Vigié (1956), cherchèrent à reformuler la mécanique quantique de manière à ce que les particules existent réellement, c'est-à-dire aient une position bien définie à chaque instant. Les particules ont donc alors une trajectoire, et par conséquent une vitesse. C'est alors qu'intervient la fonction d'onde, la vitesse d'une particule étant identifiée à celle du courant de probabilité de la théorie quantique habituelle, soit $v = \text{Im}(\psi^* \partial \psi / \partial x) / \psi^* \psi$ (Bohm, 1952).

En utilisant l'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde, on constate que le mouvement d'une particule obéit à une dynamique du type de Newton, où apparaissent des forces qui dérivent d'un potentiel. Ce potentiel se compose de deux parties ; la première étant le potentiel ordinaire, dû par exemple à l'interaction électrostatique avec les autres particules bien localisées, ou un potentiel extérieur. À cela s'ajoute un potentiel spécifiquement quantique qui dépend de la fonction d'onde et est donné par exemple, dans le cas d'une particule unique, par $V_{quant} = -(\hbar^2/2m) \Delta R/R$, avec $R = \psi^* \psi$.

On obtient ainsi une théorie mixte de particules et de champ, où le champ est la fonction d'onde. Ces deux composantes de la réalité physique ne sont pas cependant couplées de manière réciproque car, si la fonction d'onde contribue à déterminer la trajectoire de la particule, la position vraie de la particule n'intervient pas, en revanche, dans l'évolution de la fonction d'onde. On pourrait dire ainsi que la mécanique quantique ordinaire reste intacte et qu'elle est complétée par une théorie destinée uniquement à l'interprétation, surajoutée, où l'onde de De Broglie et Schrödinger devient une *onde pilote*.

L'idée est, sans conteste, brillante et a fasciné certains chercheurs. La physique non relativiste semble pouvoir être représentée ainsi, sans contradiction interne ni désaccord avec l'expérience. Le point essentiel de la démonstration est de montrer que, si une distribution probabiliste des positions des particules est conforme à la règle de Born (c'est-à-dire égale à $\psi^*\psi$) à un instant zéro, elle le reste par la suite. C'est en ce résultat que réside le principal succès de la théorie.

Les difficultés viennent principalement des effets relativistes qui n'ont pu être réglés, de manière satisfaisante, après plus de cinquante ans d'efforts (Bohm, 1993), alors qu'il avait fallu à peu près deux ans à la mécanique quantique ordinaire pour opérer le passage. Cela commence avec le spin des particules, nécessairement relativiste s'il s'agit d'une rotation réelle. Son expression « réaliste » la moins artificielle consiste à l'affecter entièrement à la fonction d'onde (laquelle a donc deux composantes pour un mouvement non relativiste), en renonçant à faire du spin une propriété de la particule. Il semblerait alors que tous les problèmes de l'interprétation de Copenhague qu'on veut éliminer vont subsister dans le cas du spin (associé, rappelons-le, à la plupart des effets magnétiques). Le principal problème avec les particules relativistes est de déterminer ce qui est vraiment réel : s'agit-il des particules ou des champs ? On se heurte ainsi à nouveau au spectre de la complémentarité qu'on croyait éliminé.

Ainsi la théorie quantique des champs et, en particulier, l'électrodynamique, restent entièrement en dehors d'une interprétation réaliste. Or c'est bien là qu'on attendrait les explications du réalisme, à l'occasion de tous les processus appelés justement virtuels. Ils posent en effet un problème d'interprétation qu'on ne rencontrait pas dans la mécanique quantique ordinaire mais qui devient, en revanche, essentiel (et particulièrement difficile) pour le réalisme. On peut préciser ce point en recourant à l'exemple des effets de polarisation du vide en électrodynamique quantique, lesquels sont souvent décrits comme une création, puis une annihilation ultérieure très rapide de paires électron-positron. Ces effets interviennent dans les corrections à l'interaction coulombienne et ont été mesurés et calculés avec une grande précision. En mécanique quantique ordinaire, on peut considérer que le fait de parler de l'existence temporaire d'une telle paire est une simple métaphore qui traduit intuitivement le contenu d'un calcul. Cela ne pose aucun problème d'interprétation. On ne voit guère, en revanche, comment une théorie, dont le but explicite est l'assertion de la réalité, pourrait suivre le même point de vue : les effets dits virtuels sont-ils réels ou non, et sinon, que se passe-t-il réellement dans un atome d'hydrogène qui puisse expliquer le Lamb shift ?

Einstein et l'interprétation

54. On ne peut pas dire qu'Einstein s'intéressait directement à l'interprétation de la mécanique quantique. Il pensait, en effet, que la théorie devait contenir une grande part de vérité, tout en restant encore incomplète. Ce point de vue, parfaitement légitime en 1927 lors des grandes discussions avec Bohr à propos d'une théorie récente, devait inévitablement perdre de sa force à mesure que les résultats nouveaux et les approfondissements s'accumulaient.

Pourquoi alors Einstein restait-il aussi sceptique ? Malgré sa boutade célèbre sur Dieu qui ne saurait jouer aux dés, son insatisfaction ne portait pas principalement sur le rôle du hasard, mais sur le caractère évanescent que prenait la réalité. La méditation sur la réalité, que ce soit celle de l'espace, du temps, des atomes ou de la lumière, avait été sans cesse son guide et elle avait été récompensée par d'immenses succès. Voir une bonne part de tout cela s'effacer derrière le jeu de miroirs de la complémentarité était insupportable à Einstein.

Il semble n'avoir jamais essayé de proposer lui-même une autre forme d'interprétation réaliste, comme le firent de Broglie et Bohm. Il accordait peu d'intérêt à de pareilles tentatives et cela ne saurait surprendre. Sa méthode de pensée ne le portait à la construction théorique qu'après une analyse serrée des fondements d'une question, toujours associée à des données expérimentales déjà existantes, ou envisageables. L'article qu'il publia en collaboration avec Boris Podolsky et Nathan Rosen (Einstein, 1935), suivait bien cette ligne de conduite.

Nous reviendrons sur cette contribution importante et, sans en donner à présent les détails, on peut souligner ce qui en fait l'originalité. Pour la première fois dans l'histoire des sciences et de la philosophie de la connaissance, on propose une définition opératoire de la réalité. Sans aller jusqu'à définir la réalité dans sa totalité, Einstein et ses collaborateurs considèrent qu'il existe un élément de la réalité auquel on a accès « si, sans perturber le système, on peut prédire avec certitude (c'est-à-dire avec probabilité 1) la valeur d'une quantité physique ».

Ils proposent alors un exemple expérimental d'une telle situation (plus tard amélioré par David Bohm, 1951), qui semble contredire les conséquences des relations d'incertitude. La conclusion qu'ils en tirent est que la théorie quantique, incapable de rendre compte de l'existence de ces éléments de réalité, est encore incomplète. Cette conclusion fut contestée par Bohr et la question de savoir s'il est possible, et même concevable, de définir la réalité reste encore posée aujourd'hui.

Une des dernières interventions d'Einstein sur ces questions (Schilpp, 1949) semble faire apparaître une évolution de sa pensée. Il disait en effet à propos de la mécanique quantique : « Cette théorie est jusqu'à présent la seule qui réunisse les caractères duaux, corpusculaire et ondulatoire, de la matière, d'une manière logiquement satisfaisante ; et les relations (vérifiables) qui y sont contenues sont *complètes*¹, dans les limites naturelles que fixent les relations d'incertitude. Les relations formelles qui figurent dans cette théorie – c'est-à-dire la totalité de son formalisme mathématique – devront probablement être incluses, par inférence logique, dans toute théorie future qui soit utilisable ».

Les inégalités de Bell

55. Un autre épisode important dans l'histoire de l'interprétation fut la parution d'un article de John Bell (1964), proposant un test expérimental pour détecter l'existence de variables cachées. L'idée de variables cachées est bien montrée par

1. Le mot est souligné par Einstein lui-même.

la théorie de De Broglie et Bohm, où les variables en question sont les coordonnées des particules « réelles ». Plus généralement, tout paramètre qui intervient dans la description d'une entité « réelle », supposée cachée derrière les apparences des lois quantiques, sera qualifié de variable cachée. L'existence de tels paramètres apparaît comme nécessaire à la plupart des chercheurs qui veulent croire à l'existence d'une réalité microscopique bien définie (alors que Bohr admet cette réalité, mais non pas son caractère bien défini, remplacé par la complémentarité).

Von Neumann avait cru pouvoir démontrer l'impossibilité de cette hypothèse, mais il y avait une erreur dans sa démonstration qui fut détectée par M. Mugur-Schächter et que rendait d'autant plus manifeste l'existence du modèle de Bohm. Rien cependant n'indiquait la présence de variables cachées dans les expériences de plus en plus précises de la physique des particules. Existait-il alors un moyen expérimental pour mettre leur présence en évidence, sans nécessairement les atteindre directement ? C'est la question que Bell considère.

Il semble bon de considérer des situations qui s'éloignent nettement des conditions de la réalité ordinaire et cela conduit à s'intéresser aux états « enchevêtrés » de la mécanique quantique. Un tel état fait intervenir plusieurs degrés de liberté, par exemple ceux de position ou de spin de plusieurs particules, et la fonction d'onde totale n'est pas le produit de fonctions d'onde propres à chacune des particules composantes mais une superposition (voir le chapitre 22 pour plus de précision). Ceci introduit des corrélations entre les particules en question.

On peut noter que les états enchevêtrés se rencontrent le plus souvent comme une conséquence immédiate des principes de symétrie qui gouvernent les particules indiscernables, avec les conséquences innombrables et bien vérifiées que cela entraîne (solidité des solides, conducteurs et isolants, laser, ...). Il ne saurait donc être question de nier cette existence, mais d'en exploiter les conséquences. Celles-ci sont dans les corrélations qui peuvent relier des particules, parfois très éloignées l'une de l'autre.

Il existe des corrélations à distance en physique classique. Ainsi, les deux parties d'un billet déchiré continuent d'être corrélés dans leur forme, comme le montrent les films d'espionnage. Bell donne l'exemple des chaussettes de Bertlman, dont l'une est toujours verte et l'autre rouge. À voir l'une d'elles, on sait immédiatement la couleur de l'autre, ce qui est un cas manifeste de corrélation. En mécanique quantique, la couleur d'une chaussette sera remplacée par la valeur d'une observable pour une particule (un des pieds de Bertlman), et il y aura dans certains cas corrélation avec une autre observable pour l'autre particule. La différence avec le cas classique est que la corrélation subsiste quand on change d'observables. Il peut s'agir par exemple de mesurer la composante de spin d'une particule dans une certaine direction, auquel cas c'est avec la composante du spin de l'autre particule dans la même direction que la corrélation s'établit immédiatement, quelle que soit la distance entre ces particules. En quelque sorte, la distance ne suffit pas à séparer leurs propriétés et on dit que leur système est non séparable. Si l'on poursuit l'exemple de Bell, on peut dire que les deux chaussettes n'ont pas

de couleur propre mais, en choisissant de regarder l'une avec un filtre coloré, on sait quelle apparence l'autre doit avoir au travers du filtre complémentaire.

S'il existe des variables réalistes cachées, Bell suppose qu'elles sont séparables, c'est-à-dire que le choix de la direction d'un appareil de Stern-Gerlach sur la Terre, par exemple, n'introduit pas de corrélation entre les variables cachées locales (celles de cet appareil et de la particule qu'il mesure) et les autres variables cachées d'un autre appareil et de l'autre particule, situés par exemple dans la galaxie d'Andromède. On notera qu'on introduit ainsi une contrainte, imposée par le réalisme du sens commun, alors que la mécanique quantique ne suppose rien de tel puisqu'elle ne s'impose pas le même réalisme. On ne s'étonnera donc pas du fait que les hypothèses correspondantes puissent conduire à des conséquences expérimentales différentes.

L'exploit remarquable de Bell fut de trouver des conditions expérimentales, où la différence entre les hypothèses du réalisme séparable et celles de la mécanique quantique conduisent à des conclusions incompatibles.

On verra ces expériences au chapitre 22. Leurs résultats ont tranché pour l'essentiel en faveur de la mécanique quantique (en particulier grâce à l'expérience d'Alain Aspect, 1981, 1982).

On notera aussi que cela n'élimine pas les modèles d'onde pilote où la non-séparabilité s'introduit au travers de la fonction d'onde.

Autres aspects de l'interprétation

56. Au total, on peut dire que plus de cinquante ans s'écoulèrent après les premières formulations de l'interprétation de Copenhague sans apporter de résultat déterminant, que ce soit par une confirmation nouvelle de cette interprétation ou son échec. Cette période de latence devait être suivie, beaucoup plus récemment, par toute une série d'expériences et de travaux qu'on verra au chapitre suivant.

Signalons aussi pour terminer un certain nombre de résultats notables sur lesquels on ne s'étendra pas en détail. L'un des premiers est celui de Nevill Mott (1929a). Il s'agissait de comprendre comment les traces des particules dans un détecteur (une chambre de Wilson, par exemple) se présentent comme des trajectoires rectilignes malgré le caractère ondulatoire de la fonction d'onde. La méthode de Mott considère l'interaction d'un électron avec plusieurs atomes qui peuvent devenir ionisés et calcule la probabilité conjointe de ces événements. On constate que seuls ceux où les atomes sont alignés ont une probabilité non négligeable, ce qui correspond à l'émergence de l'optique géométrique à partir de l'optique ondulatoire. C'est un point sur lequel on aura l'occasion de revenir.

On peut également mentionner certaines limitations des mesures quantiques concevables. La première vint de Bohr qui, réfléchissant aux contraintes apportées par la complémentarité aux mesures de spin, concluait à une impossibilité de principe de mesurer une composante de spin d'un électron libre. Cela tient à la

charge de l'électron et à la valeur de son moment magnétique qui ont pour conséquence des effets d'interférence entre la force de Lorentz et la force qui provient du moment magnétique dans un dispositif de Stern-Gerlach ; ces deux forces ne commutent pas (on notera que l'argument ne s'applique pas à un électron lié à l'intérieur d'un atome hydrogénoïde – bien que tout le moment angulaire provienne du spin de l'électron – à cause de la neutralité de l'atome et de l'absence de force de Lorentz). L'argument fut mis au point par Mott (1929b), avec tous les calculs nécessaires.

Dans le même ordre d'idées, Wigner (1952), puis Huzihiro Araki (1960) et Michael Yanabe montrèrent qu'une observable qui ne commute pas avec les constantes du mouvement ne peut pas être mesurée exactement lors d'une mesure du type de von Neumann, telle qu'on l'a décrite plus haut (*cf.* section 49). Cette observable peut être néanmoins mesurée avec une précision arbitrairement donnée à l'avance, du moins en principe, de sorte que ce théorème a peu de conséquences pratiques. Il a surtout pour effet de contester une hypothèse théorique avancée par von Neumann, selon laquelle toute observable serait en principe mesurable. On verra plus loin d'autres raisons de ne pas identifier imprudemment la notion mathématique d'opérateur autoadjoint et celle, physique, de quantité mesurable.

Yakiv Aharonov (1961) et David Bohm montrèrent en revanche qu'un système quantique peut ressentir l'effet de quantités qui sont inaccessibles en physique classique. On considère en effet classiquement que le champ magnétique est une quantité mesurable, manifestée dans la force de Lorentz, contrairement au vecteur potentiel d'où le champ dérive. Il est possible, cependant, d'observer des interférences entre deux trajectoires d'un électron qui contournent un obstacle par deux voies différentes, de manière assez analogue à ce qui se passe lors de la traversée de fentes d'Young. L'effet est dû à une différence de phase qui met en jeu le potentiel vecteur, par la définition bien connue, $p' = p - eA$ entre l'impulsion p' d'une particule de charge e et le moment p conjugué de la position, A étant le potentiel vecteur. Cela a bien été observé, de manière précise et, pour la première fois, par Jaklevic *et al.* (1964).

Une autre notion, qu'on trouve très souvent mentionnée dans la littérature, voudrait qu'un appareil de mesure perturbe nécessairement un objet microscopique mesuré. Cet argument a été souvent même employé pour justifier de manière empirique les effets de la complémentarité. Aussi faut-il mentionner la découverte par Braginsky, Vorontsov et Thorne de la possibilité de mesures sans démolition, pour lesquelles nous renvoyons le lecteur à l'article original (Braginsky 1980).

Enfin, parmi les contributions à l'interprétation survenues pendant la période rapportée ici, il conviendrait de mentionner le cadre général proposé par Hugh Everett (1957) et connu sous le nom d'interprétation des univers multiples (*many-worlds interpretation*, *cf.* De Witt (1973)). On renverra cependant la discussion de ces questions à un chapitre ultérieur.

57. On manque de recul pour apprécier les tendances plus récentes de l'interprétation dans toute leur diversité. Un net renouveau se fait cependant sentir, tant sous l'aspect expérimental que théorique et particulièrement à partir des années quatre-vingt. Cette date, qui n'est qu'indicative, marque la transition d'une période où dominaient les idées de Bell (et les questions de variables cachées) vers ce qu'on pourrait appeler un retour aux sources, c'est-à-dire aux problèmes de fond posés par Bohr, Heisenberg et Pauli. Il s'agit à nouveau de faire face à la mécanique quantique pure, sans lui chercher d'échappatoire par des hypothèses toujours évanescentes.

Le renouveau est d'abord expérimental. Les progrès de la technique permettent en effet de réaliser à présent des expériences dont on ne pouvait que rêver auparavant, certaines étant même autrefois considérées comme inconcevables. On peut ainsi observer un atome unique de manière continue, réaliser des systèmes macroscopiques, visibles à l'œil nu mais qui se comportent de manière quantique. On fait des expériences (à choix retardé) avec les photons où on ne décide de la mesure qui va être faite qu'au moment ultime où la fonction d'onde du photon est déjà séparée en deux dans les bras d'un interféromètre. On pourrait allonger encore la liste. Presque tout semble devenir possible. Certaines de ces expériences sont décrites au chapitre 22 et d'autres sont mentionnées dans les commentaires.

Les renouveaux théoriques sont tout aussi importants. On mettra surtout l'accent sur trois d'entre eux dans ce chapitre : l'effet de décohérence, l'émergence de la physique classique et le langage des histoires rationnelles. Chacune de ces avancées sera présentée ici de manière générale, puis développée en détail dans la troisième partie. Disons simplement pour les introduire que l'effet de décohérence, récemment observé, semble bien apporter une réponse aux problèmes lancinants du « chat de Schrödinger ». Il montre que la réduction de la fonction d'onde n'est pas l'effet qu'on pensait être. La transition de la physique quantique à la physique classique est, quant à elle, à présent bien comprise, d'une manière qui dérive simplement le déterminisme du probabilisme. La méthode des histoires, enfin,

permet d'éclairer la structure logique de la théorie quantique et elle fournit, en quelque sorte, le langage sensé et universel indispensable à la clarté de l'interprétation.

Lorsqu'on les met ensemble, ces trois idées conduisent à une théorie cohérente de l'interprétation, où tout se fonde sur les seuls principes fondamentaux de la théorie pour s'en déduire. Ainsi par exemple, les règles de la théorie de la mesure deviennent autant de théorèmes. Il subsiste encore néanmoins, comme on peut s'y attendre, quelques points obscurs ou délicats, et les résultats nouveaux soulèvent parfois aussi des problèmes nouveaux. C'est tout le charme de la recherche.

J'ai conscience finalement que je sélectionne « une » interprétation en ne retenant que les thèmes que je viens d'indiquer et qu'une seule synthèse. Cela tient à ce que cette voie est sans aucun doute celle qui a apporté le plus de résultats nouveaux. On mentionnera dans les commentaires d'autres résultats notables.

Les observables collectives et l'environnement

Les observables collectives

58. La relation entre les niveaux quantique et classique de la physique est sans doute le domaine où les progrès les plus incontestables ont été accomplis. Ils concernent à la fois la résorption des interférences macroscopiques par un phénomène de décohérence et l'explicitation du *principe de correspondance* par les méthodes mathématiques approfondies. Dans les deux cas néanmoins, se pose un problème préalable, celui de la définition de ce qu'on appelle les « observables collectives » ou *pertinentes* qui est loin d'être définitivement résolu. C'est donc une des questions obscures évoquée plus haut, par laquelle nous commencerons.

Parmi les observables qui appartiennent à un objet macroscopique, telle une horloge, certaines décrivent certainement l'objet tel qu'il est. Il s'agit par exemple d'un angle qui caractérise la position de la petite aiguille. Même si l'on sait que les lois de la physique sont quantiques et que l'horloge est faite d'atomes, on sait également, avec beaucoup plus de spontanéité, que cette observable évidente doit jouer un rôle dans la description classique de l'horloge. Le problème apparemment banal que nous nous posons est celui des critères qui permettent de sélectionner de telles observables à vocation classique. On pourrait se dire que cela va de soi et qu'il suffit de regarder l'horloge. C'est bien l'attitude empirique que nous adopterons en fin de compte, mais la question mérite cependant un peu d'attention.

La question posée est celle de la définition des variables (ou observables) collectives. On la rencontrait déjà en physique classique. Ainsi, la mécanique analytique de Lagrange et Hamilton part de « coordonnées dynamiques » au moyen desquelles on sait écrire les équations du mouvement. Personne, cependant, n'a su fournir une règle générale pour choisir ou même deviner ces coordonnées. Qui nous assure, dans un cas relativement complexe, que nous avons pensé aux bonnes variables, et surtout que celles que nous avons choisies ?

La situation est la même en thermodynamique. Trouver dans ce cas les variables pertinentes représente déjà un pas considérable dans la compréhension d'une situation physique et l'expérience de l'ingénieur ou du physicien qui y pourvoit est en grande partie affaire de flair, de métier, et même de créativité dans un cas nouveau ou inhabituel.

On procède souvent par stades successifs. Une automobile, par exemple, est d'abord, en théorie, un châssis ayant un mouvement horizontal, muni de roues mobiles animées par un couple moteur et subissant un frottement sur le sol. Ce point de vue conduit à des calculs du niveau bac + 1 mais fait sourire un ingénieur spécialiste. Pensons à ce qu'il va entrer dans un programme d'étude : les déformations élastiques des pneus (et sont-elles vraiment élastiques ?), les mouvements des parties mobiles du moteur, les vibrations, le courant et le champ magnétique dans le circuit électrique et, pourquoi pas, si nécessaire, le débit des fluides et le fonctionnement des microprocesseurs de contrôle.

Où convient-il de s'arrêter dans cette descente vers le détail ? La réponse qu'on donne habituellement est double : on s'arrête quand le calcul devient trop lourd au regard des moyens dont on dispose, ou lorsque des calculs d'ordre de grandeur révèlent ce qu'on peut négliger à un ordre de précision donné.

On n'a jamais su faire mieux devant un système physique concret, à moins qu'il ne soit très simple. Il est clair que l'idée de considérer les atomes de toutes les pièces de la voiture, même si leurs interactions et leur mouvement étaient simples, ne serait d'aucune utilité. Le fait donc de savoir écrire l'hamiltonien quantique de tous ces atomes ou des particules qui les constituent ne sert pas à grand chose.

Dans la pratique ordinaire, l'espace de Hilbert et l'hamiltonien de ces particules ne sont qu'une vue de l'esprit. Ils sont même bien trop vagues, puisque les particules de l'automobile, dans le même espace de Hilbert et avec le même hamiltonien, pourraient tout aussi bien constituer trois motocyclettes ou un groupe électrogène, et même, pourquoi pas, le stock de fleurs d'un fleuriste si les nucléons étaient redistribués dans les noyaux (cela ne change ni l'espace de Hilbert, ni l'hamiltonien, si l'on inclut dans celui-ci les forces nucléaires).

C'est finalement la notion d'*objet* qui devient difficile d'accès en mécanique quantique. L'exemple d'un atome d'hydrogène, objet très simple quand on ne considère qu'un proton et un électron, conduit à penser qu'un objet est associé à un sous-espace de Hilbert (celui des états liés). Cela semble encore le cas en général, tout objet dont on a une conception théorique claire étant encore associé à un sous-espace. Un certain flou est cependant inévitable : si l'on ajoute ou qu'on retire un atome à une automobile, on ne la change pas en tant qu'objet. Il serait évidemment possible de s'en accommoder mais il faut bien reconnaître que les physiciens n'essaient pas de le faire et ne sont pas certains de savoir le faire. À l'inverse, la plupart des sous-espaces de Hilbert ne correspondent pas à un objet et on n'a pas trouvé, ni même vraiment cherché des critères qui distingueraient les sous-espaces d'objets. Le saurait-on qu'alors se poserait à nouveau la question des variables dynamiques pertinentes, devenue cette fois la question que nous nous posions à propos des observables.

59. La question se pose alors de savoir ce qu'on entend par la notion d'observable collective en mécanique quantique.

La mécanique statistique rencontre une question analogue avec la notion d'observable pertinente. Il s'agit d'une quantité qu'on mesure effectivement sans entrer dans le détail des mouvements thermiques : un volume, une magnétisation par exemple. La correspondance entre la mécanique statistique et la thermodynamique se faisant en théorie par passage à l'infini du nombre de particules (ou des degrés de liberté), une notion spécifique d'observable classique est apparue dans ce contexte. Elle est très mathématique : une observable classique a pour propriété de commuter avec toutes les autres observables (en fait, la notion d'espace de Hilbert ne convient pas à un système à nombre infini de degrés de liberté et il faut recourir aux méthodes des C^* -algèbres, mais cela n'est pas un point essentiel). Ainsi,

les diverses observables classiques commutent bien entre elles et ont, en ce sens, un caractère classique.

Ce point de vue, qui a été parfois supposé essentiel pour l'interprétation (Primas, 1981), n'est qu'un point de départ insuffisant car les objets macroscopiques ne sont pas infinis, ni surtout homogènes, et il n'y a plus d'observables universellement commutables dans ces conditions, ce qui vide la définition de son contenu quand on passe de la mécanique statistique à l'interprétation.

Un autre point de vue a été proposé par Gell-Mann et Hartle. Il consiste à s'intéresser aux régions microscopiquement grandes et macroscopiquement petites de l'espace de phase, sur lesquelles on opère des moyennes (coarse graining). Les observables qui en ressortent naturellement ressemblent fort aux positions des grains idéaux de matière que Newton considérait déjà (Gell-Mann, 1990, 1993). Dans le même ordre d'idées, on a le point de vue des chimistes qui considèrent d'ordinaire la forme (ou configuration) d'une molécule comme fixe et décrivent son mouvement de manière classique. Les vibrations et changements de forme de la molécule apparaissent alors en tenant compte des positions relatives des noyaux dans la molécule. La possibilité de traiter ces positions comme quasi classiques ressort alors de l'approximation de Born-Oppenheimer. Il existe encore d'autres méthodes d'approche pour définir des variables pertinentes en physique nucléaire, pour décrire des noyaux déformés par exemple, mais on ne peut tout recenser d'une question à la fois très étudiée et non définitivement résolue.

L'idée purement théorique qui consisterait à l'inverse à partir de l'hamiltonien des particules tel qu'on le connaît, pour construire des sous-espaces d'objet et des variables collectives déduites d'un algorithme, n'est peut-être pas absurde en principe (Feffermann, 1983) mais elle est très loin d'être réalisée.

En résumé, il faut reconnaître notre incapacité à bien définir la notion d'objet et à déduire des principes quantiques la définition d'observables pertinentes pour décrire un objet macroscopique. Il n'en reste pas moins qu'en présence d'un objet donné, on sait très bien trouver, dans la plupart des cas, par des méthodes artisanales, de bonnes variables dynamiques, hiérarchisées selon leur degré d'importance dans la dynamique. Il est alors facile d'identifier les observables quantiques qui correspondent à ces variables pensées classiquement. Cette méthode pragmatique, qui consiste à considérer comme évident ce qui l'a toujours été dans la pratique, suffira parfaitement à nos fins.

L'environnement

60. On arrive ainsi à une conception pragmatique des objets macroscopiques qui sert de cadre (provisoire ?) à l'interprétation. La dynamique de ces objets, constitués de parties solides ou fluides, est supposée décrite à un certain degré de précision par un certain nombre d'observables que nous continuerons d'appeler pertinentes (*relevant*). On les nomme aussi souvent collectives, bien que cette dénomination soit moins générale (ainsi la position du centre de masse d'une balle de golf est une observable collective, mais la position d'une particule chargée qui provoque la réponse d'un compteur Geiger est pertinente sans être collective). On notera aussi que ces observables ne sont pas nécessairement permanentes. Ainsi, quand une particule chargée produit un alignement de bulles dans une chambre à bulles, la position de chaque nouvelle bulle entraîne l'existence d'une observable pertinente quand elle apparaît.

La séparation des observables de coordonnées en deux catégories distinctes, pertinentes et microscopiques, est à la base d'une des notions les plus fécondes de l'interprétation moderne, celle d'environnement. Ainsi, dans de nombreux cas, on peut introduire un ensemble complet d'observables commutables du type « coordonnées ». Il comprend d'une part des coordonnées pertinentes Q et des coordonnées microscopiques q . Celles-ci représentent le très grand nombre de coordonnées qui interviennent à la fois dans la constitution interne de l'objet (noyaux et particules) et, éventuellement, dans son environnement externe (molécules d'air ou photons de la lumière ambiante, par exemple). Une fonction d'onde prend ainsi la forme d'une fonction $\psi(Q, q)$.

En ce qui concerne les observables collectives Q , on sait dans la pratique que leur domaine de variation est un espace de configuration. Son existence ressort également de manière moins empirique d'un théorème profond de Gelfand et Segal sur les algèbres commutatives (Naimark, 1959). L'espace de configuration possède naturellement une mesure de *volume* qui permet de définir les produits scalaires et de définir un espace de Hilbert \mathcal{H}_c . On suppose, de même, l'existence d'un espace de Hilbert \mathcal{H}_e associé aux variables q . L'espace de Hilbert total \mathcal{H} est le produit (tensoriel) de ces deux espaces.

Cette manière abstraite de concevoir les états de l'objet permet de le scinder par la pensée en deux sous-systèmes physiques en interaction. L'un, décrit par les coordonnées Q , est appelé le *système collectif*. L'autre, décrit par les variables q , est appelé l'environnement. Ce nom d'environnement, qui fait d'abord penser à l'environnement atmosphérique ou photonique externe à l'objet, a été étendu par convention à tout ce que décrivent les variables q et donc, en quelque sorte, à tous les détails internes de la matière de l'objet.

La plupart des études d'interprétation des systèmes macroscopiques se sont limitées au cas où l'hamiltonien total H de l'objet peut s'écrire comme une somme

$$H = H_c + H_e + H_1, \quad (7.1)$$

où H_c est un opérateur qui n'agit que dans l'espace de Hilbert collectif (ou pertinent quand on traite d'un appareil de mesure, où l'observable mesurée doit être évidemment considérée comme pertinente au même titre que les variables collectives de l'appareillage). H_e agit dans l'espace de Hilbert de l'environnement, et H_1 est un terme de couplage. Ces notions sont en fait familières si l'on se réfère à la thermodynamique. En effet, H_c est dans ce cas l'énergie, cinétique et potentielle, du mouvement collectif visible à grande échelle. La valeur moyenne de H_e n'est autre que l'énergie interne et, plus généralement, H_e représente l'énergie du mouvement interne (à dominance thermique). Quant à H_1 , c'est une interaction qui provoque des échanges d'énergie entre les deux sortes de mouvement, c'est-à-dire les effets qu'on range d'ordinaire sous le nom de dissipation (frottement, effet Joule, etc.).

Notons que la formulation donnée par la formule (7.1) est une simplification. Ce que l'on sait des phénomènes de frottement solide, par exemple, exigerait une analyse plus raffinée (Caroli et Nozières, 1995 ; Tanguy et Nozières, 1996).

Il semble exclu cependant de prétendre traiter, par une théorie unique, la multitude des effets de couplage possibles entre les mouvements collectifs d'un système quelconque et la matière interne tout autant qu'externe. Le modèle qu'on vient de présenter s'est révélé assez général pour permettre une investigation sérieuse des effets les plus importants pour l'interprétation.

L'effet de décohérence

61. La découverte et la mise en évidence de l'effet de décohérence sont sans doute le résultat le plus important de l'interprétation moderne. Tout est venu d'une réflexion sur l'absence d'interférences quantiques au niveau macroscopique : la décohérence apporte une réponse simple au lancinant problème du chat de Schrödinger. Le plus simple pour le comprendre est de revenir à la formule (6.2) qui représentait l'état d'un appareil après une mesure. En supposant pour simplifier que le système mesuré a été détruit au cours de la mesure (comme c'est le cas pour un photon détecté), la fonction d'onde de l'appareil de mesure dépend par exemple de la position x d'une aiguille et se présente sous la forme :

$$\psi(x) = c_1 \phi_1(x) + c_2 \phi_2(x) , \quad (7.2)$$

où $\phi_1(x)$ est une fonction d'onde étroite centrée en un point x_1 , la fonction $\phi_2(x)$ étant centrée en un point x_2 macroscopiquement éloigné de x_1 . C'est évidemment la situation décrite par von Neumann et par Schrödinger.

Dans le langage qu'on vient d'introduire, la variable x est une coordonnée collective et Heisenberg avait déjà suggéré que la prise en compte de l'environnement pouvait intervenir dans la situation. Si l'on désigne alors par y la multitude des coordonnées de l'environnement, on voit que la fonction d'onde (7.2) doit s'écrire de manière plus complète sous la forme :

$$\psi(x, y) = c_1 \phi_1(x, y) + c_2 \phi_2(x, y) . \quad (7.3)$$

En quoi cela suggère-t-il un progrès ? La réponse fut donnée par Nicolaas van Kampen (1954) et plus tard précisée par Hans Dieter Zeh (1970). Quand on regarde de plus près la dépendance en y d'une fonction telle que $\phi_1(x, y)$, on peut se convaincre qu'il s'agit d'une fonction à valeurs complexes extrêmement compliquée, dont en particulier la phase est fortement dépendante de la valeur de x . Ainsi ne serait-ce que le mouvement d'une aiguille dans un voltmètre que déjà il s'accompagne de véritables cataclysmes au niveau des fonctions d'onde de l'environnement.

Tout change follement dans la phase des fonctions d'onde du mouvement des atomes, et les fonctions d'onde auxquelles on aboutit après la mesure ont des dépendances en y profondément différentes selon que l'aiguille termine son mouvement en x_1 ou en x_2 . En d'autres termes, les fonctions d'onde qui figurent dans (7.2) ont des phases locales (en y) très variables, en même temps que très différentes selon l'aboutissement de la mesure (c'est-à-dire selon x_1 ou x_2).

Un tel comportement ne peut qu'entraîner leur orthogonalité en y , c'est-à-dire essentiellement la relation de « décohérence » :

$$\int \phi_1^*(x, y) \phi_2(x', y) dy = 0, \quad (7.4)$$

quels que soient x et x' . On verra plus loin que cela a pour conséquence la disparition des interférences macroscopiques, comme c'est d'ailleurs pratiquement évident.

62. Dans une mesure réelle, que le modèle trop schématisé de Von Neumann ne peut prétendre représenter, la fonction d'onde du système mesuré et de l'appareillage évolue de manière continue selon l'équation de Schrödinger. La séparation des deux composantes du second membre de (7.3) ne s'opère que graduellement, tandis que la différence de leurs phases devient de plus en plus forte. La séparation des deux résultats x_1 et x_2 doit donc prendre un certain temps. En particulier, l'effet de décohérence est contrôlé par la dynamique complète et prend un certain temps. Combien de temps ?

La question fut d'abord étudiée au moyen de modèles simplifiés pour représenter l'environnement (Hepp et Lieb, 1974 ; Zurek, 1981, 1982 ; Caldeira et Leggett, 1983 ; Joos et Zeh, 1985, ...). Un cadre plus général apparut ensuite comme étant la théorie quantique des processus irréversibles (Omnès, 1997c). On a pu ainsi obtenir des résultats d'une grande portée, quoiqu'on ne puisse encore affirmer qu'on ait envisagé toutes les conséquences de l'effet ni son champ d'application exact. La recherche se poursuit de manière active.

Les résultats eux-mêmes sont frappants. Le temps t_d nécessaire à la décohérence est extrêmement court et l'intégrale du premier membre de (7.4) décroît exponentiellement comme $\exp(-t/t_d)$. Il suffit en fait que quelques molécules ou quelques photons aient frappé une portion de l'appareil, ou que quelques phonons aient été produits par frottement entre ses parties mobiles, ou qu'encore quelques électrons aient commencé à former un courant dans la partie électronique, et la décohérence est déjà manifeste. Cela donne une idée de la petitesse de t_d qui sera précisée au chapitre 18. Rien d'étonnant dans ces conditions qu'on ne puisse jamais voir d'interférences macroscopiques (du moins hors de cas très spéciaux prévus par la théorie).

L'effet de décohérence apparaît ainsi comme un des plus efficaces et des plus rapides qui soit. Il a été cependant difficile de le mettre expérimentalement en évidence, à cause même de son efficacité et de sa rapidité. Comment le saisir avant qu'il ne se soit opéré totalement pour qu'un effet d'interférence puisse être vu en train de disparaître graduellement ? On imagine aisément que si l'on pouvait disposer d'un appareil n'ayant que quelques variables du type y , cinq à dix par exemple, et qu'on fasse varier ce nombre, l'effet deviendrait mesurable. Les interférences disparaîtraient peu à peu à mesure que le nombre de paramètres augmenterait. C'est essentiellement ce qu'une expérience réalisée en 1996 à l'École normale supérieure par Jean-Michel Raimond, Serge Haroche et leurs collaborateurs a permis de réaliser. On verra en détail au chapitre 22 en quoi l'expérience consiste, mais la conclusion est parfaitement nette : l'effet existe et est en excellent

accord avec la théorie. On peut donc essayer de s'appuyer sur lui pour approfondir l'interprétation.

63. Nous avons laissé en suspens les cas exceptionnels où des interférences quantiques peuvent subsister au niveau macroscopique. Cela se produit quand le terme de couplage H_1 dans l'équation (7.1) est nul. L'évolution de l'environnement est alors entièrement découplée de ce qui se passe au niveau collectif, et sa fonction d'onde n'en est pas affectée. Il n'y a pas de décohérence. Mais on a vu que le couplage H_1 est responsable des effets d'amortissement (et de dissipation). Quand on précise par la théorie la relation qui existe entre décohérence et dissipation, on constate que leurs temps d'action sont proportionnels ; le premier étant évidemment beaucoup plus court que le second. Il n'en reste pas moins qu'un système macroscopique sans amortissement ne doit pas montrer de décohérence.

Or, il existe des systèmes macroscopiques où la dissipation est très petite et pratiquement nulle. L'exemple le plus manifeste est la lumière, si elle est assez intense pour contenir un grand nombre de photons et donner lieu à des champs macroscopiques : la lumière ordinaire en somme. On sait bien qu'il existe alors des interférences quantiques macroscopiques, banales, décelées pour la première fois par Young et Fresnel. On a pu mettre aussi en évidence des effets d'interférences macroscopiques dans des dispositifs supraconducteurs. Il s'agit de circuits à jonction Josephson qui, bien que macroscopiques, montrent un comportement quantique comme, par exemple, un véritable effet tunnel (Clarke, 1989).

Le « principe » de correspondance

64. L'analogie est grande entre la dérivation de la physique quantique à partir de la physique classique et le passage de l'optique ondulatoire à l'optique géométrique. Le premier problème est néanmoins plus difficile et il comporte de nombreuses étapes. Il faut d'abord passer d'observables qui sont des opérateurs à des variables dynamiques classiques. Il faut ensuite donner une signification quantique à une propriété classique, laquelle fait simultanément apparaître des valeurs de la position et de la vitesse, avec une tolérance d'erreurs assez grande pour ne pas violer outrageusement les relations d'incertitude. Il faut encore dériver les équations de la dynamique classique à partir de l'équation de Schrödinger et estimer les inévitables erreurs. On peut alors poser quelques questions pertinentes : quand les erreurs d'une approximation classique sont-elles négligeables ? comment peut-on alors réconcilier le déterminisme classique avec le probabilisme quantique ? que se passe-t-il quand le déterminisme classique est lui-même inutilisable, comme dans le cas d'un mouvement chaotique s'étendant jusqu'à l'échelle de la constante de Planck ? On a vu enfin que le carcan de l'espace de configuration semble s'imposer comme cadre à la dynamique classique hamiltonienne, autant qu'aux fonctions d'onde quantiques. Comment s'en libérer pour retrouver la formulation de la physique classique dans l'espace ordinaire à la manière de Newton ?

Toutes ces étapes ont été à présent franchies et ces questions résolues. L'émergence de la physique classique, à partir du substrat quantique, est à présent bien comprise, comme on le montrera en détail dans la troisième partie de ce livre. On indiquera seulement, pour l'instant, la résolution très simple de l'opposition du déterminisme et du probabilisme : le déterminisme est valable *avec une probabilité d'erreur (calculable) qui est extrêmement petite dans les conditions ordinaires*. C'est la réponse de l'œuf de Colomb à une question qui pouvait paraître insoluble tant qu'on s'en tenait à des mots, apparemment contraires. Il suffisait de leur donner une signification quantitative pour que l'énoncé du déterminisme prenne un sens probabiliste.

On indiquera seulement pour le reste quelques repères : on doit à Wigner (1932) la correspondance entre l'opérateur densité de la mécanique quantique et une distribution de probabilité dans l'espace de phase classique. Cela fut systématisé par Hermann Weyl (1950) pour construire les variables dynamiques classiques à partir des observables quantiques. Ce « calcul de Weyl » fut intégré par Hörmander (1979a) dans la puissante théorie mathématique connue sous le nom d'analyse microlocale. Dans l'intervalle, Klaus Hepp, (1972) avait développé une autre méthode fondée sur les « états cohérents », c'est-à-dire un développement des fonctions d'onde en une superposition continue de gaussiennes. Des résultats importants relatifs à la correspondance dynamique ont été établis par George Hagedorn (1980a, 1981) en utilisant la méthode de Hepp, et l'application systématique des méthodes microlocales aux besoins de l'interprétation a été développée par l'auteur (Omnès 1989, 1997a). Une autre méthode, très intéressante du point de vue de l'unité de la physique, consiste à dériver directement la dynamique classique de considérations de décohérence (Caldeira et Leggett, 1983a, Gell-Mann et Hartle, 1993).

L'ensemble de ces résultats peut avantageusement remplacer à présent le trop vague principe de correspondance par un faisceau serré de propositions quantitatives et démontrables. Toute une physique des systèmes mésoscopiques, c'est-à-dire intermédiaires entre l'élémentaire et le macroscopique, avec un nombre limité de degrés de liberté, est d'ailleurs en train de se développer sur la base des résultats théoriques.

Les histoires

65. On sait que von Neumann avait traduit mathématiquement les propriétés (prédicats) quantiques en leur associant un projecteur. Il avait alors buté sur deux obstacles : la difficulté d'étendre ce procédé à la physique classique (nécessaire à la description des appareillages et des phénomènes observés) et de graves problèmes de logique. Le premier problème est à présent résolu grâce aux progrès accomplis dans la dérivation de la physique classique. Le second l'a été grâce à la méthode des histoires rationnelles (en anglais : *consistent histories*) introduite par Robert Griffiths en 1984. Il s'agit en fait d'un nouveau langage de l'interprétation,

prolongeant celui des prédicats de von Neumann et qui peut être considéré comme universel, logique et néanmoins standard.

L'universalité du langage tient à sa capacité à décrire aussi bien les aspects classiques que quantiques de la physique. Il s'appuie sur des projecteurs pour traduire des propriétés physiques, exactement comme chez von Neumann, mais son universalité résulte des progrès déjà mentionnés pour la physique classique. Une propriété classique typique énonce que des coordonnées (collectives) classiques (q, p) correspondent à un point situé à l'intérieur d'une certaine cellule de l'espace de phase. Le cas le plus simple est celui où le point est dans un « rectangle » de sommets $(q_0 \pm \Delta q, p_0 \pm \Delta p)$, ce qui revient à définir les erreurs qu'on tolère sur les coordonnées. Pour que cette propriété classique soit compatible avec la mécanique quantique, il faut que le produit $\Delta q \cdot \Delta p$ soit grand devant h , à cause des relations d'incertitude. (Des conditions géométriques plus précises existent dans le cas d'une cellule d'espace de phase non rectangulaire et pour un nombre quelconque de degrés de liberté.) On démontre alors que la propriété classique peut être associée à un projecteur quantique à la manière de von Neumann. (Des considérations s'appuyant sur les relations d'incertitude montrent qu'il ne s'agit pas en fait d'un projecteur unique mais plutôt de toute une famille de projecteurs, tous équivalents entre eux dans leur énoncé de la propriété).

Ainsi, toutes les propriétés qu'on rencontre en physique peuvent être directement traduites par autant d'expressions mathématiques (des projecteurs), qu'elles soient classiques ou quantiques, relatives au fonctionnement de l'appareillage ou aux événements qui ont lieu à une échelle microscopique. C'est ce qu'on entend par l'universalité de ce langage.

Reste la question de la logique qui nous amène aux « histoires ». Griffiths définit une histoire comme l'énoncé d'une suite de propriétés, classiques ou quantiques, ayant lieu à des instants successifs. On peut l'imaginer comme un film dont chaque image serait une propriété, ou comme un compte-rendu. On peut également assimiler ce langage des histoires au langage communément employé par les physiciens, où l'on décrit l'appareillage, son fonctionnement, les événements qui se produisent à l'échelle microscopique (une collision, une émission,...) ainsi que les résultats de mesures. C'est pour cela qu'on a qualifié plus haut de « standard » le langage des histoires.

Chacune des propriétés de l'histoire est traduite dans le formalisme mathématique par un projecteur. On n'impose pas la commutabilité de ces projecteurs, ce qui permet une grande liberté d'expression. Rien n'empêche, par exemple, à propos d'une expérience d'interférences de parler de la fonction d'onde ψ (de projecteur $|\psi\rangle\langle\psi|$) après passage au travers de trous d'Young, et de parler de la position d'une particule au moment de la détection. Comme les événements quantiques sont aléatoires, une histoire unique ne peut suffire à décrire toutes les possibilités et on introduit en conséquence toute une *famille* d'histoires pour en tenir compte.

On peut dire que, d'une certaine manière, l'idée est très ancienne puisqu'elle revient pratiquement à employer le langage ordinaire de la physique. Celui-ci était cependant regardé avec suspicion par les Copenhaguiens orthodoxes, car il peut aisément conduire à des excès aberrants. Pourquoi par exemple n'introduirait-on

pas dans la description d'une expérience d'interférences une propriété spécifiant par quel trou d'Young un photon est passé ? La contribution majeure de Griffiths fut de montrer que les familles d'histoires aberrantes de ce type se distinguent de celles qu'on peut dire sensées par le fait qu'on peut attribuer une probabilité aux secondes mais pas aux premières. Lorsqu'on utilise les projecteurs, on constate que les deux cas se distinguent mathématiquement par un critère explicite qu'on appelle dans ce livre les « conditions de rationalité » (*consistency conditions*).

Mais en quoi finalement cette distinction est-elle rationnelle (ou sensée) ? On répond à cette question en montrant que les conditions de rationalité sont à la fois nécessaires et suffisantes pour qu'on puisse utiliser la logique ordinaire pour toutes les propositions que les histoires de la famille permettent (Omnès, 1988). L'obstacle logique rencontré jadis par von Neumann est ainsi levé.

La notion de complémentarité devient plus claire à son tour : elle traduit l'existence de *plusieurs* familles d'histoires rationnelles permettant de décrire une *même* situation microscopique. Cette multiplicité permet de comprendre les nombreuses controverses que la complémentarité avait engendrées et, en particulier, celles qui ont trait aux « éléments de réalité » d'Einstein, Podolsky et Rosen. Il faut impérativement se limiter à une seule famille pour éviter de graves erreurs de logique. Mais laquelle ou, en d'autres termes : en est-il une qui soit la seule vraie ? La réponse est simple : les histoires ne sont qu'un langage et non une recette miracle pour dire ce qui est *réel* et ce qui ne l'est pas. On ne saurait exiger cela d'un langage, mais on peut lui demander, en revanche, d'être bien parlé ou bien écrit, en ne disant que ce qui est nécessaire à la *compréhension* d'une expérience mais sans rien omettre de ce qui est *pertinent*. Le langage se trouve alors tellement circonscrit, la famille d'histoires pertinente tellement évidente, que la question de son choix n'a plus d'importance : en tout état de cause, les conclusions seront les mêmes.

On notera finalement une contribution importante de Gell-Mann et Hartle (1991) qui ont montré l'importance du rôle de la décohérence dans la théorie des histoires. À part des cas particuliers où l'espace de Hilbert est de dimension finie (comme dans le cas d'un spin), la vérification des conditions de rationalité résulte toujours de la physique classique (entendue, comme plus haut) ou de la décohérence, voire des deux à la fois. Les situations correspondantes deviennent ainsi tellement intuitives qu'un minimum de familiarité avec la théorie permet de se passer presque entièrement de calculs. On aboutit ainsi à une forme de l'interprétation qui n'est guère plus technique que celle de Copenhague, tout en n'exigeant pas les mêmes subtilités de pensée. Chacun, selon ses goûts, peut alors choisir l'une ou l'autre.

Une interprétation déductive

Le cadre logique classique

66. Dans la logique des histoires, le déterminisme apparaît comme une équivalence logique entre deux propriétés classiques (spécifiant positions et vitesses

dans des bornes fixées), chacune ayant lieu à un instant différent. Les limites de validité du déterminisme et les erreurs correspondantes sont calculables et tiennent essentiellement à la possibilité d'instabilités chaotiques, à l'étalement des paquets d'onde ou aux fluctuations quantiques. L'erreur se manifeste comme une probabilité de faute logique quand on veut s'appuyer sur le déterminisme pour tirer une conclusion classique à partir d'une hypothèse classique.

Soulignons l'importance en quelque sorte philosophique de ces résultats. Le déterminisme classique et le probabilisme quantique se trouvent au total réconciliés, le premier étant englobé dans le second grâce à la notion d'erreur. Il n'en reste pas moins qu'on récupère bien la causalité, cette catégorie de pensée qui est indispensable à notre perception du monde. Cette causalité n'est pas universelle cependant, comme on l'a cru pendant très longtemps. Elle ne s'applique qu'à un niveau macroscopique (qui peut être très petit en pratique : le maintien ou le changement de la forme d'une macromolécule). Elle est néanmoins tout à fait satisfaisante pour tous besoins pratiques.

67*. L'interprétation par les histoires passe par un langage universel, comme Bohr, Heisenberg et Pauli l'avaient initialement supposé. Ce langage n'est autre que celui que von Neumann avait proposé, du moins dans son point de départ. On n'a donc plus à promulguer les interdits de Bohr vis-à-vis de la description du monde microscopique, bien que des précautions s'imposent toujours pour que les descriptions demeurent rationnelles (contrôlées par les conditions de Griffiths). La complémentarité ajoute néanmoins une multiplicité dans nos façons de décrire la réalité microscopique. Il est probable qu'il faudra définitivement se résigner à cela, que Bernard d'Espagnat appelle le Réel voilé (d'Espagnat 1994).

Le constat sans doute le plus remarquable pour « comprendre » la physique quantique est qu'on retrouve bien tous les caractères du sens commun (ou les catégories kantienne) quand on restreint le langage des histoires au monde ordinaire, ce qui suppose de ne parler que d'objets macroscopiques en n'énonçant que des propositions classiques. Cela devrait avoir des répercussions en philosophie, qu'on n'essaiera pas cependant d'examiner ici.

La théorie de la mesure

68. Comme on l'a dit plus haut, la théorie de la mesure est devenue démonstrative, chaque règle énoncée par l'école de Copenhague devenant un théorème de la nouvelle théorie. Cette formalisation exige d'être plus précis sur certains points et c'est ainsi qu'on est amené à bien distinguer la *donnée* et le *résultat* d'une mesure. Le résultat (qu'on recherche par l'opération de mesure) est, en général, une propriété quantique, comme par exemple la valeur d'une composante de spin. La donnée, en revanche, est le phénomène classique directement visible par lequel on accède à ce résultat. C'est, l'indication d'une aiguille sur un cadran ou un nombre emmagasiné par un ordinateur. La logique propre au langage des histoires permet d'établir l'équivalence logique de la donnée et du résultat : il est donc permis de s'appuyer sur la première pour affirmer le second.

La méthode conduisant à cette conclusion consiste à introduire des histoires qui rendent compte de tous les éléments essentiels d'une expérience de mesure. Elles indiquent dans quelle situation l'appareil de mesure se trouve avant l'expérience (l'aiguille est au zéro par exemple), l'état initial de l'atome ou de la particule qu'on mesure étant donné par une fonction d'onde ou un opérateur densité, ou bien encore par une histoire entrant dans le détail de sa préparation. Les résultats et les données possibles sont pris en compte pour former autant d'histoires différentes dans une même famille. La vérification des conditions de rationalité résulte alors de deux caractéristiques d'un appareil de mesure (supposé parfait). La première s'exprime dans la dynamique de l'interaction entre l'objet mesuré Q et l'appareil de mesure M : leur interaction fait passer d'un état propre de l'observable mesurée A avec une valeur propre a_i pour Q à un état de M montrant la donnée correspondante D_i (cette caractéristique dynamique a toujours été supposée dans toutes les théories de la mesure). La seconde caractéristique nécessaire à l'existence d'une mesure est que l'appareil M subisse un effet de décohérence (ce qui suppose le caractère irréversible de la mesure).

On peut alors établir les règles de la théorie de la mesure données dans la section 44 comme autant de propositions démontrées par la logique des histoires. Ces résultats incluent en particulier la règle de réduction de la fonction d'onde qui apparaît comme un corollaire (une recette) pour calculer les probabilités des résultats possibles d'une seconde mesure, quand une première mesure a été effectuée auparavant. Aucun effet physique de réduction n'entre en jeu, et le seul effet qui soit nécessaire dans la mesure est la décohérence dans l'appareillage.

L'ensemble de ces résultats modifie évidemment l'appréciation qu'on pouvait avoir de la théorie de la mesure : autrefois conception profonde et difficilement justifiable autrement que par l'empirisme, ou corps d'axiomes indépendants des principes de base de la théorie quantique, elle se révèle maintenant une conséquence directe de ces principes.

Le problème de l'objectification

69. « Objectification » est un nom quelque peu barbare pour désigner le fait que la donnée d'une mesure est unique, par comparaison avec sa description théorique qui est multiple et met tous les résultats possibles sur un même pied. C'est un sujet d'interrogations ou de controverses pour beaucoup de physiciens. Autant, en effet, cette unicité de la donnée nous paraît évidente « parce que la réalité ne peut être qu'unique », autant la théorie ne se montre capable que d'aligner des éventualités.

Un apport notable des progrès récents est d'établir au moins qu'une donnée de mesure est réellement acquise : il s'agit bien d'un fait. En s'appuyant sur la décohérence, on montre en effet que des histoires rationnelles qui incluent ce fait ne pourront jamais le remettre en question à un moment ultérieur. Il a donné lieu à des enregistrements indélébiles qui marquent tout ce qui le suit, fût-ce imperceptiblement dans le détail bien dissimulé des phases de la fonction d'onde d'un environnement. Toute histoire qui voudrait nier ce fait de la mesure ou ses

conséquences ultérieures se verrait rejeter hors du rationnel par les conditions de Griffiths, à cause de la décohérence.

On peut noter, à ce propos, l'irréversibilité de la décohérence qui sélectionne le même sens du temps que l'irréversibilité thermodynamique. La logique quantique, c'est-à-dire le déroulement des histoires, se trouve également contrainte à choisir une direction du temps. Celle-ci est la même que celle du Second Principe de la thermodynamique, car la validité des conditions de Griffiths est le plus souvent une conséquence de la décohérence. Ainsi les mots « antérieur, ultérieur » acquièrent-ils un sens précis, bien qu'on puisse ne faire référence qu'à des principes de base invariants par renversement du temps. La cohérence logique (vérification des conditions de Griffiths) ne peut avoir lieu en effet que pour une seule direction du temps. La décohérence est essentielle à ce résultat qui n'est pas valable, par exemple, pour un système à un seul degré de liberté. Ainsi un « chat de Schrödinger » à un seul degré de liberté peut fort bien revenir à la vie après avoir été déclaré mort, mais non pas un « chat » macroscopique sur lequel agit la décohérence.

Il faut néanmoins signaler qu'une controverse existe quant à la signification de la décohérence (Bell (1975), d'Espagnat (1994)). On peut la schématiser ainsi : l'effet de décohérence apporte-t-il une réponse fondamentale à l'existence des faits, ou est-ce un faux semblant qui ne fait que sauver les apparences observées en pratique ? Bell et d'Espagnat penchaient pour la seconde réponse. Il semble pourtant que la mise en évidence expérimentale de la décohérence, avec son renforcement graduel à mesure que le système devient de plus en plus macroscopique, aille en sens inverse : il n'y a de faits que dans un monde assez grand pour le macroscopique.

Toute la controverse est extrêmement théorique et elle repose en fait sur l'interprétation qu'il convient de donner à des probabilités très petites. Il s'agit, dans ce cas, de la probabilité pour qu'une expérience révèle la persistance de toutes les composantes d'une fonction d'onde, même après décohérence. De telles probabilités ne sont pas strictement nulles mais extrêmement petites, et les pragmatistes s'accordent à leur dénier toute signification. (Cette question sera reprise au chapitre 20).

Le problème de l'objectification est examiné dans le même chapitre. On y prend pour argument qu'aucune théorie ne peut avoir pour conséquence l'unicité de la réalité, qu'on observe empiriquement. Cela est vrai de la physique classique elle-même. La vraie question est donc de savoir si la théorie quantique est compatible avec l'unicité. On peut établir ce résultat et ainsi finalement s'assurer d'un accord total entre la théorie et l'observation. En d'autres termes, la théorie est non seulement cohérente mais aussi complète. D'autres points de vue s'opposent à celui-ci et on essaiera de les présenter. Il est clair, néanmoins, qu'on entre là sur un terrain où la physique empirique n'est plus en jeu et on peut donc arrêter ici cette brève histoire de l'interprétation, qui est sans doute appelée à d'autres prolongements.

TROISIÈME PARTIE

L'INTERPRÉTATION RECONSTRUITE

La troisième partie de ce livre, qui est aussi la plus longue, décrit avec plus de détails l'interprétation esquissée dans le chapitre précédent. Elle s'appuie sur trois idées principales :

- le langage et la logique des histoires rationnelles ;
- le principe de correspondance converti en quelques théorèmes essentiels ;
- l'effet de décohérence.

En tout état de cause, l'ordre d'importance de ces notions est sans doute inverse de celui dans lequel on vient de les énoncer, mais c'est dans ce dernier qu'ils s'organisent le mieux.

La plupart des résultats théoriques dont on aura besoin seront expliqués de manière élémentaire, autant que faire se peut, et on ne recourra pas à des mathématiques élaborées. Cela peut nuire à la rigueur mais les exigences d'une bonne compréhension ne s'accordent pas nécessairement avec celles de la rigueur mathématique. La construction procédera de manière logiquement cohérente et on conclura chaque chapitre par un résumé des résultats, lequel pourra servir de guide pour suivre la construction de l'interprétation.

70. Le chapitre précédent indiquait les grandes lignes d'une interprétation. Il s'agit à présent, dans cette troisième partie, d'apporter les détails nécessaires à une compréhension réelle. On commencera, dans ce chapitre, par énoncer les principes de la théorie sur lesquels on entend s'appuyer.

Il y a un certain arbitraire dans l'énoncé des principes de la physique quantique car plusieurs versions sont possibles, comme l'histoire le rappelle avec les mécaniques des matrices ou des ondes. Il arrive aussi qu'un certain énoncé des principes soit redondant, certains pouvant se déduire des autres. Le choix qu'on va faire ici pour énoncer les principes de base de la théorie n'est sans doute ni meilleur ni pire que d'autres, mais il s'inscrit délibérément dans une perspective d'interprétation.

On n'énonce en fait que quatre principes, le premier fixant le langage mathématique de la théorie ; le deuxième est le principe d'inertie et le troisième fonde la dynamique à la manière de Heisenberg et Schrödinger ; le dernier fixe les propriétés de symétrie des particules indiscernables. Rien ne sera dit dans ces préliminaires au sujet des probabilités quantiques ni de l'état d'un système (y compris la fonction d'onde). On verra, en effet, que ces questions appartiennent déjà, au moins en partie, à l'interprétation et elles n'apparaîtront en conséquence que plus loin.

Signalons encore que les principes énoncés ici ne sont pas seulement l'aboutissement du processus historique de leur découverte indiqué dans la première partie. Ils ont été vérifiés par d'innombrables applications et on peut les considérer à présent comme des règles qui résument une vaste accumulation de données expérimentales.

Ce chapitre ne se limite pas à l'énoncé des principes quantiques mais il introduit également d'autres fondements sur lesquels il faudra aussi s'appuyer : ceux de la logique et du calcul des probabilités. Ainsi toutes les bases qu'on admet sans discussion auront-elles été données.

Des compléments (composés en petits caractères) seront parfois donnés. Ils précisent certains points ou signalent, dans le cas présent, des notions qui dérivent directement des principes sans qu'on doive recourir à une interprétation (l'existence du spin, par exemple). Ils peuvent être omis sans inconvénient.

Le cadre hilbertien

71. On a indiqué plus haut comment von Neumann fut amené à proposer le cadre des espaces de Hilbert comme la structure mathématique convenant le mieux à la théorie quantique. On doit néanmoins mentionner l'existence d'autres voies d'approche que celle des espaces de Hilbert, comme celle des « C^* -algèbres », où l'espace de Hilbert apparaît comme une construction dérivée, et celle des « intégrales sur les chemins » de Feynman, qui est certainement la plus générale. On sera amené parfois à y faire allusion, mais celle qui s'appuie sur les espaces de Hilbert est la plus fréquemment enseignée et, sans aucun doute, la mieux connue. C'est un argument suffisant pour qu'on l'adopte ici.

Le cadre de la théorie

72. Les bons auteurs s'accordent à placer en préliminaire aux subtilités de la mécanique quantique ce qui fait d'abord son extraordinaire simplicité : c'est une théorie linéaire. Ainsi, deux solutions de l'équation de Schrödinger peuvent s'ajouter pour donner une autre solution, les amplitudes de probabilité se combinent linéairement et c'est en somme comme si toute la physique se ramenait toujours à des systèmes d'équations algébriques ou différentielles du premier degré (mais en nombre infini). Le fait est suffisamment important pour qu'on le souligne, comme Dirac le faisait en le posant comme un « principe de superposition » préliminaire à tout autre.

Le premier principe de la mécanique quantique qu'on posera ici inclut le principe de superposition, mais il est plus spécifique en ce sens qu'il fixe tout le cadre mathématique de la théorie. Toutes les applications de la physique quantique, à l'exception des systèmes à nombre infini de particules que l'on rencontre à titre théorique en mécanique statistique, peuvent être formulées dans le cadre des espaces de Hilbert et le principe de superposition se traduit par le caractère vectoriel, et par conséquent linéaire, de ces espaces. Ainsi posera-t-on le :

Principe 1

On peut associer à tout système physique isolé un espace de Hilbert bien défini. Les concepts physiques nécessaires à la description et l'étude de ce système s'expriment en langage mathématique par des notions qui ne se réfèrent qu'à cet espace de Hilbert.

*Complément. Les espaces de Hilbert **

On supposera le lecteur informé de la théorie élémentaire de l'espace de Hilbert et on se contentera de rappeler brièvement quelques notions qui seront employées par la suite.

Un espace de Hilbert est, par définition, un espace vectoriel complexe doté d'un produit scalaire. Un espace vectoriel a pour éléments des vecteurs qu'on désignera par des lettres grecques. La somme vectorielle $\alpha + \beta$ de deux vecteurs α et β est aussi un vecteur, tout comme le produit $c\alpha$ de α par un nombre complexe c . C'est un espace vectoriel de dimension

finie, comme il en intervient dans la description d'un spin, ou de dimension infinie pour des fonctions $\alpha(x)$ à valeurs complexes qui peuvent être qualifiées en ce sens de *vecteurs*.

Un produit scalaire est une opération qui associe à deux vecteurs α et β un nombre (complexe) qu'on écrit $(\alpha|\beta)$. On définit un produit scalaire en mathématiques par des règles abstraites et deux vecteurs sont dits *orthogonaux* quand leur produit scalaire est nul. La norme d'un vecteur $\|\alpha\|$ est un nombre défini par $\|\alpha\|^2 = (\alpha|\alpha)$, avec $\|\alpha\| \geq 0$. Un vecteur est dit *normalisé* si sa norme est égale à 1. Une base orthonormée $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ est faite de vecteurs normalisés orthogonaux entre eux. Elle doit être complète, de façon que tout vecteur soit une combinaison linéaire des vecteurs de la base.

On peut aussi s'appuyer directement sur les exemples les plus importants. Pour un espace de Hilbert de dimension finie n , un vecteur α est défini par des coordonnées $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ dans une certaine base orthonormée et le produit scalaire est donné par :

$$(\alpha|\beta) = \alpha_1^* \beta_1 + \alpha_2^* \beta_2 + \dots + \alpha_n^* \beta_n. \quad (8.1)$$

On reconnaît l'expression habituelle du produit scalaire dans un espace euclidien, hormis le fait que les coordonnées sont complexes. Pour des fonctions $\alpha(x)$ comme par exemple une fonction d'onde, on pose :

$$(\alpha|\beta) = \int \alpha^*(x) \beta(x) d^q x, \quad (8.2)$$

$$\|\alpha\|^2 = \int |\alpha(x)|^2 d^q x, \quad (8.3)$$

q étant le nombre de dimensions de l'espace des variables x .

Un opérateur A agissant dans un espace de Hilbert \mathcal{H} est une application linéaire qui fait correspondre à un vecteur α un autre vecteur, noté $A\alpha$. Dans un espace de Hilbert où une base a été choisie, un opérateur peut être associé à une matrice du type de Heisenberg dont les éléments de matrice sont $(\alpha_j|A\alpha_k)$. Étant donné un opérateur A , il lui correspond un opérateur A^\dagger , tel que $(\alpha|A\beta) = (A^\dagger \alpha|\beta)$, qu'on appelle son adjoint. Un opérateur *hermitien* ou *autoadjoint* est tel que $A = A^\dagger$. On lui donne aussi le nom d'observable.

Les opérateurs autoadjoints ont une propriété spectrale très importante qui est la clef de leur rôle en physique. Soit A l'un d'eux. Il existe une base orthonormée de vecteurs $\{\alpha_n\}$ qui sont des vecteurs propres de l'opérateur A , tels que :

$$A \alpha_n = a_n \alpha_n, \quad (8.4)$$

le nombre réel a_n étant la valeur propre de A associée à α_n .

Cela est toujours vrai dans un espace de Hilbert de dimension finie, en notant toutefois que plusieurs valeurs propres peuvent coïncider (on dit que cette valeur propre est dégénérée). Dans le cas d'une dimension infinie, on peut rencontrer des valeurs propres a_n discrètes ou continues, auquel cas l'usage d'un indice de numérotation n est mal approprié et il doit être remplacé par un indice continu. Ainsi, l'opérateur qui représente l'énergie d'un atome d'hydrogène possède des valeurs propres discrètes qui sont les niveaux d'énergie E_n de l'atome, d'ailleurs dégénérés puisque deux autres nombres quantiques l et m sont nécessaires pour préciser un vecteur propre (une fonction d'onde). Toutes les énergies E positives qui correspondent à un atome ionisé sont aussi des valeurs propres possibles. L'ensemble des valeurs propres d'un opérateur forme son spectre. On n'entrera pas dans le détail des propriétés qui distinguent les opérateurs bornés et non bornés, ni les précautions à prendre pour la normalisation des vecteurs propres dans le spectre continu par des fonctions delta.

Parmi les notions associées qui interviennent en physique, il faut aussi mentionner la *trace* d'un opérateur. En utilisant une base orthonormée $\{\alpha_j\}$, la trace d'un opérateur A est définie par la somme suivante :

$$\text{Tr } A = \sum_j A_{jj}, \text{ avec } A_{jk} = (\alpha_j|A\alpha_k), \quad (8.5)$$

cette notion étant bien définie quand la somme converge absolument. La trace ne dépend pas

de la base choisie. On notera deux de ses propriétés qui sont souvent employées :

$$\text{Tr } AB = \text{Tr } BA, \quad (8.6)$$

$$\text{Tr } ABC = \text{Tr } CAB. \quad (8.7)$$

Plus généralement, la trace d'un produit d'opérateurs est invariante quand on opère une permutation circulaire de ces opérateurs.

Remarques

Il convient de préciser certains aspects du Principe 1 qui concernent la physique. Ainsi, les systèmes physiques envisagés ici ne sont supposés connus ou connaissables qu'à un certain degré de précision, limité par les instruments utilisables quelque puissants que soient ceux-ci ou même aussi puissants qu'on puisse les concevoir dans un monde réel. Cela entraîne deux remarques à propos des systèmes isolés et du choix de l'espace de Hilbert.

Le principe se réfère en effet à un système isolé. Il faut entendre par là un système qui ne subit aucune influence externe, ce qui est évidemment une idéalisation. En pratique, il s'agit d'un système qu'on peut considérer comme momentanément isolé avec une précision suffisante, ici et maintenant, et non pas d'un système qui serait parfaitement isolé depuis toujours. Il a pu être préparé en laboratoire avec l'aide d'appareils qui n'ont plus à présent d'interaction directe avec lui, ou il s'agit d'un système naturel observé sans avoir été volontairement préparé. On ne suppose pas qu'il s'agisse nécessairement de systèmes microscopiques et la théorie nous amènera, au contraire, à appliquer ce principe aux appareils de préparation, de guidage et de mesure. Dire que ceux-ci sont isolés est évidemment une vue de l'esprit et tout ce qu'on suppose est qu'on puisse négliger leurs interactions avec le milieu extérieur.

On notera au passage que nous parlons d'un système. On a cru parfois que le caractère probabiliste de la physique quantique exige qu'on considère comme en mécanique statistique un vaste ensemble de systèmes identiques. Cette vision des choses est exclue quand on vise à inscrire la physique classique dans le cadre quantique : qui prendrait au sérieux une théorie qui ne pourrait parler que d'un ensemble infini de systèmes solaires identiques ?

En ce qui concerne l'espace de Hilbert associé à un système, il faut le voir comme un cadre souple plutôt que l'affirmation de l'existence d'un espace absolu intrinsèque au système. Ainsi, dans le cas de l'atome d'hydrogène, on peut considérer l'espace de Hilbert des deux particules, électron et proton. On peut aussi faire entrer tous les photons possibles en ligne de compte ainsi que des paires de positrons et d'électrons en introduisant l'espace de Hilbert de l'électrodynamique quantique ; celui-ci permet de traiter certaines corrections très fines au spectre d'énergie. On pourrait aussi envisager les trois quarks qui constituent le proton, liés par des gluons. En pratique, on retient l'espace de Hilbert pertinent, c'est-à-dire le plus simple qui convienne aux questions qu'on souhaite examiner, avec le degré de précision nécessaire.

Le principe d'invariance relativiste

73. Il est indispensable de toujours préciser le système de référence par rapport auquel un système physique est décrit. On n'emploiera ici que des référentiels inertiels, au sens de la relativité restreinte. Encore faut-il savoir passer de l'un à l'autre, ce qui suppose d'abord le :

Principe 2

Les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels inertiels, leur énoncé se référant à un même espace de Hilbert pour un système donné.

La donnée d'un système de référence n'appartient pas à la mécanique quantique. On y admet l'existence d'un espace-temps repéré par des axes d'espace et de temps et des coordonnées x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) qui sont des nombres purs. Un changement de référentiel peut faire intervenir une translation de l'origine de l'espace et du temps, une rotation des axes d'espace et une transformation de Lorentz dont la vitesse V est donnée. Cela représente au total 10 paramètres et l'ensemble de ces transformations sur les coordonnées constitue ce qu'on appelle le groupe de Poincaré (voir par exemple Weinberg, 1995). Une telle transformation L se présente sous la forme :

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + \alpha^\mu,$$

où la matrice Λ rend compte de la rotation des axes et de la transformation de Lorentz, le quadrivecteur a représentant la translation de l'origine. On suppose explicitement que la rotation ne change pas l'orientation des axes d'espace et qu'il n'y a pas non plus de changement dans la direction du temps.

Cela étant, on peut démontrer que le principe 2 a pour conséquence que l'action du changement de référentiel sur les vecteurs de l'espace de Hilbert α est nécessairement de la forme :

$$\alpha' = U(L) \alpha \tag{8.8}$$

où $U(L)$ est un opérateur unitaire dans l'espace de Hilbert représentant linéairement le groupe de Poincaré en ce sens que $U(LL') = U(L)U(L')$. On a donc ainsi une expression simple des changements de référentiel.

Note sur la démonstration*

La démonstration de ce résultat important se fait en deux temps ; d'abord par un *Lemme* : le carré d'un produit scalaire $|\langle \alpha | \beta \rangle|^2$ est invariant, et ensuite un *Théorème* dont la conclusion est la formule (8.8). La preuve du théorème est due à Wigner (1959) et on peut trouver dans le livre de Weinberg (1995).

Le lemme est emprunté d'ordinaire à l'interprétation de Copenhague et il doit être reconsidéré dans la perspective nouvelle qui est la nôtre. Il peut être déduit de la représentation des propriétés physiques par des projecteurs que l'on discutera dans le chapitre suivant.

*Masse et spin**

L'ouvrage de Weinberg (1995) montre en détail, dans ses premiers chapitres, comment construire explicitement l'espace de Hilbert d'un système formé de particules, à partir des seuls principes 1 et 2. Il en résulte qu'aucune interprétation préalable n'est nécessaire pour connaître cet espace. Weinberg montre également que l'existence de la masse et du spin d'une particule découlent nécessairement des mêmes principes. Des considérations analogues, peut-être plus simples car réduites à l'essentiel, sont données dans Omnès (1994a), chapitre 1, section 10. Les résultats eux-mêmes sont dus à Wigner et Bargmann (Wigner, 1939 ; Bargmann, 1948). Des résultats analogues existent en physique non relativiste (Bargmann, 1954 ; Lévy-Leblond, 1963).

La dynamique

Les observables

74. Avant d'énoncer la loi fondamentale de la dynamique, il est nécessaire d'introduire la notion de variable dynamique ou ce qui en tient lieu, c'est-à-dire les observables quantiques. C'est malheureusement une des notions les plus délicates de la théorie. En employant le nom d'observable, elle fait référence à ce qui peut être en principe observé, mesuré, évoquant bien par là les variables dynamiques classiques. Mais par définition, dans le cadre strict posé par le principe 1, une observable est un quelconque opérateur autoadjoint dans l'espace de Hilbert du système. La relation, apparemment étrange entre un concept purement mathématique et le concept physique sous-jacent, pose un des problèmes que l'interprétation se doit d'éclaircir. Celui-ci est souvent écarté, par exemple chez von Neumann qui posait en principe qu'il existe toujours des appareils capables de mesurer n'importe quelle observable. La revue de l'histoire de l'interprétation qu'on donnait dans la deuxième partie nous conduit à attendre de l'interprétation une meilleure compréhension des observables. C'est pourquoi, au stade présent des fondements, on considérera une observable comme un pur objet théorique, c'est-à-dire un opérateur autoadjoint.

Le temps : une variable et non une observable

Le temps qui apparaît dans l'équation de Schrödinger est la coordonnée d'espace-temps du référentiel utilisé. C'est donc un nombre pur et non une observable. Si l'on cherchait cependant à l'associer à une observable, par exemple au moyen d'une horloge au fonctionnement idéal, on aboutirait à une impossibilité. Il faudrait en effet introduire l'hamiltonien de l'horloge comme conjugué à l'observable temps, et l'hypothèse d'un spectre continu du temps allant de $-\infty$ à $+\infty$ exigerait que le spectre d'énergie de l'horloge aille jusqu'à $-\infty$, comme on peut le démontrer. L'horloge serait donc inévitablement instable.

L'équation de la dynamique

75. La loi fondamentale de la dynamique peut s'énoncer sous la forme familière trouvée par Heisenberg et Schrödinger. On adoptera la première version.

Principe 3

Dans un référentiel inertiel donné, un système physique isolé est caractérisé par un opérateur autoadjoint H appelé opérateur hamiltonien ou observable énergie. Toute observable A de ce système évolue au cours du temps conformément à l'équation :

$$dA(t)/dt = (i/\hbar) [H, A(t)]. \quad (8.9)$$

Comme les observables sont considérées pour l'instant comme des quantités abstraites, le principe est nécessairement formel. Il ne fait qu'introduire un groupe de transformations agissant sur les observables, avec le temps pour paramètre.

L'équation (8.9) n'est autre que l'équation (3.3) déjà rencontrée pour les matrices de Heisenberg. Schrödinger l'avait remplacée par l'évolution d'une fonction d'onde ψ (ou un vecteur dans l'espace de Hilbert) :

$$i\hbar d\psi/dt = H\psi. \quad (8.10)$$

Les deux versions sont possibles. Dans celle de Heisenberg, on suppose d'ordinaire qu'il existe un vecteur d'état fixe et les quantités dynamiques évoluent au cours du temps selon (8.9) de manière analogue aux quantités classiques $x(t)$, $p(t)$. Dans la version de Schrödinger, le vecteur d'état évolue au cours du temps alors que les opérateurs associés aux quantités dynamiques restent fixes.

Relation entre les deux points de vue

L'équivalence mathématique des deux points de vue est facile à montrer, quand on admet l'existence de la fonction d'onde. En supposant pour simplifier que H ne dépende pas du temps, une solution formelle de l'équation de Schrödinger (8.10) est donnée par :

$$\psi(t) = U(t)\psi(0), \text{ avec } U(t) = \exp(-iHt/\hbar). \quad (8.11)$$

Or, on sait que dans un espace de Hilbert, on peut indifféremment faire agir un opérateur unitaire U sur les vecteurs, sans changer les matrices ou transformer les matrices par l'application $A \rightarrow U^{-1}AU$ sans changer les vecteurs, ce qui correspond aux deux points de vue de Schrödinger et de Heisenberg. Compte tenu de l'expression (8.11) de $U(t)$, l'évolution de l'opérateur

$$A(t) = U(t)^{-1}AU(t) \quad (8.12)$$

satisfait bien à l'équation (8.9). Inversement, l'expression (8.12) peut être considérée comme la solution de l'équation différentielle (8.9) avec la condition initiale (qui est un choix d'origine des temps) $A(0) = A$.

On a adopté ici le point de vue de Heisenberg, bien qu'il soit légèrement plus compliqué que celui de Schrödinger, parce qu'il serait risqué de prétendre, avant tout essai d'interprétation, que l'on comprend les fonctions d'onde et même qu'on est certain de leur existence.

Relations avec le formalisme classique*

On peut noter la grande analogie entre la loi quantique (8.9) et la dynamique hamiltonienne classique. En physique classique, les variables canoniques $q(t)$ et $p(t)$ sont des fonctions du temps qui obéissent aux équations de Hamilton (2.6). Poisson avait remarqué au

début du dix-neuvième siècle que l'on peut donner à ces équations une forme universelle qui s'applique à toutes les variables dynamiques $a(q, p)$ fonctions de (q, p) . Il définissait une « parenthèse de Poisson » de deux fonctions $a(q, p)$ et $b(q, p)$ par l'expression :

$$\{a, b\} = \sum_k \left(\frac{\partial a}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial b}{\partial q_k} - \frac{\partial a}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial b}{\partial p_k} \right), \quad (8.13)$$

pour établir une forme générale des équations de Hamilton donnée par :

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \{h, a\}, \quad (8.14)$$

$h(q, p)$ étant la fonction de Hamilton. Il y a une grande analogie entre les équations de Heisenberg (8.9) et celles de Poisson (8.14), que l'on retrouve quand on déduit la physique classique de la mécanique quantique.

Il conviendrait enfin de préciser la forme de l'opérateur hamiltonien. Son établissement, incluant toutes les formes d'interaction (gravifiques, fortes, faibles et électromagnétiques) a été un des grands thèmes de la physique des particules et aussi un de ses grands succès. Mais, on ne s'intéresse ici qu'à l'interprétation, et l'hamiltonien de particules chargées non relativistes avec interactions coulombiennes, tel que Schrödinger et Heisenberg l'écrivaient déjà, suffira dans la plupart des cas à nos besoins, hormis certains cas d'interaction avec les photons. Notons seulement que les progrès remarquables de la physique des particules, au cours des trente dernières années du vingtième siècle, ont montré que chaque étage de la physique (modèle standard, physique des hadrons, électrodynamique...) peut être décrit par un hamiltonien « effectif », la forme des lois quantiques restant la même à chaque étage (Weinberg, 1995).

*Hamiltonien et changements de repère**

Il est possible, en s'appuyant sur la théorie des mesures de Copenhague, de montrer que l'hamiltonien coïncide avec l'opérateur qui engendre les translations infinitésimales de l'origine des temps dans le groupe de Poincaré. Je ne connais pas de démonstration simple de ce résultat. On pourrait l'établir à la fin de ce livre, mais ce résultat ne sera pas nécessaire.

Particules indiscernables

76. La matière et le rayonnement sont constitués de particules. Bien qu'il soit nécessaire de passer à des champs quantifiés pour décrire toutes les propriétés des particules, on n'aura l'occasion de faire appel à la théorie quantique des champs que de manière tout à fait marginale et on évitera d'y recourir à présent. Il faut tenir compte cependant de l'impossibilité de distinguer, même en principe, entre plusieurs particules de même nature (un électron d'un autre électron ou un photon d'un autre photon). On pourrait très bien poser un principe affirmant cette impossibilité. En introduisant un opérateur qui échange deux particules, on ramènerait son étude à l'interprétation des observables. On ne se lancera pas dans cette voie et la relation entre indiscernabilité, symétrie et spin sera posée globalement comme un seul principe.

On convient d'appeler *bosons* les particules à spin entier et *fermions* celles à spin semi-entier. On désignera par (μ, p) une composante μ du spin d'une particule et son impulsion p . Cela étant, on a le :

Principe 4

Les vecteurs de l'espace de Hilbert d'un système de particules sont complètement symétriques quand on permute les variables (μ, p) de plusieurs bosons identiques, et complètement antisymétriques quand on permute les variables de fermions identiques.

On notera que ce principe réduit l'espace de Hilbert à des vecteurs symétriques ou antisymétriques, sans faire référence explicite à des fonctions d'onde qui représenteraient les états du système. La règle n'affecte donc que l'espace de Hilbert lui-même. Elle entraîne une restriction sur les observables de la théorie : ce sont des opérateurs autoadjoints qui transforment un vecteur $\alpha_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n}$ (p_1, p_2, \dots, p_n) possédant les propriétés de symétrie imposées en un autre vecteur ayant les mêmes symétries.

Ici se termine la liste des principes physiques sur lesquels on s'appuiera et dont on verra qu'ils suffisent pour construire l'interprétation de la théorie. D'autres notions essentielles, comme la signification physique des observables, l'état d'un système et le rôle des probabilités seront introduites ultérieurement après un minimum d'interprétation.

La logique élémentaire

77. Le caractère profondément formel de la théorie quantique amène de manière inévitable à une logique formelle, comme von Neumann l'avait bien vu. La logique formelle rebute parfois les physiciens mais, fort heureusement, on n'a vraiment besoin que des notions les plus élémentaires. Il est vrai aussi que les physiciens d'aujourd'hui sont moins imperméables à ce genre de sujet avec lequel la connaissance des ordinateurs les a familiarisés.

Rappelons que la logique se fonde sur des propositions dont le champ (l'ensemble) est bien défini. On verra plus tard les propositions dont l'interprétation doit faire usage mais, pour l'instant, on se contente de supposer leur existence. Trois opérations logiques doivent être définies sur ce champ. Elles permettent de construire une proposition à partir d'une ou de plusieurs autres. La première opération est la négation : toute proposition a une négation qui est une autre proposition. Il y a également deux opérations *et*, *ou* : étant données deux propositions a et b , on peut toujours les combiner pour former deux autres propositions, a et b , a ou b .

Mais la véritable raison d'être de la logique est de permettre des raisonnements. Il ne suffit pas de savoir dire « et, ou, non » mais il faut dire aussi « donc ».

Cela repose sur l'implication : il doit exister une relation entre certaines paires de propositions, un antécédent a et une conséquence b , que l'on note $a \Rightarrow b$ et qu'on exprime verbalement par « a , donc b » ; ou « b , car a » ; ou « si a , alors b », etc. Il existe aussi une autre relation entre deux propositions, leur équivalence logique notée $a = b$. Elle est équivalente au couple d'implications ($a \Rightarrow b, b \Rightarrow a$).

Ces opérations et relations sont gouvernées par un certain nombre d'axiomes qui constituent l'armature de la logique. On les rappelle ici pour plus de précision, mais le lecteur peut se dispenser de les étudier de près car ils n'interviennent que dans des démonstrations dont on ne retiendra d'ordinaire que les conclusions.

*Les axiomes de la logique**

On a d'abord les axiomes de l'équivalence :

1. $a = a$;
2. Si $a = b$ et $b = c$, on doit avoir $a = c$.

Puis viennent les axiomes de la négation (notée par une barre) :

3. $\overline{\overline{a}} = a$;
4. Si $a = b$, on doit avoir $\overline{a} = \overline{b}$.

Les axiomes de *et* et *ou* sont alors les suivants, en notant *et* par un point (.) et *ou* par le signe (+) :

5. $a.a = a$;
6. $a.b = b.a$; commutativité
7. $a.(b.c) = (a.b).c$; associativité
8. $a + a = a$;
9. $a + b = b + a$; commutativité
10. $a + (b + c) = (a + b) + c$; associativité
11. $a.(b + c) = a.b + a.c$; distributivité.

Les règles de De Morgan qui relient les opérations *et* et *ou* à la négation sont :

12. $\overline{a.b} = \overline{a} + \overline{b}$;
13. $\overline{a + b} = \overline{a} . \overline{b}$.

Enfin, on a les diverses règles de l'implication :

14. le couple d'implications $a \Rightarrow b$ et $b \Rightarrow a$ est équivalent à l'égalité logique $a = b$;
15. $a \Rightarrow (a + b)$;
16. $a . b \Rightarrow a$;
17. Si $a \Rightarrow b$ et $a \Rightarrow c$, on doit avoir $a \Rightarrow b . c$;
18. Si $a \Rightarrow c$ et $b \Rightarrow c$, on doit avoir $(a + b) \Rightarrow c$;
19. Si $a \Rightarrow b$ et $b \Rightarrow c$, on doit avoir $a \Rightarrow c$;
20. Si $a \Rightarrow b$, on doit avoir $\overline{b} \Rightarrow \overline{a}$.

En logique booléenne, le champ de propositions est considéré comme un ensemble S et toute proposition est associée avec un sous-ensemble de S . On peut alors obtenir une représentation graphique de la logique en associant les opérations de complémentaire, union et intersection avec les opérations logiques *non*, *ou*, *et*. On peut aussi introduire une proposition universelle I associée à l'ensemble S , et une proposition vide notée 0 associée à l'ensemble vide (la notation anticipe sur le fait que ces propositions seront plus tard associées aux opérateurs identité et zéro).

Les axiomes des probabilités

78. Il sera important, lorsqu'on fera usage des probabilités, de s'appuyer sur les axiomes qui les contrôlent. Ceux-ci sont au nombre de trois, pour les probabilités $p(a)$ des propositions a d'un certain champ de propositions (en calcul des probabilités ordinaire, ces propositions énoncent des événements issus par exemple d'un tirage aléatoire).

- Axiome 1 (positivité)

$$p(a) \geq 0. \quad (8.15)$$

- Axiome 2 (normalisation)

$$p(I) = 1, \quad (8.16)$$

I étant la proposition universelle qui couvre tout le champ des possibilités.

- Axiome 3 (additivité).

Si deux propositions a et b sont mutuellement exclusives (c'est-à-dire que « a et b » est la proposition vide 0 ou événement inexistant), alors on a :

$$p(a \text{ ou } b) = p(a) + p(b). \quad (8.17)$$

Rappelons pour terminer que la probabilité conditionnelle d'une proposition b si une proposition a est donnée (avec $p(a) \neq 0$) est définie par :

$$p(b|a) = p(a \text{ et } b) / p(a). \quad (8.18)$$

Il y a longtemps, von Neumann eut une idée remarquable qui devait se révéler plus tard le germe d'un langage universel pour l'interprétation. Il associait un projecteur de l'espace de Hilbert à une propriété (ou comme il le disait à un *prédicat élémentaire*). Les premiers éléments de ce langage vont être donnés.

Les composantes d'une expérience

79. Il sera commode de décrire un dispositif expérimental en y distinguant plusieurs composantes. On s'intéresse surtout à une expérience de physique quantique dans laquelle des éléments microscopiques sont importants.

L'appareillage peut alors être utilement décomposé en trois parties : la première sert à la préparation du ou des éléments microscopiques ; la deuxième constitue ce que nous appellerons le conditionnement ou le contrôle de l'expérience ; la troisième est faite des détecteurs de particules ou d'atomes, ou d'autres appareils de mesure.

Dans une expérience d'interférences, par exemple, l'appareil de préparation est une source lumineuse, souvent un laser. Le système de conditionnement est un interféromètre (qui peut n'être qu'un écran percé de deux fentes). L'appareillage de détection peut être une plaque photographique ou une batterie de photodétecteurs. En physique nucléaire ou des particules, le système de préparation est d'ordinaire un accélérateur. Le conditionnement peut faire intervenir des guides de faisceau, des cibles et des appareils d'électronique. Les mesures sont faites par des détecteurs.

Il ne faut pas attacher trop d'importance à cette classification qui comporte une large part d'arbitraire. Il importe peu qu'un polariseur soit classé dans la préparation ou dans le conditionnement. Ces désignations ne sont que commodes.

La notion de propriété

80. La physique a son langage qu'on emploie dans les livres, les articles et les congrès. Il ne porte pas uniquement sur les parties visibles d'un appareillage mais décrit également des éléments microscopiques importants pour l'expérience dont on parle. Il est courant d'entendre dire au sujet d'une expérience d'interférences, des propos tels que ceux-ci : le photon entre dans l'interféromètre. Quand il traverse l'interféromètre, sa fonction d'onde est une superposition de deux composantes, chacune localisée dans un bras de l'interféromètre. À la sortie, sa fonction d'onde est toujours dans un état de superposition qui permet de prédire l'existence d'interférences. Les grains d'une émulsion photographiques agissent finalement comme des détecteurs de particules et mesurent la position du photon.

De même, on dira en physique nucléaire : un neutron a produit une réaction $n + p \rightarrow d + \gamma$ sur une cible d'hydrogène. À propos d'un accélérateur, on indiquera que les protons en sortent avec une vitesse égale à $(0,9 \pm 0,03)c$. On dira qu'en sortant d'un dispositif de mesure du type de Stern-Gerlach, un atome a une composante de son spin égale à $+1$.

Ces assertions décrivent d'ordinaire ce qui a lieu pendant une certaine phase de l'expérience et, à l'extrême, ce qui se produit à un instant précis. Nous dirons qu'elles énoncent des *propriétés* des objets quantiques en question et nous essaierons d'en donner une définition plus précise.

Propriétés quantitatives

81. Certaines des propriétés que nous avons rencontrées pouvaient s'énoncer de manière précise en introduisant une certaine observable A et un domaine de valeurs numériques Δ (un ensemble appartenant au spectre de A). On pouvait alors les énoncer sous la forme : « la valeur de A est dans Δ ». L'observable A peut être une position, une impulsion, une énergie, etc. On a vu un exemple où l'ensemble Δ était un intervalle de valeurs pour une composante de la vitesse. Quand plusieurs observables commutent, comme les trois composantes d'une position, on peut les considérer toutes ensemble et prendre pour Δ un domaine appartenant à un spectre à plusieurs dimensions. C'est ainsi qu'on peut dire pour la position d'une particule qu'on pense être dans un volume V de l'espace : « la valeur de X est dans V ». Le domaine Δ peut parfois être réduit à un point. Ainsi, dire qu'un atome est dans l'état fondamental revient à considérer comme observable son hamiltonien H , prendre pour Δ l'ensemble, réduit à l'énergie E_0 de l'état fondamental et dire « la valeur de H est dans $\{E_0\}$ » ou « est égale à E_0 ».

82. On va montrer maintenant qu'une propriété quantitative du type précédent peut être associée à un objet mathématique bien défini, puisé directement dans le Principe 1 de la mécanique quantique : un projecteur de l'espace de Hilbert.

La notion de projection est bien connue dans l'espace euclidien ordinaire à trois dimensions. Si l'on considère un plan M passant par l'origine, c'est-à-dire un sous-espace M de dimension deux, tout vecteur v de l'espace s'écrit de manière unique sous la forme $v = v_1 + v_2$, où v_1 est

un vecteur de M et v_2 un vecteur orthogonal à M . On dit que v_1 est la projection de v sur M . Le passage de v à v_1 est une opération linéaire, on désignera par E l'opérateur correspondant tel que $v_1 = E v$. On l'appelle opérateur de projection ou projecteur sur M . Comme un vecteur de M est sa propre projection, on a $E v_1 = v_1$ et, par conséquent, $E^2 = E$.

On peut passer de l'espace euclidien à 3 dimensions à un espace de Hilbert de dimension quelconque, finie ou infinie, M étant alors un sous-espace quelconque (les mathématiciens précisent qu'il doit s'agir d'un sous-espace fermé). Il existe encore un projecteur E qui vérifie $E^2 = E$, et E est autoadjoint.

Un projecteur est défini en général comme un opérateur autoadjoint E (qui est donc une observable), vérifiant la condition

$$E^2 = E. \tag{9.1}$$

L'opérateur E , étant autoadjoint, a un spectre réel et la relation (9.1) montre que ses valeurs propres e doivent vérifier l'équation $e^2 = e$ et ne peuvent donc être égales qu'à 0 ou 1. Les vecteurs propres de valeur propre 1 sont tous ceux d'un sous-espace (fermé) M de l'espace de Hilbert, et ceux de valeur propre 0 sont tous ceux orthogonaux à M . Réciproquement, à tout sous-espace (fermé) de l'espace de Hilbert correspond un projecteur.

Considérons la propriété « la valeur de A est dans Δ » et explicitons le projecteur correspondant. Soit $|a_n\rangle$ une base de vecteurs propres de A où a désigne une valeur propre (discrète ou continue) et n un indice de dégénérescence. En écrivant à la manière de Dirac le projecteur sur un vecteur α sous la forme $|\alpha\rangle\langle\alpha|$, on peut construire un projecteur E directement associé à la propriété en posant :

$$E = \sum_{a \in \Delta} \left(\sum_n |a_n\rangle\langle a_n| \right). \tag{9.2}$$

Il est clair que si aucune valeur propre de A n'est intérieure à Δ , on a $E = 0$, et que $E = I$ si le spectre de A est entièrement inclus dans Δ . La définition s'étend sous cette forme à un spectre continu, avec le remplacement habituel d'une somme par une intégrale. Nous n'entrerons pas dans les subtilités mathématiques qu'on peut rencontrer avec les spectres continus (qui amènent à se restreindre en particulier pour Δ à un ensemble mesurable de Borel). Les mathématiques sont « bonnes filles » dans le cas présent car elles aboutissent toujours à donner un sens à la formule intuitive (9.2).

Exemple

Un projecteur très simple est celui qui exprime que la position d'une particule est dans un volume V de l'espace. Il s'écrit :

$$E = \int_V |x\rangle\langle x| dx.$$

En agissant sur un vecteur α de l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable, associé à la fonction $\alpha(x) = \langle x|\alpha\rangle$, il donne le vecteur $\beta = E\alpha$ tel que :

$$\beta(y) = \langle y|\beta\rangle = \int_V \langle y|x\rangle\langle x|\alpha\rangle dx,$$

ce qui, compte tenu de $\langle y|x\rangle = \delta(x-y)$, montre que la fonction $\beta(y)$ est égale à $\alpha(y)$ pour y intérieur à V et à zéro pour y extérieur. Ce projecteur laisse donc inchangées les valeurs de la fonction sur laquelle il agit à l'intérieur de V , tout en l'annulant en dehors de V .

Ainsi, à l'énoncé de toute propriété quantitative correspond bien un projecteur. Réciproquement, à tout projecteur correspond au moins une propriété de ce type. Il suffit, pour le voir, de prendre E lui-même comme observable et Δ comme l'ensemble formé de l'unique valeur propre 1.

Sémantique

83. Un grand nombre (en fait infini) de propriétés quantitatives différentes peuvent être associées à un même projecteur E . On va voir qu'elles ont toutes en fait la même signification. Un langage qui se référerait directement aux projecteurs ne serait donc pas simplement verbal, mais sémantique, c'est-à-dire porteur d'une signification parfaitement définie.

Considérons par exemple deux propriétés, dont l'une exprime que « la valeur de A est dans l'intervalle $[-1, +1]$ » et l'autre que « la valeur de A^2 est dans l'intervalle $[0, 1]$ ». Elles nous paraissent logiquement équivalentes. En fait, elles correspondent toutes deux au même projecteur (si le vecteur $|a, n\rangle$ est vecteur propre de A avec la valeur propre a , il est vecteur propre de A^2 avec la valeur propre a^2).

*Le cas général**

Soit une fonction f définie sur le spectre de A (on suppose f mesurable au sens de Lebesgue mais ceci est vrai de toute fonction honnête). Elle applique le sous-ensemble Δ du spectre de A dans $\Delta' = f(\Delta)$. Supposons qu'aucun point du spectre de A extérieur à Δ n'ait une image dans Δ' (c'est la condition pour que la fonction inverse f^{-1} soit définie dans Δ). Les projecteurs associés aux deux propriétés « la valeur de A est dans Δ » et « la valeur de $f(A)$ est dans Δ' » sont alors les mêmes.

Ainsi, un projecteur assure une représentation plus exacte de la signification d'une propriété, qu'aucune expression verbale ne pourrait le faire.

Prise en compte du temps

84. On a vu plus haut que certaines propriétés se réfèrent à une certaine phase d'une expérience et donc implicitement ou explicitement à l'intervalle de temps pendant lequel cette phase se déroule. Le formalisme nous oblige à préciser l'instant où l'on suppose que la propriété a lieu, ce qui s'exprime alors par une proposition de la forme « la valeur de $A(t)$ est dans Δ », avec l'expression habituelle d'une observable dépendant du temps $A(t) = U^{-1}(t) A U(t)$. On désignera le projecteur correspondant par $E(t)$. La correspondance entre le projecteur correspondant $E(t)$ et le projecteur E associé à la propriété « la valeur de A est dans Δ » est obtenue en notant que $U^{-1}(t)|a, n\rangle$ est vecteur propre de $A(t)$ avec la valeur propre a . La formule (9.2) entraîne alors :

$$E(t) = U^{-1}(t) E U(t). \quad (9.3)$$

Les propriétés en général

85. La grande généralité de la relation entre propriétés et projecteurs suggère de mettre sous la même forme certaines propriétés que nous avons laissées de côté. Ainsi, pour exprimer que la réaction $n + p \rightarrow d + \gamma$ a eu lieu antérieurement à l'instant t , il suffit de dire que le système a alors la propriété d'être composé à l'instant t d'un deutéron et d'un photon. On va montrer que ceci est une propriété quantitative qui peut être associée à un projecteur.

Supposons pour simplifier qu'il y ait un seul proton dans la cible d'hydrogène où le neutron a pénétré et qu'on ne traite, par la mécanique quantique, que les particules entrant en jeu dans la réaction. Il faut alors introduire deux espaces de Hilbert dont le premier, \mathcal{H}_{np} , représente les deux nucléons, et le second, $\mathcal{H}_{d\gamma}$, représente le deutéron et le photon. L'espace de Hilbert total est la somme directe $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{np} \oplus \mathcal{H}_{d\gamma}$. Il est clair que $\mathcal{H}_{d\gamma}$ est un sous-espace de \mathcal{H} associé à un projecteur $E_{d\gamma}$ qui projette \mathcal{H} sur $\mathcal{H}_{d\gamma}$. C'est ce projecteur qui répond à la question. La même méthode s'applique évidemment à des réactions chimiques.

Un autre exemple permet de faire intervenir des fonctions d'onde dans le même langage. À propos d'une expérience d'interférences, on avait émis l'assertion : « le photon a une fonction d'onde ψ ». Le projecteur correspondant est simplement $|\psi\rangle\langle\psi|$. L'assertion précédente a donc une signification en tant que propriété énonçable, envisageable, exprimable, même si l'état du photon est en fait un mélange (comme on le verra plus loin). Le fait de pouvoir énoncer une propriété ne suppose pas en effet que le photon ait nécessairement une fonction d'onde bien définie. Une proposition (énonçant dans notre cas une propriété) peut être vraie ou fautive et, en mécanique quantique, elle peut n'avoir qu'une certaine probabilité d'être vraie. Mais avant même de pouvoir évaluer cette probabilité, il faut d'abord pouvoir énoncer la propriété dont il est question.

En conclusion, toutes les propositions qui peuvent intervenir dans la description d'objets microscopiques, qu'il s'agisse d'atomes, de particules ou de rayonnement, peuvent être exprimées au moyen d'un projecteur. On ne peut faire état d'une preuve pour étayer cette affirmation générale, mais il s'agit plutôt d'une expérience acquise, du fait qu'on n'a jamais rencontré d'exception.

Ce langage à la von Neumann a essentiellement deux vertus qui apparaîtront plus loin. Il est universel, ce qui signifie qu'il ne décrit pas seulement les propriétés des objets microscopiques mais qu'il est également capable d'englober les propriétés classiques d'un appareillage. Il est également sensé, c'est-à-dire doté d'un cadre logique bien défini et cohérent. Une certaine somme de travail nous sera nécessaire pour établir ces deux faits essentiels. Ce sera l'affaire des chapitres suivants.

On peut mentionner finalement l'analogie que von Neumann établissait entre les projecteurs et la « valeur de vérité » d'une proposition logique. Il remarquait qu'un projecteur n'a que deux valeurs propres, 1 et 0. Une proposition logique ne peut avoir, de son côté, que deux valeurs : vraie ou fautive (ce qui constitue le principe du tiers exclu chez les logiciens).

L'analogie est tentante mais il convient d'être très précautionneux. La notion de vérité peut être utilisée universellement en mathématique mais les choses sont différentes dans une science de la nature où la vérité est sanctionnée par l'observation d'un fait que la proposition énonce. Comme nous sommes encore très loin de pouvoir énoncer clairement de tels faits, on ne s'appuiera pas sur cet aspect de la pensée de von Neumann.

Sur la notion d'observable*

86. La présente section est quelque peu en dehors du cours de notre construction d'une interprétation, mais il peut être intéressant d'essayer d'éclairer un peu la notion d'observable. En fait, celle-ci se situe à mi-chemin entre celle de variable aléatoire classique et de variable dynamique, au sens ordinaire. Il en résulte qu'on doit considérer une observable de deux points de vue différents.

Plaçons-nous d'abord du seul point de vue du langage, sans faire référence à la pratique ou à des faits réels. Une variable dynamique, même classique, est décrite par un nombre qui est supposé avoir à chaque instant une valeur exactement définie x . La notion de variable aléatoire est moins simple. Sa définition met en jeu trois notions distinctes :

- des propositions e_j qui peuvent énoncer un certain nombre d'événements envisageables (que nous supposerons en nombre fini pour simplifier). Elles peuvent spécifier par exemple qu'un marqueur sur une roue de loterie s'arrête dans un certain secteur ;
- des valeurs numériques possibles x_j d'une certaine variable classique, qui dépendent de ces propositions (on peut penser à des nombres représentant la valeur des lots, alors que la variable dynamique correspondante serait l'orientation de la roue) ;
- des probabilités p_j assignées à chaque événement (ou proposition).

Certaines de ces caractéristiques apparaissent également dans le cas d'une observable quantique. Il y a des valeurs x_j (les valeurs propres de l'observable) et des propositions e_j , lesquelles peuvent être mises en correspondance avec des projecteurs E_j . Les probabilités n'appartiennent pas directement à la notion d'observable et elles sont engendrées par une autre donnée, celle de l'état du système. Cette notion d'état est plus proche de la réalité physique, et elle correspondrait dans le cas classique à l'orientation réelle que présente une roue de loterie quand elle s'arrête.

Une observable quantique fait ainsi apparaître deux des éléments d'une variable aléatoire, c'est-à-dire une collection de propositions et de valeurs qui leur sont associées (E_j, x_j) . On aurait pu définir a priori une observable ainsi, ce qui aurait souligné son appartenance au langage.

Il est extrêmement remarquable qu'une collection de propositions et de nombres (E_j, x_j) puisse être utilisée pour construire un opérateur $X = \sum_j x_j E_j$, qui est en correspondance avec une variable dynamique classique ordinaire.

Ce caractère dual des observables rappelle la distinction que Bohr établissait entre les symboles mathématiques de la théorie et les concepts classiques (supposés plus riches à cause des associations d'idées qu'ils apportent). Les concepts sont bien suggérés par l'association (E_j, x_j) , alors que X est un symbole mathématique.

Résumé

Toute description des événements microscopiques qui se produisent lors d'une expérience peut être exprimée par des propriétés quantiques, lesquelles sont traduites à leur tour par des opérateurs de projection dans l'espace de Hilbert. Un type important de propriétés énonce que la valeur d'une certaine observable se situe dans un certain domaine des réels, mais bien d'autres propositions utiles s'expriment dans le même langage.

Le langage des propriétés tel que défini par von Neumann n'aurait rien d'universel s'il laissait de côté ce qu'il y a de plus évident dans une expérience, c'est-à-dire l'appareillage (sans même parler plus généralement de tout ce qui nous entoure à notre échelle). Von Neumann avait tenté d'opérer l'extension nécessaire du quantique au classique, sans obtenir de succès convaincant. Les progrès accomplis depuis ont surtout été d'ordre mathématique et ils ont permis de réaliser ce programme. On essaiera d'en expliquer les résultats sans être trop technique, pour parler du monde macroscopique (et de certains aspects du monde microscopique) en des termes classiques, tout en ne s'appuyant que sur les principes de la mécanique quantique.

Propriétés classiques

87. La physique classique intervient dans la description des expériences dans deux cas, au moins. C'est d'abord naturellement pour décrire l'appareillage lui-même, auquel cas, on ne s'intéresse qu'à ce que montrent les coordonnées collectives, évidentes. C'est aussi souvent parce que le mouvement d'un atome, d'une particule est bien décrit par une trajectoire classique sans recourir à la mécanique quantique. Ainsi fait-on pour concevoir, mettre au point, calculer et utiliser un tube de télévision ou un accélérateur.

Est-il donc légitime de parler simultanément de la position et de l'impulsion d'un électron sans devoir nier la mécanique quantique ? Il est clair qu'on va être limité par les inégalités de Heisenberg. Mais la constante de Planck est si petite qu'elle est totalement négligeable en comparaison des imprécisions inhérentes au fonctionnement des appareils usuels, tels qu'un accélérateur par exemple. On n'a pas besoin, dans ce cas, de faire appel à des propriétés classiques comme on les concevait jadis, infiniment précises, en énonçant que la position et l'impulsion de la particule ont des valeurs (x_o, p_o) , les nombres (x_o, p_o) pouvant être exacts (avec une infinité de décimales). On peut se contenter de poser que la position et

l'impulsion de l'électron ont les valeurs (x_0, p_0) dans des limites d'erreur $(\Delta x, \Delta p)$. Pour ne pas que ceci contredise les relations d'incertitude, il faut supposer l'inégalité forte $\Delta x \Delta p \gg \hbar$.

Il est commode de représenter graphiquement une telle propriété (Figure 10.1). En se restreignant, pour plus de simplicité, à une seule variable x , on peut représenter la propriété ci-dessus par un rectangle situé dans l'espace de phase, de centre (x_0, p_0) et de demi-côtés $(\Delta x, \Delta p)$. La question essentielle qui se pose quand on veut exprimer cette propriété dans un langage quantique est alors de lui associer un projecteur dans l'espace de Hilbert. En d'autres termes, la question posée est de nature mathématique : peut-on associer un projecteur de l'espace de Hilbert au rectangle R ?

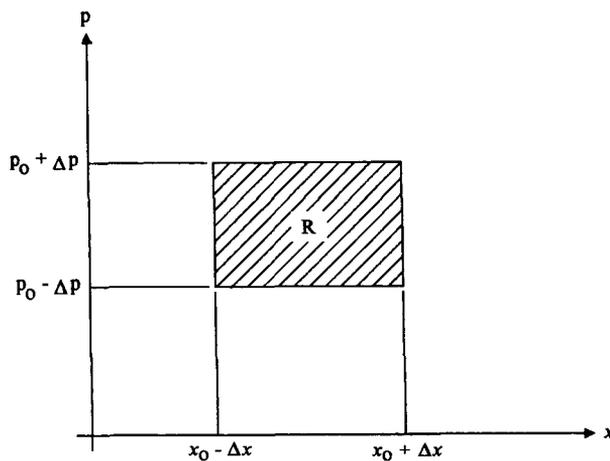


Figure 10.1 – Représentation d'une propriété classique.

Variables dynamiques classiques

88. Les quantités (x, p) que l'on vient d'introduire paraissent naturelles du fait des habitudes qui nous viennent du monde classique. Mais que signifient-elles si l'on n'admet que les principes quantiques pour tout bagage de connaissance ? Ehrenfest avait proposé une première réponse en 1927. Il avait étudié le mouvement d'un paquet d'onde et montré que, dans certaines conditions, sa position et sa vitesse évoluent en conformité avec les équations d'Hamilton classiques. Selon sa définition, les variables classiques (x, p) étaient donc les valeurs moyennes des observables (X, P) pour une fonction d'onde suffisamment étroite (ainsi que sa transformée de Fourier). La méthode a cependant un inconvénient sérieux : si l'on cherche à l'étendre à une observable A quelconque de valeur moyenne a , celle-ci ne peut être écrite comme une fonction $a(x, p)$ des précédentes, sauf exception. C'est même ce qui limite la signification du théorème d'Ehrenfest qui exige des conditions telles que l'on puisse confondre la valeur moyenne $\langle V(X) \rangle$ du potentiel avec la fonction $V(x)$ de la valeur moyenne x de la position.

Une question qui va entraîner toutes les autres est donc de trouver des définitions de quantités classiques x , p et a qu'on puisse associer aux observables X , P et A , de sorte que a soit une fonction $a(x, p)$; l'observable A étant quelconque ou, du moins, assez générale. Pour trouver cette règle de correspondance, on peut s'appuyer sur quelques conditions raisonnables (le mot de *correspondance* n'étant évidemment pas choisi au hasard).

On supposera tout d'abord que la fonction $x(x, p)$ associée à l'observable de position X n'est autre que la variable x elle-même, celle associée à l'observable d'impulsion P étant la variable p .

On supposera aussi une correspondance linéaire, c'est-à-dire que les sommes d'observables correspondent à des sommes de quantités classiques et qu'il en va de même pour leur produit par un nombre (réel). La première condition tient au fait qu'on doit souvent ajouter des quantités physiques, que ce soit quantiquement ou classiquement. Il peut s'agir d'énergies, d'impulsions ou de moments cinétiques. On supposera donc que si les observables A et B sont respectivement associées à des fonctions $a(x, p)$ et $b(x, p)$, la fonction $a(x, p) + b(x, p)$ est associée à l'observable $A + B$. De même, le fait de multiplier une observable A par une constante peut être considéré comme un changement d'unités (faisant passer, par exemple, du mètre au pied), l'effet étant le même sur des quantités quantiques ou classiques.

Une correspondance, répondant à ces critères, a été découverte par Eugène Wigner (1932) et plus tard systématisée par Hermann Weyl (1950). Elle a les propriétés cherchées et, en plus, quelques autres qui paraissent également raisonnables. Elle associe une fonction $f(X)$ de l'observable X à la fonction $f(x)$, et une fonction $g(P)$ à $g(p)$. La correspondance s'étend à des opérateurs non hermitiens (qui ne sont pas des observables), auxquels elle associe en général des fonctions complexes de (x, p) . La variable dynamique associée à une observable est cependant une fonction réelle comme on l'exige d'une quantité dynamique classique. La correspondance a bien d'autres propriétés mais nous nous en tiendrons là et nous l'adopterons sans plus de question car, somme toute, notre but n'est pas de découvrir toutes les manières possibles de retrouver la physique classique, mais d'en déterminer une qui soit satisfaisante et conforme à l'observation du monde classique.

La formule qui explicite cette correspondance est donnée par :

$$a(x, p) = \int \langle x + y/2 | A | x - y/2 \rangle \exp(-ip \cdot y / \hbar) dy, \quad (10.1)$$

quel que soit le nombre de dimensions n de l'espace de configuration (c'est-à-dire du spectre des X). On l'écrit parfois également sous la forme plus suggestive :

$$a(x, p) = \int \langle x' | A | x'' \rangle \exp(ip \cdot (x'' - x') / \hbar) \delta(x - (x' + x'')/2) dx' dx''.$$

Compte tenu de l'expression bien connue

$$\langle x | p \rangle = (2\pi\hbar)^{-n/2} \exp(ip \cdot x / \hbar), \quad (10.2)$$

on vérifie aisément la correspondance des observables $(I, X, P, XP_y - YP_x, P^2/2m + V(X))$ et des fonctions $(1, x, p, xp_y - yp_x, p^2/2m + V(x))$, ce qui permet de

traduire les quantités quantiques les plus importantes par autant de quantités classiques.

On notera que la formule (10.1) est une transformation de Fourier qui fait passer de la variable y à la variable p . On peut utiliser la formule de Fourier inverse pour passer de la quantité classique $a(x, p)$ à l'opérateur A défini au moyen de ses éléments de matrice :

$$\langle x' | A | x'' \rangle = \int a((x' + x'')/2, p) \exp(-ip \cdot (x'' - x')/\hbar) dp (2\pi\hbar)^{-n}. \quad (10.3)$$

On appelle en général *symbole* (ou symbole de Weyl) d'un opérateur A (non nécessairement autoadjoint) la fonction $a(x, p)$ (non nécessairement réelle) obtenue par la formule (10.1). On notera pour référence la formule qui donne la fonction $\phi = A\psi$ au moyen du symbole de A , qui s'écrit :

$$\phi(x) = \int a\left(\frac{x+y}{2}, p\right) \exp[ip \cdot (x-y)/\hbar] \psi(y) dy dp (2\pi\hbar)^{-n}. \quad (10.4)$$

Ces formules, un peu magiques, furent découvertes à l'occasion du retour de la physique quantique sur ses origines. Alors que l'histoire de la découverte de la mécanique quantique était passée par une *quantification* de la physique classique, certains physiciens et mathématiciens commençaient à prendre au sérieux les idées de von Neumann en considérant qu'il ne peut exister qu'une sorte de principes de la physique, et que ceux-ci doivent être quantiques. Le classique doit donc émerger du quantique, par un processus de *déquantification* analogue au passage de l'optique ondulatoire à l'optique géométrique. Les mathématiciens allaient découvrir plus tard un grand nombre de propriétés importantes des formules que l'on vient d'écrire, grâce à une théorie moderne des opérateurs linéaires développée entre les années soixante et quatre-vingt qu'on appelle « analyse microlocale » ou « calcul pseudodifférentiel ». Ces mathématiques puissantes s'imposent quand on veut justifier avec rigueur les résultats de l'interprétation qui remplacent ou précisent l'ancien « principe » de correspondance. Nous nous contenterons cependant de préférer des arguments heuristiques à ces mathématiques fort peu élémentaires.

Note 1*

Signalons cependant une remarquable vertu de souplesse dans ces méthodes microlocales : le recours à des transformations de Fourier pourrait laisser croire que la variable x est nécessairement définie dans un espace infini (\mathbb{R}^n). Cela contredirait alors le fait que l'espace de configuration d'un objet macroscopique peut être beaucoup plus compliqué. En fait, l'adjectif « microlocal » signifie précisément qu'on peut dépasser cette limitation apparente et « localiser » l'analyse dans l'espace de phase.

Note 2*

Mentionnons également que la « fonction » $a(x, p)$ associée à un opérateur borné est en réalité une distribution dans le cas général. On ne donne vraiment le nom de symbole qu'à des fonctions indéfiniment dérivables dont les dérivées de tous ordres sont judicieusement bornées. Les opérateurs correspondants sont appelés opérateurs pseudo-différentiels.

Propriétés classiques et projecteurs

89. Revenons à la question posée au début : comment associer un projecteur hilbertien E_R à un rectangle R de l'espace des phases, de manière à donner une signification quantique à une propriété classique ? Il existe deux méthodes pour y répondre : on peut s'appuyer directement sur l'analyse microlocale ou utiliser la méthode des *états cohérents* introduite par Hepp (1974a). On commencera par la seconde méthode car elle utilise des notions qui sont plus familières pour des physiciens.

On appelle « état cohérent » une fonction d'onde gaussienne normalisée. On désignera par $g_{qp}(x)$ une telle fonction correspondant à des valeurs moyennes $\langle X \rangle = q$, $\langle P \rangle = p$ de la position et de l'impulsion. On désignera par σ l'incertitude en X et par σ' celle en P (avec $\sigma' = \hbar / (2\sigma)$ puisque le produit $\sigma\sigma'$ atteint, pour une fonction d'onde gaussienne, le minimum $\hbar/2$ permis par les inégalités de Heisenberg). Explicitement, on a :

$$g_{qp}(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/4} \exp[-(x-q)^2/(4\sigma^2) + i px/\hbar].$$

Lorsque von Neumann essaya de résoudre le problème que nous nous posons, il partit de l'idée qu'un certain nombre N d'états quantiques est associé au rectangle R . Ce nombre est bien connu et on l'évalue souvent en considérant l'intervalle $[x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$ comme une « boîte » dans laquelle un système est enfermé sans autre interaction, les bornes sur p sélectionnant les nombres d'onde des ondes libres correspondantes. Cela permet de calculer $N = \Delta x \Delta p / h$, quantité bien connue en mécanique statistique et qu'on appelle le nombre d'états semi-classiques dans R . Comme les fonctions gaussiennes sont particulièrement commodes, von Neumann introduisit N fonctions de ce genre dont les centres (q, p) étaient disposés aux sommets d'un réseau. Le résultat qu'il obtint pour le projecteur engendré par ces N états ne répondit guère à ses attentes, mais il peut être considérablement amélioré si l'on passe à un ensemble continu de gaussiennes. On introduit pour cela l'opérateur :

$$F = \int_R |g_{qp}\rangle \langle g_{qp}| dq dp (2\pi\hbar)^{-1}, \quad (10.5)$$

comme candidat au rôle de projecteur.

L'analyse de cet opérateur montre beaucoup d'aspects favorables qui le font ressembler à un projecteur (c'est-à-dire un opérateur hermitien n'ayant que des valeurs propres égales à 0 ou 1). On constate qu'il est bien hermitien et qu'il n'a que des valeurs propres f_j discrètes. Toutes ces valeurs propres sont comprises entre 0 et 1 et presque toutes sont très proches de 1 ou de 0. Le nombre de celles qui sont très proches de 1 est essentiellement égal à N , c'est-à-dire le nombre d'états quasi classiques auquel on s'attend. On peut également considérer N comme la mesure de l'aire du rectangle R quand on l'évalue en prenant pour unité la constante de Planck h :

$$N = 4\Delta x \Delta p (2\pi\hbar)^{-1} = \text{Aire}(R)/(2\pi\hbar) = \int_R dq dp (2\pi\hbar)^{-1}. \quad (10.6)$$

Quelques valeurs propres enfin sont dispersées dans l'intervalle $[0, 1]$ et leur nombre est de l'ordre de \sqrt{N} . Ce sont elles qui font que l'opérateur F n'est pas véritablement un projecteur. Si en effet ces valeurs propres intermédiaires en nombre relativement petit n'existaient pas, les valeurs propres de F seraient toutes très proches de 0 et de 1, et l'opérateur F lui-même serait pratiquement un projecteur. Le sous-espace de Hilbert correspondant serait de dimension N . En tant qu'il exprime une propriété, ce projecteur devrait exprimer la propriété classique associée au rectangle R . Cela est confirmé par le fait que les valeurs propres proches de 1 correspondent effectivement à un état localisé dans R et celles proches de 0 à un état hors de R . En effet, une fonction d'onde dont les valeurs moyennes $\langle X \rangle, \langle P \rangle$ sont nettement situées à l'intérieur (ou respectivement à l'extérieur) de R , avec des incertitudes (σ, σ') suffisamment petites, est pratiquement une fonction propre de F avec la valeur propre 1 (respectivement 0). Tous ces résultats semblent bien indiquer qu'on a presque atteint le but recherché.

Démonstration*.

La démonstration de ces résultats n'est pas très difficile et il est donc intéressant de la donner, sans entrer dans le détail des calculs qui, tous, se ramènent à des intégrales de fonctions gaussiennes. C'est le cas par exemple pour le produit scalaire

$$\langle g_{qp} | g_{q'p'} \rangle = \exp[-(q - q')^2/2\sigma^2 - (p - p')^2/2\sigma'^2]. \quad (10.7)$$

On choisit σ et σ' de manière à respecter les proportions du rectangle R en prenant $\sigma = \varepsilon \Delta x$ et $\sigma' = \varepsilon \Delta p$. Compte tenu de la valeur de leur produit, ceci entraîne $\varepsilon = (\hbar/2\Delta x \Delta p)^{1/2}$, faisant ainsi apparaître un petit paramètre ε qui va jouer un rôle important.

Notons pour la suite le symbole $f(x, k)$ donné par la formule (10.1), qui se ramène à des intégrales et des transformées de Fourier de gaussiennes :

$$f(x, k) = \int_R \exp[-(x - q)^2/2\sigma^2 - (p - k)^2/2\sigma'^2] dq dp (2\pi\hbar)^{-1}. \quad (10.8)$$

Il est clair que F est autoadjoint. C'est aussi un opérateur défini positif car, pour une fonction d'onde ψ quelconque, on a :

$$\langle \psi | F \psi \rangle = \int_R |\langle g_{qp} | \psi \rangle|^2 dq dp (2\pi\hbar)^{-1} \geq 0. \quad (10.9)$$

Pour montrer que le spectre de F est discret et compris entre 0 et 1, on a besoin de sa trace et de celle de F^2 . On constate aisément que :

$$\text{Tr } F = \int_R dq dp (2\pi\hbar)^{-1} = N. \quad (10.10)$$

En utilisant le produit scalaire (10.7) de deux gaussiennes, on constate que $\text{Tr } F^2$ est une quantité bornée (très proche de N). Or, les opérateurs autoadjoints dont la trace du carré est bornée sont des opérateurs de Hilbert-Schmidt qui n'ont qu'un spectre discret.

D'après (10.9), les valeurs propres sont non négatives. Si l'on étend l'intégrale (10.5) à tout l'espace de phase au lieu de restreindre son domaine à R , on obtient l'opérateur identité (la manière la plus simple de le voir est de noter que le symbole (10.8) devient alors égal à 1, ce qui est le symbole de l'opérateur identité). L'opérateur $I - F$ est donc donné par une intégrale analogue à (10.9) où l'intégration porte à présent sur l'extérieur du rectangle. Il en résulte, comme précédemment, que les valeurs propres de $I - F$ sont positives. En désignant par f_j les valeurs propres de F , on a donc $0 \leq f_j \leq 1$.

On peut maintenant examiner davantage la distribution de ces valeurs propres. On a déjà signalé que $\text{Tr } F = N$ et que $\text{Tr } F^2$ est voisine de N . La relation $\text{Tr } (F - F^2) = \sum_j f_j (1 - f_j)$ montre que cette quantité $\text{Tr } (F - F^2)$ mesure, en quelque sorte, la différence qui existe entre F et un projecteur, puisqu'elle serait nulle si toutes les valeurs propres étaient égales à 0 ou 1.

Une estimation plus précise permet de montrer que :

$$\text{Tr}(F - F^2) = N O(\varepsilon), \quad (10.11)$$

avec la valeur précédemment donnée de ε . On peut déduire de ces estimations les propriétés que nous avons indiquées pour la répartition des valeurs propres.

On peut confirmer cette répartition par un autre exemple. On remplace le rectangle R par une ellipse de l'espace de phase dont l'équation est donnée par :

$$\frac{x^2}{\Delta x^2} + \frac{p^2}{\Delta p^2} = 1.$$

Il est facile de constater que tous les résultats précédents restent valables, la valeur de N étant toujours reliée à l'aire, comme dans (10.6). En introduisant l'hamiltonien d'oscillateur harmonique,

$$H = \frac{x^2}{\Delta x^2} + \frac{p^2}{\Delta p^2},$$

on constate que H et F commutent (grâce à l'expression simple de l'action de H sur les gaussiennes g_{qp}). Les fonctions propres de F sont donc identiques à celles de H , lesquelles sont bien connues et seront désignées par ψ_n . On obtient les valeurs propres de F en calculant explicitement la quantité $\langle \psi_n | F | \psi_n \rangle$, ce qui donne après un calcul algébrique

$$f_j = (1/j!) \int_0^N t^j \exp(-t) dt.$$

Cette intégrale (la fonction gamma incomplète) est bien connue et on peut l'étudier analytiquement ou la calculer numériquement. On constate qu'il y a effectivement environ N valeurs propres très proches de 1, une proportion $1/\sqrt{N}$ qui se situent entre 0 et 1 et que les autres sont très proches de 0. Quant aux propriétés des fonctions propres mentionnées, elles sont faciles à établir, du moins quand les fonctions d'onde d'essai utilisées sont gaussiennes.

Ainsi, on n'a pas vraiment obtenu un projecteur (dont les valeurs propres ne seraient que 0 ou 1) car une proportion relativement petite des valeurs propres de F est située entre 0 et 1 et bien distincte de ces valeurs (0, 1). Nous dirons en conséquence que F est un *quasi-projecteur*.

90. Le résultat est très proche du but recherché, si proche que ses insuffisances elles-mêmes ont une signification physique.

Notons d'abord qu'on peut aisément construire un vrai projecteur à partir de F . Il suffit pour cela de fixer les fonctions propres de F et de modifier les valeurs propres correspondantes de la manière suivante : les valeurs propres f_j qui sont comprises entre $\frac{1}{2}$ et 1 sont remplacées par 1 et celles comprises entre 0 et $\frac{1}{2}$ par 0.

Nous dirons que cette opération consiste à redresser le spectre. Elle ne modifie pas appréciablement les propriétés des fonctions d'onde microlocalisées dans R (ou hors de R) que l'on a déjà mentionnées. On a donc bien obtenu au bout du compte un certain projecteur E associé à R .

Le procédé qu'on a employé n'est pas cependant exempt de critique. Il est clair que la méthode utilisée pour redresser le spectre comporte une forte part d'arbitraire. Pourquoi par exemple choisir de trier les valeurs propres par rapport au nombre $\frac{1}{2}$? Un autre choix donnerait sans doute un projecteur ayant quelques vecteurs propres de plus (ou de moins) associés à la valeur propre 1.

Cela ajouté au fait que la formule de départ (10.5) pour le quasi-projecteur est somme toute une devinette heureuse, laisse supposer finalement que la réponse

au problème n'est certainement pas unique et que ce n'est pas un projecteur mais plutôt toute une famille qu'on peut associer à R .

On aurait pu s'attendre à cette multiplicité des réponses par la nature même de la question posée. Ainsi, on n'envisagerait pas un seul instant d'associer un projecteur quantique à un rectangle qui serait réduit à un point (avec des valeurs pratiquement nulles de Δx et Δp), car cela serait visiblement incompatible avec les relations d'incertitude. Mais quand on fixe avec une parfaite précision les frontières de R , on impose des contraintes de précision presque aussi radicales. Si, en revanche, on déforme légèrement la frontière de R en lui donnant une frontière très légèrement ondulée, ou en faisant des indentations dans les coins, on pourra répéter pour cette région déformée tout ce qui vient d'être fait et rien d'important ne sera modifié tant que les modifications de la frontière se situent au-dessous de la constante de Planck ou même sont de l'ordre de h . Cela ne fait que traduire l'incapacité d'une onde de nombre d'onde borné à épouser des détails trop fins et c'est un effet de diffraction.

La mécanique quantique est trop floue, de par sa nature ondulatoire, pour distinguer des détails trop nets et il est donc tout à fait conforme à l'ordre des choses que nous trouvions non pas un seul projecteur mais toute une multiplicité de projecteurs qui répondent, tous également mais approximativement, à la question.

La question posée prend alors une autre tournure. Il s'agira maintenant de trouver la famille des projecteurs en question, de s'assurer qu'ils sont bien équivalents les uns aux autres dans la manière dont ils traduisent la propriété classique associée à R , et enfin de les caractériser.

91. C'est alors que l'analyse microlocale peut entrer en jeu avec toute sa généralité (Omnès, 1997a). On commence encore par construire des quasi-projecteurs qui sont définis cette fois par leurs symboles. Soit donc $f(x, p)$ le symbole d'un quasi-projecteur F . La remarque qu'on vient de faire à l'instant sur l'inutilité d'une frontière trop précise conduit à estomper celle-ci de la manière suivante : on choisit une fonction $f(x, p)$ qui passe graduellement de la valeur 0 à l'extérieur de R à la valeur 1 à l'intérieur. Cette transition s'opère essentiellement dans une région contenant la frontière, qu'on appellera la marge de R (Figure 10. 2). Quant à la fonction $f(x, p)$, on la choisit indéfiniment dérivable et satisfaisant aux contraintes de l'analyse microlocale sur lesquelles on ne s'étendra pas (il s'agit de bornes imposées aux dérivées). La formule (10.8) pour le symbole du quasi-projecteur précédent offre un bon exemple du type de fonctions qu'on peut ainsi rencontrer.

On peut démontrer que les opérateurs ainsi construits ont un spectre discret, essentiellement compris dans l'intervalle $[0, 1]$ et ayant des propriétés d'accumulation de ses valeurs propres autour de 0 ou de 1 analogues au cas précédent. La largeur de la marge intervient dans les autres détails de ce spectre et elle ne peut être totalement arbitraire. En effet, si la marge est beaucoup trop étroite, la frontière va devenir trop nette et on constate que les valeurs propres commencent à sortir de l'intervalle $[0, 1]$. L'opérateur obtenu ne ressemble plus à un projecteur.

Si la marge est au contraire trop large, le nombre de valeurs propres qui s'étalent entre 0 et 1 devient excessif. Il y a ainsi un choix optimum de la largeur de marge.

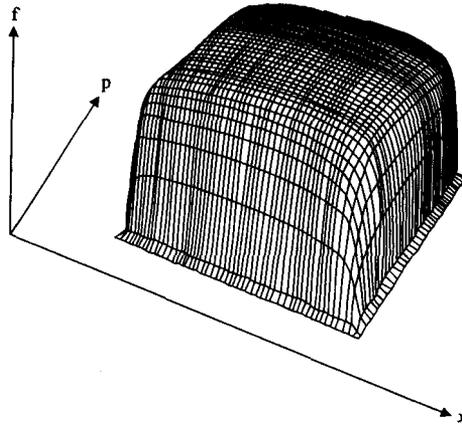


Figure 10.2 Symbole d'un projecteur.

Plutôt que de chercher quelle est cette largeur optimale en entrant davantage dans des considérations géométriques, il est préférable de passer immédiatement aux conclusions. On trouve effectivement qu'il existe un grand nombre de quasi-projecteurs, autant en fait qu'il existe de fonctions $f(x, p)$ avec une marge optimale.

Tous ces opérateurs ont pratiquement la même trace égale à N . Ils sont en plus relativement voisins les uns des autres. Cette notion de voisinage entre opérateurs exige néanmoins de dire quelle « topologie » la contrôle et, plus précisément, quelle peut être la « distance » entre deux quasi-projecteurs différents F et F' .

La topologie des projecteurs*

La *topologie* qui caractérise la proximité mutuelle de ces opérateurs est celle de la « norme trace ». Elle fait appel à l'opérateur valeur absolue de $F - F'$ qui est, par définition, l'opérateur autoadjoint positif dont le carré est égal à $(F - F')^2$. La norme trace de $F - F'$ est alors simplement la quantité $\text{Tr} |F - F'|$. C'est effectivement une distance au sens usuel (elle est positive et satisfait à l'inégalité triangulaire). Cette distance était relativement peu employée en théorie des opérateurs car elle est d'ordinaire difficile à évaluer. On lui préfère donc souvent la norme hilbertienne habituelle $\|F - F'\|$. Il se trouve cependant que la norme trace est beaucoup plus commode et même indispensable pour bien contrôler les approximations sur les traces qui apparaissent dans les probabilités et les conditions de rationalité de la méthode des histoires. Or, de manière remarquablement heureuse, l'analyse microlocale permet de calculer les normes traces avec une bonne précision à partir des symboles d'opérateurs.

Finalement, compte tenu de la valeur commune N de la trace de tous les quasi-projecteurs, on définit leur distance mutuelle comme la quantité $(1/N) \text{Tr} |F - F'|$. L'équivalence de tous ces opérateurs se traduit par la propriété :

$$(1/N) \text{Tr} |F - F'| = O(\varepsilon), \quad \text{avec } \varepsilon = (\hbar / \Delta x \Delta p)^{1/2}. \quad (10.12)$$

En passant des quasi-projecteurs à de vrais projecteurs E, E' par redressement du spectre, la relation de voisinage (10.12) reste vraie pour E et E' . C'est elle qui constitue la

relation d'équivalence, et celle-ci vaut aussi bien entre des paires de projecteurs ou assimilant projecteurs et quasi-projecteurs, c'est-à-dire des paires telles que (E, E') , (E, F') et (F, F') .

On peut toujours remplacer un quasi-projecteur F par un véritable projecteur E sans rien changer d'essentiel, par redressement du spectre. On obtient ainsi toute une famille de projecteurs qui représentent la même propriété classique et sont tous équivalents entre eux. Tout autre projecteur ayant avec cet ensemble la même relation d'équivalence pourra être considéré comme en faisant partie, ce qui répond à la question posée : *une propriété classique correspondant à des erreurs a priori Δx et Δp suffisamment grandes est représentée par un ensemble de projecteurs quantiques qui sont tous mutuellement équivalents dans un sens quantitatif.*

*Nota**

Bien qu'il ait été nécessaire de spécifier en détail les projecteurs utilisés pour les besoins de la physique, il faut souligner que l'idée même de quasi-projecteur est bien connue des mathématiciens et qu'elle entre partout dans la pratique de l'analyse microlocale. Il ne s'agit donc pas d'une notion plus ou moins arbitraire introduite pour les besoins immédiats de la physique mais d'une notion dont l'intérêt s'impose doublement, tant par son étroite connexion avec sa signification physique que par l'universalité de ses applications en mathématiques.

Propriétés classiques exclusives

92. Le flou constaté dans la définition d'une propriété classique (c'est-à-dire dans la frontière du rectangle associé) peut susciter des questions à propos des propriétés censées s'exclure l'une l'autre. La question est importante car une des manières de la poser consiste à dire : quand deux résultats de mesure sont manifestés par deux positions différentes d'une aiguille sur un cadran, jusqu'à quel point peuvent-ils être considérés comme constituant des phénomènes distincts ?

L'observation de deux situations classiques supposées différentes correspond à deux propriétés dont les rectangles représentatifs sont à une certaine distance δx l'un de l'autre, comme dans la figure 10.3. La notion d'exclusion logique entre deux propriétés strictement quantiques correspond d'autre part, comme on l'a vu au chapitre précédent, au fait que les projecteurs correspondants E et E' vérifient $EE' = E'E = 0$.

Supposons, pour simplifier, que les deux rectangles aient les mêmes côtés Δx et Δp . Les quasi-projecteurs de Hepp F et F' associés aux deux propriétés classiques par la formule (10.5) vérifient alors la relation suivante :

$$\|FF'\| = \sqrt{\hbar/\Delta x \Delta p} \ O(\exp[-\sqrt{\Delta x \Delta p/\hbar} (\delta x^2/\Delta x^2)]). \quad (10.13)$$

Dans le membre de gauche figure la norme ordinaire du produit des deux opérateurs. Le symbole O signifie « de l'ordre de grandeur de ». Dans tous les cas pratiques où des propriétés classiques sont considérées empiriquement comme

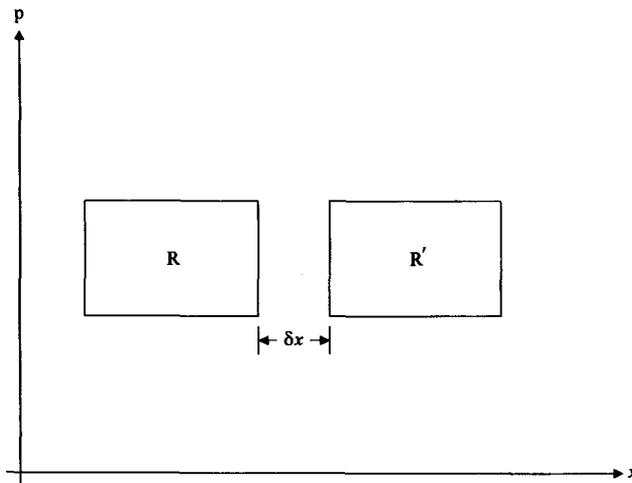


Figure 10.3 – Deux propriétés classiques exclusives.

mutuellement exclusives, la quantité du second membre peut être considérée comme nulle. La traduction des propriétés classique par de vrais projecteurs plutôt que les quasi-projecteurs donne les mêmes résultats : deux propriétés classiques bien distinctes s'excluent aussi mutuellement en tant que propriétés quantiques.

*Nota**

La borne exponentielle donnée par (10.13) est particulière aux projecteurs microlocaux engendrés à la Hepp par des fonctions gaussiennes. En général, on peut montrer seulement que, pour des projecteurs vrais E et E' , la quantité $\|EE'\| (\Delta x \Delta p / \hbar)^{1/2}$ décroît plus vite que toute puissance de la distance entre les deux rectangles, ce qui suffit amplement pour la pratique.

Exemple

Soit un grain de poussière de masse 10^{-5} gramme qui est situé à l'origine avec une erreur absolue Δx d'un centième de micron (10^{-6} cm). On supposera qu'il est à température ordinaire et on prendra une borne absolue pour l'erreur sur son impulsion Δp égale à dix fois son impulsion moyenne thermique (ce qui ne saurait être dépassé qu'avec une probabilité de l'ordre de $\exp(-50)$). La probabilité pour que le grain puisse se trouver à une distance excédant Δx de plus de $L_1 = 1$ Angström (10^{-8} cm) est alors, d'après (10.13), de l'ordre de $\exp(-308)$, un nombre si petit qu'il en perd toute signification autre que celle de zéro.

Conclusions

93. On a constaté que le langage des propriétés (ou prédicats de von Neumann) est effectivement universel en ce sens qu'il englobe le langage classique. Les variables dynamiques classiques et les propriétés qu'elles expriment ont une signification parfaitement claire dans le langage quantique. La description

des événements qui se produisent lors d'une expérience peut donc s'étendre à toute la description de l'appareillage expérimental.

Dans tout cela, on peut dire que les idées directrices sont simples et les résultats naturels, c'est-à-dire en accord avec des réflexions élémentaires. Leur preuve est en revanche laborieuse et les calculs correspondants ne devraient être employés de manière explicite que dans des cas exceptionnels, lorsque des applications fines l'exigent. C'est le cas, par exemple, pour les systèmes mésoscopiques, à la limite du quantique et du classique.

L'esprit dans lequel l'intégration du classique dans le quantique doit être entendue mérite un dernier commentaire. Il serait absurde de vouloir remplacer partout les descriptions classiques à la fois commodes, familières et efficaces, par de lourdes constructions mathématiques issues des principes quantiques, sous le seul prétexte de la rigueur. Mieux vaut évidemment s'en tenir au langage classique. Il serait risqué, en revanche, de prendre « pour argent comptant » tout ce que notre intuition nous suggère lorsqu'elle introduit spontanément partout des représentations classiques. La plupart des erreurs qui se glissent dans l'interprétation proviennent de cette tentation presque irrésistible. Tout est donc affaire d'équilibre, à mi-chemin entre les deux directions contraires, toutes deux excessives du « tout quantique » et du « trop classique ».

Résumé

Une propriété classique définit à la fois la position et le moment conjugué d'un système, dans des limites d'erreur assez grandes pour ne pas contrevenir aux relations d'incertitude. Elle peut avoir trait à un objet macroscopique qu'on décrit par des observables collectives, ou s'appliquer directement à un objet microscopique, particule ou atome.

Une propriété classique est représentée dans le langage formel de l'interprétation par toute une famille de projecteurs hilbertiens, tous équivalents entre eux. Cette multiplicité est intrinsèque et elle est due à la précision excessive que suppose une propriété classique très bien définie. Le flou qui en résulte n'affecte pas, cependant, deux propriétés classiques nettement distinctes d'un point de vue empirique : les projecteurs qui leur correspondent s'excluent l'un l'autre avec une erreur extrêmement minime.

94. La relation que nous avons trouvée entre les propriétés classiques et quantiques n'était qu'une correspondance entre deux langages. L'un d'eux est le langage ordinaire de la physique classique et nous pourrions l'appeler la langue (ici française) classique (s'agissant évidemment de physique). L'autre langage est particulier à la physique quantique et les hiéroglyphes qui servent à l'écrire sont des projecteurs. On pourrait l'appeler le « copenhaguien ». On a vu précédemment que le copenhaguien peut être traduit en français quand les phrases qu'il prononce sont de la forme « la valeur de l'observable A est dans le domaine Δ », ou « cette réaction a eu lieu », et d'autres du même genre. Compte tenu de sa limitation à des phrases standardisées n'ayant trait qu'au monde quantique, on peut appeler ce langage introduit par von Neumann le *français quantique*.

Nous avons donc à notre disposition un langage, le copenhaguien, écrit dans ses propres hiéroglyphes et capable d'exprimer tout ce qui est utile à la compréhension de la physique, aussi bien classique que quantique. Qui plus est, tout cela peut également s'exprimer en français ordinaire, celui qu'on entend dans les laboratoires et les amphithéâtres. Cette question du langage était essentielle pour commencer à construire une interprétation, mais on peut la considérer comme déjà réglée.

On se tourne à présent dans ce chapitre vers une question différente, beaucoup plus proche des fondements de la physique. On peut voir deux aspects dans le copenhaguien selon qu'il s'appuie sur deux principes différents de la mécanique quantique. Quand il s'exprime par une proposition telle que « la valeur de A est dans Δ », il fait seulement appel au premier des principes du chapitre 8. On peut noter que ce principe lui-même n'avait déjà trait qu'à un langage, celui des mathématiques.

Quand on introduit le temps et qu'on s'appuie sur le troisième principe (les lois de la dynamique de Schrödinger ou Heisenberg) on trouve une relation simple entre le projecteur E qui exprime que « la valeur de A est dans Δ » et le projecteur $E(t)$ qui correspond à « la valeur de $A(t)$ est dans Δ ». Cette relation est $E(t) = U^{-1}(t)EU(t)$. Le copenhaguien est donc capable de tenir compte très simplement de la dynamique quantique. On peut attribuer cette faculté remarquable au rôle central des observables et au fait que les projecteurs sont eux-mêmes des

observables. C'est pourquoi on insistait dans la section 93 sur les observables comme étant le seul véritable concept en physique quantique.

La question qu'on va examiner dans le présent chapitre traite des conséquences de cette simplicité de la dynamique dans le langage copenhaguien, quand on l'applique au cas particulier des propriétés classiques. C'est une question suffisamment délicate pour que Bohr en ait fait un principe (le principe de correspondance). Ce ne sera pas cependant pour nous un nouveau principe car il se déduit des précédents.

Quel doit être son contenu ? La dynamique quantique pose qu'il existe une relation bien définie et biunivoque entre deux projecteurs tels que E et $E(t)$. Lorsque chacun de ces projecteurs exprime une propriété classique, il existe également une relation biunivoque entre les deux propriétés. Lorsque celles-ci sont exprimées en français ordinaire, il reste ainsi une équivalence entre les deux propriétés qui n'est autre que l'expression du déterminisme classique.

La perspective étant ainsi indiquée, on peut préciser la démarche qui sera suivie dans ce chapitre. On sait qu'une certaine erreur est inévitable lorsque une propriété classique est traduite par un projecteur. Nous avons dû également supposer, il y a un instant, que deux projecteurs tels que E et $E(t)$ représentent tous deux des propriétés classiques, ce qui n'est certainement pas un caractère universel. Les questions qu'on se pose sont en conséquence au nombre de trois :

- sous quelles conditions la correspondance entre propriétés classiques et projecteurs est-elle maintenue par l'évolution dans le temps ?
- quelle est l'expression des lois de la dynamique dans le langage classique, ou en d'autres termes : quelles sont les lois de la dynamique classique ?
- quelles sont les erreurs qui affectent ces lois ?

Il y a peu de temps encore, les réponses à ces questions étaient conjecturales. Les progrès récents des mathématiques ont changé la situation et les réponses sont maintenant contenues dans un théorème central de l'analyse microlocale qu'on doit au mathématicien russe Youri Egorov (1969). L'essentiel du présent chapitre sera donc de présenter une version suffisamment simple de ce théorème en ne faisant appel qu'à des considérations élémentaires et intuitives. On ne donnera évidemment aucune preuve. On pourra cependant mieux comprendre pourquoi le déterminisme s'applique à la majorité des cas qu'on rencontre en physique macroscopique, les exceptions majeures concernant les systèmes chaotiques, ou la présence de barrières de potentiel très minces.

Avertissons cependant le lecteur qu'il a été impossible de ne pas faire appel à un minimum de considérations techniques. Qui d'ailleurs s'en étonnerait, sachant qu'il s'agit de l'aboutissement de tant de travaux ?

Cellules classiques et projecteurs

95. On s'était contenté, au chapitre précédent, de considérer les propriétés classiques les plus simples, correspondant à des barres d'erreur fixées pour la

position et le moment conjugué. Elles étaient représentées par un rectangle dans l'espace de phase (dans le cas d'un seul degré de liberté, $n = 1$). Ceci est insuffisant pour le but que nous nous proposons à présent. En effet, une cellule rectangulaire va être déformée au cours du mouvement classique des points qui la constituent. Elle peut prendre une forme plus ou moins compliquée et même, si le mouvement classique est chaotique, elle peut finir par ressembler à une pelote de filaments emmêlés et tordus comme dans la figure 11.1.

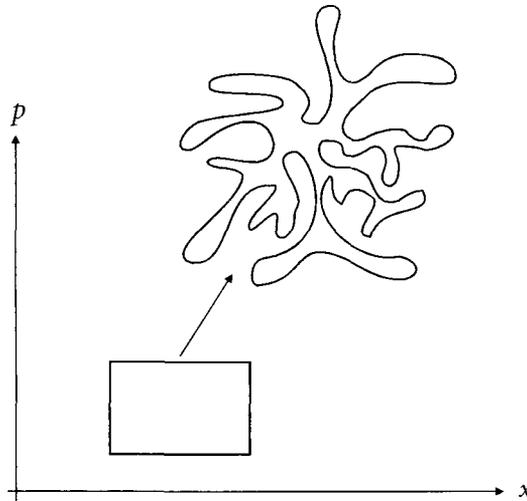


Figure 11.1 – Une cellule initiale et sa transformation par un mouvement classique.

Si l'on veut être capable de décrire un mouvement, tel qu'il apparaît au niveau classique, il est nécessaire d'étendre les propriétés simples établies précédemment à des propriétés classiques du type « (x, p) est intérieur à une cellule C », la cellule étant un domaine plus général de l'espace de phase. On se restreindra au cas où ce domaine est d'un seul tenant et sans trou (connexe et simplement connexe dans le langage mathématique). La question qu'on se pose alors est de déterminer si l'on peut toujours associer à C une famille de projecteurs, équivalents entre eux, qui exprime la propriété.

Les deux méthodes qu'on avait employées, utilisant des fonctions gaussiennes ou des symboles microlocaux, restent applicables. On peut même deviner à l'avance leurs limitations en regardant la cellule tourmentée de la figure 11.1. Si les filaments ont une échelle de taille comparable à la constante de Planck, il n'y a pas assez de place disponible à l'intérieur de ces filaments pour y introduire une marge de lissage permettant d'appliquer la méthode microlocale. La méthode de Hepp ferait intervenir de son côté des fonctions gaussiennes qui « baveraient » (au sens d'une peinture mal appliquée) sur les filaments. On s'attend donc à ce que ces procédés ne s'appliquent qu'à des cellules *régulières*. On appelle ainsi des cellules assez volumineuses (en terme d'unité de Planck) et de forme suffisamment simple : de bonnes formes de pommes de terre et non des spaghettis ou des flocons dont les circonvolutions iraient jusqu'à l'échelle de Planck.

Aspects quantitatifs

On continue à utiliser des quasi-projecteurs et les projecteurs obtenus par redressement du spectre. La dimension des sous-espaces de Hilbert que les projecteurs définissent reste égale, à très peu près, à :

$$N = \int_C dqdp / (2\pi\hbar)^n . \quad (11.1)$$

Il existe encore un paramètre ε qui contrôle l'équivalence de ces projecteurs au moyen de la condition :

$$N^{-1} \text{Tr} |E - E'| = O(\varepsilon). \quad (11.2)$$

Ce paramètre porte le nom de *paramètre de classicité*. S'il est petit, la représentation quantique de la propriété classique est correcte. Si au contraire il devient comparable à 1, cela signifie que la propriété classique n'a aucune signification du point de vue quantique.

On peut calculer ε (dans le cas $n = 1$) de la manière suivante. On introduit une échelle de longueur L ainsi qu'une échelle de moment P , en les choisissant de telle sorte que l'on ait la relation $N = LP / (2\pi\hbar)$. On peut alors introduire des variables sans dimension $q' = q/L$ et $p' = p/P$. On définit dans un voisinage de la cellule C une métrique de l'espace de phase de la forme $ds^2 = dq'^2 + dp'^2$. À l'aide de cette métrique, on peut calculer l'aire A de la cellule C et la longueur L de sa frontière. Le rapport sans dimension $\theta = A/A$ caractérise la régularité géométrique de la frontière. Les échelles L et P sont complètement déterminées si on les choisit de telle sorte que θ soit minimal. Avec ces conventions, le paramètre de classicité est donné par :

$$\varepsilon = (2\pi\hbar / LP)^{1/2} \theta = \theta / \sqrt{N} . \quad (11.3)$$

On notera que ce paramètre ne joue qu'un rôle d'estimation d'ordre de grandeur et le facteur 2π est donc purement arbitraire. Signalons également que la première égalité (11.3) est valable en dimension n quelconque, alors que la seconde est particulière au cas $n = 1$. Finalement, une définition simple d'une cellule régulière consiste à dire que c'est une cellule dont le paramètre de classicité est très petit devant 1.

La propriété d'exclusion (10.13) s'étend alors de la manière suivante : soit deux cellules C et C' extérieures l'une à l'autre. Supposons que deux points sur leurs frontières respectives réalisent le minimum de distance (dans la métrique précédente) et sont séparés par le vecteur (L_1, P_1) . Alors on a de manière analogue à (10.13) :

$$\| |E E'| \| = O(\eta) \quad \text{avec} \quad \eta = \varepsilon \exp(- (LP/\hbar)^{1/2} [(L_1/L)^2 + (P_1/P)^2]). \quad (11.4)$$

Les théorèmes de correspondance

Définition du mouvement classique

96. La physique classique s'applique à deux cas principaux. Le premier est celui où une particule (ou un atome, etc.) est décrite classiquement. C'est le cas entre autre pour une particule placée dans un accélérateur ou un électron dans un tube de télévision. L'autre cas est celui d'un objet macroscopique dont on ne retient que les observables collectives. L'hamiltonien est connu dans le premier cas. Dans le second cas, on ne retient que la partie collective H_c de l'hamiltonien total (voir équation (7.1)) et c'est lui qu'on désigne à présent par H .

On appelle alors *fonction de Hamilton* et on désigne par $h(q, p)$ le symbole de l'opérateur H (voir l'équation (10.1)). Ce qu'on entend par mouvement classique est alors défini par les équations de Hamilton :

$$\dot{q} = \partial h / \partial p, \quad \dot{p} = - \partial h / \partial q. \quad (11.5)$$

La dynamique classique

97. Le problème de la correspondance se présente ainsi : soit une cellule C_o de l'espace de phase représentant une propriété classique qui a lieu à un certain instant t_o . On se restreint au cas où le mouvement classique transforme C_o au temps t en une nouvelle cellule C . Cela suppose que tous les points de l'espace de phase intérieurs à C_o engendrent une autre cellule C (c'est-à-dire en particulier connexe). On laisse ainsi de côté les complications qui viennent parfois de la rupture de la cellule en plusieurs morceaux, ce qui peut arriver notamment quand certains points issus de C_o passent au-dessus d'une barrière de potentiel alors que d'autres se réfléchissent. On considérerait alors que la cellule initiale (ou la proposition qui lui correspond) a été mal choisie.

Il est important de supposer que les deux cellules C_o et C sont toutes deux régulières, c'est-à-dire volumineuses et de forme spacieuse (en fait, d'après le théorème de Liouville, les deux cellules ont le même volume). Ces cellules régulières peuvent être associées à des projecteurs (ou plutôt des familles de projecteurs équivalents) et on désignera par E_o (respectivement E) un projecteur associé à C_o (respectivement C).

Si la correspondance classique-quantique était exacte, la propriété exprimée par E ne serait autre que l'expression à l'instant t de ce qu'est devenue la propriété E_o valable à l'instant t_o . Il existerait alors un projecteur D tel que $D(t) \equiv U^{-1}(t)DU(t) = E$ et $D(t_o) = E_o$, d'où on déduirait que $E = U(t - t_o) E_o U^{-1}(t - t_o)$. En posant $t_o = 0$, la question qui se pose est donc de déterminer avec quel degré d'approximation on peut avoir l'égalité $E = U(t)E_oU^{-1}(t)$.

C'est la question à laquelle répond un résultat bien connu de l'analyse microlocale (théorème d'Egorov), sous une forme qu'il suffit d'adapter. En toute rigueur, ce théorème fait des hypothèses fortes de différentiabilité sur la fonction de Hamilton, que nous supposerons satisfaites ou, sinon, adaptables dans la pratique (on sait faire ce genre d'adaptation dans certains cas). Sans entrer dans les détails, qui sont extrêmement techniques, on peut se contenter d'énoncer d'abord le résultat de façon simple.

Théorème d'Egorov

On a :

$$E = U(t - t_o) E_o U^{-1}(t - t_o) \quad (11.6)$$

avec une erreur qui est essentiellement le plus grand paramètre de classicité des cellules intermédiaires par lesquelles passe C_o avant d'aboutir à C dans le mouvement classique.

*Compléments**

On note au préalable que, puisque les deux cellules ont le même volume, leur « nombre d'états quantiques » N est le même. Cela étant, le théorème d'Egorov

exprime que :

$$N^{-1} \text{Tr} |E - U(t)E_0U^{-1}(t)| = O(\zeta). \quad (11.7)$$

Le paramètre ζ qui contrôle ainsi le degré de correspondance entre la dynamique quantique et sa version classique dépend du temps, de la dynamique considérée et des cellules choisies. Son expression est compliquée mais on peut se contenter de l'estimation suivante. On considère toutes les cellules intermédiaires par lesquelles le mouvement classique fait passer C_0 aux divers instants t' tels que $t_0 \leq t' \leq t$. Chacune de ces cellules a un paramètre de classicité $\varepsilon(t')$ et on peut prendre avec une bonne approximation le paramètre de classicité dynamique ζ comme le maximum des $\varepsilon(t')$.

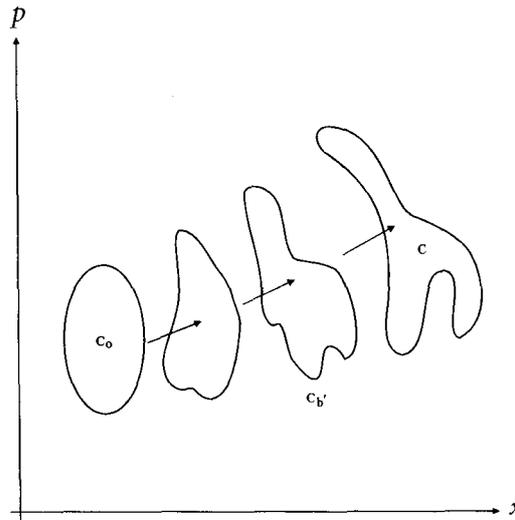


Figure 11.2 – Évolution d'une cellule.

On peut noter que le degré de validité de la physique classique peut ainsi être évalué par des calculs de paramètres de classicité qui ne font appel qu'à la dynamique classique. Dans la plupart des applications, on trouve que ζ est très petit.

Le cas le plus manifeste où cette forme du principe de correspondance est mise en défaut, par une trop grande valeur de ζ , est celui d'un mouvement chaotique qui dure assez longtemps pour que le chaos atteigne l'échelle de la constante de Planck.

Il existe d'autres cas d'exception que révèle l'expression détaillée du résultat (11.6). Ils sont peu nombreux. L'un d'eux se présente quand il existe une barrière de potentiel très étroite. Une telle barrière ferait se réfléchir toutes les trajectoires classiques, alors qu'en termes quantiques sa traversée serait possible, voire aisée, par effet tunnel. On peut toujours tenir compte directement de ce genre d'effet, lorsque on, a par exemple affaire à un système macroscopique à comportement non classique (qui ne peut guère être que la création d'un physicien).

On constate une fois encore que les limitations imposées par l'analyse mathématique sont parfaitement en accord avec ce que suggèrent des considérations simples de physique.

On notera aussi que la relation que nous avons indiquée entre le paramètre ζ et le paramètre de classicité maximal n'a pas été établie en toute généralité et qu'elle constitue plutôt une conjecture tirée de l'observation de divers cas. Elle est donc à employer avec précaution.

Application : l'expérience de Stern et Gerlach

98. L'expérience conçue par Otto Stern et réalisée pour la première fois en 1921 avec son collaborateur Walther Gerlach reste l'exemple de mesure quantique le plus souvent cité. Elle permet de séparer les diverses composantes de la fonction d'onde d'un atome de spin S selon les valeurs de S_z , z étant une certaine direction d'espace (on admet ici par commodité l'existence de cette fonction d'onde).

L'atome subit l'action d'un champ magnétique statique inhomogène qu'il traverse au cours de son mouvement. On considérera le cas d'un atome d'argent, ayant un seul électron dans sa couche externe qui est une couche S ($l = 0$) de sorte que le spin de l'atome est $1/2$. La fonction d'onde interne ϕ de l'atome reste celle du niveau fondamental pendant toute l'expérience, et la fonction d'onde totale est une superposition de termes de la forme $\Sigma \psi_m(x) \otimes \phi$, m étant un indice de spin avec $m = \pm 1/2$. La variable x représente la position du centre de masse.

Dans un champ magnétique statique inhomogène $B(x)$, la partie de l'hamiltonien qui agit sur la fonction d'onde $\psi_m(x)$ est de la forme $H = P^2/2M - g S \cdot B(x)$, M étant la masse et g le rapport gyromagnétique de l'atome.

L'aimant utilisé est un électroaimant à pièces polaires asymétriques, une des pièces étant à section triangulaire et l'autre à section plane. En face de la pièce polaire triangulaire, près du plan de symétrie, il existe une région où le champ a une direction pratiquement fixe, qu'on prend pour axe des z . Dans cette région, le champ varie fortement avec z . L'expérience consiste à faire passer l'atome par cette région et on raisonne alors d'ordinaire, ainsi : l'énergie potentielle est de la forme $W(z) = -gmB(z)$ pour une composante $\psi_m(x)$. Une force $F = -\nabla W$ agit sur l'atome. Cette force dépendant de m détermine une trajectoire différente de l'atome selon ses divers états de spin.

*Esquisse de justification**

La théorie habituelle qui vient d'être rappelée mélange allègrement les concepts classiques et quantiques. On peut cependant la justifier de manière plus rigoureuse. On introduit pour cela des projecteurs E_m dans l'espace de Hilbert du spin correspondant aux diverses valeurs de m . On introduit également des projecteurs (microlocaux) $E(C_m)$ pour des cellules classiques que l'atome est appelé à traverser d'après le raisonnement précédent, et qui dépendent de la valeur de m . Les projecteurs complets qui décrivent le mouvement de l'atome et son spin sont donc de la forme $E_m \otimes E(C_m)$. Il est exact alors qu'une fonction de Hamilton classique $p^2/2M - gmB(z)$ est le symbole de la restriction de l'hamiltonien au sous-espace de spin associé à E_m . Le théorème d'Egorov s'applique et la description classique du mouvement de l'atome devient parfaitement correcte.

Résumé

Dans des circonstances ordinaires, une propriété classique donnée à un instant initial t_0 entraîne une autre propriété classique à un instant ultérieur (ou antérieur) t . Deux cellules de l'espace de phase qui représentent respectivement ces deux propriétés sont reliées entre elles par un mouvement classique hamiltonien. Ce résultat est une conséquence de la mécanique quantique mais il comporte des erreurs connues, d'ordinaire très petites. Il existe des exceptions, notamment dans le cas d'un mouvement chaotique lorsque l'échelle du chaos avoisine celle de la constante de Planck, et également quand s'exerce l'effet de barrière de potentiel très étroites.

On peut considérer ces résultats comme un énoncé précis du principe de correspondance. Celui-ci est sous-tendu par un théorème d'Egorov qui relie la transformation unitaire $U(t)$ de la mécanique quantique et le mouvement classique (qui est une transformation canonique).

99. Le langage des propriétés est universel, dans la mesure où il décrit l'essentiel des circonstances et des événements qui se produisent lors d'une expérience. Cela vaut pour les aspects macroscopiques aussi bien que microscopiques de la physique. Notre intention est maintenant d'apprendre comment utiliser ce langage.

Nous avons vu comment l'employer en physique macroscopique. Il ne se distingue alors pas de manière marquante du langage ordinaire de la physique, en langue française dans le cas présent. Une propriété classique fait état des coordonnées de position et de vitesse (de moment) d'un objet macroscopique, pratiquement dans les mêmes conditions et avec les mêmes mots dont on se sert pour décrire un événement réellement observé, ou imaginé. Cet événement se produit à un certain instant et son énoncé saisit à la fois la propriété et l'instant, un peu comme le fait une photographie instantanée.

Le cours des événements, qu'on peut narrer comme une histoire qui s'écoule, peut être également conçu comme un film fait d'une succession d'instantanés. N'importe quelle série classique d'événements peut être contée de cette manière à la fois sèche et précise, qu'il s'agisse d'une narration, de l'histoire d'une bataille célèbre, ou des mesures notées dans les carnets de Coulomb. Tant qu'on s'en tient à l'échelle macroscopique, le langage des propriétés reste clair et simple.

L'idée des histoires quantiques consiste à s'appuyer sur une série analogue, mais faite de propriétés quantiques, pour décrire les événements qui ont lieu dans le sous-monde des atomes et des particules. Compte tenu de ce qu'on a vu de la relation entre propriétés classiques et quantiques, on peut s'attendre à ce que le procédé s'applique dans les deux mondes, en donnant lieu à un langage universel. On sait cependant que des projecteurs ne commutent pas en général, et que cela a donné lieu dans le passé à de grandes difficultés logiques. Or un langage propre à la science doit respecter la logique, et la cohérence des histoires, sous ce rapport, devra être vérifiée selon tous ses aspects.

Si un langage est logiquement cohérent, chaque phrase qu'il énonce doit pouvoir être considérée comme une proposition, et le jeu logique des « non, ou, et »

et de l'implication doit pouvoir s'exercer sur ces propositions. On rencontre donc le problème de poser les règles du jeu logique quand les propositions sont des propriétés quantiques, c'est-à-dire des projecteurs qui n'ont aucune raison de commuter. Birkhoff et von Neumann avaient constaté qu'un tel programme n'est aucunement évident et on peut s'attendre à devoir réduire le champ des histoires pour le réaliser.

Le présent chapitre est une introduction au langage des histoires. Celui-ci est pratiquement identique au langage ordinaire de la physique, tel qu'il s'est peu à peu teinté de nuances et de précautions pour éviter les conflits les plus évidents avec les contraintes quantiques. La question de la cohérence logique apparaîtra cependant clairement à propos de ces précautions indispensables, lorsqu'il s'agira pour nous de distinguer entre les histoires sensées ou absurdes. Cette question de la cohérence logique nous amènera alors à voir apparaître la nécessité d'introduire des probabilités dans le schéma.

Introduction des histoires

Une expérience ordinaire

100. On sait que les propriétés sont le principal constituant du langage de la physique. Quand elles décrivent le cours des événements dans une expérience, elles s'organisent naturellement dans le schéma des histoires. Cela peut être illustré à partir de n'importe quelle expérience et l'exemple qu'on prendra sera emprunté à la physique nucléaire.

L'expérience en question est destinée à étudier la réaction $n + p \rightarrow d + \gamma$, où un neutron n entre en collision avec un proton p pour produire un deutéron d et un photon γ , comme le montre la figure 12.1, page suivante. Dans le langage informel que les physiciens emploient couramment, la description de l'expérience se présente ainsi :

« Certains neutrons produits dans un réacteur nucléaire en sortent par un canal étroit. Un sélecteur de vitesse V , placé à la sortie du canal, ne laisse passer que les neutrons ayant une certaine vitesse v , avec une tolérance d'erreur Δv . Le canal est assez étroit et la sélection suffisamment sévère pour que les neutrons ne sortent du sélecteur qu'un par un, chaque sortie étant séparée par un temps appréciable de celle qui la suit.

Une cible d'hydrogène T , c'est-à-dire un récipient rempli d'hydrogène liquide, est placé derrière le sélecteur. Un neutron qui pénètre dans la cible peut interagir avec un proton (c'est-à-dire un noyau d'hydrogène) et la réaction $n + p \rightarrow d + \gamma$ peut avoir lieu lors de cette interaction. On s'assure que la réaction a effectivement eu lieu en plaçant autour de la cible une batterie de photomultiplicateurs qui peuvent détecter les photons. Un événement de l'espèce qui nous intéresse se révèle par un phénomène visible quand un de ces détecteurs P enregistre un photon ».

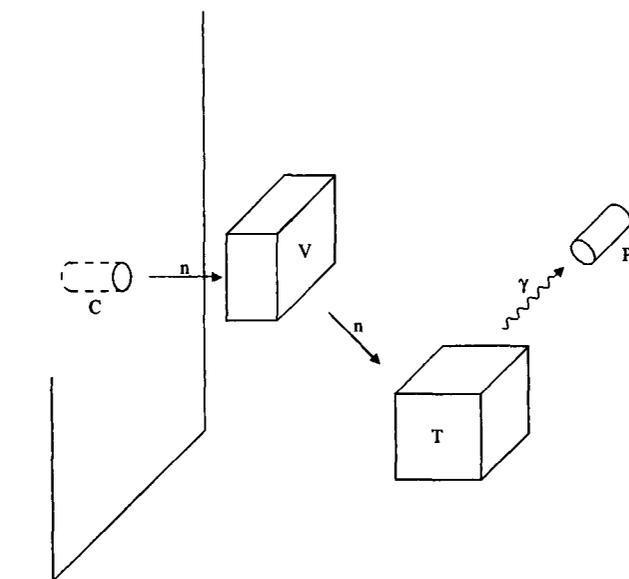


Figure 12.1 – Une expérience de physique nucléaire.

Si l'on utilise le langage des propriétés pour faire la même description, il sera nécessaire de faire entrer en ligne de compte les instants où ces propriétés ont lieu. Le discours précédent comportait des informations sur l'appareillage de préparation (réacteur, canal), sur le conditionnement (sélecteur, cible) et sur les appareils de mesure (photodétecteurs).

Tout ceci peut être décrit par la physique classique selon les modalités qui ont été vues dans les deux chapitres précédents, à l'exception des mesures proprement dites faites au moyen du photodétecteur, lesquelles ne pourront être discutées que plus loin dans ce livre. En les laissant de côté, on peut concentrer l'attention sur les objets microscopiques et leurs propriétés pertinentes qui se présentent ainsi :

1. La position du neutron est dans le volume offert par le canal à l'instant t_1 .
2. La vitesse du neutron est dans l'intervalle de largeur Δv autour de v_0 à l'instant t_2 .
3. La position du neutron est dans le volume occupé par la cible d'hydrogène à l'instant t_3 .
4. La réaction $n + p \rightarrow d + \gamma$ a déjà eu lieu à l'instant t_4 .
5. La position du photon¹ est à l'intérieur du volume sensible du détecteur numéro j à l'instant t_5 .

Les instants eux-mêmes se succèdent dans l'ordre :

$$t_1 < t_2 < \dots < t_5. \quad (12.1)$$

1. Parler de la position d'un photon exige des précisions qui sont indiquées dans les commentaires en fin de volume. Il nous suffit ici de savoir que la propriété 5 a un sens et qu'elle est effectivement représentable pour un projecteur.

Ces instants t_1, t_2, \dots, t_5 ne sont pas quelconques, tout en laissant une certaine latitude dans le choix de leur valeur exacte. Ce choix est contraint par des considérations de dynamique et, surtout, par des contraintes logiques qui n'apparaîtront pleinement que dans le chapitre suivant. On se contente donc, dans le cas présent, de supposer ces instants fixés.

Les histoires

101. On a vu (chapitre 9) que chacune des propriétés qui viennent d'être introduites est associée à un certain projecteur $E_k(t_k)$. La description très réduite qu'on vient de faire de l'expérience se présente donc comme une liste de projecteurs :

$$E_1(t_1), E_2(t_2), E_3(t_3), E_4(t_4), E_5(t_5). \quad (12.2)$$

Toute autre expérience de physique quantique pourrait être décrite de manière analogue par une succession de propriétés ordonnées dans le temps et représentées par des projecteurs. C'est ce qu'on appelle en général une *histoire*. Une histoire évoque ainsi un film où des instantanés (des propriétés) se succèdent.

Les familles d'histoires

102. Une histoire unique ne suffit pas à décrire une expérience. En effet, chaque propriété aurait pu ne pas avoir lieu, ou être différente. Ainsi, le photon pourrait arriver dans un autre photodétecteur que celui portant le numéro j ; le neutron pourrait ne pas entrer dans la cible et, s'il y entre, il pourrait n'interagir avec aucun proton, ou bien ne subir que des collisions élastiques sans qu'un deutéron soit produit.

On est ainsi amené à envisager toute une famille d'histoires recensant des possibilités multiples. C'est bien ce que fait un expérimentateur quand il envisage toutes ces possibilités pour les faire entrer dans ses statistiques. On ne conçoit pas non plus, sans un tel recensement préalable, une discussion correcte des erreurs systématiques.

La question se pose donc de construire une famille qui puisse inclure toutes les histoires possibles et de s'assurer que cette liste, cette famille est effectivement complète. Cela n'est pas immédiat pour des raisons diverses. Ainsi, le système physique considéré peut n'être pas vraiment isolé et un effet secondaire des rayons cosmiques pourrait bien être à l'origine du photon qui est détecté dans notre expérience. Ce genre de considérations entre en jeu dans l'étude des erreurs systématiques mais il ne fait que compliquer les choses sans les modifier sur le fond : il suffira de considérer à l'occasion un système physique plus vaste incluant les rayons cosmiques.

La méthode la plus simple pour construire une famille d'histoires est celle introduite initialement par Griffiths. Elle consiste à fixer les instants t_k une fois

pour toute ainsi que les observables mises en jeu à chacun de ces instants. Si l'on désigne par A_k l'observable qui intervient à l'instant t_k , on caractérise chacune des propriétés qui peuvent apparaître au même instant dans les autres histoires par les différents domaine $\Delta_k^{(j)}$ du spectre de A_k susceptibles d'intervenir. Ces domaines ont deux à deux une intersection vide et leur réunion couvre tout le spectre de A_k . La méthode de construction consiste alors à définir chaque histoire comme une suite de propriétés $\{A_k, t_k, \Delta_k^{(j)}\}$, ($k = 1, 2, \dots, n$) ou une suite de projecteurs $\{E_k^{(j)}(t_k)\}$, à raison d'un projecteur par instant.

On peut noter que, d'après les hypothèses faites sur les domaines $\Delta_k^{(j)}$, les projecteurs qui interviennent à un même instant t_k vérifient les relations :

$$E_k^{(j)}(t_k) E_k^{(m)}(t_k) = 0 \text{ pour } j \neq m, \quad (12.3a)$$

$$\sum_j E_k^{(j)}(t_k) = I. \quad (12.3b)$$

(la première relation exprime que les intervalles $\Delta_k^{(j)}$ n'ont pas d'intersection deux à deux ; la seconde exprime que leur union recouvre tout le spectre de A_k).

Plaçons-nous dans le cas où il y a n instants. Il est commode de désigner une histoire appartenant à la famille par un indice a et de construire un « opérateur d'histoire » défini par le produit de ses projecteurs ordonné dans le temps :

$$C_a = E_n^{(j_n)}(t_n) \dots E_2^{(j_2)}(t_2) E_1^{(j_1)}(t_1). \quad (12.4)$$

Chacun de ces opérateurs *raconte* à sa manière algébrique une des histoires. Toutes ces histoires s'excluent les unes des autres, ce que traduisent les relations (7.7). À elles toutes, elles épuisent toutes les possibilités et cela se traduit par les équations suivantes, conséquences immédiates des équations (12.3) :

$$C_a C_b^\dagger = 0 \text{ pour } a \neq b. \quad (12.5a)$$

$$\sum_a C_a = I, \quad (12.5b)$$

où la somme (12.5b) porte sur toutes les histoires de la famille.

On dira, d'une manière générale, que l'on a une famille complète d'histoires exclusives quand les conditions (12.5) sont satisfaites par les opérateurs d'histoires. Cette définition est beaucoup plus générale que celle initialement proposée par Griffiths. Il arrive souvent en effet que les propriétés qu'on est amené à envisager dans une certaine phase de l'expérience dépendent des propriétés qui ont précédé. Ainsi, nous avons introduit le projecteur $E_{d\gamma}(t_4)$ pour exprimer qu'à l'instant t_4 la production d'un deutéron et d'un photon avait déjà eu lieu. Mais il y a des histoires où la réaction n'a pas eu lieu et pour lesquelles, au lieu de $E_{d\gamma}(t_4)$, intervient le projecteur $E_{np}(t_4)$. Quand la réaction a eu lieu, on peut envisager un instant t_5 où le photon est entré dans un des photodétecteurs. Mais si la réaction n'a pas eu lieu, on peut être amené à suivre l'histoire du neutron après une simple diffusion sur un proton, ce qui fait intervenir des observables différentes où une position de photon n'a plus aucun rôle mais où de nouveaux événements se produisent à des instants qui n'ont rien à voir avec t_5 . Ces possibilités multiples, très fréquentes dans la pratique, ont été introduites par Gell-Mann et Hartle et elles satisfont bien aux conditions (12.5).

Soulignons enfin qu'une description complète d'une expérience amène souvent à faire intervenir un certain nombre de propriétés classiques parmi celles qui figurent dans les histoires. Cela n'entraîne aucune modification notable.

Histoires et logique

Toute histoire n'est pas bonne à dire

103. La notion d'histoire est si intuitive et si proche du langage ordinaire qu'on peut en trouver bien des précédents dans l'histoire de la physique quantique. L'idée n'avait jamais pris corps cependant à cause d'un vice apparemment rédhibitoire : il existe des histoires parfaitement naturelles du point de vue du sens commun et néanmoins absurdes d'un point de vue quantique. Ainsi, dans une expérience d'interférences, il est nécessaire de faire intervenir les événements mesurables où un photon est détecté par un quelconque des grains d'une émulsion photographique. Mais notre esprit est ainsi fait que nous sommes irrésistiblement tentés d'introduire d'autres propriétés où, dans une phase antérieure, le photon passait par un trou, un *seul* trou d'un écran d'Young ou par *un seul* bras d'un interféromètre.

L'impossibilité d'une telle description de l'expérience est montrée dans tous les bons livres de mécanique quantique et nous ne le reprendrons pas (d'autant plus que des arguments plus directs apparaîtront plus loin). Elle montre bien en tout cas que certaines histoires ont certainement une signification alors que d'autres sont irrecevables, dépourvues de signification. Il convient de distinguer les deux cas et cela ne peut être qu'une question de logique.

Les opérations de la logique et les histoires

104. On a déjà indiqué au chapitre 7 quelle sera la voie à suivre. On va introduire une forme explicite de la logique élémentaire dans une famille complète d'histories, pour ne retenir comme sensées, rationnelles, que les familles d'histories dans lesquelles les notions de logique sont valables.

On s'appuiera sur les éléments de logique rappelés dans la section 77. Ils montrent que, pour donner corps à la logique, il faut définir un champ de propositions où agissent les trois opérations « et, ou, non ». C'est ce à quoi nous allons procéder dans le cadre d'une famille d'histories complète.

Il sera commode de prendre le cas d'une famille d'histories du type de Griffiths (section 102). Le spectre de chaque observable A_k y est découpé en des domaines disjoints $\Delta_k^{(j)}$. On imagine pour chaque histoire un parallélépipède (ou pavé) dans un espace à n dimensions (n étant le nombre d'instants), dont la projection sur l'axe k est $\Delta_k^{(j)}$. On dira qu'une proposition est symbolisée par un assemblage quelconque de ces pavés d'histories et que les opérations « et, ou, non » sur ces propositions sont réalisées par les opérations habituelles « intersection, union, complément » de la théorie des ensembles.

Ainsi, dans l'exemple où le système est un spin $1/2$, une proposition élémentaire (prédicat) serait « $S_x = 1/2$ à l'instant t_1 ». Mais « $S_x = 1/2$ à l'instant t_1 et $S_z = -1/2$ à l'instant t_2 » est aussi une proposition. La négation de $S_x = 1/2$ à l'instant t_1 « est $S_x = -1/2$ à l'instant t_1 » et, plus généralement, la négation d'un prédicat de projecteur E est le prédicat de projecteur $I - E$.

Il est bien connu que cette correspondance entre logique et ensembles s'accorde avec les axiomes de la logique. Le cas d'une famille d'histoires générale à la Gell-Mann et Hartle n'est guère plus compliqué.

Des logiciens ou des mathématiciens exigeraient sans doute un peu plus de rigueur. Une méthode abstraite, mais commode, consiste à considérer toutes les histoires d'une famille complète comme un ensemble abstrait S . On identifie alors le champ des propositions avec les sous-ensembles de S . Les opérations « et, ou, non » correspondent avec les opérations « intersection, union, complément ».

La méthode s'applique aussi bien à une famille du type de Gell-Mann et Hartle qu'à une famille de Griffiths. On peut montrer, en s'appuyant sur les conditions (12.5), que tout prédicat apparaissant dans une quelconque des histoires est une proposition particulière. Toute proposition q est l'union d'éléments de l'ensemble, c'est-à-dire d'un certain nombre d'histoires $\{a_i\}$. Il est commode de lui associer un « opérateur de proposition » donné par :

$$C_q = \sum_i C_i. \quad (12.6)$$

On signalera le cas particulier des deux propositions respectivement associées à l'ensemble total S et à l'ensemble vide, qu'on notera respectivement par I et 0 . Cette notation tient au fait que les opérateurs de proposition correspondant sont les opérateurs I et 0 .

Implication et probabilités

105. Il faut maintenant définir l'implication logique, cela afin d'établir une fondation sûre pour les raisonnements qui interviennent en physique. La méthode consiste à supposer l'existence d'une probabilité bien définie sur le champ de propositions d'une famille complète. Ainsi, toute proposition a est supposée avoir une probabilité bien définie $p(a)$. On peut alors définir pour tout couple de propositions (a, b) la probabilité conditionnelle de b étant donnée a sous la forme familière :

$$p(b|a) = p(a \text{ et } b) / p(a).$$

On définira l'implication $a \Rightarrow b$ par la condition :

$$p(b|a) = 1. \quad (12.7)$$

Notons que ce critère exclut de prendre pour antécédent une proposition a dont la probabilité serait nulle, mais cela est sans importance : aucun raisonnement utile en physique ne s'appuie jamais sur une hypothèse dont la probabilité est nulle.

Un résultat très important en dépit de sa simplicité est alors le suivant :

Théorème

Tous les axiomes de l'implication sont automatiquement satisfaits par la définition (10.5). Plus généralement, tous les axiomes de la logique usuelle sont satisfaits avec les conventions précédentes pour les opérations « et, ou, non » et l'implication.

Ces axiomes ont été donnés au chapitre 8 et on n'entrera pas dans la démonstration de ce théorème, élémentaire et un peu fastidieuse ; on la trouve par exemple dans Omnès (1994a), chapitre 5, appendice B.

Il ne reste alors qu'à définir l'équivalence logique entre deux propositions : $a = b$. On sait que celle-ci se réduit à une double implication de a vers b et de b vers a , $a \Rightarrow b$ et $b \Rightarrow a$, ce qui revient au couple d'équations

$$p(a \text{ et } b) = p(a) = p(b), \quad (12.8)$$

(à condition que les propositions en question aient une probabilité non nulle).

L'équivalence logique est remarquablement riche en mécanique quantique. Ainsi, on a mentionné au chapitre 7 et on verra en détail plus loin que le déterminisme de la physique macroscopique est une équivalence logique entre deux propriétés classiques relatives à des instants différents. De même, la donnée d'une mesure quantique (qui est une propriété classique relative, par exemple, à la position d'une aiguille sur un cadran de voltmètre) est logiquement équivalente au résultat de cette mesure (par exemple la valeur d'une composante du spin d'un atome).

La définition (12.7) est celle qu'on appelle l'implication bayésienne, utilisée en théorie des probabilités. Il existe d'autres méthodes, plus familières peut-être, pour définir l'implication dans d'autres disciplines scientifiques. La première assimile l'implication à une relation d'inclusion entre les ensembles représentant les deux propositions considérées. Tout laisse à penser qu'elle conduirait inévitablement à une forme plus ou moins classique de la physique et il a été en tout cas impossible de l'appliquer en mécanique quantique. La seconde méthode est utilisée en informatique et elle fait de l'implication une proposition. Ainsi la proposition $a \Rightarrow b$ est dite vraie si et seulement si la proposition *non* (a et *non*- b) est vraie. Ceci suppose malheureusement une notion préalable de vérité (réalisée en informatique par le bit logique 1) alors que cette notion est inutilisable en mécanique quantique à cause de la complémentarité qui sera vue plus loin.

Résumé

La dynamique quantique permet d'introduire le temps dans le langage de l'interprétation. Tout processus physique, en particulier une expérience, peut alors être décrit par une histoire, c'est-à-dire une suite de propriétés physiques (prédicats) ordonnées dans le temps. Une histoire est codée mathématiquement par une suite de projecteurs $E_1(t_1), E_2(t_2), \dots, E_n(t_n)$, avec des temps ordonnés de telle sorte que $t_1 < t_2 < \dots < t_n$.

Le langage de l'interprétation est compatible avec un caractère aléatoire des événements physiques, bien qu'il ne l'exige pas a priori. Cette possibilité correspond à l'existence de familles complètes d'histoires mutuellement exclusives. Ces notions sont rendues précises en définissant un opérateur d'histoire donné par la formule (12.4), une famille complète étant alors définie par les conditions (12.5).

Le champ des propositions logiques appartenant à une famille complète est défini par les sous-ensembles de l'ensemble des histoires. On peut toujours définir les opérations logiques « et, ou, non » pour ces propositions. La relation d'implication exige pour sa part qu'on puisse définir une probabilité pour chaque proposition. Si tel est le cas, toutes les règles habituelles de la logique sont valables.

106. On a vu que l'existence de probabilités d'histoires permettrait d'assurer la logique de l'interprétation. Ce chapitre sera consacré à établir ces probabilités mais un certain nombre de points doivent être clarifiés au préalable. Le mot *probabilité* semble supposer l'existence du hasard alors qu'aucun des principes posés au chapitre 8 ne contenait cette hypothèse. Dans la mesure où nous ne nous appuyons que sur ces principes, nous ne pouvons poser *a priori* des probabilités exprimant un hasard non encore introduit. L'unique raison d'être de ces probabilités demeure pour l'instant une logique de l'interprétation. Elles ne sont que des nombres, des « poids » qu'on associe aux histoires mais elles doivent satisfaire aux trois axiomes fondamentaux du calcul des probabilités pour que la logique ait un sens. Elles sont des outils théoriques auxquels un mathématicien préférerait donner le nom de « mesure » (comme dans la « mesure de Lebesgue ») plutôt que celui de probabilité, un nom que nous n'adopterons cependant pas à cause des autres emplois importants de ce mot de « mesure » en physique. Finalement, après avoir développé jusqu'au bout l'interprétation, on verra apparaître une relation directe entre les « poids » ainsi introduits et le caractère aléatoire des mesures quantiques ; ce sera alors un résultat marquant.

Présentement, notre problème est de trouver la forme de ces poids, ou probabilités. Le point essentiel, tel qu'il est développé dans ce chapitre, repose sur une évidence : les événements qui se produisent dans un système physique dépendent de l'état initial, c'est-à-dire la situation dans laquelle le système se trouve au début de l'expérience. Notons qu'on pourrait en principe englober cette situation dans une histoire de l'expérience plus complète, en la prolongeant plus loin dans le passé pour tenir compte de la manière dont le système a été préparé. Mais à mesure qu'on plongerait dans ce passé, de plus en plus d'événements et aussi d'autres systèmes de plus en plus vastes devraient entrer en ligne de compte. Mieux vaut résumer, si l'on peut, tous ces phénomènes antérieurs sous une forme commode.

Ce résumé existe, fort heureusement, et il s'exprime comme suit : l'état initial d'un système physique isolé peut être représenté par un opérateur d'état ρ

(également appelé *opérateur densité* ou encore *matrice densité* quand l'espace de Hilbert est de dimension finie). Cet opérateur possède trois propriétés essentielles : (1) Il est autoadjoint. (2) Il est positif (toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles). (3) Il a une trace unité ($\text{Tr } \rho = 1$). Notons que cela signifie que l'état initial d'un système physique isolé n'est pratiquement jamais décrit par une fonction d'onde. On ne rencontre des fonctions d'onde (ou états purs) que lorsque des physiciens se donnent une peine considérable pour en produire, à l'occasion d'expériences souvent subtiles.

Quant à la probabilité d'une certaine histoire a , elle est donnée par une formule où entre l'opérateur d'histoire C_a de la formule (12.4). Elle s'écrit :

$$p(a) = \text{Tr}(C_a \rho C_a^\dagger). \quad (13.1)$$

La plupart des résultats de l'interprétation s'appuieront sur cette formule et le fait qu'elle soit la seule possible, et même la seule concevable, est donc important. On veillera à ne pas l'omettre dans ce chapitre.

Signalons cependant que toutes les propriétés des probabilités (13.1) ne seront pas traitées dans ce chapitre. Des conditions de rationalité, déjà évoquées au chapitre 7, sont nécessaires pour qu'on ait affaire à une vraie probabilité (non seulement positive, mais aussi normalisée et surtout additive). Cette question fera l'objet du chapitre suivant.

Première rencontre avec les probabilités d'histoires

La probabilité d'une propriété

107. On sait, depuis Born, quelle est la probabilité d'une certaine propriété, lorsqu'on suppose que l'état du système est représenté par une fonction d'onde. Nous partirons de là, bien que cette démarche ne respecte pas la règle que nous nous étions imposée de ne s'appuyer que sur les principes fondamentaux du chapitre 8, mais il ne s'agit que d'un débroussaillage préliminaire, heuristique. On verra, à la fin du chapitre, comment procéder de manière plus rigoureuse.

L'introduction de la probabilité de Born s'accompagne en effet, dans la plupart des cours de physique quantique, d'un certain nombre de principes préalables qui sont d'ordinaire les suivants :

1. les résultats des mesures quantiques sont des phénomènes aléatoires ;
2. la probabilité d'un certain résultat de mesure (c'est-à-dire en fait d'une certaine propriété) est donnée par la formule de Born.

Or dans le cas présent, on s'intéresse à une propriété sans supposer qu'elle soit sanctionnée par une expérience de mesure. Qui plus est, on ne va pas même juger nécessaire d'introduire le caractère aléatoire des phénomènes quantiques puisque les probabilités qui nous intéressent ne sont destinées qu'à un usage logique. Cela dit, rien ne nous empêche de nous faire la main avec des formules connues.

La probabilité d'obtenir une valeur propre a (non dégénérée) d'une observable A lors d'une mesure faite à un instant t est donnée traditionnellement par la formule de Born $p = |\langle a | \psi(t) \rangle|^2$, où ψ est la fonction d'onde. En introduisant le projecteur $E = |a\rangle\langle a|$ et en tenant compte de $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi\rangle$, ceci s'écrit également :

$$p(a) = \langle \psi | E(t) \psi \rangle = \| E(t) \psi \|^2, \quad (13.2)$$

formule qui s'étend aisément aux cas où il y a dégénérescence et à celui des observables à spectre continu.

Le cas de la position

On peut donner un exemple du cas continu avec la propriété énonçant que « la position X est dans l'intervalle Δ à l'instant 0 ». Le projecteur correspondant s'écrit en effet $E = \int_{\Delta} |x\rangle\langle x| dx$ et on a pour la fonction d'onde $\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$, d'où la première égalité (13.2) :

$$p = \int_{\Delta} |\psi(x)|^2 dx = \int_{\Delta} \langle \psi | x \rangle \langle x | \psi \rangle dx = \langle \psi | E \psi \rangle.$$

Compte tenu de $E^2 = E$, ceci s'écrit également :

$$\langle \psi | E^2 \psi \rangle = \langle E \psi | E \psi \rangle = \| E \psi \|^2.$$

Nota

La dépendance dans le temps ressort de

$$\langle \psi | E(t) \psi \rangle = \langle \psi | U^{-1}(t) E U(t) \psi \rangle = \langle \psi(t) | E \psi(t) \rangle.$$

Pour étendre la formule (13.2) à l'expression de la probabilité d'une histoire a , on peut songer à faire appel à l'opérateur d'histoire C_a de la formule (12.4) en posant :

$$p(a) = \| C_a \psi \|^2 = \langle \psi | C_a^\dagger C_a \psi \rangle, \quad (13.3)$$

ce qu'on peut également écrire en posant $E_o = | \psi \rangle \langle \psi |$ sous la forme :

$$p(a) = \text{Tr} (C_a E_o C_a^\dagger). \quad (13.4)$$

En effet, l'invariance de la trace par permutation circulaire permet d'écrire cette expression sous la forme $\text{Tr} (C_a^\dagger C_a E_o)$. On évalue la trace en prenant une base orthonormée de l'espace de Hilbert dont le premier vecteur est $| \psi \rangle$, ce qui donne bien l'expression (13.3).

108. Diverses justifications plus ou moins convaincantes de la formule (13.3) peuvent être tentées. Ainsi, quand toutes les propriétés qui figurent dans l'histoire sont sanctionnées par un appareil de mesure, cette formule donne la probabilité conjointe de tous les résultats de mesure, à condition d'admettre la règle de réduction de la fonction d'onde à la manière de Copenhague (Aharonov, Bergman et Lebowitz, 1964). Nous ne pouvons cependant pas nous appuyer là-dessus car la réduction de la fonction d'onde est un des points les plus délicats de

l'interprétation et, de plus, les exemples d'histoires que nous avons rencontrés faisaient état de propriétés qu'aucune mesure ne sanctionne.

On pourrait également argumenter et dire que la formule (13.2) montre que le projecteur $E(t)$ agit sur la fonction d'onde ψ en laissant intactes la projection de ψ sur les vecteurs propres de $E(t)$ de valeur propre 1, et annulant les autres projections. En itérant ce procédé, cela suggère que la fonction d'onde $C_a\psi$ représente l'aboutissement d'une histoire. Une justification plus convaincante, bien que n'étant pas une démonstration, intervient dans le cas où toutes les propriétés sont relatives à des opérateurs de position ou de moment. La fonction $C_a\psi$ s'obtient alors comme le faisceau des chemins de Feynman qui, dans l'espace de phase, traversent toutes les « fenêtres » $\Delta_k^{(j)}$ (au sens de la section 102) qui correspondent à l'histoire. En fait, la justification des formules (13.1) et (13.2) est très simple : aucune autre n'est possible et c'est ce qu'on verra plus loin.

Opérateur d'état et préparation

109. Une idée simple et féconde qu'on trouve en particulier chez Dirac, suppose qu'il existe une fonction d'onde, et que celle-ci est définie par l'appareil de préparation. Dans l'optique qui est la nôtre, où cet appareil peut être englobé en principe dans le cadre de pensée quantique, cette idée conduit naturellement à renoncer à l'existence des fonctions d'onde pour faire intervenir au contraire un opérateur d'état.

Considérons donc une expérience arbitraire, par exemple l'expérience de physique nucléaire $p + d \rightarrow He_3 + \gamma$. Supposons-la décrite par une histoire a , elle-même représentée par une suite de projecteurs $(E_1(t_1), \dots, E_n(t_n))$. Supposons que l'état du neutron, à un instant t_0 antérieur à tous ceux mentionnés par l'histoire, puisse être décrit par une fonction d'onde ψ . Cette hypothèse peut être considérée comme une propriété dont le projecteur est $D = E_0(t_0) = |\psi\rangle\langle\psi|$ (la lettre D est employée ici pour signifier la propriété du « début »). En introduisant l'opérateur d'histoire $C_a = E_n(t_n) \dots E_1(t_1)$, la probabilité (13.3) de l'histoire prend la forme :

$$p(a) = \text{Tr}_S (C_a D C_a^\dagger).$$

On notera que D , qui joue le rôle d'information de départ, est le seul projecteur qui n'appartienne pas, à proprement parler, à une histoire puisqu'on s'interdit d'introduire sa négation : dire que le système n'est pas préparé serait absurde.

Supposons maintenant que le proton soit produit par un accélérateur A et qu'on veuille prolonger l'histoire vers le passé pour inclure le processus de préparation. On peut alors envisager d'introduire une fonction d'onde Ψ décrivant l'état initial d'un système plus vaste comprenant l'accélérateur en plus du dispositif expérimental déjà considéré. Cette fonction d'onde est donnée à un certain instant initial t_i , antérieur à tous ceux de l'histoire précédente. On peut alors introduire une histoire plus riche qui décrit à la fois le fonctionnement de

l'accélérateur et le déroulement ultérieur de l'expérience, celle-ci étant identique à l'histoire qui avait été considérée en premier. On pourrait préciser par exemple qu'à un instant t_{-2} le proton est injecté dans l'accélérateur et qu'il en sort à un instant t_{-1} . Chacune de ces propriétés serait décrite par un projecteur. Ainsi, au lieu d'introduire directement la fonction d'onde du proton par le projecteur D à l'instant $t_0 > t_{-1}$, on aurait une histoire a' incluant l'accélérateur et ayant pour opérateur d'histoire le produit $E_n(t_n) \dots E_1(t_1) E_{-1}(t_{-1}) E_{-2}(t_{-2})$. (Il n'est pas nécessaire de préciser la famille complète qui inclut cette histoire.)

La probabilité de l'histoire a' s'écrit alors :

$$\text{Tr}_{A+S} (C_a C_b D' C_b^\dagger C_a^\dagger)$$

où C_a est inchangé et représente l'histoire qui se déroule à partir de l'instant t_1 . La préparation est décrite par le produit de projecteurs $C_b = E^{-1}(t_{-1}) E_{-2}(t_{-2})$ et le nouveau projecteur de début est devenu $D' = |\Psi(t_i)\rangle\langle\Psi(t_i)|$.

L'accélérateur est toujours présent après éjection du proton, mais celui-ci est alors isolé de son appareil de préparation. Or en pratique, on ne s'intéresse au proton qu'à partir de ce moment d'éjection, après lequel la préparation est considérée comme donnée. En d'autres termes, on ne s'intéresse vraiment qu'à l'histoire a . Cela s'exprime en théorie des probabilités par une probabilité conditionnelle $p(a | b)$ pour l'histoire a , la préparation b étant supposée donnée, c'est-à-dire :

$$p(a | b) = \text{Tr}_{A+S} (C_a C_b D' C_b^\dagger C_a^\dagger) / \text{Tr}_{A+S} (C_b D' C_b^\dagger).$$

Cela suggère d'introduire un opérateur ρ_S qui ne met en jeu que le dispositif expérimental S (excluant l'accélérateur). On pose pour cela :

$$\rho_S = \text{Tr}_A (C_b D' C_b^\dagger) / \text{Tr}_{A+S} (C_b D' C_b^\dagger). \quad (13.5)$$

La probabilité de l'histoire a pour une préparation donnée s'écrit alors :

$$p(a) = \text{Tr}_S (C_a \rho_S C_a^\dagger). \quad (13.6)$$

On vérifie immédiatement que l'opérateur d'état ρ_S (qu'on désigne à présent par ρ) a les propriétés suivantes :

$$\rho = \rho^\dagger, \quad (13.7)$$

$$\rho \geq 0, \quad (13.8)$$

$$\text{Tr} \rho = 1. \quad (13.9)$$

(La première propriété et la troisième sont évidentes. La seconde résulte de (13.5) et de la positivité de D').

On aurait pu remonter plus loin en arrière, en incluant dans le système un injecteur à l'entrée de l'accélérateur et, pourquoi pas, remonter jusqu'aux matériaux de construction de tout l'appareillage. Ce processus régressif pourrait reculer jusqu'à une hypothétique fonction d'onde initiale de l'univers. Mais faut-il aller jusque là ? Mieux vaut sans doute tirer de tout cela une leçon simple et pratique. *L'état initial d'un système physique isolé peut toujours être décrit par un*

opérateur d'état ρ qui satisfait aux conditions (13.7-9), la probabilité d'une proposition étant donnée par la formule (13.6) où le système S est celui qu'on étudie.

Ajoutons que si un système Q appartient à un système S dans lequel il est momentanément isolé, l'opérateur d'état qui le représente est donné par :

$$\rho_Q = \text{Tr}_Q^{-1} \rho_S, \quad (13.10)$$

où la trace est prise sur tous les degrés de liberté de S qui n'appartiennent pas à Q .

La probabilité d'une propriété de projecteur $E(t)$ est alors donnée par :

$$p = \text{Tr} (\rho E(t)). \quad (13.11)$$

États purs et mélanges

110. L'équation (13.11) entraîne une définition simple de l'état : l'état initial d'un système est un résumé de sa préparation qui détermine, en principe, la probabilité de n'importe quelle propriété. Il détermine aussi la probabilité d'une histoire (si les conditions de rationalité, qu'on verra au chapitre suivant, sont satisfaites). L'état peut être représenté mathématiquement par un opérateur d'état.

On dit, par une convention qui tient à l'histoire de la mécanique quantique, qu'un état est *pur* quand il est possible de le représenter par une fonction d'onde. C'est possible lorsqu'une valeur propre de l'opérateur d'état est égale à 1 (toutes les autres étant nulles en conséquence) ; la fonction d'onde (ou vecteur d'état) est alors définie par le vecteur propre associé à la valeur propre 1. Sinon, on dit que l'état est un *mélange*.

Bien que l'existence d'une fonction d'onde soit un cas exceptionnel, il y a de très bonnes raisons pour l'utiliser fréquemment. Si les fonctions d'onde sont en effet très rares dans la nature, elles sont assez fréquentes dans les laboratoires où l'on travaille dans des conditions très bien définies. Une seconde raison tient au caractère très banal des différences que montrent les calculs quantiques selon qu'on travaille avec une fonction d'onde ou avec un opérateur d'état. On peut réduire en effet l'opérateur d'état à sa forme diagonale $\rho = \sum_j p_j |j\rangle\langle j|$ et traiter chaque vecteur propre $|j\rangle$ comme une fonction d'onde.

Compte tenu de ce que la partie la plus difficile et la plus instructive d'une analyse est toujours de calculer ce qui arrive à une fonction d'onde, le passage au cas d'un opérateur d'état est banal et peut même souvent être omis. Ce n'est cependant pas toujours le cas, et la mécanique statistique exige par exemple de travailler avec un opérateur d'état. Il en va de même pour l'interprétation et c'est pourquoi nous ne saurions nous dispenser d'en faire usage.

Autres conceptions de l'opérateur d'état*

On va maintenant ajouter quelques compléments et revenir en particulier sur plusieurs questions de rigueur qui avaient été négligées. Les trois sections qui

suivent sont donc assez techniques et elles peuvent être omises en première lecture. Le lecteur peut ainsi, s'il le désire, passer directement à la section 114 qui traite de certains aspects concrets de la description d'une expérience et sont donc plus proches de la réalité de la physique.

La méthode traditionnelle*

111. Lev Landau, Felix Bloch et von Neumann ont introduit indépendamment l'opérateur d'état en 1926, en partant de la notion de fonction d'onde. Ils considèrent à la manière de Dirac qu'un dispositif expérimental permet de préparer une certaine fonction d'onde ψ_j . Ils admettent cependant que ce dispositif de préparation peut être soumis à des variations aléatoires de nature classique, puisque l'appareil est décrit par la physique classique. L'impossibilité de contrôler ces effets entraîne que la fonction d'onde elle-même soit une quantité aléatoire, selon l'idée classique d'une ignorance des causes. Le résultat net est l'introduction d'un opérateur d'état.

Cette méthode conduit à considérer un ensemble de fonctions d'ondes ψ_j dont chacune a une probabilité p_j d'être produite. La probabilité d'une propriété a de projecteur E , lorsque la fonction d'onde est ψ_j , est donnée, selon la formule de Born par $\|E \psi_j\|^2$. Or, la probabilité pour que la fonction d'onde soit ψ_j est p_j . La probabilité de la propriété a est donc donnée par la loi des probabilités composées, soit encore :

$$p(a) = \sum_j p_j \|E \psi_j\|^2.$$

Il est facile de montrer que cette formule est la même que (13.11) qui s'écrit dans ce cas (avec $t = 0$) : $p(a) = \text{Tr} \rho E$. Il suffit en effet de poser $\rho = \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|$. Les propriétés (13.7-9) se vérifient aisément à partir de cette expression : (13.7) résulte de ce que les projecteurs $|\psi_j\rangle\langle\psi_j|$ sont autoadjoints et les probabilités p_j des nombres réels. La relation (13.8) résulte de l'inégalité évidente $\langle\phi|\rho|\phi\rangle = \sum_j p_j |\langle\phi|\psi_j\rangle|^2 \geq 0$, pour un vecteur ϕ quelconque. La condition (13.9) résulte de $\sum_j p_j = 1$.

La méthode de Gleason : cas des propriétés*

112. Gleason (1953) a montré l'existence d'un opérateur d'état et l'unicité de la probabilité d'une propriété, à partir d'hypothèses de pure logique. Il s'appuie sur un certain nombre d'axiomes déduits de la notion de propriété. On admet d'abord que toute propriété de la forme « la valeur de l'observable A est dans un ensemble Δ » est associée à un projecteur E . On suppose ensuite qu'il existe une probabilité $p(E)$ pour toute propriété. On suppose de plus que $p(E)$ ne dépend que de la propriété énoncée ou, si l'on préfère, du seul projecteur E ou du seul sous-espace M de l'espace de Hilbert sur lequel E projette. Cette hypothèse est de nature logique car elle suppose que seule la propriété en question entre en jeu sans aucune précision supplémentaire. La manière la plus simple de l'exprimer consiste à supposer que $p(E)$ ne dépend pas du choix d'une base particulière dans M . On impose, de plus, les conditions évidentes $p(E) \geq 0$ et $p(I) = 1$.

On considère alors deux projecteurs E_1 et E_2 correspondant à des propriétés associées à la même observable A et à deux ensembles réels distincts Δ_1 et Δ_2 . Quand

l'intersection de ces deux ensembles est vide, on a les relations $E_1E_2 = E_2E_1 = 0$ et on dit que les deux propriétés sont mutuellement exclusives (elles ne peuvent pas avoir lieu simultanément). On étend cette notion d'exclusion à deux projecteurs quelconques qui vérifient ces relations $E_1E_2 = E_2E_1 = 0$. On remarque que la propriété associée dans le premier cas à l'ensemble union $\Delta_1 \cup \Delta_2$ a pour projecteur $E_1 + E_2$ et on impose généralement la condition d'additivité :

$$p(\sum_j E_j) = \sum_j p(E_j) \quad (13.12)$$

pour toute famille finie ou dénombrable de projecteurs $\{E_j\}$ tels que $E_jE_k = E_kE_j = 0$, pour $j \neq k$.

Ces conditions sont parfaitement naturelles du point de vue logique. Gleason leur a ajouté deux restrictions de caractère plus technique. La première requiert que l'espace de Hilbert soit séparable (c'est-à-dire admette une base finie ou dénombrable) ; la seconde impose que la dimension de cet espace de Hilbert soit au moins égale à 3.

Examinons cette question de la dimension de l'espace de Hilbert. En fait, il n'y a qu'un seul projecteur dans un espace de Hilbert de dimension 1 et l'idée d'ajouter des projecteurs mutuellement exclusifs comme dans l'équation (13.12) est alors inapplicable. Dans un espace de Hilbert de dimension 2, tout projecteur est associé à un vecteur n de la sphère unité ordinaire par l'expression $E = (1/2)(I + \sigma \cdot n)$ mettant en jeu les matrices de Pauli. La condition (13.12) impose alors seulement que la probabilité soit une fonction $p(n)$ vérifiant $p(n) = p(-n)$, ce qui peut être réalisé de multiples façons. Le cas exceptionnel des dimensions 1 ou 2 est aisément ramené à la normale en notant qu'un système physique, dont l'espace de Hilbert est de dimension 1 ou 2, n'est jamais qu'un jouet théorique et tout objet physique qu'on décrit ainsi résulte d'une modélisation. En d'autres termes, il n'y a pas de spin 1/2 qui ne soit porté par une particule (ou des particules). Le résultat de Gleason est donc général.

Sous les conditions indiquées, Gleason a établi que la forme que peut prendre une probabilité $p(E)$ est sévèrement restreinte : elle est nécessairement de la forme (13.11) où intervient un opérateur ρ vérifiant les conditions (13.7-9). En somme, des conditions essentiellement logiques, imposées au langage de l'interprétation, imposent l'existence de l'opérateur d'état s'il existe des probabilités.

Les probabilités des histoires*

113. Giuseppe Nistico, (1998) a généralisé la méthode de Gleason pour établir en toute généralité que l'expression (13.1) donne la probabilité d'une histoire. Il a étudié l'unicité de la réponse en s'appuyant sur les hypothèses suivantes, supposées valables dans une famille complète :

- la probabilité d'une histoire qui se réduit à un seul prédicat (soit un seul instant) est donnée par la formule de Gleason (13.11) ;
- il considère ensuite le déroulement d'une histoire dont la suite des projecteurs est par exemple :

$$E_1(t_1)E_2(t_2)\dots E_j(t_j)E_{j+1}(t_{j+1})\dots E_k(t_k)E_{k+1}(t_{k+1})\dots E_n(t_n).$$

Celle-ci peut être scindée en une succession de trois histoires qui se succèdent. La première, a , correspond à la suite $E_1(t_1)E_2(t_2) \dots E_j(t_j)$, la deuxième, b , à la suite $E_{j+1}(t_{j+1}) \dots E_k(t_k)$ et la troisième, c , à $E_{k+1}(t_{k+1}) \dots E_n(t_n)$.

Chacune de ces histoires est supposée avoir une probabilité et, de manière identique à l'analyse que nous avons faite dans la section 109, on considère l'histoire b comme conditionnée par une préparation qui est l'histoire a . L'hypothèse s'exprime à l'aide d'une probabilité conditionnelle sous la forme :

$$p(a + b) = p(a) p(b|a),$$

où l'on désigne par $a + b$ l'histoire $E_1(t_1)E_2(t_2) \dots E_k(t_k)E_{k+1}(t_{k+1})$.

On fait alors une hypothèse mathématique : les probabilités des histoires ainsi que les probabilités conditionnelles telles que $p(b|a)$ doivent vérifier les axiomes du calcul des probabilités. Cela, compte tenu de la signification physique de l'hypothèse, s'applique non seulement aux histoires de la famille mais également à toute histoire composée, obtenue en combinant ces histoires élémentaires (voir la section 118). La conclusion est l'unicité de l'expression (13.1) pour les probabilités d'histoires et la nécessité de certaines équations (conditions de Griffiths, ou de rationalité) qui seront étudiées au chapitre suivant.

Quelques approximations dans les descriptions d'expériences

114. Voyons pour finir comment ce formalisme permet de retrouver la description ordinaire des expériences, telle du moins que les théoriciens ou les cours de mécanique quantique l'envisagent. On ne s'intéresse alors qu'aux objets microscopiques, atomes et particules, dont on suit l'histoire au sens banal du terme. L'appareillage nécessaire à la préparation et au contrôle de l'expérience n'est que très grossièrement décrit. La théorie le simule par des modèles où peuvent entrer des paramètres externes qui dépendent ou non du temps. Pour préciser ce que cela signifie, on peut penser à une expérience d'interférences, où un écran, dans le meilleur des cas, est assimilé à une condition aux limites qu'on impose aux fonctions d'onde. La présence d'un électroaimant dans une expérience de Stern-Gerlach est symbolisée par l'intervention d'un paramètre champ magnétique B dans la dynamique des spins ou des particules chargées. On pourrait multiplier sans fin de tels exemples. La question qu'on va poser à présent est également banale, si banale qu'on s'étonne qu'elle soit aussi rarement soulevée. Il s'agit de montrer comment ce genre de modélisation peut être compris et éventuellement justifié.

Notons bien cependant, avant d'entrer dans le vif du sujet, un avertissement important.

Comme tout langage sensé, celui des histoires a pour but de comprendre le monde réel. Il ne prétend pas, en revanche, inclure tous les aspects possibles de la réalité, mais

seulement ceux qui sont nécessaires pour la comprendre. Cela le différencie du langage des mathématiques qui peut être, au moins en principe, complet.

Cela étant, on désignera par S le système microscopique (atomes, particules, etc.) auquel on s'intéresse. L'appareillage est désigné par A et il peut être scindé (comme on l'a vu dans la section 58) en un sous-système collectif (noté c) et un environnement (noté e). La trace qui figure dans la formule (13.1) donnant la probabilité d'une histoire porte alors sur le système total $S + c + e$. Les histoires dignes d'intérêt ne font état que de propriétés pertinentes pour la description des phénomènes physiques et des événements microscopiques. Elles ne mettent donc en jeu que des propriétés des systèmes S et c , celles relatives à c étant formulées d'une manière classique (dont on a vu l'accord avec les lois quantiques). On peut les représenter, si nécessaire, par des projecteurs.

Il est alors commode de calculer la trace (13.1) en plusieurs étapes, en opérant d'abord une trace partielle sur e , puis sur c , et enfin sur S . On voit ainsi certaines modélisations apparaître de manière naturelle à chaque étape. La trace sur l'environnement, ou ce qui en tenait lieu quand on ne pensait pas en termes d'histoires (c'est-à-dire l'omission pure et simple de l'environnement par la pensée), a paru longtemps de peu d'importance. On verra au contraire au chapitre 15 que cette opération de trace est essentielle pour l'apparition de l'effet de décohérence et pour que les phénomènes macroscopiques se séparent sans interférence. Cependant, on n'insiste pas sur ce point pour l'instant.

Vient alors la trace sur c . Pour apprécier ses conséquences, il est bon de faire apparaître explicitement l'évolution dans le temps entre deux propriétés successives. Ainsi, en se limitant à une histoire à deux instants, la formule (13.1) peut prendre la forme explicite

$$p = \text{Tr} \{ E_2 U(t_2 - t_1) E_1 U(t_1 - t_0) \rho U^\dagger(t_1 - t_0) E_1 U^\dagger(t_2 - t_1) E_2 \}. \quad (13.13)$$

L'opérateur $U(t)$ est de la forme $\exp(-iHt/\hbar)$ où H est l'hamiltonien complet de tout le dispositif, incluant, en particulier, l'interaction entre le système microscopique S et l'appareillage A . De la même façon, l'opérateur d'état ρ est celui de la totalité du système $S + A$. La trace sur c peut alors avoir des conséquences considérables. Ainsi, elle peut introduire un repère explicite dans le temps (lorsque par exemple, un champ créé par A et agissant sur S dépend du temps). Au lieu de la forme $U(t - t')$ pour l'opérateur d'évolution, on voit alors apparaître dans l'évolution de S des opérateurs de la forme $U(t, t')$ où les deux instants mis en jeu interviennent autrement que par leur différence. C'est généralement au travers de cette trace sur c que des paramètres extérieurs s'introduisent dans l'évolution d'un système microscopique.

Il est souvent impossible de rendre par le calcul l'effet exact de la trace sur c (ou de la trace combinée sur e et c). On ne peut même pas l'écrire sous une forme analogue à (13.13). On peut songer par exemple à l'expérience des trous d'Young : le photon interagit avec toute la matière de l'écran (laquelle appartient formellement au système e alors que la position exacte des fentes relève du système c).

Le résultat de la double trace sur e et c est donc très complexe et c'est souvent, à ce stade, qu'on est amené à introduire des modèles simplificateurs, comme celui qui consiste à remplacer l'interaction de la particule avec l'écran par des conditions géométriques aux frontières pour les solutions de l'équation de Schrödinger de la particule.

Il n'y a pas lieu de s'inquiéter de cette complexité. Si l'on ne perd pas de vue la situation concrète qu'on veut interpréter, la plupart de ces difficultés se résolvant en fin de compte. Cela est particulièrement vrai quand on adopte le formalisme des histoires, grâce au caractère explicite de sa formulation et de sa logique qui reste toujours contrôlable. Ainsi, même si l'on ne considère pas le langage des histoires comme indispensable, il apporte des moyens d'analyse dont la clarté est difficilement accessible à d'autres méthodes et, en fait, il est bien rare que ces justifications exigent de véritables calculs ; il suffit la plupart de temps de les prendre en compte par la pensée.

Revenons, pour finir, sur la nature des histoires en tant que langage, dans le cas du remplacement d'un écran percé de trous d'Young par des conditions aux limites pour l'équation de Schrödinger. On peut fort bien imaginer une énorme équation de Schrödinger où entreraient en jeu les molécules d'air, les atomes qui constituent l'écran, avec toutes leurs interactions. On peut même écrire cette équation explicitement (en notation abrégée, évidemment) et c'est en cela qu'on peut dire que le formalisme mathématique procure, en principe, une description complète de tout le système physique. Les histoires, en revanche, sont extrêmement limitées par les conditions de Griffiths (signalées au chapitre 7 et qu'on reverra au chapitre suivant). Elles sont incapables de décrire, en tant qu'événement, comment l'interaction d'une particule externe avec la matière de l'écran va permettre à la particule de passer au travers des trous. C'est un exemple de ce qu'on a souligné, c'est-à-dire du caractère pertinent, seulement pertinent et donc incomplet du langage des histoires. Ce langage permet de comprendre ce qui se passe, de manière conforme à la logique. Il ne pénètre pas jusqu'au niveau de ce qui existe *réellement*, à supposer que cette expression puisse jamais avoir un sens.

Résumé

La préparation d'un système physique peut être exprimée par la donnée d'un opérateur d'état ρ . C'est un opérateur autoadjoint, positif, de trace égale à 1. Il peut parfois se ramener à une fonction d'onde.

Une histoire a , décrivant des événements postérieurs à cette préparation, peut se voir attribuer une probabilité $p(a)$ pour les besoins de la logique. Cette probabilité est donnée au moyen de l'opérateur d'histoire C_a par $p(a) = \text{Tr}(C_a \rho C_a^\dagger)$.

115. Commençons par faire le point. On dispose à présent d'un langage, celui des histoires, qu'on présume être universel. On a vu qu'on peut couler ce langage dans le moule de la logique et cela devrait permettre, en principe, de distinguer les familles d'histoires logiques (rationnelles) de toutes celles qui sont dénuées de signification. La logique ainsi construite devrait pouvoir justifier les raisonnements grâce auxquels les physiciens exploitent les données d'une expérience. On a vu également que cette logique s'appuie sur l'existence de probabilités d'histoires et que celles-ci sont données par la formule (13.1).

Mais pour que la logique soit incontestable, il faut que les probabilités sur lesquelles elle repose le soient tout autant. On a déjà signalé (dans la section 79 sur le calcul des probabilités) que cela se ramène à la vérification de trois critères qui sont respectivement : la positivité, la normalisation et l'additivité des probabilités. Or, quand on applique ces critères à la formule (13.1), ils imposent des conditions nécessaires et suffisantes que la famille d'histoires doit satisfaire. Ces conditions de rationalité (ou conditions de Griffiths) sont des équations qui mettent en jeu l'opérateur d'état initial ainsi que tous les opérateurs d'histoires. On peut, généralement, les vérifier par le calcul.

Les conditions de rationalité résultent directement de l'additivité des probabilités. Que de telles conditions se présentent n'a rien de surprenant. On sait qu'en mécanique quantique (théorie avant tout linéaire), les amplitudes sont additives. Cela n'est qu'exceptionnellement compatible avec l'additivité de probabilités qui sont des quantités quadratiques. Les conditions de rationalité sont en fait des conditions de compatibilité entre ces deux formes d'additivité, une compatibilité qui ne peut qu'être exceptionnelle et sûrement très significative quand elle a lieu.

Les conditions de Griffiths sont nécessaires et suffisantes pour l'additivité des probabilités. Elles entraînent automatiquement la normalisation des probabilités (la positivité étant évidente). Comme on a vu que cela suffit pour vérifier les principes de la logique, il en résulte que les conditions de Griffiths sont nécessaires et suffisantes pour que la logique ait sa place dans une famille d'histoires. D'autres conditions, proposées par Gell-Mann et Hartle, sont plus restrictives que celles de

Griffiths, suffisantes pour la rationalité des histoires sans être nécessaires, et nous nous appuyerons surtout sur elles. Ces conditions GMH, comme nous les appellerons, ont été inspirées par l'idée que l'effet de décohérence domine par son importance toute autre considération pour aboutir à une interprétation cohérente. Bien que ces conditions GMH ne soient que suffisantes, il n'existe aucun cas à ma connaissance où les conditions de Griffiths, moins contraignantes, se montrent indispensables.

Les conditions de rationalité, qu'elles soient sous la forme GMH ou celle de Griffiths, sembleraient conduire à des calculs assez formidables dans le cas d'une histoire assez longue qui décrirait une expérience réaliste. Fort heureusement, la pratique a montré que leur vérification se ramène d'ordinaire à trois cas : ou bien il faut faire quelques calculs algébriques peu compliqués (surtout dans les exemples liés au spin), ou bien on s'appuie sur l'existence de la décohérence, ou bien enfin on recourt à des considérations classiques. Il n'est aucun besoin de longs calculs dans ces deux derniers cas, ou tout au moins suffit-il d'en légitimer le schéma une fois pour toutes. Cette indifférence aux calculs peut être mise en parallèle avec l'usage du langage ordinaire en physique. La conception, la réalisation et la compréhension d'une expérience seraient d'une complexité rédhibitoire si l'on ne pouvait s'appuyer sur la physique classique pour décrire l'appareillage ainsi que le comportement, également classique, que présentent les particules dans bien des circonstances. Il en va de même de la décohérence qui permet de considérer les phénomènes constatés à grande échelle comme autant d'événements séparés sans interférences mutuelles.

Les conclusions du présent chapitre marqueront un tournant dans notre construction de l'interprétation. Les critères de rationalité permettront d'assurer de solides bases logiques, alors que l'on sait déjà que le langage qu'on utilise est universel. Quand on a introduit en effet une famille d'histoires pour sa pertinence, le fait qu'elle soit rationnelle en vérifiant les conditions correspondantes permet de la prendre pour base de raisonnement. Ces raisonnements portent sur les processus physiques dont la famille rend compte. Cette démarche, essentiellement logique, sera systématisée par une véritable règle pour la conduite de l'interprétation, d'où résultera pour cette interprétation une forme entièrement déductive.

Les conditions de Griffiths

116. La formule (13.1) donnant la probabilité d'une histoire ne vérifie immédiatement qu'un seul axiome du calcul des probabilités : la positivité. En effet, il est clair que par permutation dans la trace (13.1), on peut écrire la probabilité $p(a)$ sous la forme $\text{Tr}(\rho C_a^\dagger C_a)$, c'est-à-dire comme la valeur moyenne d'un opérateur positif $C_a^\dagger C_a$.

Il en va autrement de l'additivité des probabilités qui n'est satisfaite qu'au prix de conditions supplémentaires. Pour établir celles-ci, on considérera d'abord

le cas le plus simple, avec la famille d'histoires suivante : elle met en jeu deux instants $t_j (j = 1, 2)$. À chacun de ces instants, on considère deux propriétés « dichotomiques » dont les projecteurs sont complémentaires. L'un de ces projecteurs, E_j , exprime une propriété de la forme « $A_j(t_j)$ est dans Δ_j » et l'autre, \bar{E}_j , représente la propriété « $A_j(t_j)$ est dans $\bar{\Delta}_j$ » (l'ensemble $\bar{\Delta}_j$ étant le complément de Δ_j). On omettra d'écrire explicitement l'instant t_j associé à ces projecteurs pour alléger l'écriture.

Les projecteurs vérifient la relation :

$$E_j + \bar{E}_j = I.$$

Avec ses deux instants et ses deux propriétés par instant, la famille comporte au total quatre histoires. On représentera les histoires par des domaines rectangulaires comme dans la figure 14.1.

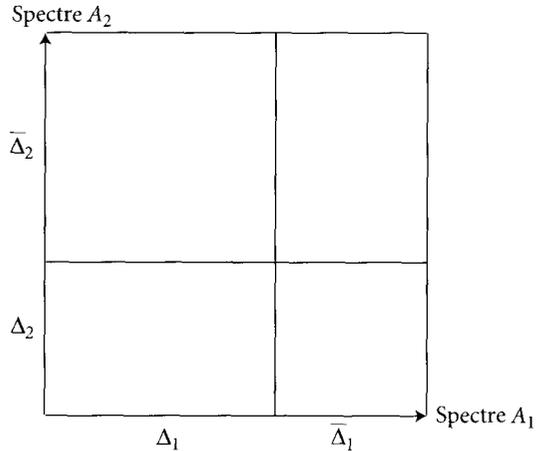


Figure 14.1 – Une famille d’histoires.

117. Considérons alors les deux histoires $a = (E_1, E_2)$ et $b = (\bar{E}_1, E_2)$, qui sont respectivement associées aux rectangles $\Delta_1 \times \Delta_2$ et $\bar{\Delta}_1 \times \Delta_2$. Ces deux propositions sont mutuellement exclusives, en ce sens que ces deux domaines ont une intersection vide. La proposition $c = « a \text{ ou } b »$ est associée au domaine $\mathbb{R} \times \Delta_2$ (où \mathbb{R} est l'ensemble des réels ou, indifféremment, le spectre de l'observable A_1). La proposition c constitue aussi une histoire, représentée par les projecteurs (I, E_2) . L'axiome d'additivité des probabilités impose alors la condition $p(c) = p(a) + p(b)$, que l'on peut traduire à l'aide de projecteurs sous la forme suivante (où l'on a réintroduit explicitement le temps pour des développements ultérieurs) :

$$Re \operatorname{Tr} \{E_1(t_1) \rho \bar{E}_1(t_1) E_2(t_2)\} = 0, \tag{14.1}$$

la notation Re désignant la partie réelle d'un nombre complexe.

*Démonstration**

On a $p(a) = \operatorname{Tr} (E_2 E_1 \rho E_1 E_2)$ qui s'écrit $\operatorname{Tr} (E_1 \rho E_1 E_2^2)$ par permutation circulaire dans la trace, ou encore $\operatorname{Tr} (E_1 \rho E_1 E_2)$ en utilisant la relation $E_2^2 = E_2$. On a de même $p(b) = \operatorname{Tr} (\bar{E}_1 \rho \bar{E}_1 E_2)$. Il est commode d'écrire la probabilité $p(c)$ sous la forme $p(c) = \operatorname{Tr} (I \rho I E_2) = \operatorname{Tr} [(E_1 + \bar{E}_1) \rho (E_1 + \bar{E}_1) E_2]$. La relation $p(c) = p(a) + p(b)$ se traduit alors par la condition :

$$\operatorname{Tr} (E_1 \rho \bar{E}_1 E_2) + \operatorname{Tr} (\bar{E}_1 \rho E_1 E_2) = 0.$$

Les deux traces sont complexes conjuguées l'une de l'autre car on a :

$$\operatorname{Tr} (E_1 \rho \bar{E}_1 E_2)^* = \operatorname{Tr} (E_1 \rho \bar{E}_1 E_2)^\dagger,$$

et, en tenant compte de l'hermiticité de tous les opérateurs, la dernière trace s'écrit :

$$\operatorname{Tr} (E_2 \bar{E}_1 \rho E_1) = \operatorname{Tr} (\bar{E}_1 \rho E_1 E_2).$$

On a donc bien établi la condition (14.1).

Il n'y a pas d'autre condition, dans le cas de la famille d'histoires, très simple, qu'on a retenue.

*Démonstration**

Le cas du couple d'histoires (E_1, E_2) et (E_1, \bar{E}_2) (ou du couple (\bar{E}_1, E_2) et (\bar{E}_1, \bar{E}_2)) est immédiat car, en remplaçant ρ dans le premier cas par $\sigma = E_1\rho\bar{E}_1$, on a la même forme que dans l'addition des probabilités de deux propriétés mutuellement exclusives E_2 et \bar{E}_2 , dont l'additivité est évidente (la normalisation de ρ n'intervient pas). Reste alors le couple (E_1, \bar{E}_2) et (\bar{E}_1, \bar{E}_2) , analogue au premier que nous avons traité et qui donne la condition $Re\text{Tr}(E_1\rho\bar{E}_1\bar{E}_2) = 0$. La relation $E_2 + \bar{E}_2 = I$ donne alors :

$$\text{Tr}(E_1\rho\bar{E}_1\bar{E}_2) = \text{Tr}(E_1\rho\bar{E}_1) - \text{Tr}(E_1\rho\bar{E}_1E_2)$$

et l'on a $\text{Tr}(E_1\rho\bar{E}_1) = \text{Tr}(\rho\bar{E}_1E_1) = 0$, d'où l'on déduit que la nouvelle condition se ramène à (14.2).

118. Plus généralement, et quelle que soit la famille d'histoires considérée, on voit apparaître des conditions d'additivité chaque fois que les histoires élémentaires qui constituent la famille peuvent se combiner pour donner d'autres histoires « composées » (par union de leurs domaines représentatifs du point de vue géométrique ou par la conjonction « ou » du point de vue logique). Ces histoires composées interviennent également dans l'énoncé du théorème de Nistico (section 113).

Quand ces conditions sont satisfaites, on peut définir le champ des propositions (au sens de la logique) auxquelles la famille d'histoires donne accès. Une proposition est définie par une histoire élémentaire ou par l'association (par ou) de plusieurs de ces histoires. On peut aussi la considérer comme un sous-ensemble de l'ensemble des histoires élémentaires. Notons que les propriétés qui apparaissent dans ces histoires (représentées par un des projecteurs $E_j(t_k)$) constituent autant de propositions possibles.

119. Les conditions de Griffiths du type (14.1) sont des conditions nécessaires et suffisantes pour satisfaire aux axiomes de la logique. Elles sont souvent remplacées par des conditions plus fortes du type de Gell-Mann et Hartle qui ne sont que suffisantes et dont le prototype est donné par

$$\text{Tr}[E_1(t_1)\rho\bar{E}_1(t_1)E_2(t_2)] = 0. \quad (14.2)$$

Cela revient à poser que non seulement la partie réelle mais aussi la partie imaginaire de la trace en question sont nulles.

Il semblerait qu'on s'impose ainsi des contraintes plus fortes qu'il n'est nécessaire pour que les probabilités d'histoires soient légitimes ; mais en fait, cette restriction vient de la pratique. On a constaté en effet que la trace en question, qui est extrêmement petite et assimilable à zéro dans la plupart des cas intéressants, est du même ordre de grandeur que sa partie réelle. (On verra plus loin pourquoi il en est ainsi, comme une des conséquences de la décohérence.) On notera également que, dans les rares cas où les deux conditions (14.1) et (14.2) sont substantiellement différentes, la première ne semble pas apporter d'exemples ou d'éclaircissements qui ne seraient pas déjà offerts par la seconde.

Un exemple

Un exemple simple permet de comparer les deux types de conditions. Le système est un spin $1/2$, initialement dans un état pur où $S \cdot n_0 = 1/2$, n_0 étant une direction donnée de l'espace. On introduit à un instant t_2 les propriétés d'une composante du spin le long d'une direction n_2 (qui peuvent exprimer une mesure). Les conditions de rationalité permettent alors de sélectionner les directions n_1 le long desquelles il est sensé d'envisager des propriétés à un instant intermédiaire t_1 . Il suffit pour cela de noter que les projecteurs exprimant les propriétés « la composante n du spin est $\pm 1/2$ » sont donnés par $(1/2)(I \pm \sigma \cdot n)$, où σ désigne le vecteur d'espace ayant pour composantes les matrices de Pauli. L'opérateur densité initial est $\rho = (1/2)(I + \sigma \cdot n_0)$. Le calcul de la trace (14.2) peut être fait directement, en s'aidant des formules $(\sigma \cdot n) (\sigma \cdot n') = n \cdot n' + i \sigma(n \wedge n')$ et $\text{Tr} \sigma_i = 0$. On constate ainsi que la condition (14.2) s'exprime au moyen des vecteurs par $(n_0 \wedge n_1) \cdot (n_1 \wedge n_2) = 0$, alors que l'annulation de la partie imaginaire imposée en plus par (14.3) donne la relation supplémentaire $(n_0, n_1, n_2) = 0$ pour le produit mixte des trois vecteurs. Prises ensemble, ces deux conditions imposent que n_1 soit parallèle à n_0 ou à n_2 , ce qui correspond bien à des questions qu'on est parfois amené à se poser en physique : peut-on envisager qu'à l'instant intermédiaire t_1 le spin soit encore dans la direction où il a été préparé, ou est-il déjà orienté dans la direction où se fera la mesure ultérieure ?

La liberté que laisse l'abandon de la condition sur la partie imaginaire de la trace, c'est-à-dire le passage de (14.2) à (14.1) permettrait de considérer d'autres directions intermédiaires n_1 telles que l'on ait seulement $(n_0 \wedge n_1) \cdot (n_1 \wedge n_2) = 0$, mais cela ne semble avoir aucun intérêt dans des applications, qu'elles soient pratiques ou conceptuelles.

Le cas général

120. La généralisation de ces résultats est aisée. On s'intéresse à une famille complète dont les opérateurs d'histoire vérifient les conditions (12.5) et, en particulier, la relation

$$\sum_a C_a = I. \quad (14.3)$$

La condition forte (14.2) de Gell-Mann et Hartle s'écrit alors :

$$\text{Tr}(C_a \rho C_b^\dagger) = 0, \quad (14.4)$$

pour tout couple d'histoires mutuellement exclusives représentées par les opérateurs C_a et C_b . On donnera le nom de *conditions de rationalité* à ces équations, dont on constate la forme algébrique explicite. Les conditions de Griffiths supposent seulement que la partie réelle de la trace (14.4) est nulle et non la trace tout entière.

On définit la probabilité d'une proposition comme la somme des probabilités des histoires qui la composent. Les conditions d'additivité de ces probabilités pour des propositions mutuellement exclusives (dont les domaines représentatifs ont une intersection vide) résultent immédiatement des conditions (12.5). On peut noter que la condition de normalisation des probabilités, sous la forme :

$$\sum_a p(a) = I,$$

est une conséquence directe de (14.3).

Démonstration

En effet, compte tenu de (14.4), on a $\sum_a \text{Tr}(C_a \rho C_a^\dagger) = \sum_{a,b} \text{Tr}(C_a \rho C_b^\dagger)$, ce qui s'écrit encore $\text{Tr}((\sum_a C_a) \rho (\sum_b C_b))$ ou, d'après (14.3), $\text{Tr}(I \rho I) = 1$.

Ainsi, lorsqu'une histoire décrit une expérience, la question de décider si elle est ou non logiquement acceptable est ramenée à la vérification des conditions (14.3), c'est-à-dire à un certain nombre d'équations.

Les raisonnements auxquels cette description peut alors conduire se justifient à leur tour en vérifiant que les probabilités conditionnelles des implications nécessaires sont égales à 1.

Vérification des conditions de rationalité

121. Plusieurs méthodes permettent de vérifier des conditions de rationalité du type (14.4). On a vu plus haut un exemple de calcul explicite dans le cas d'un spin 1/2. Il s'agissait d'un cas où l'hamiltonien était nul et, bien que l'exemple ait été très simple, le calcul n'en était pas moins déjà assez lourd. Or, il est clair que la présence des opérateurs d'évolution $U(t)$, dans les projecteurs $E(t) = U^{-1}(t)EU(t)$ dépendant du temps, peut considérablement compliquer un tel calcul. Il en va de même quand on passe à un espace de Hilbert de dimension infinie. Ainsi se pose la question de savoir comment vérifier en pratique les conditions de rationalité.

Il existe (à ma connaissance) cinq méthodes. La première consiste à effectuer directement le calcul algébrique, comme on l'a fait dans l'exemple donné plus haut. Ce n'est guère réalisable que pour une dimension finie de l'espace de Hilbert. La deuxième méthode consiste à s'armer de courage en écrivant explicitement, si possible, la forme exacte des opérateurs d'évolution. Les traces (14.4) deviennent alors des intégrales multiples sur un certain domaine d'intégration (défini par les projecteurs), les quantités à intégrer étant des exponentielles oscillantes, comme le sont les éléments de matrice d'un opérateur d'évolution. Ainsi, par exemple, l'opérateur d'évolution d'une particule libre dans l'espace infini à trois dimensions a pour éléments de matrice :

$$\langle x | U(t) | x' \rangle = (m/2\pi i \hbar t)^{3/2} \exp[im(x - x')^2/2 \hbar t].$$

Les intégrations qu'on doit faire sont en nombre double du nombre des instants qui figurent dans les histoires. Certaines portent sur des volumes d'espace (quand elles expriment des propriétés de position) ; on peut aussi devoir effectuer des transformations de Fourier quand des propriétés de l'impulsion interviennent. Il n'est possible de mener à bien de pareils calculs qu'en utilisant des méthodes d'approximation et particulièrement la méthode dite du point-selle. De tels calculs ont été utilisés dans les débuts de la théorie des histoires (cf. Omnès, 1994a), mais ils ne sont jamais à recommander. La troisième méthode consiste à remplacer les opérateurs d'évolution par des sommes sur les chemins à la Feynman, en utilisant les méthodes d'approximation qui ont été développées dans ce contexte (Feynman et Hibbs, 1965a). Les calculs sont tout aussi compliqués.

Mais fort heureusement, dans la très grande majorité des cas, les conditions de rationalité sont évidentes sans aucun calcul, ou du moins s'appuient-elles sur des calculs type qui peuvent être faits une fois pour toutes. Ces conditions favorables se présentent dans deux cas qui correspondent aux deux dernières méthodes annoncées. Le premier est celui où l'interprétation de l'expérience est directement suggérée par la physique classique. C'est ce qui arrive par exemple quand le dispositif expérimental est construit sur l'hypothèse d'un mouvement en ligne droite des particules. C'est aussi le cas quand on passe en revue les erreurs systématiques. Ainsi, dans une expérience de physique des particules, des erreurs systématiques sont surtout dues à l'intervention de particules autres que celles auxquelles on s'intéresse, mais qui engendrent les mêmes apparences. Il peut s'agir de rayons cosmiques ou de produits secondaires créés par d'autres particules du faisceau, c'est-à-dire de particules qui ont suivi un chemin particulier. Cela reste descriptible par des histoires mais, en pratique, on modélise les particules diverses par des trajectoires classiques aléatoires (méthode de Monte-Carlo). La rationalité de cette description est alors une conséquence directe des résultats relatifs à la physique classique, donnés au chapitre 16.

Enfin, la dernière méthode de justification des conditions de rationalité est de loin la plus importante et repose sur l'effet de décohérence. On la verra plus loin.

Mentionnons pour terminer que le choix des instants (t_1, t_2, \dots, t_n) qui interviennent dans les histoires est principalement dicté par les considérations de physique classique et de décohérence qui sous-tendent la légitimité logique de la description.

Un cas d'histoires insensées

122. Comme on vient de le voir, les conditions de rationalité qui peuvent se justifier sans calculs sont celles qui reposent directement sur une rationalité physique : mouvement classique ou effet de décohérence. Il n'est donc pas surprenant que les calculs les plus lourds se rencontrent quand il s'agit de rejeter des histoires insensées, irrationnelles, qui résulteraient par exemple d'un excès de confiance dans l'intuition ordinaire. On n'en donnera qu'un exemple.

Revenons pour cela aux histoires qui voudraient préciser par quel trou d'Young ou quel bras d'interféromètre une particule est passée. Les calculs nécessaires à l'examen des conditions (14.4) se simplifient si l'on suppose un état pur initial et qu'on décrive la fonction d'onde par les méthodes élémentaires de Fresnel (ce qui revient à l'approximation semi-classique WKB dans l'équation de Schrödinger). Deux instants au moins, t_1 et t_2 , doivent intervenir. Le second correspond au moment de la détection finale des particules. Il faut alors introduire un grand nombre de propriétés différentes pour décrire les interférences éventuelles. La détection peut être réalisée en pratique par un simple écran, par une plaque photographique ou une batterie de détecteurs. On peut dire, dans chaque

cas, que les particules arrivent dans de petites régions définies à l'avance et numérotées par un indice j (il peut s'agir des différents grains de l'émulsion photographique).

Pour donner, d'autre part, un sens au chemin suivi par la particule, il est commode de considérer le cas d'un interféromètre, plus simple que celui des trous d'Young pour des raisons de géométrie (il est en effet plus facile de formuler l'idée qu'un photon est à un certain moment dans un bras assez long que de dire qu'il « passe » par un trou, bien qu'on sache aussi traiter ce cas). On suppose pour cela que l'état initial est représenté par un paquet d'onde ψ , suffisamment peu étendu pour être entièrement localisé dans l'ensemble des deux bras d'interféromètre à un certain instant t_1 .

On désigne par $\phi_j^{(1)}$ la phase de l'onde qui arrive au point de détection j en passant le bras 1 de l'interféromètre et par $\phi_j^{(2)}$ la phase correspondant au passage par l'autre bras (cette phase est celle de Fresnel ou elle résulte de l'approximation semi-classique WKB). Soit a l'histoire selon laquelle le photon serait passé par le premier bras avant d'arriver en j , et b l'histoire analogue avec passage par l'autre bras. Soit E_1 et E_1' des projecteurs exprimant respectivement que la position du photon est à l'intérieur de l'un ou de l'autre bras. La propriété mathématique, selon laquelle la fonction d'onde $\psi(t_1)$ est scindée en deux parties situées chacune dans un des deux bras, s'exprime par la relation

$$(E_1 + E_1')\psi(t_1) = \psi(t_1).$$

Plutôt que d'écrire directement les conditions de rationalité (14.4), il est plus commode de revenir au calcul qui a conduit à ces conditions. On introduit pour cela la proposition $c = \text{« } a \text{ ou } b \text{ »}$ qui est aussi une histoire dont les projecteurs constituants sont $(I, E_{2j}(t_2))$. Les probabilités de ces trois histoires sont données par un calcul bien connu en théorie élémentaire des interférences, soit :

$$p(a) = A, \quad p(b) = A, \quad p(c) = A|\exp(i\phi_j^{(1)}) + \exp(i\phi_j^{(2)})|^2,$$

où A est un certain coefficient géométrique qu'on saurait aisément écrire, mais qui n'a aucun intérêt dans le cas présent. La condition de rationalité ne fait qu'exprimer l'additivité des probabilités sous la forme $p(c) = p(a) + p(b)$ et ceci donne une condition pour chaque région j , qui s'écrit :

$$\cos [(\phi_j^{(1)} - \phi_j^{(2)})/2] = 0. \tag{14.5}$$

Toutes ces conditions ne sont évidemment pas satisfaites pour les diverses régions d'arrivée j car la différence de phase $\phi_j^{(1)} - \phi_j^{(2)}$ varie de manière continue dans le plan de réception. On doit donc rejeter, comme incompatible avec la logique, une description des interférences qui affirmerait le passage du photon par un seul chemin.

Les approximations en logique

123. Il faut considérer à présent un des points qui continuent de faire l'objet de discussions dans les applications de la méthode des histoires. Jusqu'ici, on a supposé implicitement que les implications logiques reposent sur des probabilités conditionnelles exactement égales à 1. De même, les conditions de rationalité sont destinées à vérifier un axiome du calcul des probabilités et sont donc supposées être exactes.

Or il se trouve le plus souvent que, dans les applications pratiques, les conditions de rationalité sont vérifiées à un haut degré d'approximation mais non parfaitement : une trace du type (14.4) qui y figure n'est pas par exemple strictement nulle. Il en va de même pour certaines probabilités conditionnelles $p(a | b)$ qui sous-tendent des implications du type $a \Rightarrow b$ dans un raisonnement utile à la pratique. On trouve que la probabilité conditionnelle dont on aurait besoin n'est pas exactement égale à 1 mais seulement très proche de 1, de la forme $1 - \varepsilon$ avec ε très petit.

Quand, plus précisément, on s'appuie sur la physique classique, les conditions de rationalité et d'implication comportent des erreurs qui sont exponentiellement petites et proviennent des formules d'exclusion entre propriétés classiques du type de l'équation (10.13). Il en va de même, avec encore des exponentielles très petites, quand la décohérence intervient. Il en résulte que, d'un point de vue numérique, les conditions de rationalité et d'implication sont vérifiées de manière excellente.

Excellente mais non parfaite, et telle est la nuance qui trouble certains critiques. Il est vrai que la logique formelle habitue ses adeptes à être exigeants, voire puristes. On peut aller dans ce sens et s'efforcer de vérifier exactement les conditions de rationalité dans la plupart des cas. Il faut s'appuyer pour cela sur les conditions de Griffiths plutôt que celles de Gell-Mann et Hartle. De minimes ajustements des projecteurs mis en jeu permettent de vérifier ces conditions avec exactitude (Omnès, 1994a, chapitre 5, section 9).

Quant aux probabilités conditionnelles de la forme $1 - \varepsilon$, elles s'interprètent par des assertions du genre : a implique b avec une probabilité d'erreur ε , ce qui n'a rien de choquant quand les propositions a et b expriment des données physiques et qu'on tient compte de la possibilité de fluctuations quantiques.

Nous laisserons le lecteur juge du parti qui lui semble préférable, car on est là au cœur d'une réflexion qui dépasse l'interprétation et revient à définir ce qu'est, en fin de compte, la physique. Pour l'auteur de ce livre, la réponse la plus raisonnable est d'accepter purement et simplement le flou inévitable qu'entraînent des nombres ou des probabilités si minimes qu'ils sont inaccessibles à une quelconque expérience.

L'argument le plus fort allant dans cette même direction est que le sens commun indispensable à la physique classique n'est, lui-même, valable qu'au prix de ce genre d'approximation. La question sera reprise au chapitre 20 qui considérera la signification ou l'absence de signification des probabilités très petites.

Une règle d'interprétation

124. Il est commode de développer l'interprétation de manière déductive à partir du point qu'on vient d'atteindre à présent. C'est possible si l'on s'impose la règle suivante :

Règle

Toute description d'un système physique s'exprime par des histoires appartenant à une famille complète et rationnelle, qu'on doit choisir unique. Un raisonnement qui s'appuie sur cette description doit alors reposer sur des implications démontrables.

Si l'on s'intéresse en particulier à une seule histoire, on peut la supposer insérée dans la famille obtenue en introduisant les négations de toutes les propriétés de cette histoire, famille dont on doit évidemment établir le caractère rationnel.

On a proposé de voir dans cette règle un véritable principe de la mécanique quantique, à mettre sur le même plan que ceux du chapitre 8 (Omnès, 1994a). C'est une affaire de préférence dans la manière de construire la théorie quantique et nous nous en tiendrons ici à la version minimale, celle où l'on s'impose de suivre la présente règle par un simple souci de méthode, dans le but explicite de bien respecter partout les impératifs de la logique. D'autres, davantage soucieux de privilégier l'intuition, pourraient procéder différemment. Là n'est pas l'essentiel, à la condition que la démarche suivie soit cohérente.

Résumé

Les histoires d'une famille complète doivent vérifier un certain nombre de conditions de rationalité pour que leurs probabilités soient acceptables ainsi que la logique qui en résulte. Les conditions les plus simples sont seulement suffisantes et s'écrivent sous la forme $\text{Tr}(C_a \rho C_b^\dagger) = 0$, pour tout couple d'histoires mutuellement exclusives représentées par les opérateurs d'histoire C_a et C_b . La vérification de ces conditions peut s'appuyer sur des calculs algébriques mais, le plus souvent, elle se déduit sans calcul de considérations de physique classique ou de l'existence d'un effet de décohérence.

On peut donner à l'interprétation une forme déductive en s'imposant pour règle de ne considérer qu'une seule famille complète rationnelle décrivant une expérience donnée. Les raisonnements auxquels cette expérience peut conduire pour en tirer les conclusions doivent alors, en principe, s'appuyer sur des implications logiques du type décrit dans le chapitre 12.

On se propose de donner à présent une définition précise de la complémentarité. Plusieurs exemples sont présentés, dont un sur l'expérience d'Einstein, Podolsky et Rosen. On montre également une relation étroite entre la méthode des histoires et l'interprétation de Copenhague. Les histoires peuvent être en effet introduites par un emploi systématique de mesures *imaginaires* dont l'idée remonte à Heisenberg et qu'on retrouve dans de nombreux textes comme, par exemple, les cours de Feynman. On peut dire cependant que rien de ce qui est indispensable à la pratique de l'interprétation n'apparaît vraiment dans ce chapitre, dont la lecture peut être omise sans inconvénient.

Définition de la complémentarité

125. On dira que deux familles d'histoires (ou deux cadres logiques cohérents) sont complémentaires quand elles sont toutes deux rationnelles mais mutuellement incompatibles. L'existence de tels cadres complémentaires apparaît comme une simple constatation qui justifie la règle énoncée dans la section 124 de toujours s'en tenir à une famille unique d'histoires pour éviter tout risque d'ambiguïté logique.

L'origine de la complémentarité réside dans la non-commutativité des projecteurs associés à des propriétés qui mettraient en jeu des observables différentes à un même instant, quand ces observables ne commutent pas. Ainsi, on ne peut parler à la fois de position et d'impulsion pour un même instant, sauf à envisager des marges d'erreur assez grandes pour que la situation relève des concepts classiques. Ce genre d'échappatoire vers le classique n'est pas toujours possible et il faut accepter la complémentarité qui caractérise sans doute les aspects logiques des systèmes quantiques de la manière la plus spécifique.

Plus précisément, on dira que deux familles d'histoires F et F' sont complémentaires quand elles sont toutes deux rationnelles et qu'il n'existe pas de famille rationnelle incluant, parmi ses propriétés, toutes celles qui figurent dans F et F' .

La seule analogie qu'on connaisse dans la vie ordinaire à une telle situation appartient au domaine du droit. Les propositions appartenant par exemple au domaine du droit du mariage, dans le droit français ou dans le droit traditionnel musulman, sont complémentaires. Il en va de même dans de nombreuses discussions où les interlocuteurs s'appuient sur des conventions dont les logiques ou les principes sont incompatibles ; mais cette remarque est absolument banale. L'existence d'une polysémie dans la description de la réalité physique est une autre affaire et elle a évidemment choqué certains esprits, ou continue à le faire. Elle ne permet pas d'étendre directement les catégories de pensée qui s'appliquent d'ordinaire à la réalité, et cela continue de donner lieu à des controverses et à des interrogations philosophiques. La complémentarité semble néanmoins inévitable si la mécanique quantique décrit correctement la nature, comme tout semble l'indiquer.

Un théorème de non-contradiction

126. Il va de soi que si la complémentarité se traduisait par des contradictions logiques, elle serait un obstacle insurmontable pour l'interprétation. Fort heureusement, ce risque est écarté grâce à un théorème de non-contradiction qui s'énonce ainsi :

Théorème

Soit deux propositions a et b appartenant à une même famille d'histoires rationnelles où elles sont reliées par l'implication $a \Rightarrow b$. S'il existe une autre famille d'histoires rationnelles incluant ces deux propositions (que cette famille soit ou non complémentaire de la première), on a encore dans son cadre la même implication $a \Rightarrow b$.

La démonstration de ce théorème est délicate à cause de considérations géométriques qui sont nécessaires pour relier entre elles des représentations des deux familles d'histoires par des graphes à plusieurs dimensions. On ne la donnera donc pas ici (Omnès, 1994a, chapitre 5, appendice C). On pourrait commenter ce théorème en disant que l'apparition de paradoxes logiques est exclue dans l'interprétation de la mécanique quantique. Telle est bien la vérité, mais il n'en reste pas moins que la complémentarité entraîne parfois des bizarreries auxquelles il faut du temps pour s'accoutumer et dont on va donner des exemples.

Exemples

Un exemple avec spin 1/2

127. Reprenons l'exemple déjà vu dans la section 119. Un spin 1/2 a été préparé dans l'état pur de composante de spin $S_x = 1/2$. On mesure la composante S_z à l'instant t_2 , ce qui amène à introduire les deux propriétés $S_z(t_2) = \pm 1/2$. On s'interroge sur les propriétés du système à un instant t_1 intermédiaire. Le critère fort de rationalité (14.4) conduisait à envisager comme possibles deux types de

propriétés à l'instant t_1 , en introduisant les deux propriétés $S_x(t_1) = \pm 1/2$, ou les deux autres $S_z(t_1) = \pm 1/2$. Les deux familles d'histoires ainsi obtenues sont toutes deux rationnelles, mais complémentaires. On ne peut les conjuguer.

Le mouvement en ligne droite

128. Dans cet exemple, un noyau lourd radioactif placé en un point O produit au temps 0 une particule alpha dans une onde S (c'est-à-dire de moment angulaire zéro par rapport à O). La particule est vue à un instant t_2 par un détecteur occupant un petit volume V_2 centré en un point x_2 . Dès les débuts de la mécanique quantique, la question suivante est très souvent revenue : est-ce qu'à un instant intermédiaire t_1 , la particule alpha a toujours le moment angulaire zéro ou est-elle déjà en chemin en se dirigeant en ligne droite vers x_2 ?

Pour mieux préciser la question, on supposera que la valeur absolue de la vitesse radiale initiale de la particule est relativement bien définie au départ par la cinématique de la désintégration. Sachant que la particule atteint le point x_2 à l'instant t_2 , on peut alors calculer, par la physique classique, en quel point x_1 elle aurait dû se trouver approximativement à l'instant t_1 . On introduit alors un volume d'espace V_1 assez grand et centré en x_1 (Figure 15.1) et on peut exprimer verbalement l'existence d'un mouvement en ligne droite par la propriété : « la position de la particule est dans V_1 à l'instant t_1 », à laquelle on ajoute sa négation comme une autre possibilité. Faisant de même pour la propriété qui exprime l'observation dans un voisinage V_2 de x_2 à l'instant t_2 (et ajoutant sa négation), on obtient une famille d'histoires complète. Il est facile de vérifier, grâce aux théorèmes de physique classique vus aux chapitres 10 et 11, que les conditions fortes de rationalité sont satisfaites avec une bonne précision et que cette famille est donc rationnelle. On peut aussi y déduire l'implication selon laquelle « la particule est dans V_2 à l'instant t_2 » \Rightarrow « la particule est dans V_1 à l'instant t_1 . »

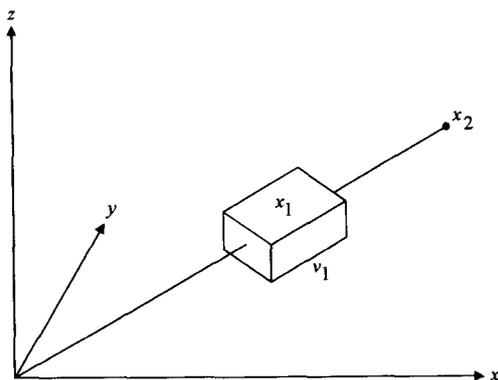


Figure 15.1 – Mouvement en ligne droite.

La question a été examinée pour la première fois par Neville Mott (1929a). Il s'agissait alors de comprendre comment une particule alpha peut se manifester par une trace rectiligne dans une chambre de Wilson, bien qu'étant décrite par une fonction d'onde. Le calcul de Mott, que nous ne reproduirons pas, peut être considéré comme une démonstration directe de l'implication précédente, concluant au mouvement rectiligne de la particule.

Il existe cependant une autre famille d'histoires dans laquelle le moment angulaire l est toujours égal à zéro à l'instant t_1 (cette proposition étant accompagnée de sa négation pour que la famille soit complète). On constate que cette autre famille d'histoires est également rationnelle et que la probabilité de la propriété portant sur le moment angulaire à l'instant t_1 est bien égale à 1. On peut dire alors que la préparation (*via* la désintégration initiale) implique, dans ce second cadre, que le moment angulaire est toujours zéro à l'instant t_1 . Les deux familles, qui envisagent respectivement de décrire le moment cinétique ou la position au même instant t_1 , sont complémentaires (pour plus de détails, voir Omnès, 1994a, chapitre 5, section 7).

La question du réalisme

129. L'exemple précédent montre qu'il est impossible d'affirmer comme une réalité que la particule va en ligne droite, tant qu'elle n'est pas observée. La théorie de la mesure, qui sera donnée plus loin, explique en fait qu'on doit voir effectivement, dans un détecteur matériel, une trace rectiligne, mais on ne peut rien dire quand la particule traverse le vide. De même, on ne peut pas dire avec certitude qu'elle conserve alors son moment cinétique initial. Chacun des points de vue est logiquement acceptable, mais les deux sont incompatibles. Ainsi, ce qu'on peut connaître de la réalité au niveau microscopique ne possède pas toute la richesse d'information ni la clarté totale, l'unicité, des propriétés classiques. C'est le prix très élevé qu'il faut payer pour la non-commutativité et qui faisait dire à Bohr qu'il nous faut réapprendre l'usage du mot *réalité*. La question de savoir ce qu'on peut affirmer au sujet de la réalité physique (ou de ce qu'il est impossible d'en dire) a engendré une littérature considérable pour laquelle on renvoie le lecteur à d'Espagnat (1994) et Bitbol (1996).

Un exemple instructif

130. La complémentarité peut se traduire par des conséquences apparemment surprenantes, comme de pouvoir déduire deux propriétés orthogonales (correspondant à des projecteurs orthogonaux) à partir d'une même donnée de mesure. Cette remarque est due à Adrian Kent (1997) et s'appuie sur un exemple précédemment introduit par Yakir Aharonov et Lev Vaidman (1991).

On considère pour cela un spin égal à 1. Il est initialement dans un état pur $|0\rangle$ de nombre quantique $m_0 = 0$ pour la composante du spin dans une direction n_0 , c'est-à-dire tel que $S \cdot n_0 |0\rangle = 0$. À l'instant t_2 , on mesure la composante du spin dans une autre direction n_2 et on ne va s'intéresser qu'au cas où le résultat de la mesure est $S \cdot n_2 = 0$, ce qui correspond à un vecteur de Hilbert $|2\rangle$ ($S \cdot n_2 |2\rangle = 0$). On considère alors, à un instant t_1 intermédiaire, la proposition exprimant la propriété $S \cdot n_1 = 0$, associée à un vecteur de Hilbert $|1\rangle$.

En posant $E_1 = |1\rangle\langle 1|$, $E_2 = |2\rangle\langle 2|$, on peut considérer la famille d'histoires dichotomiques construite à partir de ces deux projecteurs et de leurs complémentaires. Cette famille est complète. Pour un hamiltonien $H = 0$ (spin libre) on constate qu'il existe deux familles complémentaires, toutes deux rationnelles, pour lesquelles la direction d'espace n_1 est respectivement parallèle à l'une ou l'autre de deux directions n' et n'' orthogonales entre elles. Dans la première de ces familles, on a l'implication « $S \cdot n_2(t_2) = 0$ » \Rightarrow « $S \cdot n'(t_1) = 0$ », alors que dans la deuxième famille, on a l'implication « $S \cdot n_2(t_2) = 0$ » \Rightarrow « $S \cdot n''(t_1) = 0$ ». Ainsi, non seulement a-t-on dans ce cas deux familles rationnelles complémentaires, mais chacune d'elles déduit de la même propriété (supposée observée) des propriétés du spin qui sont valables le long de deux directions orthogonales de l'espace. Qui plus est, ces propriétés correspondent à des vecteurs de Hilbert, $|S \cdot n' = 0\rangle$ et $|S \cdot n'' = 0\rangle$, qui sont orthogonaux.

Bien que surprenant, cet exemple ne fait que souligner que de telles propositions ne sont pas pertinentes lorsque l'on veut comprendre et exploiter une expérience. Elles n'ont pour effet que de nous entraîner dans des considérations sans conséquence pratique, qui n'ont d'intérêt que pour une réflexion sur la nature de la connaissance en physique, c'est-à-dire des considérations dont l'intérêt est purement philosophique. Pour qui admet les principes de la mécanique quantique, on ne peut rien dire de plus et la complémentarité est inévitable.

Ajoutons qu'on rencontre des exemples analogues de complémentarité dans ce qu'on appelle les *contrefactuels*. Ce sont des raisonnements du type « si je mesurais ceci, je pourrai conclure que... ». On s'aperçoit alors qu'une telle proposition peut être en conflit avec une autre du genre « si je mesurais cela, alors... ». Mais on ne fait pas de la physique avec des « si ».

*Le calcul**

On peut établir les résultats qui viennent d'être indiqués par le calcul suivant. L'espace de Hilbert d'un spin 1 a trois dimensions. Le générateur d'une rotation d'espace autour de l'axe z peut être représenté dans cet espace de Hilbert par la matrice iS_z qui transforme un vecteur de Hilbert de composantes (x_1, x_2, x_3) en $x'_1 = -x_2$, $x'_2 = x_1$, $x'_3 = 0$. Le vecteur propre correspondant à la valeur propre 0 de iS_z est donc $(0, 0, 1)$. Plus généralement, le vecteur propre qui correspond à $S \cdot n = 0$ a les mêmes composantes dans l'espace de Hilbert que le vecteur n de l'espace ordinaire, et son projecteur est la matrice $n \otimes n$. Pour deux vecteurs d'espace n' et n'' orthogonaux, les vecteurs de Hilbert qui correspondent à $S \cdot n' = 0$ et $S \cdot n'' = 0$ sont orthogonaux.

Comme on considère une famille d'histoires dichotomiques ne mettant en jeu que deux instants, on est dans le cas envisagé dans la section 116 et il n'y a qu'une seule condition de rationalité. Notant que, dans le cas présent, le projecteur sur le vecteur $|S.n = 0\rangle$ est identique, dans l'espace de Hilbert à trois dimensions à la matrice $n \otimes n$, la condition de rationalité (14.2) s'écrit :

$$\text{Tr}(n_1 \otimes n_1 . n_o \otimes n_o . (I - n_1 \otimes n_1) . n_2 \otimes n_2) \equiv (n_1 . n_2)(n_1 . n_o)(n_o . n_2) - (n_1 . n_2)^2(n_1 . n_o)^2 = 0,$$

ce qui est vérifié si $n_o . n_2 - (n_1 . n_2)(n_1 . n_o) = 0$.

Prenons le cas où $n_o = (1, 0, 0)$, $n_2 = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$, $n_1 = n_{\pm}$, en posant $n_{\pm} = c (\cos\theta, a^{-1}\sin\theta, \pm a^{-1}\sqrt{a-1} \sin\theta)$, a étant un réel plus grand que 1, et c un coefficient de normalisation. La condition de rationalité précédente est alors automatiquement satisfaite. Les deux vecteurs n_{\pm} sont orthogonaux si l'on a $a^2\cos^2\theta + (2 - a)\sin^2\theta = 0$, une équation en a qui possède effectivement des racines réelles si $\cos\theta < 1/3$.

131. Pour clarifier cette situation curieuse, il est bon de l'envisager sous l'angle de l'interprétation de Copenhague, en faisant appel à une méthode souvent utilisée par Heisenberg (1930). Elle consiste à concrétiser les propriétés supposées en introduisant des appareils de mesure imaginaires judicieusement disposés. Ainsi, on pourrait imaginer qu'il y ait trois appareils de mesure dans cette expérience : M' , M'' et M_2 , les deux premiers étant imaginaires et le dernier réel. Ce dernier, M_2 , réalise la mesure de la composante du spin le long de n_2 à l'instant t_2 . C'est par exemple un dispositif de Stern-Gerlach. Chacun des deux appareils M' et M'' peut être activé ou non à l'instant t_1 . Dans le cas de l'exemple de Kent, l'appareil M' n'est pas exactement un dispositif de Stern-Gerlach qui mesurerait la composante du spin le long de n' , mais un dispositif dichotomique qui ne fait que détecter si, oui ou non, la propriété $S.n' = 0$ a lieu à l'instant t_1 . On pourrait le réaliser en principe au moyen d'un aimant de Stern-Gerlach et un compteur D (qui peut être activé ou non) placé sur la trajectoire que doit suivre l'état de spin $S.n' = 0$. Cette trajectoire et les deux autres que suit la particule portant le spin dans les états $S.n = \pm 1$ sont ramenées en une seule par l'action d'un champ magnétique bien conçu (Figure 15.2), de sorte que le dispositif ne peut que tester la propriété $S.n = 0$. La particule passe ensuite dans un dispositif M'' identique à M' , hormis que la direction d'orientation de l'aimant est maintenant n'' . Ce n'est qu'après avoir traversé M' et M'' que la particule entre dans l'appareil de mesure M_2 qui est un appareil de Stern et Gerlach à la fois simple et concret.

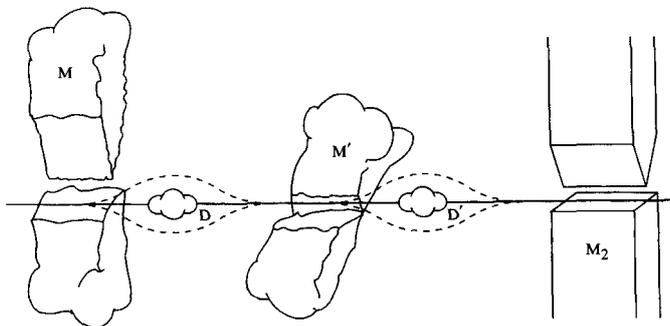


Figure 15.2 – Une expérience avec mesures imaginaires.

Le calcul précédent entraîne alors les conséquences suivantes : si M'' n'est pas activé, la statistique des événements pour lesquels le résultat de la mesure due à M_2 est $S.n_2 = 0$ est la même, que M' soit activé ou non, et, sur cet échantillon d'événements, le résultat $S.n = 0$ de M_2 coïncide toujours avec un « oui » de M' quand M' est activé. On a des résultats analogues quand M'' est activé et non M' , mais il est évidemment impossible d'activer simultanément M' et M'' sans bouleverser la statistique des mesures de M_2 . C'est en cette incompatibilité que la complémentarité se manifeste. (Notons aussi que l'activation de M' ou M'' modifierait fortement les mesures de M_2 qui aboutissent aux résultats $S.n_2 = \pm 1$.)

Au total, cette situation n'est guère plus surprenante que celles rencontrées précédemment. L'exemple de la particule alpha permettait de déduire de la préparation que la particule possède un moment cinétique $l = 0$, alors qu'on déduisait de la mesure faite au point x_2 une propriété de la position. Ces deux raisonnements complémentaires se référaient à des cadres logiques différents, à deux familles différentes d'histoires rationnelles, à des questions incompatibles. Dans le cas présent, il se trouve que les deux propriétés envisagées se réfèrent à des sous-espaces de Hilbert orthogonaux et qu'elles se déduisent d'un même résultat de mesure, mais toujours dans le cadre de deux descriptions différentes qui ne peuvent être concrétisées simultanément.

C'est dans cette référence nécessaire et finale à la réalité expérimentale que réside l'essentiel de ce que Bohr et Heisenberg nous ont appris. Notons pour finir que l'exemple qu'on a considéré pourrait être présenté sous une forme contrefactuelle en comparant les propositions « si je mesurais avec M' , ... » et « si je mesurais avec M'' , ... » Cela n'ajoute rien.

Les histoires comme mesures idéales

132. On s'est parfois demandé quelle était la justification de la méthode des mesures idéales de Heisenberg que l'on vient d'utiliser. Elle peut prendre, semble-t-il, tout son sens quand on la systématise dans le cadre des histoires et révèle alors une grande parenté entre les deux interprétations. Soit donc une famille complète d'histoires ayant trait à un certain système quantique S , et soit $\{E_j(t_k)\}$ l'ensemble de tous les projecteurs qui interviennent dans toutes ces histoires, quel que soit le temps. On prendra pour simplifier une famille d'histoires du type de Griffiths comme dans la section 102, où les temps sont les mêmes dans toutes les histoires.

Introduisons alors à la manière de Heisenberg autant d'appareils de mesure imaginaires M_{jk} qu'il y a de projecteurs dans la famille d'histoires. Un de ces appareils, noté M_{jk} , mesure l'observable $E_j(t_k)$ à l'instant t_k et il indique le résultat 1 ou 0 sur un cadran selon que la valeur propre de $E_j(t_k)$ mesurée est égale à 1 ou 0. Au dernier instant t_n dans la série des histoires, les appareils de mesure sont réels et non imaginaires. Imaginons alors qu'on observe les résultats qui sont marqués

par tous les appareils, idéaux aussi bien que réels. Les projecteurs associés à un même instant t_k étant orthogonaux, un seul appareil M_{jk} (c'est-à-dire avec une seule valeur de j) va donner le résultat 1, et la série des appareils dont l'aiguille est dans la position 1 apporte en principe une signature expérimentale (idéale) d'une certaine histoire de la famille.

Ces histoires ont-elles un sens ? C'est en fait la question que nous posons précédemment en des termes de logique pure et qui prend, à présent, une forme plus proche de la physique ordinaire. Si on se réfère aux exemples donnés par Heisenberg (1930) ou par Feynman (1965a) (discutant des expériences d'interférences), on constate que la question qu'ils posent dans le cadre « orthodoxe » est celle-ci : la présence des appareils imaginaires modifie-t-elle la statistique des données fournies par les appareils de mesure réels qui interviennent à la fin ? Autrement dit, dans un cas particulier : la présence de compteurs imaginaires placés dans les fentes d'un dispositif de Young affecte-t-elle la manifestation d'une figure d'interférences ?

Posée sous cette forme, la préservation des statistiques finales se traduit par un certain nombre de conditions. Ce que sont ces conditions, un calcul simple le montre ; elles sont purement et simplement les conditions de Griffiths ! On voit ainsi que la méthode des histoires peut fort bien être englobée dans le cadre conceptuel de Copenhague. Il est vrai qu'on se priverait ainsi des résultats ultérieurs apportés par la décohérence puisque, du point de vue de Copenhague, une réduction de la fonction d'onde est supposée se produire dans les appareils imaginaires. En revanche, toutes les considérations sur la complémentarité qui furent inspirées par l'interprétation orthodoxe ne peuvent que coïncider avec les conclusions logiques de la méthode des histoires.

On se contentera de donner la démonstration correspondante des conditions de Griffiths dans le cas $n = 2$ (c'est-à-dire de deux instants de référence). On suppose les règles de Copenhague valables. En désignant par $E_2^{(m)}(t_2)$ l'expression des divers résultats réels et terminaux, leur statistique est donnée par les probabilités $p(m) = \text{Tr} (E_2^{(m)}(t_2) \rho)$. Quand une mesure imaginaire donne le résultat 1 pour mesurer le projecteur $E_1^{(j)}(t_1)$ à l'instant t_1 (avec la probabilité $\text{Tr} E_1^{(j)}(t_1)\rho$), il y a réduction de l'opérateur densité qui devient :

$$\rho' = E_1^{(j)}(t_1)\rho E_1^{(j)}(t_1) / \text{Tr}\{E_1^{(j)}(t_1)\rho\}.$$

La probabilité pour observer successivement les deux résultats j et m aux instants t_1 et t_2 est alors, selon Aharonov, Bergman et Lebowitz (1964),

$$p(m, j) = \text{Tr} \{E_2(m)(t_2) E_1^{(j)}(t_1)\rho E_1^{(j)}(t_1)E_2(m)(t_2)\}.$$

Dire que la statistique de la mesure finale n'est pas affectée par la présence de l'appareil de mesure imaginaire revient à dire que l'on a

$$p(m) = \sum_j p(j, m),$$

pour toute valeur m . Le membre de gauche $p(m)$ est la probabilité en l'absence d'appareils imaginaires $\text{Tr}\{E_2(m)(t_2)\rho\}$ alors que le membre de droite est cette même probabilité en présence des appareils imaginaires. Or, l'équation ainsi écrite est identique à celle qui nous a conduit dans la section 116 à la condition de Griffiths, d'où la conclusion.

L'expérience d'Einstein, Podolsky et Rosen

133. On terminera par un dernier exemple de complémentarité, celui d'une expérience qui fut conçue par Einstein, Podolsky et Rosen (Einstein, 1935) et qu'on présentera dans une version de David Bohm (1951). On considère deux particules P et P' de spin $1/2$. Un appareil de mesure M peut mesurer la composante du spin de P le long d'une direction n et un autre appareil M' peut mesurer la composante du spin de P' le long de n' . Les deux appareils peuvent être arbitrairement éloignés l'un de l'autre. Les deux particules sont produites initialement dans un état pur de spin total 0, par exemple lors de la désintégration d'une particule instable Q . Rappelons que, quelle que soit la direction n , le vecteur d'état correspondant s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \{ |S.n = 1/2\rangle \otimes |S'.n = -1/2\rangle - |S.n = -1/2\rangle \otimes |S'.n = 1/2\rangle \}. \quad (15.1)$$

On n'entrera pas dans une description de l'appareillage de préparation ou de mesure, sauf à noter que la présence initiale de Q et celle de M et M' doit être prise en compte. Si aucune décision commune ne commande la planification des deux mesures (ce qu'on souligne parfois en les supposant faites dans deux galaxies différentes, sans concertation), elles mettent en jeu deux directions différentes n et n' et elles sont faites à des instants t et t' différents (ce qui est d'ailleurs toujours possible à condition de choisir un référentiel relativiste convenable).

Supposons pour la discussion que la mesure faite par M précède celle qui est faite par M' ($t < t'$) et qu'elle donne le résultat $S.n = +1/2$ alors que la seconde mesure donne le résultat $S'.n' = -1/2$ (Figure 15.3). Deux propositions relatives au spin de P' peuvent alors être envisagées un instant t'' où P' n'est pas encore mesurée alors que P l'a déjà été ($t < t'' < t'$) (on peut songer, par analogie, aux propositions qui entraînent dans l'exemple de la particule alpha de la section 128). Une de ces propositions tient compte de la mesure faite sur P à l'instant t et elle suppose que P' est dans l'état suggéré par l'état initial (15.1), c'est-à-dire possède la propriété $S'.n = -1/2$ (c'est la proposition analogue à celle qui supposait la particule alpha dans l'état $l = 0$). L'autre proposition suppose au contraire que la propriété qui sera constatée plus tard par la mesure M' à l'instant t' a déjà lieu à l'instant t'' , c'est-à-dire $S'.n' = -1/2$ (c'est l'analogue de la proposition qui supposait la particule alpha allant déjà en ligne droite avant d'être détectée). On constate, en complétant ces histoires par les négations des propriétés introduites, puis en vérifiant les conditions de rationalité et les implications nécessaires, que ces deux points de vue sont parfaitement rationnels, bien qu'évidemment complémentaires.

Dans le cas où les deux directions n et n' coïncident, de nombreux auteurs s'interrogent sur les conséquences du fait que les deux mesures sont totalement corrélées (on n'a jamais les résultats $S.n = +1/2$ et $S'.n = +1/2$ par exemple) alors qu'on ne suppose aucune communication des résultats entre un lieu de mesure et l'autre.

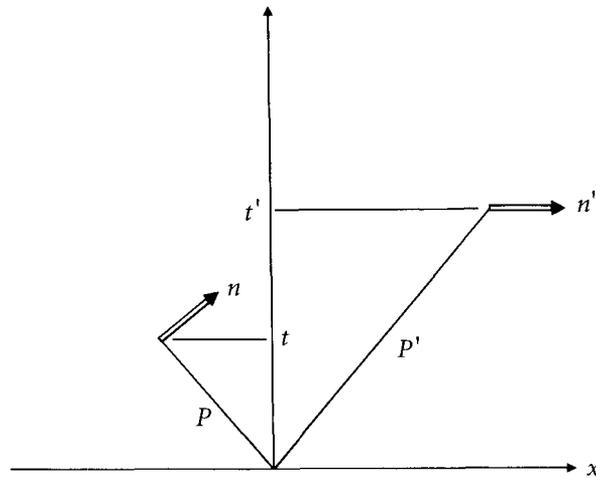


Figure 15.3 – L'expérience EPR.

Le point de vue d'Einstein, Podolsky et Rosen revenait à supposer (dans la présente version de l'expérience) que la mesure faite sur P par M fait immédiatement connaître une propriété de P' sans que la particule P' ait été en contact direct avec un appareil de mesure. Ils en concluaient que cette propriété de P' constitue un « élément de réalité », c'est-à-dire apporte la connaissance d'une propriété véritablement *réelle*. Le point de vue de Bohr revenait au contraire à considérer que le fait de prendre n et n' dans la même direction constitue un choix commun, délibéré, pour M et M' et que la corrélation étroite des résultats d'expérience réside entièrement dans ce choix préalable, lequel fait donc partie du processus de préparation (une préparation incluant non seulement la particule Q originelle mais tout le dispositif expérimental). La prévision du résultat d'une mesure sur P' résulte alors non seulement d'une mesure faite sur P , mais aussi de la connaissance préalable de la préparation de tout le dispositif.

Du point de vue exprimé par Bohr (1935a, 1935b) dans sa réponse à Einstein, Podolsky et Rosen, cette expérience n'est pas substantiellement différente d'un grand nombre d'autres et elle ne présente aucune relation privilégiée avec la réalité. On reviendra sur cette question au chapitre 22 pour décrire comment l'expérience a été réalisée, en soulignant ce qui semble faire aujourd'hui son intérêt essentiel : la mise en évidence d'états « enchevêtrés » à longue distance de la forme (15.1), avec toutes leurs diableries surprenantes, mais attestées.

134. Ce chapitre porte sur plusieurs questions qui sont rarement abordées dans les livres de physique mais qui n'en sont pas moins essentielles pour comprendre la mécanique quantique. Le thème central sera de montrer que le sens commun (c'est-à-dire la vision du monde ordinaire que nous partageons tous) n'est aucunement en conflit avec la physique, même si celle-ci est fondée sur des lois quantiques. La manière banale, évidente, dont nous concevons la réalité est ainsi parfaitement valable à l'échelle macroscopique où nos sens s'exercent. C'est sur de tels résultats que peut s'appuyer une compréhension directe de la physique quantique. Cette compréhension ne consiste pas en effet à essayer de saisir les lois quantiques à la lumière du sens commun. Tout au contraire, c'est le conditionnement classique de notre esprit par le monde extérieur qu'on « explique » comme une des conséquences des principes quantiques. Certains lecteurs trouveront peut-être que ce genre de réflexions est plus philosophique que scientifique, même s'il s'accompagne de preuves. Ils pourront alors omettre la lecture de ce chapitre sans que cela ait d'inconvénient pour la continuité de l'exposé.

Notre vision première du monde physique se situe à notre échelle et elle est classique. La première démonstration d'une correspondance entre cette physique classique et une autre sous-jacente, quantique, remonte déjà loin dans le passé avec le théorème d'Ehrenfest. Cela n'avait pas suffi cependant à faire entrer la physique classique dans la filiation de la quantique, d'en faire, en quelque sorte, un cas particulier dont les concepts propres émergeraient des lois quantiques. Une telle mutation de la pensée se heurtait à deux blocages qui pouvaient sembler insurmontables car issus de caractères essentiels du classique.

- Le premier blocage venait du déterminisme. On a vu plus haut combien il est indispensable, pour comprendre, qu'un appareil fonctionne comme prévu ou qu'un enregistrement constitue un témoin fidèle du passé. On a longtemps souligné l'opposition supposée totale entre le déterminisme et le probabilisme propre à la mécanique quantique.

- Le second blocage, à une vue d'ensemble, était de nature logique, ce que Bohr indique clairement à maintes reprises dans ses écrits. La vision classique du monde est en effet bien plus profondément ancrée dans notre esprit que ne peut

l'être aucune science. Elle est la source principale de nos concepts et le lieu de notre intuition (laquelle est au premier chef une représentation mentale de nature visuelle). Elle a sa logique qui est celle sens commun (premier stade très pragmatique de la logique) et sa vérité (fondée avant tout sur la donnée des faits). Face à cela, le monde quantique a longtemps semblé impénétrable à la logique, même formelle, et les faits semblaient se dissoudre dans le paradoxe du chat de Schrödinger.

Un des résultats notables de l'interprétation moderne est qu'aucun de ces caractères de la vision classique ne s'oppose à y voir une conséquence des lois quantiques. C'est ce qu'on montre dans le présent chapitre en ce qui concerne le déterminisme et la logique. On notera cependant que les phénomènes de frottement et de dissipation ne seront pas pris en compte ici et ne le seront qu'après l'étude de la décohérence.

Outre les théorèmes du chapitre 10, les résultats sur le déterminisme s'inspirent de deux idées. La première porte sur la nature du déterminisme. Quand on l'envisage dans un cadre logique, il se présente comme une équivalence (logique) entre deux propriétés classiques relatives à des instants différents. La seconde idée consiste à reformuler le déterminisme de manière probabiliste. Il suffit pour cela de ne pas le considérer comme absolu et d'admettre une certaine probabilité pour que les conclusions tirées du déterminisme classique soient erronées. Cette probabilité est infinitésimale dans le cas du mouvement d'un satellite terrestre, mais elle est de l'ordre de 1 dans le cas d'un électron atomique.

On indiquera aussi comment la logique du sens commun se justifie et s'applique. La définition la plus simple de cette logique est de dire que ses propositions se réfèrent à des histoires (notion intuitive entre toutes dans le cas classique) et que ces histoires incluent uniquement des propriétés classiques (ce qui va de soi). La logique du sens commun apparaît ainsi comme un cas particulier de celle des histoires, dans lequel on spécifie à la fois les objets physiques mis en jeu (tous macroscopiques) et les propriétés qu'on en retient (toutes classiques). Il se trouve que, dans ce cadre bien défini, la complémentarité n'intervient pas (du fait que les propriétés classiques commutent pratiquement). Ce cadre logique est donc bien unique, tout comme la réalité empirique ordinaire qu'il est capable de décrire.

Le déterminisme

Quel est le problème ?

135. Le déterminisme classique s'applique à un système quantique sous deux conditions :

- la correspondance dynamique entre quantique et classique donnée par le théorème d'Egorov (section 97) est applicable ;
- l'état initial du système peut être décrit classiquement.

Précisons la seconde condition. On considère un système macroscopique pour lequel des variables collectives ont été sélectionnées. Soit ρ son opérateur d'état

initial qui décrit aussi bien l'état de l'environnement (interne et externe) que les observables collectives. Il est commode de restreindre la description du système macroscopique aux seules variables collectives en introduisant un opérateur d'état « collectif » ou « réduit », obtenu en prenant une trace partielle sur l'environnement de l'opérateur d'état complet :

$$\rho_c = \text{Tr}_e \rho. \quad (16.1)$$

Tout comme l'opérateur d'état complet, cet opérateur réduit est positif et de trace 1 (la trace étant entendue, dans ce cas, comme prise sur le sous-espace de Hilbert collectif).

Soit alors une propriété classique associée à une certaine cellule régulière C_o de l'espace de phase, par exemple un domaine de forme rectangulaire spécifiant les coordonnées de position et de moment avec des barres d'erreurs fixées. Soit E_o un des projecteurs associés à C_o , exprimant la propriété : « les coordonnées et moments (x, p) sont donnés avec des erreurs maximales $(\Delta x, \Delta p)$ ». La condition pour que l'état initial à un instant t_o soit bien décrit par cette propriété classique est que l'on ait :

$$E_o \rho_c = \rho_c, \quad (16.2)$$

d'où résulte $\rho_c = \rho_c E_o = E_o \rho_c E_o$ en passant à l'équation adjointe, et en itérant.

Pour formuler alors le déterminisme, il faut introduire la cellule C qui se déduit de C_o par la dynamique classique après un temps $t - t_o$, ainsi que la propriété classique associée à C , comme la précédente était associée à C_o (il faut supposer que C est une cellule – connexe – pour parler de déterminisme). Si le déterminisme classique était parfaitement valable, il s'ensuivrait que ces deux propriétés sont équivalentes, l'énoncé de l'une impliquant automatiquement la validité de l'autre. Une autre formulation du déterminisme, mieux compatible avec des lois fondamentales quantiques, se fonde sur le calcul des probabilités. On suppose comme par exemple dans un jeu de dés que la propriété initiale (C_o, t_o) a une probabilité de réalisation $p(C_o, t_o)$ (le cas précédent se ramenant à celui-ci en posant $p(C_o, t_o) = 1$). Le déterminisme se traduit alors par les propriétés suivantes des probabilités :

$$p(C, t) = p(C_o, t_o) = p((C, t), (C_o, t_o)),$$

où la dernière probabilité écrite est la probabilité conjointe pour que (x, p) soit dans C_o à l'instant t_o et dans C à l'instant t . On peut exprimer ceci à l'aide de probabilités conditionnelles, ce qui donne :

$$p((C, t) | (C_o, t_o)) = p((C_o, t_o) | (C, t)) = 1. \quad (16.3)$$

Ainsi, dans une logique probabiliste, le déterminisme apparaît comme une double implication où la propriété au temps t_o implique celle au temps t , et réciproquement. Ces deux propriétés peuvent donc être considérées comme logiquement équivalentes. (On peut penser à deux propriétés d'une pomme, l'une posant que la pomme part d'une branche, et l'autre que la pomme se retrouve ensuite sur le sol à l'aplomb de la branche).

Cette manière de formuler le déterminisme est très proche de celle de Laplace. On n'y ajoute que l'idée d'implication par le biais de probabilités conditionnelles,

c'est-à-dire ce qu'on appelle l'inférence bayésienne. Nous nous intéressons évidemment ici à la question de savoir si les équations (16.3) sont valables, dans quelles conditions, et avec quelle approximation, en tenant comme acquis les principes de la mécanique quantique.

Établissement du déterminisme

136. On considère donc comme au chapitre 11 l'hamiltonien collectif H_c dont le symbole $h(x, p)$ est considéré comme une fonction de Hamilton engendrant un mouvement classique. La cellule C est la transformée de C_o par ce mouvement classique entre les instants t_o et t . Si les conditions du théorème d'Egorov sont satisfaites, un projecteur E associé à la cellule C est relié à E_o par la dynamique quantique, sous la forme :

$$E = U(t - t_o) E_o U(t - t_o)^{-1} + \delta E, \quad (16.4)$$

où $U(t)$ est l'opérateur d'évolution, et l'opérateur δE est petit.

Dans les applications du théorème d'Egorov à la logique, il faut prendre garde aux risques de confusion signalés au chapitre 10. Un projecteur tel que E_o n'exclut pas totalement l'extérieur de la cellule C_o et, en particulier, les points extérieurs très proches de la frontière. Il est bon alors, pour atteindre la meilleure formulation possible du déterminisme, de recourir à des cellules qui excluent suffisamment les erreurs, comme celles qu'on a considérées dans les sections 92 et 95 (équation (11.4)). On introduit pour cela une cellule C' qui englobe C , de manière que leurs frontières soient à une distance faible, mais suffisante, pour que les erreurs de confusion soient exponentiellement petites (Figure 16.1). La cellule C' peut être par exemple un rectangle d'erreurs, et il est clair que sa considération ne peut qu'augmenter le degré de validité de l'implication $C_o \Rightarrow C'$ par comparaison avec l'implication $C_o \Rightarrow C$ (en utilisant une notation simplifiée où le temps est sous-entendu : ainsi la dernière implication qu'on vient d'écrire est en fait

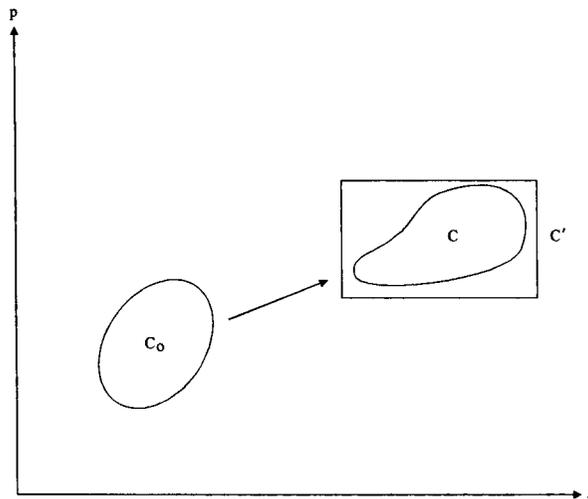


Figure 16.1 La formulation quantique du déterminisme.

$(C_o, t_o) \Rightarrow (C, t)$). On obtient ainsi une expression du déterminisme sous la forme d'une implication allant dans un sens déterminé du temps (ici du présent vers le futur). C'est aussi la forme qu'on peut tester expérimentalement en physique classique, par opposition à la version laplacienne précédente qui supposait une équivalence logique parfaite et appartient au domaine de l'abstraction théorique.

Si E' est un projecteur associé à C' , l'équation (16.4) est remplacée par une autre équation exprimant que la proposition (C', t) n'ajoute rien à la proposition (C_o, t_o) vis-à-vis de laquelle elle est redondante. En termes de projecteurs, une proposition de projecteur E' est redondante vis-à-vis d'une proposition E si $EE' = E'E = E$. Dans le cas présent, et compte tenu des erreurs, cela donne en particulier :

$$U(t - t_o) E_o U(t - t_o)^{-1} E' = U(t) E_o U(t)^{-1} + \delta'E. \quad (16.5)$$

Il existe une relation analogue pour $E'U(t - t_o) E_o U(t - t_o)^{-1}$. La relation (16.5) est valable chaque fois que le théorème d'Egorov s'applique, avec une correction dont la norme hilbertienne $\|\delta'E\|$ est extrêmement petite. L'erreur présente même souvent dans ce cas le comportement exponentiel dont un exemple a été donné dans la formule (11.4).

On constate alors que l'implication classique $C_o \Rightarrow C'$ est valable avec une probabilité d'erreur extrêmement faible si on l'entend comme une implication entre propriétés quantiques. En d'autres termes, on peut légitimement s'appuyer sur la formulation classique du déterminisme, sans devoir abandonner pour cela l'hypothèse de la valeur universelle de la physique quantique.

*Indications sur la démonstration**

Introduisons une famille d'histoires dichotomiques à deux temps, obtenue à partir des projecteurs $(E_o(t_o), E'(t))$ représentant l'histoire classique $((C_o, t_o), (C', t))$, en ajoutant les négations de chacune des propriétés. Si l'on néglige d'abord la correction $\delta'E$, on constate que cette famille d'histoires est rationnelle. Il n'y a, en effet, qu'une seule condition de rationalité qui s'écrit :

$$\text{Tr}(\bar{E}_o \rho E_o U^{-1}(t) E' U(t)) = 0. \quad (16.6)$$

Or la trace du premier membre, dans l'approximation considérée, compte tenu de (16.5) où $\delta'E$ est négligé, s'écrit $\text{Tr}(E_o \rho \bar{E}_o)$ et elle est effectivement nulle. Il est clair également que la probabilité de la proposition « C_o et C' » et de la proposition C' sont égales, d'où l'implication annoncée.

Pour compléter la démonstration, il faut tenir compte de $\delta'E$. On considérera seulement la manière dont celle-ci affecte la condition de rationalité, le traitement des corrections pour les probabilités étant analogue. La trace (16.6) prend la forme :

$$\text{Tr}(\rho U^{-1}(t) \delta'E U(t) \bar{E}_o). \quad (16.7)$$

On peut établir une borne supérieure de cette quantité en s'appuyant sur l'inégalité suivante, qui détient la clef des approximations en logique quantique :

$$|\text{Tr}(AB)| \leq \text{Tr}|A| \cdot \|B\|. \quad (16.8)$$

On a en effet l'inégalité $\|U^{-1}(t) \delta'E U(t) \bar{E}_o\| \leq \|\delta'E\| \cdot \|\bar{E}_o\| = \|\delta'E\|$. On a, de plus $\text{Tr}|\rho| = \text{Tr} \rho = 1$, d'après la positivité de ρ . Ainsi, la condition de rationalité est satisfaite avec une borne supérieure d'erreur $\|\delta'E\|$ qui se montre très souvent excellente. On peut évaluer de manière analogue les corrections aux probabilités qui contrôlent l'implication déterministe.

On peut également considérer le déterminisme dans la direction inverse du temps. Mieux vaut alors fixer la cellule C qui représente une donnée enregistrée à l'instant t , et considérer une cellule C'_o intérieure à C_o (par exemple un rectangle d'erreurs) qui représente le passé que l'on reconstruit à partir de son enregistrement (cet enregistrement apparaît alors comme parfait car on ne tient pas compte encore de la dissipation). L'implication $C \Rightarrow C'_o$ s'établit alors comme la précédente.

Le statut du déterminisme

137. La différence essentielle entre la conception purement classique du déterminisme et celle qu'on vient d'établir tient au fait que l'énoncé de celle-ci est probabiliste, même si la probabilité en question est très proche de 1. Les probabilités conditionnelles qui sous-tendent cette formulation du déterminisme ne sont pas strictement égales à 1. Ainsi, dans l'exemple précédent, l'implication $C_o \Rightarrow C'$ est contrôlée par l'inégalité :

$$p((C', t)|(C_o, t_o)) \geq 1 - \|\delta'E\|. \quad (16.9)$$

Que le déterminisme soit soumis à des erreurs, fussent-elles minimales, n'a rien pour surprendre. Aussi petites qu'elles soient, les fluctuations quantiques ne peuvent être en effet ignorées complètement. Georges Gamow les illustre par le cas d'une automobile qui passe d'un box de parking au box voisin, en traversant un mur par effet tunnel. Il aurait fait frémir davantage ses lecteurs physiciens en prenant l'exemple d'un voltmètre qui indique 10 volts au lieu de 220 volts réellement présents, parce que la position de l'aiguille a subi une fluctuation quantique géante. Tout cela est amusant mais sans aucune importance tant que les probabilités de ces aberrations restent totalement négligeables.

Les conditions d'application du déterminisme sont celles du théorème d'Egorov, lesquelles sont sans doute plus larges que celles que permet la démonstration actuelle de ce théorème, sans aller néanmoins au-delà des cas où il est clairement en défaut. On a vu au chapitre 11 quels sont les cas les plus évidents de violation du théorème d'Egorov, ceux donc où l'on peut s'attendre à des violations significatives du déterminisme. L'un d'eux se présente quand il existe une barrière de potentiel suffisamment étroite pour permettre la manifestation d'un effet tunnel à l'échelle macroscopique.

On a longtemps cru cela impossible, mais on a fini par réaliser à la fin des années quatre-vingt certains SQUIDS (*superconducting quantum interference devices*) qui sont des objets macroscopiques capables de produire tout à coup, aléatoirement, une saute brusque dans le potentiel électrique aux bornes du dispositif (Clarke *et al.*, 1988). La théorie attribue ce fait à un effet tunnel (Leggett, 1987). Un autre cas d'exception au théorème d'Egorov est plus évident. C'est celui d'un système à dynamique chaotique quand l'échelle du chaos se rapproche

de celle de la constante de Planck. Il semble cependant que les prédictions statistiques que l'on peut faire dans ce cas, tant à partir de la physique classique que de la physique quantique, conduisent à des résultats très semblables.

La logique du sens commun

138. Sans vouloir définir ce qu'est le sens commun, on peut considérer que son application en physique se traduit par un usage de la logique où toutes les propositions sont classiques. Il s'exerce surtout dans des conditions où le déterminisme s'applique et on se restreindra à ce cas (en ne cherchant pas par exemple à définir ce que la méthode cartésienne aurait pu dire d'un mouvement chaotique).

Le cadre logique des histoires, quand on n'y fait entrer que des propriétés classiques, s'accorde bien d'après ce qui précède avec le sens commun, tout en restant dans le cadre strict de la mécanique quantique. C'est un cadre rationnel où le déterminisme peut s'appliquer et, bien que des erreurs puissent l'affecter, elles sont d'ordinaire négligeables. Quand il arrive que ces erreurs deviennent notables, on peut admettre simplement que le sens commun cesse d'être valable dans les conditions où l'on a cherché imprudemment à l'étendre. Cela a une conséquence importante en ce sens que le domaine du sens commun, quoique très vaste, apparaît ainsi comme limité, et même clairement circonscrit.

Cette forme très restrictive de la logique quantique est unique, parce qu'elle se limite entièrement à des propositions classiques. Étant unique, elle est exempte des ambiguïtés de la complémentarité. Étant déterministe, elle ne rencontre aucun conflit avec les concepts ordinaires concernant la réalité : l'unicité du réel à chaque instant, la possibilité d'en éprouver les qualités sans les perturber par l'observation. Les objections essentielles qu'on rencontrait en mécanique quantique contre la tentation de parler des événements d'une histoire comme « réels » n'étaient dus qu'à la complémentarité. Elles sont donc levées dans le cas présent. En somme, on retrouve la conception ordinaire de la réalité en même temps que le sens commun. C'est là une conclusion satisfaisante mais qui demeure limitée ; elle ne nous permet évidemment pas d'en déduire ce que la réalité « est » en dehors du domaine d'application du sens commun.

Remarques sur la structure de l'interprétation*

Les résultats qu'on vient d'indiquer soulèvent plusieurs questions de philosophie des sciences que nous allons esquisser rapidement.

La physique classique comme science émergente

139*. L'idée d'émergence a trait aux relations qui existent entre des sciences différentes. Là où le scientisme du dix-neuvième siècle établissait une hiérarchie

entre les sciences par une réduction brutale de certaines au rang de sous-produits d'une autre, la notion d'émergence (Anderson, 1972) souligne au contraire leur autonomie conceptuelle et méthodologique. On peut la définir ainsi : une science *B* émerge d'une science *A* lorsqu'elle ne s'applique qu'à une partie des systèmes relevant de *A*, et que les concepts et les lois qui structurent *B* sont fondés sur ceux de *A* (de manière explicite ou sur de simples considérations de compatibilité), alors que ces concepts et ces lois restent clairement différents de ceux de *A*, au moins en partie, et qu'ils doivent leur efficacité à cette différence et à la spécificité de leur domaine d'application.

Les exemples sont nombreux à l'intérieur même de la physique. Ainsi, le modèle standard des particules élémentaires, avec ses quarks, constitue une base d'où émerge la description ordinaire des interactions entre les nucléons (faits de trois quarks mais cependant traités comme de simples particules). Cette description émergente engendre la physique nucléaire. Les concepts changent distinctement en passant d'une science à l'autre : la physique nucléaire ne fait aucune référence aux quarks ni aux gluons ; elle se réfère à une théorie phénoménologique des interactions entre nucléons où les forces sont attribuées à l'échange de pions et de résonances mésoniques, sans tenir compte de la structure en quarks des mésons. Au bout du compte, la physique nucléaire se dispense même de ce dernier intermédiaire pour ne plus utiliser que des potentiels d'interaction entre nucléons qui lui donnent une autonomie conceptuelle à la fois complète et efficace. Ainsi, la physique nucléaire ordinaire est-elle à deux étages d'émergence au-dessous (ou au-dessus) du modèle standard. Le passage d'un étage à l'autre n'est encore que partiellement démontré et fait toujours l'objet de recherches destinées à le préciser et le justifier davantage.

Un autre exemple bien connu en physique de la matière condensée a trait à la supraconductivité. La science de référence est dans ce cas la physique quantique des interactions entre les électrons et les ions atomiques à l'intérieur d'un réseau cristallin. Cela est encore très proche des fondements de la théorie quantique. La disposition des ions en réseau et la dégénérescence des électrons entraînent des effets de corrélation entre les électrons qui se traduisent par un concept émergent : celui de paires d'électrons liés, ou *paires de Cooper*. Une autre étape d'émergence, de celles qui font passer des mécanismes microscopiques aux apparences macroscopiques, conduit alors à tous les phénomènes de supraconductivité avec leurs concepts et leurs lois propres (loi de London, effet Meissner, etc.). Là encore, les transitions d'un étage à l'autre sont plus ou moins correctement justifiées et l'on continue à les améliorer peu à peu. On pourrait multiplier les exemples en physique et ailleurs, mentionner évidemment l'émergence de nombreux concepts de chimie à partir d'une base quantique, sans oublier l'exemple le plus important, et le moins bien compris, qui concerne les relations entre la biologie, la physique et la chimie.

La raison pour laquelle nous ouvrons cette parenthèse est de mettre en garde contre une vision trop réductionniste des relations entre physique classique et physique quantique. On vient de voir comment la première émerge de la seconde,

et peu d'émergences ont été analysées aussi complètement. Il est vrai qu'aucune autre ne paraissait d'abord semée d'autant d'embûches, tellement les concepts paraissaient éloignés, et plus encore les cadres logiques du déterminisme et du probabilisme. L'émergence de la physique classique est, en ce sens, un remarquable cas d'école pour la philosophie des sciences. Elle montre comment des concepts spécifiques peuvent être construits *explicitement* en partant de concepts plus généraux, à condition de se placer dans une situation bien définie (macroscopique dans le cas présent). On peut y suivre en détail comment les nouveaux concepts se détachent, trouvent leurs correspondants concrets et, finalement, s'exercent de manière autonome dans leur domaine propre où ils s'affirment incomparablement plus efficaces que les concepts trop généraux qui leur demeurent sous-jacents mais qu'on ne peut leur substituer.

Un renversement des prémisses

140*. C'est la structure de l'interprétation elle-même qui sera le sujet de notre seconde remarque, déjà évoquée au chapitre 7. En effet, les réflexions sur l'interprétation de la mécanique quantique se sont toujours partagées, inégalement, entre deux grandes tendances dont les protagonistes principaux furent Bohr et Einstein. C'est sans doute leur attitude vis-à-vis de la question de la réalité qui les sépare le plus nettement.

Pour Bohr, il appartient d'abord à la physique de découvrir des lois et ensuite seulement, dans un second temps, cela peut permettre de mieux cerner le sens du mot *réalité* et d'apprendre son meilleur usage.

Pour Einstein, qui se place en cela dans la lignée de Descartes, notre pensée elle-même dispose de catégories assez sûres pour cerner, non pas le mot, mais la nature même de la réalité. Les philosophes ont eu tendance dans leur majorité à préférer la démarche d'Einstein, ainsi que des physiciens qui espéraient trouver ailleurs la pièce manquante du puzzle quantique, par exemple dans des « variables cachées ». Un des plus grands succès qui sanctionne la ligne de Bohr a été de voir l'extraordinaire progrès de vastes domaines de la physique, sans que jamais il ait été besoin de remettre en question les bases pratiques de son interprétation. Aucune indication ne s'est manifestée, en revanche, en faveur de l'existence d'une classicité ou d'un déterminisme cachés, ou encore d'une faille ou une incomplétude des principes quantiques.

Si certains progrès ont pu être faits dans l'interprétation elle-même, ils sont nettement allés dans la direction préconisée par Bohr. Ainsi, la découverte de l'effet de décohérence, sur lequel nous reviendrons, est la pure conséquence de l'exploitation directe des principes. L'intégration de la physique classique, qu'on vient de voir, rompt en partie avec les directives épistémologiques de Bohr, mais elle n'en est pas moins conforme à sa pensée directrice. Elle va seulement plus loin encore, en faisant du sens commun, de sa logique et (comme on le verra) de sa représentation intuitive et visuelle, une émergence issue du quantique.

On peut alors revenir à la question première : comment comprendre la physique quantique ? Comprendre signifie étymologiquement « prendre ensemble ».

Dans le domaine que nous étudions, *comprendre* et *interpréter* sont pratiquement synonymes, d'autant plus qu'il s'agit de prendre ensemble les concepts quantiques et la pratique courante de l'expérience. Cela peut se faire de deux manières. L'une est celle de la philosophie traditionnelle de la connaissance ; elle part du sens commun qu'elle raffine éventuellement pour en faire des principes philosophiques, et elle s'efforce alors d'éclairer et de juger les principes de la théorie physique. L'autre manière, celle de Bohr, part des principes atteints par la science (jugés plus sûrs que de quelconques principes philosophiques *a priori*) et elle vise à les concilier avec l'évidence du monde ordinaire. À présent, elle fait plus que concilier, puisqu'elle englobe. Elle atteint en ce sens à un « renversement des prémisses » par comparaison avec la philosophie classique de la connaissance. Entre le sens commun et la connaissance des lois, les rôles des hypothèses et de la conclusion sont interchangés. Cet aspect important du jeu de *comprendre* méritait d'être souligné.

Ce changement de prémisses modifie sensiblement la situation vis-à-vis de certains principes philosophiques dont les relations avec la physique quantique étaient plus que délicates. On ne part plus, en effet, de l'évidence apparente de la causalité (tout effet a une cause immédiate), ou de la localité (tout objet a un lieu). La séparabilité est un autre principe classique en délicatesse avec le quantique : elle affirme essentiellement qu'on peut connaître les propriétés d'un objet indépendamment du reste du monde, sinon on parle souvent de science « holistique » qui traiterait du tout, plutôt que des parties. Cette question de la séparabilité est au cœur des discussions sur le paradigme d'Einstein, Podolsky et Rosen. En fait, il semble plutôt que le principe mis à mal par la mécanique quantique n'est pas celui d'une séparabilité spatiale mais plutôt d'une séparabilité temporelle : la totalité de ce qu'on peut dire d'un objet et de sa relation au reste du monde dépend en effet de son état, lequel dépend de l'histoire antérieure de l'objet. Vue sous cet angle, la non-séparabilité est le corollaire direct de l'inapplicabilité du déterminisme (qui ramène l'avenir et le passé plus ou moins lointains dans l'immédiateté de l'instant).

Après renversement des prémisses, les difficultés principales que l'interprétation rencontrait avec l'épistémologie disparaissent par une amputation des principes philosophiques. La causalité (autre nom du déterminisme), la localité et la séparabilité (que celle-ci soit spatiale ou temporelle) restent parfaitement valables et même en principe démontrables dans le cas des objets macroscopiques (à l'exception de curiosités de laboratoire). Mais ce ne sont plus des principes universels, au contraire, sans doute, des principes plus fondamentaux dont ils émergent. Les principes déchus doivent désormais se cantonner au monde macroscopique qui nous les avait suggérés.

141. On va poursuivre l'étude des systèmes macroscopiques, car deux effets très importants nous échappent encore. L'un est la dissipation, autrement dit le frottement, qu'on a dû laisser de côté jusqu'ici. L'autre est plus subtil et de loin le plus important dans l'interprétation actuelle : c'est la disparition des interférences quantiques au niveau macroscopique.

Toute la physique quantique repose en effet sur une théorie dont la base est un principe de superposition, alors que les expériences ordinaires, visibles, à notre échelle, ne laissent subsister aucune trace de cette structure linéaire. Aucune ? Même pas, car il y a l'exception des interférences lumineuses qui ne fait qu'épaissir le problème, car qu'est-ce qui singularise alors la lumière à ce point ?

Ces problèmes sont difficiles et il s'est écoulé longtemps entre l'évidence de leur présence et le germe de leur solution dont le mot clef est : *l'irréversibilité*. Les systèmes macroscopiques possèdent, par définition, un très grand nombre de degrés de liberté ; chacun correspondant à un mouvement erratique d'un électron ou d'un atome ou à l'évolution non moins erratique d'un fragment de fonction d'onde.

Tous ensemble, les petits mouvements extraient l'énergie des mouvements classiques, à grande échelle et bien ordonnés, ce qui donne lieu à la dissipation. On a déjà indiqué, dans la section 61, comment la phase de la fonction d'onde de l'environnement, très sensible au mouvement classique d'ensemble, détone, déraile, et conduit à une décohérence où disparaissent les harmonies de phase qui auraient pu être visibles à grande échelle sous la forme d'interférences macroscopiques.

On a vu également dans la section 61 une interprétation mathématique intuitive de cet effet, mettant directement en jeu la phase des fonctions d'onde. On verra dans le chapitre suivant une théorie qui fait davantage ressortir dans l'effet de décohérence son caractère de processus irréversible. Outre ces deux voies,

il existe une collection de modèles variés qui ont joué un grand rôle dans l'obtention initiale et la compréhension des résultats. On n'examinera pas, dans le présent chapitre, les aspects théoriques de ces travaux qu'on verra plus tard. On adopte plutôt un point de vue phénoménologique en admettant les résultats principaux de la théorie, c'est-à-dire les équations essentielles auxquelles celle-ci aboutit, pour se concentrer sur leurs conséquences pratiques.

Les hypothèses

142. Le cadre sera encore celui qu'on a défini au chapitre 7 (sections 58-60). On s'intéresse à un système macroscopique dans lequel des observables collectives ont été sélectionnées. D'innombrables autres degrés de liberté décrivent en outre l'environnement interne du système (c'est-à-dire sa matière faite de particules) et son environnement externe (atmosphère et lumière ambiante). Notre but est de décrire ce qui peut être observé, c'est-à-dire le sous-système décrit par les observables collectives. Il conviendrait en fait de parler ici d'observables « pertinentes » plutôt que « collectives ». Ainsi sont pertinentes, lors d'une mesure, les observables collectives qui correspondent à la position et à la vitesse des diverses parties de l'appareillage (décrites à la manière des chapitres 10 et 11) mais aussi, bien évidemment, certaines observables du système microscopique mesuré (atome, particule, etc.).

Précisons d'abord quelques notations. On désignera par \mathcal{H}_c l'espace de Hilbert où agissent les observables pertinentes (qu'on continuera cependant d'appeler collectives). L'environnement est associé quant à lui à un espace de Hilbert \mathcal{H}_e . L'espace de Hilbert total est le produit tensoriel $\mathcal{H} = \mathcal{H}_c \otimes \mathcal{H}_e$ (ce qui signifie simplement qu'une fonction d'onde complète dépend des variables collectives et de celles de l'environnement). Il est commode d'imaginer le système collectif et l'environnement comme deux sous-systèmes dynamiques couplés. On écrit l'hamiltonien total sous la forme :

$$H = H_c + H_e + H_1, \quad (17.1)$$

où H_c est un opérateur collectif, H_e l'hamiltonien de l'environnement (dont la valeur moyenne est l'énergie interne) et H_1 représente un couplage entre les deux sous-systèmes. C'est lui qui permet des échanges d'énergie entre les deux systèmes et il intervient donc dans les effets de dissipation.

Notons au passage que la forme (17.1) de l'hamiltonien suppose que les observables collectives sont choisies une fois pour toutes. Ce n'est pas toujours le cas. Ainsi, dans une expérience de mesure utilisant une chambre de Wilson, une chambre à bulles ou une chambre à fils, les observables collectives peuvent être associées à des gouttelettes, des bulles ou des étincelles qui apparaissent au fil

du temps et devraient être décrites par leurs propres observables collectives. Le meilleur moyen pour tenir compte de cette dépendance temporelle semble être alors de faire intervenir des histoires qui les prennent en compte, mais nous laisserons cet aspect de côté.

On sait que l'état complet du système est décrit par un certain opérateur d'état ρ , mais celui-ci apporte un embarras de richesse : il contient toute l'information qui peut être présente dans le système, qu'elle soit accessible ou inaccessible, actuelle, ou simple marque du passé, en fait, tant de choses mêlées qu'on ne peut rien en faire en pratique. Si l'on n'a accès qu'aux observables collectives, à leurs valeurs et à leurs propriétés, toutes les informations correspondantes sont contenues dans l'opérateur d'état « réduit » ou « collectif », défini par :

$$\rho_c = \text{Tr}_e \rho, \quad (17.2)$$

où Tr_e désigne une trace partielle sur l'environnement, traité ainsi comme « ce qu'on ne saurait voir ». L'opérateur d'état réduit permet en effet de connaître en principe toutes les propriétés collectives car, si l'une d'entre elles est associée à un opérateur de projection E_c , on a :

$$\text{Tr}(E_c \rho) = \text{Tr}_c(\text{Tr}_e(E_c \rho)) = \text{Tr}_c(E_c \text{Tr}_e \rho) = \text{Tr}_c(E_c \rho_c).$$

Les principes quantiques donnent directement la dynamique à laquelle obéit l'opérateur d'état total $\rho(t)$, c'est-à-dire l'équation de Schrödinger-von Neumann :

$$d\rho/dt = (1/i\hbar) [H, \rho]. \quad (17.3)$$

et l'essentiel du problème consiste à en déduire l'évolution de l'opérateur d'état réduit.

Nota*

L'utilisation d'un opérateur d'état dépendant du temps conduit à un point de vue différent de celui de la méthode des histoires où l'on se réfère à un état initial fixe ρ . On sait faire la connexion entre les deux points de vue et cela sera fait dans le chapitre 19 lors de la discussion d'expériences de mesures en s'appuyant sur la relation $\text{Tr}(\rho E(t)) = \text{Tr}(\rho(t) E)$.

Un exemple

143. Les exemples sont innombrables, mais donnons-en un suffisamment simple, sans être simpliste, pour fixer les idées. Le système macroscopique est un cylindre empli de gaz, lequel constitue l'environnement. Le cylindre est fermé par un piston mobile de masse M , dont la position X est prise comme observable collective. Il s'agit d'un piston idéal de théoricien qui n'est pas fait d'atomes et n'a qu'un seul degré de liberté. Un ressort exerce une force de potentiel $V(x)$ sur le piston et l'hamiltonien collectif est donné par $H_c = P^2/2M + V(X)$.

Si l'environnement est un gaz parfait monoatomique, on peut écrire $H_e = \sum_k p_k^2/2m$, c'est-à-dire que l'énergie interne est la somme des énergies

cinétiques (quantiques) des atomes. Quant à l'hamiltonien d'interaction H_1 , le mieux est encore de le modéliser. On peut supposer par exemple qu'il existe un potentiel répulsif U entre le piston et les atomes, suffisamment fort pour empêcher les atomes de traverser le piston, avec $H_1 = \sum_k U(x - x_k)$.

L'équation maîtresse

Préliminaires

144. Quand on considère l'immense variété des phénomènes de dissipation, qu'ils soient mécaniques, électriques, magnétiques ou chimiques, et quand de plus chacun d'eux révèle à l'analyse de nombreuses subtilités, on ne s'attend guère à ce qu'une théorie, à la fois explicite et générale, puisse les couvrir tous. Il ne peut sans doute qu'en aller de même pour la décohérence, dont le champ est au moins aussi vaste. Il s'agit, dans les deux cas, de processus irréversibles, pour lesquels on peut dire qu'on dispose à présent de théories fécondes et puissantes, tout en devant reconnaître aussitôt que ces théories ne sont pas universelles.

Plusieurs aspects des phénomènes de dissipation méritent d'être rappelés car ils se retrouvent dans la décohérence. Sous sa forme la plus simple, pour un système à un seul degré de liberté d'énergie cinétique $P^2/2M$, la dissipation se traduit souvent classiquement par une équation du mouvement de la forme :

$$\frac{dP}{dt} = F - \gamma P, \quad (17.4)$$

où F est la force externe et γP une *force de frottement* dont le coefficient γ est appelé coefficient de dissipation (on parle également, selon les cas, de frottement, d'atténuation, d'amortissement ou de relaxation ; la variété des termes traduisant les multiples aspects des phénomènes). On connaît évidemment de nombreuses exceptions à ce comportement très simple, en particulier des amortissements non linéaires et, surtout, l'existence d'effets de retard.

C'est en électricité et en électronique que les phénomènes de retard sont les plus familiers. Ainsi, quand on a affaire à un courant alternatif de fréquence ω , on peut prendre pour variable de référence une charge ; l'intensité dans un circuit joue alors le rôle de la vitesse, et l'équivalent de dP/dt dans l'équation (17.4) est la f.e.m. d'induction. Le coefficient γ est alors remplacé par la partie imaginaire de l'impédance du circuit et il dépend de ω . Dans le cas d'un courant dépendant du temps de manière quelconque, cette dépendance sur la fréquence se traduit par un retard dans les effets de dissipation. Les équations du type (17.4) deviennent alors :

$$\frac{dP(t)}{dt} = F(t) - \int_{-\infty}^t G(t-t') P(t') dt' \quad (17.5)$$

où l'on voit que l'effet de la dissipation sur le mouvement collectif prend un temps plus ou moins long.

Ces effets ont été approfondis, en particulier grâce à un théorème bien connu de fluctuation-dissipation qui prend en compte les effets quantiques (Callen & Welton, Kubo, voir Landau, 1967). Ce théorème relie les fluctuations (thermiques et quantiques) et les coefficients de dissipation dépendant de la fréquence. On n'essaiera pas de l'analyser, sauf à noter un aspect qui réapparaît dans la décohérence : les résultats obtenus se simplifient notablement quand la température est suffisamment élevée.

Cette référence à une température semble contredire l'idée qu'on s'intéresse à des processus irréversibles, hors d'équilibre. On verra dans le chapitre suivant que la température en question n'est rien d'autre en fait que l'énergie interne de l'environnement, qu'on peut décrire commodément mais *formellement* par la température qui donnerait la même énergie interne dans des conditions d'équilibre thermique. Il faut donc bien souligner que les résultats sur la décohérence qui vont être présentés ne font pas l'hypothèse d'un équilibre thermique (qui supposerait la présence d'un thermostat, par exemple).

Il faut signaler enfin un point très important. On va se référer à des observables collectives qu'on désignera par X , les éléments de matrice de ρ_c dans la base correspondante étant dénotés par $\langle x' | \rho_c | x \rangle = \rho_c(x', x)$. Or, les résultats dépendent explicitement du choix de cette base qui est loin d'être laissé à l'arbitraire. On verra ainsi dans le chapitre suivant que cette base correspond, dans la plupart des cas, à des observables qui précisent la position des objets macroscopiques et de leurs diverses parties dans l'espace ordinaire à trois dimensions. Dans le cas d'un circuit électrique, il faut prendre pour X le flux magnétique. Dans de nombreux systèmes électrodynamiques, il faut recourir à la « base » surcomplète des états cohérents. Ainsi l'existence et le choix de la base convenable (dite *base privilégiée* quand elle existe) ne ressort pas de considérations élémentaires. Elle est introduite « à la main » dans certains modèles, ou bien déduite, dans le meilleur des cas, de considérations d'invariance qui seront vues dans le chapitre suivant.

Une équation maîtresse

145. Les modèles connus et les théories disponibles conduisent à une équation « maîtresse » pour l'évolution de l'opérateur densité réduit. Cette équation est relativement simple quand on peut admettre les hypothèses suivantes.

- Les effets de retard sont inessentiels.
- La température est suffisamment élevée.
- Il existe une base privilégiée.
- On ne s'intéresse qu'à des couples de valeurs (x', x) des coordonnées collectives qui sont proches l'une de l'autre à l'échelle macroscopique, sans l'être nécessairement à l'échelle microscopique.
- On se place pour simplifier dans le cas où il n'y a qu'une seule coordonnée collective X , comme dans l'exemple indiqué plus haut.
- On supposera enfin, pour la discussion, que le terme d'énergie cinétique dans H_c est de la forme $P^2/2M$, où P est l'observable collective de moment,

canoniquement conjuguée à X , et M est un coefficient d'inertie qui ne dépend pas de X (ce n'est pas nécessairement une masse car X n'est pas nécessairement une coordonnée de position ayant la dimension d'une longueur).

Sous ces restrictions, l'équation maîtresse a la forme suivante :

$$\partial \rho_c(x', x, t) / \partial t = \frac{1}{i\hbar} \langle x' | [H'_c, \rho_c(t)] | x \rangle - \mu (x' - x)^2 \rho_c(x', x, t) - (\gamma/2) (x' - x) (\partial/\partial x' - \partial/\partial x) \rho_c(x', x, t). \quad (17.6)$$

L'hamiltonien H'_c n'est pas en général identique au terme H_c de l'équation (17.1). Il peut inclure des contributions supplémentaires qui représentent l'action moyenne de l'environnement sur le sous-système collectif. Ainsi, dans l'exemple du piston, cette action se traduirait par la pression que le gaz exerce sur le piston. Hormis cela, le premier terme du second membre représente exactement la dynamique quantique du sous-système collectif.

Le coefficient γ qui apparaît dans le troisième terme a une interprétation physique immédiate. On peut en effet obtenir l'équation d'évolution de $\langle P \rangle = \text{Tr}(\rho_c P)$ en appliquant l'équation à un paquet d'onde. Le premier terme du second membre de (17.6) donne alors la valeur moyenne de la force, le deuxième terme ne contribue pas, et le troisième donne pour résultat $-\gamma \langle P \rangle$. Le coefficient γ est donc ainsi le coefficient de dissipation et l'on peut le mesurer directement de manière empirique sans qu'il soit nécessaire de connaître le terme de couplage H_1 dans l'hamiltonien (17.1).

Reste donc le deuxième terme de l'équation (17.6) qui, comme on va le voir, décrit l'effet de décohérence. Lui aussi peut être connu à partir de données empiriques car, sous les hypothèses qu'on a supposées, le coefficient μ qui y figure est directement relié au coefficient de dissipation par :

$$\mu = \gamma M k T / \hbar^2. \quad (17.7)$$

où k est la constante de Boltzmann et T la *température* formelle qui exprime la valeur de l'énergie interne. On peut regarder T comme une température réelle quand l'environnement (le gaz par exemple) est proche de l'équilibre thermodynamique.

La manière la plus simple d'obtenir la relation (17.7), sans devoir recourir à l'expression explicite de μ et γ en fonction des éléments de matrice de H'_1 , consiste à considérer le cas où tout le système (y compris le sous-système collectif) est en équilibre thermique. L'opérateur densité réduit est alors connu, de la forme $C \exp(-H_c/kT)$ et il est indépendant du temps. Le premier terme du second membre de (17.6) s'annule (car H'_c se réduit à H_c à l'équilibre) et les deux termes restants doivent se compenser, ce qui conduit à la relation (17.7).

Ce qui frappe au premier regard dans la formule (17.7) est la présence du carré de la constante de Boltzmann dans le dénominateur. Le coefficient μ est donc très grand, sauf si γ se trouve être par exception très petit. Cela ne peut qu'indiquer l'existence d'un effet très puissant.

Ordres de grandeur

La signification physique du coefficient γ fait effectivement apparaître des valeurs énormes pour le coefficient μ . En effet, dans la relation (17.7), le numérateur dépend de la quantité macroscopique M alors que le dénominateur en \hbar^2 est très petit. Pour mieux préciser, considérons le terme $\mu (x' - x)^2$ qui est l'inverse d'un temps qu'on désigne par t_d . Prenons le cas d'un pendule de 10 grammes qu'on observe à l'échelle du micron ($|x - x'| = 1$ micron). Supposons que le pendule ait un temps d'amortissement de 1 minute ($\gamma = 1 \text{ minute}^{-1}$).

On trouve alors $t_d = 1,6 \times 10^{-26}$ seconde, un temps si court qu'il est de l'ordre du temps moyen séparant deux chocs successifs du pendule avec des molécules d'air, dans les conditions normales de température et de pression. Même si l'on est ainsi à la limite d'applicabilité de l'équation (17.6), le résultat essentiel est manifeste : le terme en μ dans l'équation maîtresse décrit l'un des effets les plus forts qu'on connaisse en physique.

La décohérence

146. Quand on analyse les démonstrations de l'équation (17.6), ou d'autres formules plus générales, on constate, comme l'avait noté pour la première fois van Kampen (1954), que le terme en μ résulte de l'accumulation de fluctuations de phase dans l'environnement. En outre, ces fluctuations proviennent de l'interaction entre le sous-système collectif et l'environnement. Il s'agit donc bien de l'effet de décohérence qu'on attendait.

Par quoi cet effet va-t-il se traduire ? Pour le voir, on considère d'abord des valeurs de $(x - x')$ assez grandes (quoique macroscopiquement très petites) pour que le terme $-\mu (x' - x)^2 \rho_c(x', x)$ dans l'équation (17.6) l'emporte sur le terme de dynamique quantique $-(i/\hbar) [H_c^1, \rho_c]$. Le terme en γ peut être tenu, quant à lui, pour négligeable. L'équation maîtresse devient alors :

$$(d/dt)\rho_c(x', x) = -\mu(x' - x)^2 \rho_c(x', x),$$

ce qui donne :

$$\rho_c(x', x; t) = \rho_c(x', x; 0) \exp[-\mu (x' - x)^2 t]. \quad (17.8)$$

Ainsi, l'opérateur d'état réduit tend à devenir diagonal. C'est, en plus général, le résultat anticipé dans l'équation (7.4).

Les limites de la décohérence

147. Jusqu'à quelles valeurs de $|x - x'|$ la diagonalisation due à la décohérence va-t-elle s'étendre ? La quantité $(i/\hbar) [H_c^1, \rho_c]$ qu'on avait négligée est homogène à l'inverse d'un temps (dans le cas d'un pendule, par exemple, ses éléments de matrice sont de l'ordre de $\omega\rho_c$, où ω est la fréquence du pendule). L'effet de décohérence domine alors tant que $|x' - x|$ est grand devant une distance microscopique D de l'ordre de $\hbar/\sqrt{MkT\omega\gamma}$. Pour des distances dites macroscopiques, même très petites, la décohérence règne donc sans concurrence.

On notera qu'il est normal de ne pas voir la diagonalisation de ρ_c s'étendre à des valeurs de x et x' qui seraient microscopiquement voisines, car alors $\rho_c(x, x', t)$ prendrait asymptotiquement la forme $\rho_c(x, x, 0) \delta(x - x')$ et il est facile de voir que l'énergie cinétique serait infinie.

Mentionnons enfin que la décohérence ne se produit pas quand le coefficient de dissipation est nul ou pratiquement nul, comme c'est le cas pour la lumière ordinaire. On observe bien dans ce cas des interférences, et celles-ci sont fondamentalement quantiques (les interactions photon-photon, bien que non nulles, sont très faibles, d'où résulte une dissipation négligeable de la lumière dans le vide). On a pu aussi réaliser des appareils supraconducteurs où la décohérence est très faible (Clarke, 1988).

Bases non privilégiées. Cas général*

148. La nature privilégiée de la base en x ressort clairement de la tendance à la diagonalité de l'opérateur d'état réduit, car une diagonalisation est, par définition, associée à une base bien définie. Cela reste vrai, bien que moins généralement, dans le cas d'une diagonalisation limitée comme celle qu'on a dans le cas présent.

Zurek (1991) a étudié le cas d'un état collectif pur, initialement donné par deux gaussiennes centrées en des points macroscopiquement éloignés. On constate évidemment la décohérence comme disparition des termes d'interférences. Si de plus les valeurs moyennes de l'impulsion pour les deux gaussiennes sont, elles aussi, macroscopiquement éloignées, on constate que les termes d'interférences en impulsion ($\langle p' | \rho_c | p \rangle$ pour $p \neq p'$ macroscopiquement) tendent également vers zéro de manière exponentielle dans le temps, mais plus lentement que les termes d'interférences en x .

Comme la décohérence est avant tout intéressante dans l'élimination des interférences macroscopiques, et donc dans une situation essentiellement classique, les résultats de Zurek suggèrent une conjecture qui éliminerait en grande partie les problèmes concernant le choix des bases de diagonalisation. En pavant l'espace de phase par des cellules rectangulaires C_j , dont chacune est associée à une propriété classique dont un projecteur est E_j , la conjecture suppose la disparition rapide des interférences macroscopiques entre cellules différentes, c'est-à-dire la décroissance rapide de $E_j \rho_c(t) E_i$ pour $i \neq j$. Il se trouve cependant qu'une fois encore, les effets de contiguïté entre cellules voisines rendent difficile l'étude précise de cet opérateur $E_j \rho_c(t) E_i$. Pour deux cellules i et j non contiguës, on s'attend à ce que celui-ci tende effectivement vers zéro de manière exponentielle dans le temps, jusqu'à atteindre une valeur, elle-même exponentiellement petite, qui sera contrôlée par la distance entre les deux cellules, comme dans la formule (11.4). C'est un résultat qu'on peut effectivement démontrer dans le cas où la base x est privilégiée. On peut conjecturer qu'il en va encore de même en l'absence de base privilégiée, ce qui constituerait l'expression, à la fois générale et pratique, de la décohérence mais reste à démontrer.

Résumé

L'effet de décohérence est une perte pratiquement complète de cohérence de phase entre les fonctions d'onde de l'environnement, dans des conditions macroscopiques différentes. Il s'exprime au mieux dans un opérateur densité réduit qui rend compte de toutes les propriétés collectives (ne mettant en jeu que des observables macroscopiques) ou pertinentes (par exemple des observables microscopiques soumises à une mesure). On obtient l'opérateur densité réduit par une trace partielle de l'opérateur d'état total sur l'environnement, c'est-à-dire par l'ignorance (délibérée ou inévitable) de cet environnement.

L'effet de décohérence est un processus dynamique irréversible et son coefficient d'évolution peut être souvent déduit de la connaissance d'un coefficient de dissipation. Dans la plupart des cas pratiques, la décohérence se traduit mathématiquement par une diagonalisation presque complète de l'opérateur densité réduit dans une base spécifique de l'espace de Hilbert. La décohérence se traduit physiquement par la disparition des interférences macroscopiques, apportant ainsi une réponse au problème du chat de Schrödinger.

La relation étroite entre la décohérence et la dissipation entraîne que la seule possibilité d'éviter la décohérence est de travailler avec un système non dissipatif, comme peuvent l'être la lumière ou certains systèmes supraconducteurs.

149. Le but de ce chapitre est de dériver, à partir des premiers principes, l'équation maîtresse (17.6) qui a servi à montrer l'effet de décohérence dans le précédent chapitre. C'est une tâche qu'on ne peut mener à bien en s'en tenant seulement à des calculs élémentaires et le niveau théorique du présent chapitre est donc plus élevé que le reste du livre. Il a paru utile cependant d'offrir au lecteur quelques repères à propos d'un effet fondamental et qui prend de plus en plus d'importance dans la physique actuelle. J'ai essayé de remédier à la difficulté en présentant d'abord, comme on l'a vu, les principaux résultats et certaines de leurs conséquences dans le chapitre précédent, avec un minimum d'appareil théorique. La lecture de ce chapitre peut ainsi être omise sans inconvénient pour la compréhension générale de l'interprétation.

Un résultat notable des investigations théoriques a déjà été mentionné. Il s'agit de l'existence d'une base privilégiée donnée par les coordonnées spatiales (tout au moins quand on fait usage de repères non relativistes). C'est le cas pour un système purement mécanique (sans effets électriques ou magnétiques à grande échelle) et le résultat n'est pas encore entièrement compris. La décohérence est encore un domaine où bien des questions intéressantes demeurent, et on peut sans doute espérer de nombreux résultats nouveaux dans les prochaines années.

Après une période où l'on essayait de saisir l'universalité présumée de l'effet de décohérence, l'attention se porte à présent sur des systèmes artificiels dans lesquels la décohérence prend un temps plus long. C'est ainsi que l'existence même de l'effet a pu être mise en évidence expérimentalement (Brune *et al.*, 1996), comme on le verra au chapitre 22. L'intérêt que beaucoup de chercheurs porte actuellement aux ordinateurs quantiques pourrait également faire de la décohérence un problème central en technologie, si le projet est réalisable.

Quoi qu'il en soit, on ne va pas essayer de développer la théorie de la décohérence dans tous ses détails. Ce serait trop long et on n'indiquera que les idées principales. Le cadre théorique a déjà été posé dans les sections 60 à 62, où l'on a vu que la décohérence est essentiellement un processus irréversible. La méthode

la plus efficace pour étudier de tels processus, que ce soit dans le cas classique ou quantique, est ce qu'on appelle *la méthode des projecteurs*. Elle est remarquablement efficace, mais il existe un très grand nombre de processus irréversibles et aucune méthode n'est assez puissante pour les couvrir tous. On peut supposer néanmoins que la décohérence est universelle, mais aussi probablement très diverse dans ses mécanismes détaillés, tout comme l'est la création d'entropie. De toute manière, ce qu'on sait déjà est loin d'être négligeable et sans doute représentatif de résultats généraux, voire universels.

Le chapitre se conclura par quelques commentaires sur la correspondance entre les physiques quantique et classique quand la décohérence et le frottement sont tous deux pris en compte.

Les modèles

150. Les premiers résultats quantitatifs qui montraient l'existence et les effets de la décohérence furent obtenus à l'aide de modèles. On eut très tôt l'idée de recourir au puissant outil d'investigation qu'apporte toujours l'oscillateur harmonique. Ainsi, dans le cas du piston en interaction avec un gaz qu'on présentait dans la section 143, ce modèle revient à placer, par l'imagination, une multitude de petits ressorts entre le fond du cylindre et le piston, ce qui est censé modéliser le gaz (l'environnement). On écrit alors l'hamiltonien de cet environnement sous la forme :

$$H_e = \sum_k (p_k^2/2m_k + m_k\omega_k^2x_k^2),$$

les fréquences ω_k étant supposées différentes entre elles et très nombreuses. Cela ne suffit pas encore pour permettre des calculs explicites, car il faut aussi que l'hamiltonien de couplage H_1 entre le piston et le gaz soit linéaire dans les variables d'oscillateurs. On le prend donc de la forme :

$$H_1 = X (\sum_k (\lambda_k a_k + \lambda_k^* a_k^\dagger)),$$

où a_k est l'opérateur d'annihilation associé à l'oscillateur numéro k , et λ_k une constante de couplage (représentant la force avec laquelle un petit ressort s'accroche au piston).

La simplicité des oscillateurs harmoniques est telle qu'on peut alors calculer complètement leur évolution collective et obtenir une équation maîtresse pour ρ_c . Cette simplicité ne va pas cependant jusqu'à éviter des calculs qui prendraient ici plusieurs pages et seraient peu instructifs en eux-mêmes. Indiquons seulement que la méthode la plus employée consiste à représenter la dynamique par la méthode des intégrales sur les chemins de Feynman, puis à intégrer celle-ci explicitement sur les variables d'oscillateurs pour éliminer l'environnement (Leggett, 1986).

Cette méthode ne peut être appliquée et les calculs menés jusqu'au bout qu'à une condition : il faut que l'environnement soit dans un état d'équilibre thermique au moment initial (la raison pour cela, tout comme l'était celle du choix de H_1 , est qu'on ne sait pas calculer explicitement des intégrales de Feynman, hormis quand elles portent sur des exponentielles de forme gaussienne). Les résultats qu'on obtient ainsi sont analogues à ceux de la théorie plus générale qui va être donnée et, bien qu'ils aient joué un grand rôle dans l'histoire de la décohérence, il ne sera pas nécessaire que nous nous y étendions.

La théorie quantique des processus irréversibles

151. La théorie (classique) des processus irréversibles commence dans la deuxième moitié du dix-neuvième siècle avec l'équation de Boltzmann. D'autres méthodes furent inventées par la suite pour calculer les coefficients de viscosité, de diffusion et de conductivité thermique dans un gaz (Chapman et Enskog), pour dériver les équations de la dynamique des fluides à partir de la dynamique moléculaire (Grad), pour passer directement de la dynamique des molécules à l'équation de Boltzmann (Bogolioubov, Born, Green, Kirkwood et Yvon). La physique de la matière condensée, où les effets quantiques sont essentiels, a révélé que toutes ces méthodes avaient une même structure dont est sortie ce qu'on appelle la méthode des projecteurs (Nakajima, 1958 ; Zwanzig, 1960 ; 1964, Haake, 1973).

On considère un système macroscopique isolé, d'hamiltonien H . Son opérateur d'état complet, ρ , obéit à l'équation dynamique de Schrödinger-von Neumann (17.3). On désigne par A^i des observables « pertinentes » dont on veut suivre l'évolution. On a vu (section 58) tous les problèmes que peut soulever le choix de ces observables et nous n'y reviendrons pas.

On désigne les valeurs moyennes de ces observables par $a^i(t) = \langle A^i(t) \rangle = \text{Tr}(A^i(t)\rho)$ et le but qu'on se propose est de calculer l'évolution de ces moyennes au cours du temps. La méthode des projecteurs commence par introduire un opérateur densité « pertinent » qui ne dépend que des observables pertinentes et s'écrit :

$$\rho_o = \exp(-\sum_i \lambda_i A^i). \quad (18.1)$$

Les paramètres λ_i , qui dépendent du temps, sont choisis de manière que l'opérateur d'état pertinent restitue bien les valeurs moyennes pertinentes :

$$\langle a^i(t) \rangle = \text{Tr}(A^i \rho_o(t)). \quad (18.2)$$

Ce point de départ appelle au moins trois commentaires.

(i) On inclut d'ordinaire l'hamiltonien H (ainsi que toutes les quantités conservées) dans l'ensemble des observables pertinentes. On y inclut également l'opérateur identité I , de manière que la condition $\langle I \rangle = \text{Tr}\rho_o = 1$ figure parmi les conditions (18.2).

(ii) On justifie d'ordinaire la forme (18.2) de l'opérateur d'état pertinent par des considérations de théorie de l'information. Cette forme minimise en effet l'information qu'on peut écrire sous la forme $\text{Tr}(\rho_o \text{Log} \rho_o)$. On réduit du même coup les informations accessibles aux seules valeurs moyennes pertinentes.

(iii) Finalement, on notera le cas où les deux seules observables pertinentes sont H et I . La formule (18.1) devient alors $\rho_o = \exp(-\alpha - \beta H)$, traduisant un équilibre thermique.

152*. Avant de décrire comment la méthode procède, il convient d'introduire deux notions mathématiques qui y apparaissent.

On définit une *densité* comme un opérateur de classe trace (Reed et Simon, 1972, volume 1). Sans en donner une définition mathématique précise, on peut indiquer que si un opérateur C est hermitien à spectre purement discret, il est de classe trace quand la série des modules des valeurs propres $\sum_i |c_i|$ converge. Tout opérateur de cette classe a une trace finie, mais l'inverse n'est pas toujours vrai. L'opérateur d'état complet et l'opérateur d'état pertinent sont tous deux des densités, mais une densité n'est pas en général un opérateur d'état (ainsi, elle peut ne pas être hermitienne, ou avoir des valeurs propres négatives, et sa trace peut être différente de 1).

On introduit également la notion de superopérateur. Un bon exemple est fourni par l'équation de la dynamique (17.3). Les éléments de matrice de $d\rho/dt$ apparaissent dans cette équation comme des combinaisons linéaires des éléments de matrice de ρ et les coefficients de cette relation linéaire font intervenir les éléments de matrice de H . Un superopérateur est défini comme une opération linéaire qui transforme une densité en une autre densité. Ainsi, on peut écrire l'équation de Schrödinger-von Neumann (17.3) sous la forme abrégée :

$$d\rho/dt = \mathcal{L}\rho, \quad (18.3)$$

où le superopérateur \mathcal{L} porte le nom de Liouvillien.

153*. On peut maintenant formuler la méthode des projecteurs. On commence par introduire des densités s_i définies par $s_i = \partial\rho_o/\partial a^i$. La relation évidente $\partial a^i/\partial a^j = \delta_j^i$ peut s'écrire $\text{Tr}(A^i s_j) = \delta_j^i$. Le superopérateur défini par $\mathcal{P} = \sum s_i \otimes A^i$ est en conséquence un projecteur, en ce sens que $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ (d'où le nom donné à la méthode). Si l'on désigne par I le superopérateur identité, il en résulte que $Q = I - \mathcal{P}$ est également un projecteur et, de plus, $(d\mathcal{P}/dt)Q = 0^*$. Les conventions faites permettent alors de constater que $\rho_o = \mathcal{P}\rho$ et, en posant $\rho_1 = Q\rho$, on a $\rho = \rho_o + \rho_1$.

En appliquant les deux superopérateurs \mathcal{P} et Q aux deux membres de l'équation (17.3), on obtient deux équations qui couplent ρ_o et ρ_1

$$d\rho_o/dt - \mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{P}\rho_o - d\mathcal{P}/dt\rho_o = \mathcal{P}\mathcal{L}Q\rho_1, \quad (18.4a)$$

$$d\rho_1/dt - Q\mathcal{L}Q\rho_1 = -d\mathcal{P}/dt\rho_o + Q\mathcal{L}\mathcal{P}\rho_o. \quad (18.4b)$$

On résout formellement la seconde de ces équations pour tirer ρ_1 en fonction de ρ_o . Pour cela, on écrit (18.4b) sous la forme :

$$d\rho_1/dt - Q\mathcal{L}Q\rho_1 = \sigma.$$

* On a, en effet, $\frac{d\mathcal{P}}{dt} = \frac{d\mathcal{P}}{dt}\mathcal{P}$ car $\frac{d\mathcal{P}}{dt} = \frac{ds_i}{dt} \text{Tr}(A^i s_j) \otimes A^j = \frac{ds_i}{dt} \otimes A^i$.

En supposant que $\rho_1 = 0$ à l'instant zéro, la solution de (8.4b) s'écrit :

$$\rho_1(t) = \int_0^t dt' \mathcal{W}(t, t') \cdot \sigma(t') \quad (18.5)$$

avec :

$$\mathcal{W}(t, t') = \exp[Q\mathcal{L}Q(t-t')]. \quad (18.6)$$

Il convient d'ajouter ici quelques remarques : l'opérateur \mathcal{P} dépend du temps ainsi que Q , de sorte que $\mathcal{W}(t, t')$ doit être considérée en réalité comme l'exponentielle ordonnée dans le temps d'une intégrale sur t'' de $Q(t'')\mathcal{L}Q(t'')$ allant de t' à t . Notons aussi qu'en supposant que $\rho_1 = 0$ à l'instant zéro, on suppose que l'opérateur d'état complet coïncide avec l'opérateur d'état pertinent à l'instant zéro. C'est une restriction que l'on pourrait éventuellement lever mais sur laquelle on ne s'étendra pas. Notons enfin qu'en écrivant (18.5), on a choisi un sens défini du temps. Cela est lié de près à l'irréversibilité, mais non pas à une direction privilégiée du temps. On obtiendrait en effet la même équation avec le choix du sens opposé du temps, comme on le sait bien en mécanique statistique. La direction thermodynamique du temps ne peut se révéler qu'à un stade ultérieur, qui sera un stade d'interprétation !

En portant l'expression (18.5) de $\rho_1(t)$ dans (18.4a), on obtient une équation maîtresse où ne figure plus que ρ_o et qui s'écrit :

$$\begin{aligned} d\rho_o(t)/dt = \mathcal{P}\mathcal{L}(t)\rho_o(t) + d\mathcal{P}(t)/dt\rho_o(t) \\ + \int_0^t dt' \mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{W}(t, t')Q(t')[-d\mathcal{P}(t')/dt' + \mathcal{L}(t')] \rho_o(t'). \end{aligned} \quad (18.7)$$

Bien évidemment, on n'a encore rien fait, puisque ceci suppose une connaissance de $\mathcal{W}(t, t')$, au moins aussi difficile à atteindre exactement que de résoudre explicitement l'équation complète de Schrödinger-von Neumann. C'est par les approximations que l'on pourra introduire dans l'équation (18.7) que la méthode deviendra prédictive.

Application à la décohérence

Le choix des observables pertinentes

154. Dans les applications de la théorie précédente au problème de la décohérence, le choix des observables pertinentes ne pose aucun problème. En effet, toute observable collective sans exception peut devenir pertinente. Il est commode alors de sélectionner parmi leur ensemble une base d'observables indépendantes. On introduit pour cela une base orthonormée de vecteurs $|x\rangle$ dans \mathcal{H}_c . Une base pour l'espace des observables collectives est alors donnée par l'ensemble des opérateurs $|x\rangle\langle x'|$. En effet, bien que ces opérateurs ne soient pas autoadjoints, leur donnée est équivalente à celle de tous les opérateurs autoadjoints de la forme $(|x\rangle\langle x'| + |x'\rangle\langle x|)$ et $(|x\rangle\langle x'| - i|x'\rangle\langle x|)$. On considérera donc les opérateurs $|x\rangle\langle x'|$ comme les « observables » pertinentes,

bien qu'elles ne soient pas autoadjointes. Quand on les considère comme des opérateurs dans l'espace de Hilbert complet \mathcal{H} , il convient de les écrire sous la forme $A^{xx'} = |x\rangle\langle x'| \otimes I_e$. L'opérateur identité $I_c \otimes I_e$ appartient déjà à cette famille et on complète la liste des observables pertinentes en y ajoutant l'hamiltonien de l'environnement H_e (de préférence à l'hamiltonien total H).

Les valeurs moyennes $a_i(t) = \langle A^i(t) \rangle = \text{Tr}(A^i(t)\rho)$ deviennent, dans le cas de $A^i = A^{xx'}$:

$$\langle A^{xx'} \rangle = \text{Tr}(A^{xx'} \rho) = \langle x' | \text{Tr}_e \rho | x \rangle = \langle x' | \rho_c | x \rangle.$$

On retrouve donc, comme une valeur moyenne, l'opérateur d'état réduit dont on cherche à connaître l'évolution. Dans l'équation précédente, la notation Tr désigne une trace dans l'espace de Hilbert total \mathcal{H} et Tr_e une trace partielle sur l'environnement. L'opérateur d'état pertinent (18.1) de la théorie générale devient dans le cas présent,

$$\rho_o = \rho_c \otimes \rho_e, \quad (18.8)$$

où apparaît un opérateur d'état pertinent pour l'environnement

$$\rho_e = \exp(-\alpha - \beta H_e), \quad (18.9)$$

qui a la forme qu'on trouve à l'équilibre thermique (laquelle peut d'ailleurs être, à son tour, généralisée quand, par exemple, il y a plusieurs composantes dans l'environnement qui peuvent avoir des « températures » différentes). Les paramètres α et β sont fixés par les conditions $\text{Tr}_e \rho_e = 1$ et $\text{Tr}_e(H_e \rho_e) = \text{Tr}(H_e \rho)$ (ce qui est l'énergie interne). Soulignons que ρ_o n'est qu'un intermédiaire de calcul, et qu'on ne suppose aucunement que l'environnement soit réellement en équilibre thermique.

Utilisation du calcul des perturbations

155. Bien que l'équation maîtresse générale (18.7) soit souvent difficile à expliciter, elle se simplifie considérablement quand on peut faire appel au calcul de perturbations. C'est souvent le cas dans le problème qui nous intéresse. Ainsi, il arrive parfois que l'hamiltonien d'interaction H_1 soit suffisamment petit pour que le calcul de perturbations s'applique, comme c'est le cas en particulier quand l'environnement est constitué de photons ou quand le système lui-même est la lumière et que l'environnement est la matière constituée d'atomes. La petitesse de H_1 tient à chaque fois à celle du couplage électromagnétique, contrôlé par la constante de structure fine $e^2/\hbar c = 1/137$).

Il se trouve aussi, dans des cas très fréquents, qu'on puisse se ramener à un calcul de perturbations après une redéfinition judicieuse de l'interaction. On définit pour cela un hamiltonien ΔH_c qui décrit l'action moyenne de l'environnement sur le système collectif, en posant $\Delta H_c = \text{Tr}_e(H_1 \rho_o)$. Il s'agit d'une observable collective qui a une interprétation simple dans l'exemple du piston. Le gaz lui-même n'est pas modélisé de manière particulière (entre autre, il n'est pas supposé parfait). L'hamiltonien ΔH_c représente la pression que le gaz exerce

sur le piston (dans le cas d'un piston d'aire unité). La différence $H_1' = H_1 - \Delta H_c \otimes I_e$ a encore le caractère d'un hamiltonien d'interaction, mais elle ne représente plus que la partie purement fluctuante, de moyenne nulle, des forces exercées par les chocs des molécules sur le piston. Ainsi, alors que dans notre exemple H_1 contenait le potentiel fortement répulsif entre le piston et les molécules, H_1' est effectivement petit. On peut donc raisonnablement le traiter par les méthodes du calcul de perturbations. On conçoit que ce cas s'étende à beaucoup d'autres, parfaitement réalistes, sans qu'on puisse pourtant aller jusqu'à prétendre atteindre ainsi l'universalité.

Un calcul explicite, qui n'est pas élémentaire, permet d'expliciter l'équation maîtresse (18.7) quand on ne retient que les termes du second ordre en H_1' dans le noyau. Elle s'écrit :

$$d\rho_c/dt + (i/\hbar) [H_c + \Delta H_c, \rho_c] = - (1/\hbar^2) \int_0^t \text{Tr}_e \{ [H_1'(t), U_o(t, t')] [H_1'(t'), \rho_o(t')] U_o^\dagger(t, t')] \} dt', \quad (18.10)$$

où l'on a posé $U_o(t, t') = \exp[-i(H_c + \Delta H_c + H_e)(t - t')/\hbar]$.

Les bases privilégiées

156. On peut préciser, à présent, ce qu'il faut entendre par une base privilégiée et en donner des critères d'existence. Le choix de la base $|x\rangle$ est en effet très important, comme on l'a déjà vu. L'affirmation peut néanmoins surprendre quand on la compare aux grandes leçons de Dirac sur l'invariance de la théorie quantique par changements de base, analogue à l'invariance de la physique classique par les transformations canoniques dans l'espace de phase.

Il fallait bien pourtant qu'à un moment ou l'autre l'interprétation se heurte de front à ce principe de Dirac, auquel le formalisme de la théorie obéit mais que le monde de l'expérience refuse. Il y a, à cela, deux raisons. La première est que les équations de Hamilton, dont Dirac soulignait l'invariance canonique, ne sont pas exactes puisqu'elles négligent le frottement. Or les phénomènes de frottement conduisent à des équations du mouvement classique qui ne sont plus invariants par une transformation canonique. La seconde raison est plus concrète : quand on regarde une bicyclette, un satellite artificiel ou les planètes dans le ciel, on ne voit pas un espace de phase, ni un espace de configuration paramétré par des variables dynamiques. On voit quelque chose dans un espace à trois dimensions et il faut bien que l'interprétation rende compte de cette évidence.

Si le rapprochement entre ces deux idées (la rupture de symétrie canonique introduite par le frottement et l'évidence de l'espace ordinaire) n'est pas accidentel, cela peut signifier qu'une théorie quantique de la dissipation est liée à la représentation de la physique dans l'espace ordinaire. Cette possibilité nous amène à revenir en deçà des idées de Hamilton, vers celles de Newton. On sait comment

procédait Newton. Il considérait que tout objet mécanique est fait de parties très petites, chacune ayant une masse m , une position x (celle de son centre de masses) et une impulsion p . Les lois de la dynamique sont alors de deux sortes : il y a d'une part la relation $p = m dx/dt$ qui relie impulsion et vitesse et, d'autre part, la loi fondamentale de la dynamique qui donne dp/dt en fonction des forces, souvent très compliquées (forces externes, réactions des morceaux de matière voisins et forces de frottement). C'est sur la relation $p = m dx/dt$, si connue qu'elle en paraît anodine, que nous allons nous pencher. La question que nous poserons est celle-ci : cette relation est-elle encore vraie en mécanique quantique ?

On peut voir aisément que la réponse est affirmative. Considérons en effet un morceau de matière, petit à l'échelle macroscopique, mais contenant un très grand nombre de particules. Dans la mesure où toutes ces particules sont non relativistes, l'énergie cinétique du morceau de matière s'écrit $\sum_k p_k^2/2m_k$, les impulsions p_k étant des observables associées aux particules (électrons et noyaux). On notera que cette expression suppose l'absence d'effets magnétiques macroscopiques qui exigeraient de remplacer p_k par $p_k - e_k A(x_k)$. La position du centre de masse du morceau de matière est l'observable $X = \sum_k m_k x_k / m$, avec $m = \sum_k m_k$. En écrivant la relation de Heisenberg $dX/dt = (-i/\hbar) [H, X]$, on constate que la seule partie de H qui ne commute pas avec X est l'énergie cinétique du morceau de matière en question et cela donne $dX/dt = P/m$, avec $P = \sum_k p_k$. En d'autres termes, la relation $P = m dX/dt$ est exacte en mécanique quantique. En physique macroscopique, on s'attend à avoir, en revanche,

$$dX/dt = (-i/\hbar) [H_c + \Delta H_c, X]. \quad (18.11)$$

On notera que le raisonnement s'appuie sur deux expressions différentes pour l'hamiltonien complet H . On l'a considéré d'abord comme l'hamiltonien des particules constitutives (électrons et noyaux) pour établir l'équation $dX/dt = P/m$ alors que l'équation (18.11) est la forme que prend dX/dt à l'échelle macroscopique. On va voir à présent les conséquences qu'entraîne la compatibilité de la description purement macroscopique (18.11) avec l'équation $dX/dt = P/m$ tirée de la structure atomique de la matière.

Expression algébrique

157. On se restreindra au cas d'objets mécaniques (solides et/ou fluides) pour lesquels il existe une base privilégiée, ou à des cas analogues pour lesquels on a la relation (18.11). En mécanique, il suffit de partir du point de vue de Newton en considérant des portions de matière, comme on vient de le faire (et si nécessaire, rien ne nous empêche de passer, après coup, à d'autres observables dynamiques, comme on le fait en dynamique analytique à la manière de Lagrange et Hamilton). La base est associée à un ensemble d'observables collectives commutables X telles que $X | x \rangle = x | x \rangle$. Comme il est évident que H_c et X

commutent, la condition (18.11) se traduit par une relation de commutation avec l'hamiltonien d'interaction :

$$[H'_1, X] = 0. \quad (18.12)$$

Réciproquement, l'équation (18.12) entraîne (18.11). On dira alors que les observables X sont *microstables*. Ce terme exprime que la relation entre moment et vitesse déduite de la seule considération du système collectif n'est pas modifiée par l'existence de l'environnement (elle reste stable malgré l'intervention des variables de type microscopique).

La relation (18.12) entraîne une diagonalisation partielle de l'hamiltonien d'interaction effectif H'_1 . En prenant une base de l'espace de Hilbert complet engendrée par la base $|x\rangle$ de H_c et la base $|n\rangle$ des états propres de H_e d'énergies E_n . En dans H_e , les éléments de matrice de H'_1 doivent avoir en effet la forme :

$$\langle x, n | H'_1 | x', n' \rangle = \delta(x - x') V_{nn'}(x). \quad (18.13)$$

Les effets de retard et de température finie

158*. Quand on explicite l'équation maîtresse (18.10) dans une base privilégiée en tenant compte de la relation (18.13), on obtient une équation assez complexe qui fait apparaître des termes de décohérence et de frottement sous la forme :

$$\dot{\rho}_c + (i/\hbar) [H_c + \Delta H_c, \rho_c] = R_d + R_f. \quad (18.14)$$

Le terme de décohérence R_d comporte des effets de retard sous la forme :

$$\langle x' | R_d | x \rangle = - \int_0^t K(x', x, t - t') \rho_c(x', x, t) dt'.$$

L'expression du noyau de cette intégrale est assez complexe puisqu'on a

$$K(x', x, \tau) = F(x', x', \tau) - F^*(x', x, \tau) - F(x, x', \tau) + F^*(x, x, \tau),$$

avec :

$$F(x', x, \tau) = \sum_{nn'} V_{nn'}(x', \tau) V_{n'n}(x, 0) \exp(-\alpha - \beta E_n) \exp\{-i(E_n' - E_n)\tau/\hbar\}.$$

La dépendance dans la température (avec $\beta = 1/kT$) est contenue dans cette expression qui est difficile à utiliser car on connaît très mal, en général, la matrice $V_{nn'}(x', \tau)$. La forme du terme de frottement R_f offre des analogies avec celle de R_d , mais il n'y a pas de relation simple entre les deux termes R_d et R_f .

La forme limite de l'équation maîtresse

159. L'équation maîtresse ne révèle sa transparence que lorsqu'on opère les simplifications indiquées dans la section 145.

- Les effets de retard deviennent négligeables si les fonctions de corrélation entre $V_{nn'}(x', \tau)$ et $V_{n'n}(x, 0)$ (déduites de l'opérateur densité ρ_e pour l'environnement) ne sont différentes de zéro que pour de très petites valeurs de τ (on peut

alors lisser l'équation maîtresse sur des temps courts et assimiler $F(x', x, \tau)$ à une fonction delta du temps $f(x', x) \delta(\tau)$.

- La température est suffisamment élevée pour que les quantités $\beta(E'_n - E_n)$ soient toujours petites (les conséquences de cela exigent d'analyser la forme de $F(x', x, \tau)$ plus en détail et nous ne le ferons pas).

- On se restreint enfin à des valeurs de x et x' qui sont macroscopiquement proches l'une de l'autre. On peut alors écrire, dans de très nombreux cas, la fonction de corrélation $f(x', x)$ comme une fonction dépendant essentiellement de $(x - x')^2$ et beaucoup moins fortement de $(x + x')/2$. La dépendance sur $(x + x')/2$ a d'ailleurs pour conséquence la possibilité d'une dépendance analogue des coefficients de dissipation et de décohérence sur la position. Les coefficients de décohérence (qui forment une matrice quand il y a plusieurs variables de position) sont définis par :

$$\mu_{ij} = 2 g''_{ij}((x + x')/2, 0), \quad (18.15)$$

où la dérivée seconde n'est prise que sur la seconde variable de $g((x + x')/2, (x - x')^2) \equiv f(x, x')$.

Ce n'est qu'après toutes ces simplifications que l'équation maîtresse prend la forme markovienne (17.6). Quant à la relation constitutive (17.7) entre les coefficients de décohérence et ceux du frottement, elle prend la forme :

$$\mu_{ij} = (M\gamma)_{ij} kT / \hbar^2, \quad (18.16)$$

où on a supposé que l'énergie cinétique dans H_c est de la forme $(1/2)(M^{-1})_{ij} P_i P_j$, les coefficients de dissipation étant, pour leur part, rassemblés en une matrice γ_{ij} .

Physique classique et amortissement

160*. On peut appliquer ces résultats, en principe, pour compléter la dérivation de la physique classique. Deux questions étaient restées en suspens dans notre discussion de ce sujet : les effets de dissipation et la relation de la mécanique classique (y compris celle des fluides) avec l'espace ordinaire à trois dimensions.

Les effets d'amortissement peuvent être assez bien compris, comme on vient de le voir, dans un grand nombre de cas. La décohérence conduit directement à une représentation d'un système matériel du type de Newton dans l'espace ordinaire.

Ce résultat, auquel on pouvait s'attendre, apporte néanmoins une contribution précieuse à la reconstruction du sens commun qui récupère ainsi la représentation visuelle des phénomènes macroscopiques (les « jugements catégoriques *a priori* sur l'espace » dont parlait Kant et dont, selon Pauli, on doit rejeter le principe au niveau microscopique).

Le programme de dérivation de la logique classique n'a cependant pas encore intégré ces résultats nouveaux au moment où ce livre est écrit. L'extension

du théorème d'Egorov en présence de frottement et de décohérence n'a pas été faite, et on ne peut qu'indiquer les difficultés d'une telle entreprise.

On peut écrire formellement la solution de l'équation maîtresse sous la forme $\rho_c(t) = \mathcal{M}(t) \rho_c(0)$, où $\mathcal{M}(t)$ est un superopérateur. Cette évolution de l'état peut être remplacée par une évolution des observables qui n'est plus la relation simple $A(t) = U(t)^{-1}AU(t)$ mais devient $A(t) = A \mathcal{M}(t)^\dagger$, où intervient le superopérateur adjoint $\mathcal{M}(t)^\dagger$. On peut donner ainsi une signification aux propriétés classiques dépendant du temps, mais ce formalisme est très lourd et encore mal maîtrisé.

L'évolution de l'opérateur densité dans une situation classique a été étudiée beaucoup plus en détail, avec des résultats simples et concluants. On s'appuie sur un développement de l'équation maîtresse en puissances de la constante de Planck (en utilisant la distribution de Wigner équivalente à la donnée de ρ_c). À l'ordre \hbar^2 , on obtient l'équation de Fokker-Planck classique rendant compte de l'amortissement et du bruit brownien provoqué par l'environnement (Caldeira et Leggett, 1983a). On retrouve ainsi des résultats déjà connus du point de vue classique, et qui suffisent à la plupart des applications.

Y sont inclus en particulier les effets de diffusion, les fluctuations thermiques, la viscosité en mécanique des fluides, et en général tous les phénomènes aléatoires susceptibles d'un traitement classique. Quand on compare les résultats ainsi obtenus phénoménologiquement, très proches de la pratique, avec la grande difficulté qu'il y aurait à reprendre les bases des théorèmes de correspondance du chapitre 11, il semble que cette ultime étape pour atteindre une interprétation entièrement rigoureuse ne sera pas franchie de sitôt.

Deux conséquences majeures de la décohérence font l'objet du présent chapitre. (1) La raison pour laquelle il n'y a pas d'interférences quantiques dans les expériences de mesure réelles ou, en d'autres termes, la réponse que la décohérence apporte aux paradoxes du chat de Schrödinger. (2) La justification de la règle de réduction de la fonction d'onde pour rendre compte de deux mesures réelles successives. Le mot de *réel* ici employé signifie qu'il s'agit d'un appareil de mesure macroscopique ayant un environnement (interne et/ou externe) et sujet à la décohérence.

Ces deux questions sont au centre de l'interprétation et on s'est efforcé de les rendre claires. C'est pourquoi on s'est cantonné à des exemples très simples et pourquoi la comparaison entre les mesures réelles et les mesures de pensée à la von Neumann (d'où sont venus tous les problèmes) est examinée avec attention. Plus tard, dans le chapitre 21, la simplicité pourra être remplacée par la généralité, et des règles complètes seront données pour la théorie de la mesure.

Un exemple simple

161. Commençons par introduire une expérience de mesure qui servira d'exemple. Elle consiste simplement en la détection d'une particule chargée par un compteur Geiger.

Plus précisément, on suppose que l'état initial de la particule est une superposition qui peut donner naissance à des interférences. On suppose que la particule peut être émise quantiquement dans deux directions opposées de l'espace, désignées par 1 et 2, et que la particule est initialement dans l'état pur $(1/\sqrt{2})(|1\rangle + |2\rangle)$ (Figure 19.1). C'est le genre de situation devant laquelle on se trouve par exemple quand un photon traverse une lame semi-transparente. La notation est telle que $|1\rangle$ désigne l'état de la particule allant dans la direction 1.

Un compteur Geiger (ou un photodétecteur dans le cas d'un photon) est placé sur ce chemin 1 et la mesure est supposée avoir lieu à un instant t . Quand le

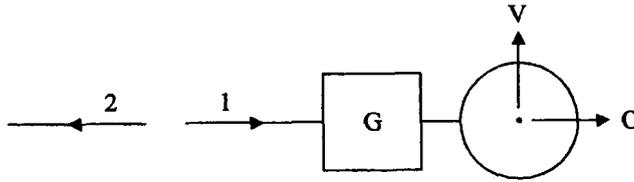


Figure 19.1 Une mesure simple.

compteur détecte la particule, il produit un pulse de courant qui est enregistré dans une mémoire de microprocesseur. On concentrera l'attention sur le contenu de cette mémoire qui est indiqué d'ordinaire par un voltage électrique. Celui-ci peut avoir une valeur V (indiquant que *oui*, la particule a été détectée). Le voltage initial est zéro et il le reste s'il n'y a pas détection. Ainsi, le compteur reste inerte quand la particule suit la direction 2 et ne le traverse pas et, après un temps suffisant, l'indication d'un voltage 0 dans la mémoire signale que la particule est passée par la direction 2.

Le voltage présent dans la mémoire est une observable collective associée au dispositif de mesure. Ce sera la seule observable collective que nous considérerons. Notre but est de comparer une mesure idéale à la von Neumann (d'où l'apparition d'un bon nombre des problèmes de l'interprétation) avec une mesure réelle où la décohérence est à l'œuvre. Il sera commode d'utiliser en conséquence des notations similaires dans les deux cas.

Dans une mesure idéale à la von Neumann, on utiliserait un voltmètre idéal qui ne pourrait montrer que les deux valeurs 0 ou V . Ces résultats seraient associés avec des fonctions d'onde $|0\rangle$ ou $|V\rangle$ pour la mémoire, par exemple des fonctions d'onde gaussiennes étroites dépendant d'une variable v et respectivement centrées aux valeurs 0 et V . On supposera, pour simplifier, que les mêmes fonctions d'onde représentent les états de la mémoire dans le cas d'un compteur de Geiger réel. Une telle représentation est évidemment assez éloignée des propriétés classiques qu'on considérerait au chapitre 10, mais elle ne peut qu'accentuer les aspects quantiques de la mesure, lesquels sont à la source des difficultés que nous souhaitons lever.

Une mesure idéale

162. On a déjà indiqué la théorie d'une mesure idéale dans la section 49 et on n'y revient donc ici que brièvement, sauf pour insister encore sur ses difficultés.

On peut considérer l'opérateur densité ρ_c d'un appareil de mesure, tout comme on le faisait dans le cas réaliste. Il représente en effet tout ce qu'on peut apprendre au sujet du résultat de la mesure lorsqu'on observe l'indication de l'appareil, sans avoir évidemment accès à la particule elle-même. La trace qui définit ρ_c à partir de l'opérateur densité complet ρ doit alors porter sur les degrés de liberté de la particule.

À un instant t , on a $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ avec :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle \otimes |V\rangle + |2\rangle \otimes |0\rangle).$$

Puisque les deux états $|1\rangle$ et $|2\rangle$ de la particule sont orthogonaux, la trace partielle sur les degrés de liberté de la particule est donnée simplement par la somme $\langle 1|\rho|1\rangle + \langle 2|\rho|2\rangle$ et l'opérateur densité réduit est :

$$\rho_c = \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0| + |V\rangle\langle V|). \quad (19.1)$$

Ce résultat est au premier abord troublant. C'est exactement celui qu'on attendrait de la décohérence et il y a certainement une différence quelque part. Dans une mesure à la von Neumann, la particule mesurée n'est pas perdue lors de la mesure. Imaginons alors un guidage (par exemple magnétique), comme dans la figure 19.2 qui ramène les deux chemins 1 et 2 de la particule le long d'un même chemin 3 à un instant t' . Supposons qu'on opère alors sur cette particule une seconde mesure, dont un des résultats possible est la propriété de projecteur $|3\rangle\langle 3|$ où l'on a posé $|3\rangle = (1/\sqrt{2})(|1, t'\rangle + |2, t'\rangle)$. S'il se trouve que ce résultat est celui constaté par le second appareil de mesure, le système constitué de la particule et du détecteur G apparaît alors avec la fonction d'onde :

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|3\rangle \otimes |V\rangle + |3\rangle \otimes |0\rangle).$$

L'opérateur densité réduit du compteur est alors donné par :

$$\rho_c = \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0| + |V\rangle\langle V|) \quad (19.2)$$

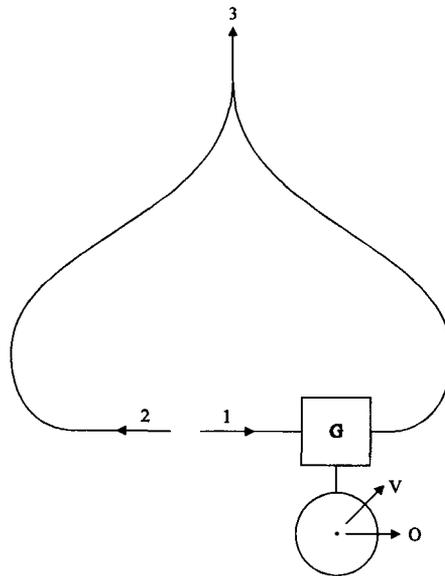


Figure 19.2 Le dispositif d'effacement des données.

Les termes croisés $|V\rangle\langle 0|$ et $|0\rangle\langle V|$ qui signalent la possibilité d'interférence sont réapparus. Ils n'affectent pas les probabilités pour que l'on observe les voltages 0 ou V à la lecture, mais ils se manifestent si l'on mesure d'autres observables, comme par exemple l'observable de « va-et-vient » $S = |0\rangle\langle V| + |V\rangle\langle 0|$.

La valeur moyenne de S est nulle pour l'état de mélange (19.1) mais égale à 1 dans l'état pur (19.2). On peut donc en conclure que les interférences avaient toujours subsisté en principe.

On a là un exemple de ce qui est vraiment l'essence de la critique profonde de Schrödinger avec son exemple du chat : les données issues d'une mesure idéalisée ne sont pas acquises une fois pour toutes. Des interférences qu'on avait pu croire disparues peuvent réapparaître plus tard. Il est impossible de considérer une donnée expérimentale comme un fait établi.

Une mesure avec décohérence

163. Pour mieux comparer le cas purement académique qui vient d'être vu et celui d'une mesure plus proche de la réalité, on fera aussi peu de modifications que possible en passant de l'un à l'autre. Pour le compteur considéré maintenant, on ne retient toujours qu'un seul degré de liberté explicite, mais cette fois *collectif* (il existe une multitude d'autres qui correspondent à son environnement). La décohérence peut agir dans cet appareil qui montre un comportement collectif classique. On se contente cependant de supposer qu'une certaine observable collective définit une base privilégiée dans laquelle la décohérence produit une diagonalisation approchée. On désigne par v les valeurs continues que peut prendre cette observable, essentiellement identique au potentiel précédent.

Toujours en vue de maintenir au plus près l'analogie entre les deux cas, on suppose que la dynamique de la mesure est la suivante : il y a un couplage direct entre la particule et le compteur, où l'observable V joue le rôle de l'indicateur du résultat. La mesure a toujours lieu à l'instant t et le couplage est du type idéal discuté par von Neumann, tel qu'on l'a présenté dans la section 49. L'observable mesurée appartient à la particule et distingue les deux chemins 1 et 2 que celle-ci peut prendre. Si la particule est dans l'état $|1\rangle$, l'appareil se retrouve immédiatement après le couplage dans un état $|V\rangle$, décrit par une fonction d'onde gaussienne de v centrée à $v = V$. Avant la mesure, et après celle-ci si la particule était dans l'état $|2\rangle$, l'appareil est dans un état $|0\rangle$ représenté par une fonction d'onde centrée à $v = 0$.

On suppose pour simplifier que la décohérence a lieu immédiatement après la fin du couplage. On suppose les fonctions d'onde suffisamment étroites pour que la décohérence n'affecte pas individuellement chacune d'elles. Cela signifie qu'une fonction d'onde $|0\rangle$ ou $|V\rangle$ est si fine qu'elle n'est pas sensible à la décohérence ou, comme on l'a vu dans la section 147, que la différence $|v - v'|$ entre deux valeurs de v intérieures au pic de la gaussienne est au-dessous de la limite de décohérence. Ainsi, la description des états possibles du compteur par des fonctions d'onde reste correcte (bien qu'évidemment idéale). On se place ainsi exactement dans les conditions que Schrödinger envisageait quand il analysait son exemple.

Dans ces conditions, l'effet de décohérence (qu'on suppose bien décrit par l'équation (17.6)) donne pour l'opérateur d'état réduit au temps $t + \Delta t$:

$$\begin{aligned} \rho_c(t + \Delta t) = & \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0| + |V\rangle\langle V|) \\ & + \frac{1}{2} (|0\rangle\langle V| + |V\rangle\langle 0|) \exp(-\mu V^2 \Delta t), \end{aligned} \quad (19.3)$$

où μ est le coefficient de décohérence.

Estimation du coefficient de décohérence*

Le calcul du coefficient de décohérence dans le cas présent offre la matière d'un exercice. On considère le cas où le voltage est celui d'une mémoire de microprocesseur. On assimile cette mémoire à un circuit électrique (L, R, C) où L est la self, R la résistance, et C la capacité. On prend la charge comme variable position, le courant comme vitesse. Le rôle précédent de la masse M est joué par L et le coefficient d'amortissement γ est égal à R/L (R étant plus précisément la partie imaginaire de l'impédance). L'exposant de décohérence $MkT(x - x')^2 \Delta t / \hbar^2$ est remplacé par $LkT(q - q')^2(R/L) \Delta t / \hbar^2 = RkTC^2(v - v')^2 \Delta t / \hbar^2$ en tenant compte de $q = Cv$ dans les conditions normales d'une mémoire où la capacité domine. En notant qu'on peut poser sans erreur appréciable $v - v' = V$, on voit que l'équation (18.3) prend la forme :

$$\begin{aligned} \rho_c(t + \Delta t) = & \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0| + |V\rangle\langle V|) \\ & + \frac{1}{2} (|0\rangle\langle V| + |V\rangle\langle 0|) \exp(-RkTC^2V^2 \Delta t / \hbar^2). \end{aligned} \quad (19.4)$$

Au bout d'un temps très court, l'exponentielle de décohérence devient totalement négligeable et l'opérateur d'état collectif prend la forme (19.1) qu'il garde cette fois définitivement, du moins tant qu'aucune autre interaction externe ne vient l'affecter directement. On arrive en d'autres termes à l'importante conclusion suivante.

Compte tenu de l'effet de décohérence, la mécanique quantique est capable de rendre compte de l'existence empirique des faits.

On notera également que si l'on inclut la particule parmi les quantités pertinentes (et non plus seulement collectives), la trace qui donne alors l'opérateur réduit ρ_r ne porte plus sur la particule, dont les états continuent d'apparaître.

On trouve alors au lieu de l'équation (19.3) :

$$\begin{aligned} \rho_r(t + \Delta t) = & \frac{1}{2} (|0\rangle \otimes |2\rangle\langle 0| \otimes \langle 2| + |V\rangle \otimes |1\rangle\langle V| \otimes \langle 1|) \\ & + \frac{1}{2} (|0\rangle \otimes |2\rangle\langle V| \otimes \langle 1| + |V\rangle \otimes |1\rangle\langle 0| \otimes \langle 2|) \exp(-\mu V^2 \Delta t). \end{aligned}$$

On voit alors qu'une mesure exercée sur la particule, après la recombinaison des chemins qu'on avait précédemment considérée, ne change rien à l'état de l'appareil après décohérence complète. Il y a donc bien préservation des données.

Pour le montrer, il suffit de projeter les deux états de la particule 1 et 2 sur le même état 3 dans l'équation précédente. La décohérence complète revient à considérer l'exponentielle comme totalement négligeable et on obtient pour l'opérateur réduit final du système (particule + compteur) :

$$\rho_c = \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0| + |V\rangle\langle V|).$$

On constate qu'il s'agit encore de l'état collectif diagonalisé (19.1) et non plus de l'état pur (19.2) qu'on avait trouvé dans les mêmes conditions quand il n'y avait pas de décohérence.

Signification des résultats

Décohérence et états purs

164. Pour éviter tout risque de contresens sur la signification de ces résultats, il faut souligner que la décohérence ne supprime les interférences (ou superpositions) que dans l'opérateur d'état réduit, supposé décrire ce qui est véritablement observable au niveau des phénomènes. Rien ne se passe, d'un point de vue mathématique, au niveau de l'état complet ρ qui continue de garder tous les détails inaccessibles concernant l'environnement, ses fonctions d'onde infiniment complexes et leurs phases erratiques. Néanmoins, un état pur reste un état pur car cela ne fait que traduire la linéarité de l'équation de Schrödinger. C'est là un résultat mathématiquement évident et en même temps une affirmation que rien ne peut, en général, confirmer physiquement par une observation.

Bell (1975) avait critiqué ce nouveau paradoxe apporté par la décohérence et qui vient s'opposer à celui du chat de Schrödinger. Il admettait pour cela, à la suite de von Neumann, que toute observable qu'on peut concevoir mathématiquement peut être en principe mesurée. On peut alors en imaginer certaines dont la mesure révélerait la persistance d'un état pur. D'Espagnat (1994) a repris cette argumentation et l'a précisée par des modèles, dans le but de montrer que la décohérence ne constituerait pas une réponse de nature fondamentale au problème de Schrödinger dont on puisse entièrement se satisfaire et qu'elle ne serait bonne au mieux que « pour les seuls besoins de la pratique » (par opposition à une exigence ontologique). La question ainsi posée est certainement fondamentale et l'on y reviendra dans le chapitre suivant.

Ajoutons encore une remarque, destinée aux lecteurs qui auraient des critiques à propos des hypothèses très fortes qui ont été faites dans notre description de la mesure. Soulignons encore une fois que le but était de serrer au plus près la comparaison avec un système idéal, du type qui avait conduit historiquement au cas du chat de Schrödinger. On peut remplacer ces hypothèses en général par les deux suivantes.

(1) Si la particule est initialement dans l'état $|1\rangle$ (respectivement $|2\rangle$), au moins une coordonnée collective de l'appareil montrera, à la fin de la mesure, une indication V (respectivement 0) caractérisée par une propriété classique, cela résultant de la dynamique de l'interaction.

(2) La décohérence sépare ces propriétés classiques.

L'action continue de la décohérence

165. On peut également regarder l'expérience précédente avec l'œil d'un physicien qui se refuse à aller trop loin dans la simplification. Ainsi, on a admis qu'on pouvait partir d'un état initial de superposition pour l'appareillage, tel qu'il apparaît dans l'équation (19.3) à l'instant $\Delta t = 0$. Un tel état est-il jamais réalisé pour un système microscopique ou ne s'agit-il que d'un modèle commode ? Si tel est le cas, en quoi les conclusions en sont-elles affectées ? Pour en décider, il faut

examiner de plus près le fonctionnement d'un compteur Geiger (ou de tout autre détecteur qu'on pourrait analyser de manière analogue). C'est une enceinte contenant un diélectrique, lequel est soumis à un champ électrique légèrement inférieur au seuil de claquage. Quand une particule chargée entre dans l'enceinte, elle ionise des atomes du diélectrique sur son chemin en produisant des électrons libres. Ces électrons sont accélérés par le champ électrique et deviennent à leur tour capables d'ioniser d'autres atomes. Il se produit ainsi des réactions d'ionisation en chaîne qui, très vite, créent suffisamment d'électrons libres pour que le milieu devienne conducteur. Le champ produit alors un courant, sous forme d'une étincelle que l'électronique enregistre.

Si on laisse l'électronique de côté, on voit que tout se passe dans le milieu diélectrique, c'est-à-dire dans l'environnement. Dès l'instant où un ion atomique est créé, il interagit avec les atomes voisins qui se comportent pour lui comme un environnement et produisent un effet de décohérence, d'abord minime, puis très vite plus marqué, et ensuite renforcé à mesure que d'autres ionisations se produisent. En fait, dès que quelques ions ont été produits, on peut considérer qu'une observable collective s'est créée ; il s'agit du nombre des électrons libérés et des ions pour lesquels la décohérence agit déjà. Viendrait-on à couper le champ alors qu'il n'y a encore que quelques ionisations (une seule à la limite), que la décohérence serait déjà réalisée. Ainsi, on n'arrive jamais à un état de superposition du compteur ni *a fortiori* d'une mémoire dans l'électronique et tout se produit très tôt, à un niveau qui, bien qu'encore microscopique (ou mésoscopique : entre le micro et le macroscopique), n'en est pas moins soumis à la décohérence parce que les ions eux-mêmes ont un environnement. Il en va de même pour le chat de Schrödinger : les jeux sont faits quand la désintégration de la source radioactive est détectée par le dispositif diabolique, bien avant que la fiole de poison ne soit brisée.

La conclusion qui ressort de cette brève analyse est donc que le modèle de mesure utilisé ne conduit pas à des résultats exagérément optimistes, mais qu'il est, au contraire, conservateur et prudent. En effet, la décohérence n'attend pas pour agir qu'un signal macroscopique lisible soit créé pour le séparer des autres signaux avec lesquels il aurait pu se superposer. Elle agit aussitôt, dans l'obscurité de l'environnement.

Mesures successives

Une expérience

166. On se tourne à présent vers le problème de la réduction de la fonction d'onde. On considère pour cela une expérience qui met en jeu deux mesures successives du spin d'un même atome de spin $1/2$, la première mesurant la composante S_z et la deuxième la composante S_x (Figure 19.3). Du point de vue de l'interprétation de Copenhague, une réduction de l'état de l'atome aurait dû avoir lieu lors de la première mesure et c'est ce qu'on veut examiner, en comparant

de nouveau une situation académique et une autre plus réaliste où la décohérence intervient.

Ainsi, un atome Q de spin $1/2$ est préparé initialement dans un état pur de spin $S_x = 1/2$. Il traverse un premier dispositif de Stern-Gerlach orienté selon l'axe des z . On sait (et on a vu dans la section 98) que le champ magnétique d'un tel dispositif peut guider l'atome le long de deux trajectoires différentes selon la valeur de S_z . Nous considérerons que ce champ et l'électroaimant qui le crée font partie de l'appareillage de conditionnement de l'expérience, et que le véritable appareil de mesure est un compteur qu'on désigne par M , placé sur la trajectoire que suivrait un atome dans le cas d'un état pur $S_z = +1/2$. Un second appareil de Stern-Gerlach, orienté le long de l'axe des x , est placé derrière le premier ; il est muni lui aussi d'un compteur M' placé sur la trajectoire que suivrait un atome pénétrant dans le champ du second appareil dans l'état $S_x = +1/2$.

On reprendra les conventions et les simplifications précédentes pour la description des compteurs M et M' , en considérant les cas où il s'agit d'appareils de mesure idéaux à la von Neumann ou de systèmes plus réalistes, où la décohérence se produit sous l'effet d'un environnement.

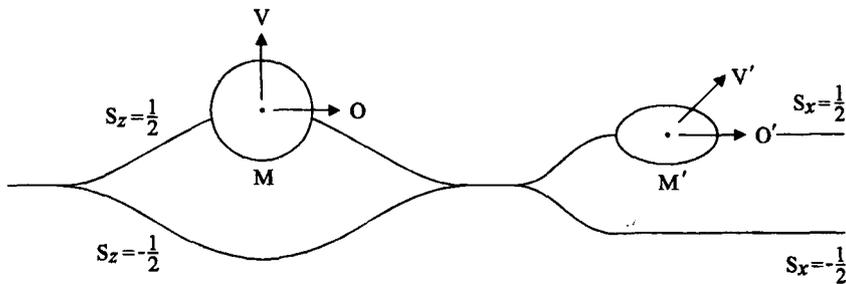


Figure 19.3 Une expérience de référence.

Ainsi, dans le cas réaliste, il existe un environnement e du compteur M et un autre, e' , du compteur M' . Dans le cas académique, le premier compteur n'a qu'un seul degré de liberté, et l'environnement e est absent. C'est sur ce premier compteur que toute la question de la réduction va porter. Quant au second compteur M' , il importe peu qu'il soit réaliste ou non. En fait, la fixation par décohérence de la donnée fournie par la deuxième mesure ne pourrait avoir d'importance que pour des événements qui seraient postérieurs à cette deuxième mesure. Il est donc sans importance qu'il y ait ou non décohérence dans M' et il sera plus simple d'ignorer son environnement afin de simplifier la discussion.

Il sera commode d'utiliser une notation indiquant à la fois l'état de l'atome Q et celui des compteurs. On conviendra de désigner par exemple par $|x + \rangle$ et $|x - \rangle$ les deux états propres de S_x dont les valeurs propres sont respectivement $+1/2$ et $-1/2$. Les deux états (idéaux ou collectifs selon le cas) du compteur M , analogues à ceux qu'on décrivait précédemment, seront désignés par $|0 \rangle$ et $|V \rangle$. De même, les états de M' seront désignés par $|0' \rangle$ et $|V' \rangle$. On simplifiera

encore la notation en écrivant par exemple $|x +, V, 0' \rangle$ à la place de $|x + \rangle \otimes |V \rangle \otimes |0' \rangle$. Quand on introduira des projecteurs, ceux-ci seront notés de manière simplifiée. Ainsi, le projecteur exprimant que le premier compteur indique le potentiel V sera noté $|V \rangle \langle V|$, alors que sa forme complète devrait être $I_Q \otimes |V \rangle \langle V| \otimes I_{e'} \otimes I_{M'}$ (ou $I_Q \otimes |V \rangle \langle V| \otimes I_{M'}$ dans le cas académique, Q désignant l'atome).

Le déroulement des événements dans le temps est le suivant.

- À l'instant initial 0, l'état du système est $|x +, 0, 0' \rangle$ (on n'écrit pas explicitement l'état de l'environnement qui exigerait de passer à la notation des opérateurs d'état).
- À l'instant t_1 , l'atome interagit avec le compteur M . Celui-ci indique alors le résultat de la mesure par l'affichage d'un potentiel V (pour $z +$) ou 0 (pour $z -$).
- À l'instant t_1' (seulement dans le cas réaliste), la décohérence peut être considérée comme ayant complètement agité dans M .
- À l'instant t_2 (postérieur à t_1'), l'atome interagit avec le compteur M' . Celui-ci indique le résultat de la mesure par affichage du résultat V' (pour $x +$) ou $0'$ (pour $x -$).

Le cas académique

167. Pour rendre compte de l'expérience et l'exploiter, on utilise la méthode des histoires. La famille d'histoires pertinente inclut toutes les données directement observables (ou supposées telles, puisqu'on se place d'abord dans le cas académique). Cela inclut donc les projecteurs $|V \rangle \langle V|$ et $|0 \rangle \langle 0|$ à l'instant t_1 , $|V' \rangle \langle V'|$ et $|0' \rangle \langle 0'|$ à l'instant t_2 .

Considérons par exemple l'histoire a où la première et la seconde donnée sont V et V' . L'opérateur d'histoire correspondant, après explicitation de l'évolution dans le temps, est de la forme :

$$C_a = U^\dagger(t_2, 0) |V' \rangle \langle V'| U(t_2, t_1) |V \rangle \langle V| U(t_1, 0). \quad (19.5)$$

Notons qu'on voit intervenir des opérateurs d'évolution du type $U(t, t')$ et non $U(t - t')$ pour les raisons générales discutées dans la section 114 ou, dans le cas académique, parce qu'une mesure du type de von Neumann se produit à un instant bien déterminé car l'hamiltonien d'interaction entre Q et M dépend explicitement du temps.

Comme la famille d'histoires ainsi introduite est du type dichotomique à deux instants déjà discuté dans la section 116, on sait qu'il n'y a qu'une seule condition de rationalité qui est de la forme :

$$\text{Tr} (C_a \rho(0) C_b^\dagger) = 0, \quad (19.6)$$

l'histoire b correspondant au cas où la première donnée est 0, et la seconde est V' . Nous allons étudier cette condition en détail.

168. Laissant de côté l'environnement de M' qui ne peut jouer aucun rôle, on peut remplacer $\rho(0)$ par $|x+, 0, 0'\rangle\langle x+, 0, 0'|$. On peut alors suivre l'action des différents termes qui interviennent dans le vecteur $C_a |x+, 0, 0'\rangle$. On peut d'abord y isoler un terme $U(t_1 - \varepsilon, 0) |x+, 0, 0'\rangle$ qui est égal à $|x+, 0, 0'\rangle$. Ici ε est un temps très court, de sorte qu'on a saisi le système après sa préparation et juste avant la mesure. En écrivant la formule précédente, on ne tient pas compte du mouvement de l'atome qui se déplace pourtant jusqu'au compteur pendant le temps considéré. On convient ainsi implicitement que l'expérience a été modélisée en laissant de côté la fonction d'onde spatiale de l'atome. Cet aspect est essentiel et il pourrait être aisément amélioré, mais au prix d'un alourdissement inutile du formalisme. On en restera donc là sur ce point.

La première détection se produisant entre les instants $t_1 - \varepsilon$ et t_1 , on a $U(t_1, t_1 - \varepsilon) |z+, 0, 0'\rangle = |z+, V, 0'\rangle$ et $U(t_1, t_1 - \varepsilon) |z-, 0, 0'\rangle = |z-, 0, 0'\rangle$. On en tire $|V\rangle\langle V|U(t_1, 0)|x+, 0, 0'\rangle = 2^{-1/2} |z+, V, 0'\rangle$. On peut noter que le même résultat est obtenu si l'on remplace le projecteur $|V\rangle\langle V|$ de la première « donnée » de l'appareil de mesure par le projecteur $|z+\rangle\langle z+|$ qui correspond au résultat de cette mesure et ne concerne que l'atome.

Les mêmes arguments donnent alors :

$$|V'\rangle\langle V'|U(t_2, t_1)|V\rangle\langle V|U(t_1, 0)|x+, 0, 0'\rangle = (1/2)|x+, V, V'\rangle,$$

et, là encore, on remarque qu'on peut remplacer le projecteur $|V'\rangle\langle V'|$ de la deuxième donnée par le projecteur $|x+\rangle\langle x+|$ du résultat. On a de la même manière :

$$|V'\rangle\langle V'|U(t_2, t_1)|0\rangle\langle 0|U(t_1, 0)|x+, 0, 0'\rangle = (1/2)|x+, V, V'\rangle,$$

ce qui donne, au lieu de la condition de rationalité (19. 6),

$$\text{Tr}(C_a \rho(0) C_b^\dagger) = 1/4,$$

expression qui coïncide d'ailleurs avec celle qu'on aurait obtenue pour une histoire relative à un spin sans que des mesures interviennent, comme on l'avait fait dans la section 119.

Ainsi, les histoires considérées ne constituent pas une famille rationnelle et on ne peut rien espérer en tirer de sensé.

Le cas réaliste avec décohérence

Décohérence et histoires

169. On considère à présent le cas où le compteur M est décrit de manière réaliste avec environnement et décohérence. Toute la différence avec le cas précédent se joue alors entre les instants t_1 et t_1' lorsque la décohérence agit. Nous sommes ainsi confrontés à un problème qui avait été laissé de côté jusqu'ici : celui de concilier la théorie de la décohérence, où l'opérateur d'état est considéré comme

variable dans le temps, et la méthode des histoires où ce sont les projecteurs. On en profitera pour indiquer comment traiter cette question.

Il faut maintenant introduire l'état de l'environnement e dans l'état initial. Dans un opérateur d'histoire tel que C_a , par exemple, il faut remplacer l'opérateur d'évolution $U(t_2, t_1)$ par $U(t_2, t'_1) U(t'_1, t_1)$ de manière à faire ressortir l'intervalle de temps pendant lequel la décohérence a lieu. Enfin la trace comporte maintenant une trace supplémentaire à effectuer sur l'environnement e . Rien de ce qui précède n'est alors changé jusqu'à l'instant t_1 et l'environnement e n'intervient plus dans aucune histoire après l'instant t'_1 .

Considérons donc comment se trouve modifié le calcul de la condition de rationalité (des considérations analogues pouvant s'appliquer au calcul des probabilités). On constate qu'on est ramené à calculer la quantité :

$$F(t'_1) = \text{Tr}_e \left\{ U(t'_1, t_1) \left(\frac{1}{2} |z +, V, 0' \rangle \langle z +, 0, 0' | \otimes \rho_e(t_1) \right) U^\dagger(t'_1, t_1) \right\} \quad (19.7)$$

C'est un opérateur dans l'espace de Hilbert de $Q + M + M'$, mais non plus dans celui de e . La condition de rationalité (19.6) prend alors la forme :

$$\text{Tr} \{ |V' \rangle \langle V' | U(t_2, t'_1) F(t'_1) U^\dagger(t_2, t'_1) \} = 0, \quad (19.8)$$

où la trace ne porte pas sur l'environnement e . C'est cette équation (19.8) qu'il faut vérifier comme conséquence de la décohérence.

L'essentiel du problème (et en fait l'essentiel de la discussion du problème de la réduction) porte sur le calcul de $F(t'_1)$. Nous introduirons pour cela un opérateur $F(t)$ qui dépend du temps de manière continue, en remplaçant t'_1 par t dans l'expression (19.7), avec $t_1 \leq t \leq t'_1$.

Si l'on revient alors à la démonstration de l'équation maîtresse de la décohérence établie au chapitre 18, on constate que nulle part on n'y voit apparaître comme hypothèse que l'opérateur réduit ρ_e qui y intervient soit effectivement un opérateur d'état. Il suffit que ce soit une densité (au sens de la section 152), ce qui est bien le cas présentement pour $F(t)$. Il en résulte que $F(t)$ vérifie l'équation maîtresse de la décohérence et, en particulier, l'équation (17.6) si les hypothèses simplificatrices qui y conduisent sont valables. Les éléments non diagonaux de $F(t)$ disparaissent alors par décohérence, ce qui donne $F(t'_1) = 0$, et la condition de rationalité est bien satisfaite. On est donc bien dans un cas typique où la rationalité de la description d'une expérience résulte de la décohérence.

La formule de réduction

170. Il ne reste qu'à conclure le calcul pour obtenir les probabilités des diverses histoires utiles.

Considérons par exemple l'histoire a . Sa probabilité est donnée par :

$$p(a) = \text{Tr} \{ |V' \rangle \langle V' | U(t_2, t'_1) G(t'_1) U^\dagger(t_2, t'_1) \}, \quad (19.9)$$

avec :

$$G(t'_1) = \text{Tr}_e \left\{ U(t'_1, t_1) \left(\frac{1}{2} |z +, V, 0' \rangle \langle z +, V, 0' | \otimes \rho_e(t_1) \right) U^\dagger(t'_1, t_1) \right\}.$$

La même analyse de la décohérence que celle faite précédemment conduit alors au résultat :

$$G(t_1) = \frac{1}{2} |z +, V, 0' \gg z +, 0, 0' |.$$

Le seul effet de l'opérateur $U(t_2, t_1)$ est de représenter la mesure à l'instant t_2 sous la forme :

$$|V' \gg V' |U(t_2, t_1)|z +, V, 0' \gg = \langle x + | z + \rangle |x +, V, V' \gg,$$

et, comme auparavant, on peut remplacer le projecteur $|V' \gg V' |$ de la donnée par celui du résultat concernant directement le spin $|x + \gg x + |$. La trace sur M et M' est alors immédiate et, on obtient :

$$p(a) = \frac{1}{2} |\langle x + | z + \rangle|^2. \quad (19.10)$$

Il se trouve que la formule bien connue qu'on déduit d'ordinaire d'une réduction des fonctions d'onde est contenue dans le résultat (19.10). Cette équation a cependant un inconvénient qui tient à la trop grande simplicité de l'exemple qui nous a servi : une mesure de spin, avec seulement deux résultats possibles, est un peu trop particulière pour faire bien ressortir une règle générale. Il sera donc bon d'étoffer davantage cet exemple.

Plutôt qu'un spin $1/2$, on considérera un système dont la dimension de l'espace de Hilbert est arbitrairement grande, éventuellement infinie. L'état initial du système mesuré est supposé être un état pur $|\psi \gg$. Au lieu de mesurer S_z dans un premier temps, on mesure une observable A . Pour parvenir à une généralité suffisante sans entrer dans des complications peu éclairantes, on supposera que les valeurs propres a_n de A sont discrètes et non dégénérées. Le détecteur M indique alors une donnée V_n si l'état initial est le vecteur propre $|n \gg$ associé à a_n . On suppose comme auparavant que, dans ces conditions, le système mesuré sort du premier appareil dans le même état $|n \gg$. La première mesure est donc du type que Pauli appelait le Type I et qu'on appelle à présent une mesure sans démolition de l'observable A .

De manière analogue, un second appareil M' mesure une observable A' dont les valeurs propres non dégénérées a'_m sont signalées par une donnée macroscopique V'_m . Il faut évidemment faire intervenir davantage d'histoires et il y a davantage de conditions de rationalité à vérifier, mais les calculs restent les mêmes. Il suffit d'ajouter des indices n et m par endroits.

On peut ainsi obtenir une expression plus parlante pour la probabilité d'une histoire où les deux données successives sont V_n et V'_m (correspondant aux valeurs propres a_n et a'_m). L'équation (19.10) est alors remplacée par :

$$p(n, m) = |\langle a_n | \psi(t_1) \rangle|^2 \cdot |\langle a'_m | U(t_2, t_1) | a_n \rangle|^2. \quad (19.11)$$

C'est exactement la formule que donne la règle de réduction de la fonction d'onde. La probabilité pour obtenir le résultat a_n lors de la première mesure faite à l'instant t_1 est donnée par la formule de Born $|\langle a_n | \psi(t_1) \rangle|^2$. La probabilité conditionnelle pour obtenir le résultat a'_m dans la deuxième mesure faite à l'instant t_2 , en posant que le premier résultat est a_n , est celle qu'on obtiendrait en supposant que la fonction d'onde est celle de $|a_n \gg$ à l'instant t_1 . Cette probabilité est donnée, en effet, selon la formule de Born par $|\langle a'_m | U(t_2, t_1) | a_n \rangle|^2$.

Le propagateur $U(t_2, t_1)$ marque l'évolution de l'état réduit entre sa valeur initiale $|a_m\rangle$ à l'instant t_1 et l'instant t_2 où il est mesuré.

Le résultat ainsi obtenu est fondamental et il sera repris, généralisé et commenté dans le chapitre 21.

Résumé

Un appareil de mesure macroscopique dans lequel la décohérence a lieu a un comportement radicalement différent de celui des modèles ultra-simplifiés que von Neumann et Schrödinger avaient considéré. Une donnée assurée par décohérence ne peut jamais être remise en question par la suite, que ce soit du fait d'une évolution naturelle ou d'une intervention extérieure.

Dans le cas de deux mesures successives, on peut calculer les probabilités des événements donnés par la seconde mesure quand une certaine donnée est acquise par décohérence lors de la première mesure. Ces probabilités sont données par une formule qui coïncide avec celle que fournit traditionnellement l'hypothèse d'une réduction de la fonction d'onde. On ne doit pas supposer cependant l'existence d'un effet de réduction affectant l'objet mesuré, mais seulement l'effet de décohérence qui s'exerce sur l'appareil de mesure.

171. Plusieurs questions importantes ont été rencontrées en chemin, sans recevoir de réponse explicite ; elles sont rassemblées ici. Trois au moins peuvent être qualifiées de fondamentales. Il s'agit d'abord de l'existence d'un sens privilégié du temps, qui est commun à la logique quantique, à la décohérence et au second principe de la thermodynamique.

Vient ensuite la question posée par Bell et d'Espagnat qui s'interrogeaient sur le caractère fondamental de la décohérence et se demandaient s'il s'agit vraiment de la réponse définitive au problème du chat de Schrödinger. La dernière question porte sur une notion qui porte un nom disgracieux (l'objectification) mais exprime le fait qu'une donnée expérimentale est nécessairement unique ; se pose alors la question d'expliquer ce fait.

Ces questions sont délicates et on ne peut s'étonner que les opinions des chercheurs soient très divergentes à leur sujet. On pourrait les rejeter comme n'ayant pas de conséquence pratique. Pourtant, « Notre raison a un destin singulier d'être ... aisément troublée par des questions qu'elle ne peut ignorer ... parce que ces questions prennent leur source dans la nature même de la raison, et qui ne peuvent recevoir de réponse, parce qu'elles transcendent le pouvoir de la raison humaine ». C'est du moins ce que disait Kant.

Il y a aussi parfois, dans la science même, des questions imparfaitement tranchées qu'on ne peut laisser de côté tant elles imposent leur exigence à l'esprit et qui trouvent toujours quelqu'un pour objecter à leurs réponses possibles, parce qu'elles ont trop de répercussions sur la nature même de la connaissance. En d'autres termes, on est à mi-chemin entre science et philosophie. Mais pourquoi ne pas en parler dans un livre de physique, si ces questions viennent vraiment de la physique ?

Mieux vaut avertir le lecteur que la discussion de ces questions, telle qu'elle va suivre, est quelque peu biaisée. Elle insiste en effet sur des réponses que suggère l'interprétation ici développée, et elle n'essaiera pas toujours de passer en revue tous les autres points de vue.

La question des très petites probabilités

La notion de probabilités extrêmement petites

172. La clef à laquelle on aura recours à propos des questions posées sera de leur donner une forme quantitative en termes de probabilités. L'interprétation met souvent en jeu des probabilités qu'on néglige parce que très petites. On a ainsi rencontré des situations où apparaissaient des probabilités exponentiellement petites de la forme $p = \exp(-n)$ où n est un nombre très grand de la forme C/h^α ($\alpha > 0$), C étant une quantité macroscopique. Deux cas sont particulièrement importants. Le premier concerne des propriétés classiques qui s'excluent mutuellement, de sorte qu'on considère à bon droit que l'énoncé de l'une est contraire à celui de l'autre. La valeur du paramètre n est alors d'après la formule (10.13), $n = \sqrt{\Delta x \Delta p} / \hbar$ ($\delta x^2 / \Delta x^2$) avec les notations de la section 92. Un autre cas est celui de l'absence d'interférences macroscopiques résultant d'un effet de décohérence après un temps Δt . On a alors $n = \Delta t / t_d$, t_d étant le temps caractéristique de la décohérence.

La question qui se pose alors est de savoir si de telles probabilités peuvent avoir une signification empirique. On peut voir ceci de deux manières. Supposons que les lois de la physique soient telles qu'on doive renoncer à trouver un biais expérimental qui rendrait ces probabilités moins inaccessibles. On peut dire alors que la probabilité p n'a aucune signification empirique si aucune expérience qui pourrait la mesurer n'est réalisable, même en principe. On pourrait par exemple essayer de mesurer p par des mesures répétées qui durent chacune un temps τ . Si le rapport τ / p est plus grand que l'âge de l'univers, on peut considérer à bon droit la mesure comme infaisable. Il en irait de même si l'on faisait simultanément un grand nombre de mesures identiques mais que cela exige davantage de matière pour fabriquer les appareils de mesure qu'il n'en existe dans tout l'univers. Notons que le recours aux limites imposées par l'âge et la taille de l'univers est certainement sensé car, à l'inverse, pour les problèmes qui nous intéressent, il est clair qu'aucune physique classique, aucune décohérence appréciable, aucun fait ne pourraient se manifester dans un univers qui ne contiendrait qu'un très petit nombre de particules. Ainsi, quand l'univers est trop jeune ou trop petit pour qu'une probabilité soit détectable, on peut qualifier celle-ci d'extrêmement petite. Comme de plus le comportement de p est exponentiel, il ne faut pas prendre ce recours à l'univers entier « au pied de la lettre » et la restriction aux moyens humains suffit.

L'exemple de la thermodynamique classique

173. Des considérations quantitatives analogues à celles qui nous occupent sont apparues, pour la première fois en physique, à propos de l'équation de Boltzmann et du second principe de la thermodynamique. Il s'agissait alors de physique classique. On s'accorde généralement à admettre à présent que l'irréversibilité thermodynamique est fondée sur l'impossibilité pratique de revenir à un

état initial à partir d'un état final. L'état initial peut être par exemple un gaz confiné dans une moitié d'un récipient, et l'état final le même gaz emplissant de manière homogène tout le récipient. La probabilité p de retour en arrière est reliée à la différence d'entropie ΔS entre les deux états par $p = \exp(-\Delta S / k)$, où k est la constante de Boltzmann.

L'axiome zéro de Borel

174. Dans la mesure où certaines questions que pose l'interprétation de la mécanique quantique se ramènent à la signification de certaines probabilités, on peut se demander si l'interprétation du calcul des probabilités ne devrait pas précéder celle de la physique quantique. C'était le point de vue d'Émile Borel (1937, 1941), un des fondateurs de la théorie moderne des probabilités, point de vue qu'il appliquait à la fois à la thermodynamique et à la mécanique quantique.

La solution qu'il proposait était radicale puisqu'il n'hésitait pas à poser un « Axiome Zéro » avant toute interprétation du calcul des probabilités : une probabilité suffisamment faible doit être considérée comme nulle et les événements auxquels elle se rapporte doivent être considérés comme impossibles. Sa définition des probabilités « suffisamment faibles » est essentiellement celle que nous donnions plus haut comme « extrêmement faibles ».

L'analyse épistémologique de Borel est trop fine pour qu'on s'y étende ici. On n'en retiendra que deux axes.

- Une quantité physique n'a de sens que si elle peut être mesurée. Sinon, elle n'appartient qu'à la théorie où sa signification est purement mathématique sans être en aucun cas empirique.
- À supposer même qu'un événement de ce type (c'est-à-dire de probabilité extrêmement petite) se produise, l'expérience ne pourrait être reproduite pour faire entrer le phénomène dans le cadre de la science expérimentale. On peut ajouter qu'il est téméraire de s'appuyer sur une théorie en lui supposant une précision extrêmement supérieure à celle des expériences qui l'ont établie.

Un certain nombre de physiciens semblent avoir cependant davantage de foi que Borel dans la signification physique des « symboles mathématiques » (selon le mot de Bohr). C'est une des divergences d'appréciation, dont nous parlions au début, qui sort du cadre de la science.

Peut-on tourner la décohérence ?

175. Comme on le signalait plus haut, Bell a soulevé une objection sérieuse contre la capacité de la décohérence à expliquer définitivement l'absence d'interférences macroscopiques. L'objection a été reprise par d'Espagnat et on peut la résumer ainsi. Supposons qu'un système macroscopique, composé d'un objet quantique à mesurer et d'un appareil de mesure, soit initialement dans un état pur. La théorie de la décohérence montre bien qu'aucune interférence macroscopique détectable ne subsiste après la mesure. Bell et d'Espagnat ne contestent pas la validité pratique de cette conclusion, mais ils nient son caractère fondamental.

Bell utilise pour cela une expression qui est passée dans le langage courant : il s'agit d'une explication valable « pour les besoins de la pratique ».

Bell et d'Espagnat font remarquer que l'état pur initial du système (mesuré + mesurant) reste nécessairement pur, d'après la linéarité de la dynamique quantique. Ils notent qu'il est toujours mathématiquement possible d'identifier un état pur $|\phi\rangle$ comme étant effectivement pur. Il suffit pour cela, par exemple, de tester si la propriété de projecteur $|\phi\rangle\langle\phi|$ a la probabilité 1. Si l'on admet avec von Neumann que toute observable est mesurable en principe, la mesure de ce projecteur révélera la survivance de la pureté initiale. On peut évidemment envisager d'autres observables moins extrêmes, mais elles exigent toutes de tester très en profondeur l'état de l'environnement.

Ceux qui contestent cet argument (dont le présent auteur) font remarquer les points suivants.

- Un objet macroscopique ne peut jamais être dans un état pur, comme le montre la discussion de la notion d'état dans le chapitre 13.

- Il est faux que toute observable soit mesurable, car une mesure repose sur les interactions existantes entre particules élémentaires, ce qui est extrêmement restrictif.

- Quand on essaie de concrétiser l'idée de Bell en considérant un système macroscopique S ayant N degrés de liberté, soumis à une mesure effectuée par un appareil S' ayant N' degrés de liberté, la suppression des effets de décohérence exige que N' croisse exponentiellement avec N (Omnès, 1994a, chapitre 7). On se retrouve donc très vite dans le cas des appareils plus grands que l'univers dont on parlait plus haut.

- La possibilité d'une *interprétation* de la mécanique quantique n'est sans doute pas universelle. On ne voit pas, par exemple, comment elle pourrait avoir un sens dans un univers très petit (« bébé univers ») ou dans un espace-temps de Minkowski qui ne contiendrait que deux ou trois électrons. L'existence d'un domaine classique, interprétable par le sens commun, apparaît comme inséparable de l'abondance de matière dans l'univers où nous sommes.

Une autre réponse a été donnée par Asher Peres (1980). Il montre que le fonctionnement d'un appareil extérieur qui restaurerait un état pur après la première mesure devrait violer le second principe de la thermodynamique.

On ne peut que laisser à ce point le lecteur juger de ce qu'il pense le plus vraisemblable ou le plus convaincant. Il semble bien qu'on soit en présence d'une question d'option philosophique bien plus que de science, au sens expérimental du terme.

Le sens du temps

176. Quand on a défini les histoires, on a considéré des instants bien ordonnés, $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ pour les divers instants. Cela revient au choix d'un sens du temps pour la « logique » de l'interprétation. On peut choisir en théorie ce sens comme on veut, entre les deux directions opposées, mais ce doit être le même une

fois pour toutes. Si l'on considère en effet deux familles d'histoires rationnelles relatives à deux systèmes physiques distincts, même lorsque ces systèmes n'interagissent pas, on ne peut réunir ces familles en une seule plus vaste qui soit rationnelle si le sens du temps adopté pour les deux familles n'est pas le même (sinon, il est impossible de satisfaire aux conditions de rationalité, ou même de les formuler). Il existe donc un sens du temps de la logique qui doit être universel.

On a signalé d'autre part à maintes reprises que la validité des conditions de rationalité résulte très souvent d'un effet de décohérence. Les exemples discutés dans le chapitre précédent le montrent. Or cela suppose qu'on ait fixé une direction du temps pour la décohérence, comme on l'a vu au chapitre 18. On sait, de plus, que le sens du temps de la décohérence est le même que celui de l'irréversibilité thermodynamique (comme on l'a vu dans ce même chapitre 18). La conclusion est immédiate : la logique quantique (y compris le cas limite constitué par le sens commun), la décohérence et les processus thermodynamiques n'ont de signification qu'avec chacun une direction de la flèche du temps, et celle-ci est nécessairement la même dans les trois cas.

On voit comment cela s'accorde avec le fait que les principes fondamentaux de la théorie sont invariants par renversement de sens du temps. Il s'agit en effet d'un ensemble de résultats qui n'ont de signification que lorsque au moins un système macroscopique est présent. Or deux états distincts d'un système macroscopique ne sont pas en général équivalents. Sans entrer dans le cas des processus naturels et en ne retenant que les expériences de laboratoire, la préparation d'un système macroscopique est toujours déterminée par un nombre fini de paramètres extérieurs, et l'action de l'opérateur formel de renversement du temps T sur un état ultérieur ne peut être réalisée par le seul contrôle d'un nombre fini de paramètres (classiquement, par exemple, il faut renverser les vitesses de toutes les molécules).

Quantiquement, il faudrait préparer exactement la fonction d'onde (ou un vecteur propre de l'opérateur densité). Un opérateur d'état peut exister, en revanche, en n'étant déterminé que par quelques paramètres de préparation. Très vite cependant il devient impréparable par aucun autre procédé que celui qui lui donne naissance de manière dynamique. Au total, il semble bien que la clef conceptuelle de l'irréversibilité soit le rejet de la notion de fonction d'onde.

La question du réalisme

177. Qu'est-ce que la réalité physique et que peut-on en dire ? C'est en ces termes qu'on peut poser la question du réalisme. Elle plonge très loin dans le passé et son histoire commence avec Hipparque, l'astronome, pour passer par des philosophes de l'Antiquité tardive, Simplicius, Posidonius et Saint-Augustin. La question posée alors est très générale et toujours actuelle : la science peut-elle atteindre la nature des choses ou se limite-t-elle à rendre compte de leurs apparences ?

La question a longtemps paru réservée aux philosophes mais elle a repris de l'acuité avec la mécanique quantique. Einstein, en particulier, lui attribuait une grande importance. Bernard d'Espagnat (1985, 1994) l'a analysée et approfondie dans ses ouvrages auxquels nous renvoyons le lecteur car nous préférons rester bref sur une question qui, bien que fascinante, ne semble guère évoluer.

Indiquons-en seulement les difficultés. Il y a d'abord cette conséquence des relations d'incertitude qui interdit toute représentation visuelle, même imaginaire, des particules. On en a déjà parlé. Il y a ensuite la multiplicité des aspects complémentaires sous lesquels on peut saisir un objet quantique mais qu'il est interdit, impossible de joindre ensemble. De cela aussi on a parlé. On peut ajouter que, du moins, tout cela reste accessible au langage au travers des histoires rationnelles.

Mais la force première de la mécanique quantique n'est pas dans le langage que l'interprétation vient lui ajouter. Cette force réside dans les analyses profondes que le calcul autorise. Or, là aussi, la représentation du monde qu'on peut discerner au travers des calculs est pleine d'ambiguïtés. Que faut-il penser des histoires de Feynman, si proches apparemment de l'intuition (mais qu'il ne faut pas confondre avec les histoires de Griffiths) ? Ont-elles quelque réalité ? Que sont les processus virtuels que ces histoires suggèrent (par exemple les apparitions-disparitions aléatoires de paires positron-électron partout où il y a un champ électrique) ? Dans ces deux cas, on est au-delà de ce que le langage peut saisir avec logique car les histoires rationnelles ne peuvent donner aucune signification à ces notions. Celles-ci restent de pures analogies qui vont et viennent dans l'esprit à l'occasion de calculs. Leur signification se heurte à ce qui fait l'essence du quantique : il s'agit de processus qui interfèrent, et notre conception de la réalité n'est jamais parvenue à englober les interférences autrement que par les mathématiques.

Un résultat au moins est acquis, et il a représenté beaucoup de travail : la réalité empirique, celle des phénomènes, macroscopique, est en accord avec les principes quantiques. C'est ce qu'on a vu dans le chapitre 16 et on en verra encore un aspect dans la section suivante. Pour le reste, on se souviendra d'une phrase de Bohr (citée par Kalckar, 1967, page 234, selon Wheeler et Zurek, 1983, page 5) : « Il ne faut jamais oublier que « réalité » est un mot humain, tout comme « onde » ou « conscience ». Notre tâche est d'apprendre à faire un usage correct de pareils mots – c'est-à-dire de les employer de manière cohérente et sans ambiguïté. »

La question de l'objectification

178. La question de l'objectification est souvent énoncée ainsi : comment expliquer que le résultat concret d'une mesure soit unique, alors que la théorie ne peut que mettre tous les résultats possibles sur le même pied ? C'est donc essentiellement la question : comment la théorie quantique peut-elle rendre compte de l'unicité de la réalité empirique ? Il n'est pas rare d'entendre dire que c'est là « le » problème de l'interprétation.

Essayons d'abord de cerner plus généralement la question : quelle peut être la relation entre une théorie et l'unicité de la réalité empirique ? On prendra comme exemple la mécanique statistique classique (Griffiths, 1996). On peut utiliser les

histoires dans ce cadre, si l'on suppose que les appareils de contrôle et de mesure (classiques) ne sont pas parfaits et ne fournissent pas des valeurs parfaitement précises pour les variables dynamiques (q, p) . La seule différence avec la mécanique quantique est que de telles histoires sont toujours rationnelles, sans conditions particulières, et qu'il n'y a pas de complémentarité. La relation entre la théorie et la réalité n'en est pas moins subtile. Le rôle des principes de la mécanique quantique est rempli à présent par le cadre mathématique et par les équations de la dynamique classique. Or cela ne suffit pas à assurer l'unicité de la réalité empirique. Cette unicité doit être ajoutée, comme un axiome de plus que les principes purement théoriques. Cela montre en somme un aspect évident mais souvent oublié de la réalité : son existence, ou du moins son unicité, ne résulte jamais de la théorie, quelle que soit celle-ci.

Même en physique classique ordinaire, l'unicité de la réalité doit être postulée (ce que fait Newton quand il pose l'existence de l'espace absolu). Pour qui ne s'appuierait que sur les équations formelles de la dynamique (analogues aux principes du chapitre 8), il faudrait encore faire l'hypothèse d'une réalité unique, ne serait-ce qu'à un instant initial, avant que l'unicité ne s'ensuive, après coup, par déterminisme.

Cette analyse rapide suffit à montrer que l'existence d'une réalité empirique unique ne peut être la conséquence d'une théorie. Il est essentiel en revanche de s'assurer que la théorie est *compatible* avec cette réalité. C'est ce qu'on va examiner dans le cas de la mécanique quantique. On sera amené à supposer pour cela l'universalité de certains caractères de la décohérence, universalité qui n'est pas démontrée et dont une remise en cause pourrait compromettre le présent argument. La description des phénomènes de la réalité empirique sera faite au moyen de propriétés classiques (au sens du chapitre 10), les histoires où celles-ci entrent seules en jeu étant ce qu'on a appelé les histoires phénoménologiques. Leur cohérence, dans le cas de la physique classique stricte, repose sur l'axiome de Borel qui rejette les probabilités extrêmement petites.

Compte tenu de ce qui a déjà été établi au chapitre 16, la question de l'unicité se ramène entièrement au cas d'une mesure quantique (ou des phénomènes naturels de même nature), et elle constitue alors le problème de l'objectification. On peut d'abord noter que deux données distinctes ne peuvent pas résulter simultanément d'une mesure, quand elles sont décrites par des propriétés classiques mutuellement exclusives. Cela tient à ce que les projecteurs qui les expriment s'excluent l'un l'autre (comme on l'a vu dans la section 92 à laquelle on ajoute à présent l'axiome de Borel). Il n'y a donc pas à expliquer *pourquoi* une seule donnée apparaît à l'issue d'une mesure car la logique même de l'interprétation ne pourrait rien énoncer d'autre. Cette logique nous dit clairement : ceci ou bien cela se produit, lorsque ceci et cela sont deux résultats de mesure possibles. L'interprétation ne fournit évidemment aucun mécanisme pour déterminer si ceci ou cela va se produire mais on verra au chapitre suivant qu'il ne peut s'agir que d'événements purement aléatoires.

La difficulté cachée dans cet argument réside évidemment dans l'hypothèse selon laquelle la donnée expérimentale s'exprime par une propriété classique. Ce ne serait pas le cas si le paradoxe du chat de Schrödinger était toujours là et c'est ici que l'effet de décohérence entre en jeu. En s'appuyant sur les théories de la décohérence existantes (*cf.* chapitre 18) et supposant leurs conclusions valables en général, on peut établir deux résultats essentiels.

(1) Deux résultats de mesure distincts peuvent être décrits par des projecteurs à signification classique qui s'excluent mutuellement et ayant chacun une probabilité en accord avec les axiomes du calcul des probabilités. Ils peuvent donc être traités logiquement comme des événements classiques mutuellement exclusifs.

(2) Jamais aucune manipulation ou aucune mesure, effectuée sur l'appareil de mesure ou tout autre objet, ne peut remettre en question les conséquences logiques classiques d'un tel résultat.

Le point (1) résulte de la suppression des termes non diagonaux entre propriétés collectives distinctes par l'effet de décohérence. Le point (2) généralise l'exemple donné à la fin de la section 163. Le caractère absolu des deux affirmations (1) et (2) repose évidemment sur l'axiome de Borel.

En conclusion, l'interprétation cohérente de la mécanique quantique, ici proposée, ne rencontre pas de problème d'objectification. Elle ne peut pas concevoir logiquement que la réalité empirique puisse ne pas être unique. Il est clair en revanche qu'elle n'apporte rien qui ressemblerait de près ou de loin à un mécanisme produisant une réalité unique. Cela n'a rien pour surprendre si l'on tient pour vrai que la réalité empirique n'est pas définie par la théorie, mais que la théorie se doit au contraire d'être en accord avec cette réalité. Ce qui est le cas.

D'autres points de vue

179. On a beaucoup spéculé sur d'autres réponses possibles à la question de l'objectification. Ainsi, G.C. Ghirardi (1986), A. Rimini et T. Weber ont supposé l'existence d'un processus d'objectification qui serait un véritable effet physique et ne saurait évidemment obéir aux règles quantiques. Les auteurs supposent que la fonction d'onde de n'importe quelle particule peut changer brusquement de manière aléatoire. Dans une petite région aléatoire de dimension a , un effet de réduction spontanée laisse la fonction d'onde inchangée et, en même temps, annule la fonction d'onde en dehors de la région. L'effet est aléatoire dans l'espace et le temps, avec un intervalle de temps moyen T entre deux manifestations. Il faut choisir a et T de manière judicieuse pour éviter de remettre en cause les succès de la théorie quantique à l'échelle atomique, ce qui a été possible jusqu'à présent. Il semble cependant qu'en supposant qu'un tel effet existe, il soit impossible d'en distinguer les conséquences de celles de la décohérence, laquelle est, de plus beaucoup plus efficace et rapide.

Phillip Pearle (1976, 1984, 1989), F. Karolyhazy (1966, 1974, 1986) et Roger Penrose (1996, 1997) ont examiné ou proposé divers mécanismes d'objectification qui auraient, au contraire du modèle De Ghirardi, Rimini et Weber, leurs origines dans une physique connue. Sous une forme ou l'autre, ils attribuent l'objectification à des effets gravitationnels : l'espace-temps éliminerait les topologies aberrantes qui résultent d'une superposition quantique d'un même objet macroscopique présentant des localisations différentes. Les auteurs, eux-mêmes, considèrent ces tentatives comme des recherches n'ayant pas (encore) atteint le but attendu.

David Bohm a proposé une autre vision des choses en prolongeant l'idée de « l'onde pilote » de Louis de Broglie. Chaque particule a, selon lui, véritablement à chaque instant une certaine position et une certaine vitesse. Bohm accepte cependant la notion de fonction d'onde et l'équation de Schrödinger pour l'évolution de cette fonction Ψ . Les particules obéissent aux équations de la dynamique de Newton, auxquelles la fonction d'onde contribue par une force qui dépend spécifiquement de Ψ . En revanche, la position vraie des particules n'a pas de rétroaction sur la valeur de Ψ , ce qui a amené certains critiques à ne voir dans cette théorie qu'un tableau où la fonction d'onde est peinte par des trajectoires. On a déjà mentionné plus haut les graves difficultés que la théorie rencontre avec les champs : faut-il considérer comme « réel » les champs, ou bien les photons ? Comment traiter le spin avec une élégance comparable à celle de la pure théorie quantique ? Quoi qu'il en soit, il faut noter un résultat remarquable de D. Dürr, S. Goldstein et N. Zanghi (1992a et b) qui ont montré que le mouvement « réel » des particules est tellement complexe qu'on ne peut en tirer qu'une probabilité de présence, et que celle-ci coïncide avec celle de la théorie quantique. Les choses en sont là et Dürr, Goldstein et Zanghi reconnaissent que la théorie n'a pour but et pour résultat que la restauration d'une « ontologie », c'est-à-dire d'une réalité unique à l'échelle microscopique.

Une autre proposition, plus radicale encore, est celle de Hugh Everett (1956) voir aussi De Witt et Graham, 1973. Prenant tout à fait au sérieux le formalisme mathématique quantique, Everett suppose que la réalité physique n'est pas unique mais que de nouvelles « branches » de la réalité, d'autres « univers » apparaissent chaque fois qu'un phénomène quantique analogue à une mesure se produit. Malgré son allure de science-fiction, la logique de cette théorie est apparemment cohérente, à cause de l'effet de décohérence qu'Everett fut un des premiers à pousser dans ses conséquences. La décohérence a en effet pour conséquence de supprimer toute possibilité de communication entre les différentes branches de l'univers. L'idée continue d'avoir des prosélytes.

Ce chapitre conclut l'étude de l'interprétation par son application la plus importante : *la théorie des mesures* qui permet d'exploiter les données expérimentales. La méthode qu'on a suivie, démonstrative en toutes ses parties, permet de donner aux résultats un véritable statut de théorèmes. Ces résultats sont néanmoins, pour l'essentiel, ceux qu'on connaissait déjà dans l'interprétation de Copenhague, à cette différence près qu'ils faisaient alors office de principes indépendants. Trois points saillants distinguent cependant le point de vue nouveau et celui de Copenhague.

1. La méthode déductive permet d'établir l'équivalence logique entre une donnée empirique (c'est-à-dire un phénomène observé) et la propriété microscopique que la mesure est destinée à atteindre. Il peut s'agir par exemple, d'une part, de l'affichage montré par un compteur ou un voltmètre et, d'autre part, de la valeur d'une composante de spin (propriété purement quantique). Cette équivalence apparaissait plutôt dans l'interprétation de Copenhague comme une assimilation *a priori* des deux propriétés, en dépit de leur différence conceptuelle.

2. Du point de vue de la logique quantique, il existe deux notions de probabilités bien distinctes. La première est abstraite et ne sert qu'à structurer la logique (en définissant en particulier l'implication logique). C'est en fait la seule dont nous ayons parlé jusqu'à présent. L'autre type de probabilité a une signification empirique. Elle traduit le caractère aléatoire des données issues d'une série de mesures. Un des résultats notables de ce chapitre sera de montrer l'équivalence de ces deux notions.

3. Les deux interprétations diffèrent nettement dans la signification qu'elles attribuent à la règle de « réduction de la fonction d'onde ». Elles s'accordent sur la validité de cette règle dans la pratique de la physique. Alors que cependant l'interprétation de Copenhague suppose l'existence d'un effet de réduction spécifique, rien de tel n'apparaît dans l'autre méthode. Au lieu d'un effet spécial affectant l'objet mesuré, on ne voit intervenir que l'effet de décohérence qui a lieu dans l'appareil de mesure.

Les méthodes et la plupart des résultats importants ont déjà été vus dans le chapitre 19 et le présent chapitre est essentiellement un sommaire des règles principales accompagné de quelques commentaires. On n'y trouvera que très peu de preuves ou de calculs, mais quelques aspects formels, qui pourraient soulever des questions, sont indiqués en plus petits corps.

Une expérience de mesure

180. On commencera par poser quelques conventions et notations.

Parmi toutes les expériences de physique quantique, on ne s'intéressera explicitement qu'à celles dont le but est de connaître une certaine probabilité. Elles passent par un grand nombre de mesures individuelles destinées à accumuler les données statistiques nécessaires. On supposera que ces mesures individuelles sont faites atome par atome ou particule par particule, et non pas sur plusieurs objets à la fois. L'objet microscopique soumis à la mesure sera désigné par Q .

La mesure est destinée à connaître la valeur d'une certaine observable A associée à ce système Q . Dans le cas simple où l'observable n'a que des valeurs propres discrètes a_n , on souhaite pouvoir affirmer, à la fin de chaque mesure individuelle, que l'une des propositions de la forme « la valeur de A est a_n » a eu lieu. On désignera par $E_Q(n)$ le projecteur correspondant. Si le spectre de A est continu, on se ramènera à la situation précédente, les résultats possibles correspondant alors à une famille de projecteurs $E_Q^{(n)}$, associés à un découpage du spectre de A en autant de domaines que l'expérience peut en distinguer. On supposera aussi que le dispositif de mesure est parfaitement efficace, en ce sens qu'il affiche toujours une certaine donnée après avoir interagi avec Q . Il s'agit évidemment là d'une idéalisation qui devrait être corrigée dans la réalité en prenant en compte les erreurs systématiques et l'efficacité de l'appareillage.

Cela étant, il sera plus facile d'énoncer les résultats de la théorie si l'on distingue trois types de mesure.

- a) Les mesures parfaites (dites encore mesures sans démolition), où lorsque le système Q entre dans l'appareil de mesure dans un état propre de A , il ressort dans ce même état.
- b) Les mesures conservatoires (ou sans destruction), où l'on suppose seulement que le système Q sort intact, sans rien supposer sur son état à la sortie.
- c) Les mesures les plus générales où le système mesuré peut se trouver détruit ou rester irrécupérable.

Chacune de ces catégories inclut celles qui la précède.

Les conditions initiales

181. On pourrait essayer de rester tout à fait général en considérant une expérience complète avec sa préparation, son conditionnement et ses appareils de

mesure, mais cela ne ferait que compliquer inutilement la discussion. On supposera donc simplement que le système mesuré Q est dans un état initial désigné par ρ_Q (ou simplement ρ quand il n'y a pas de risque de confusion).

Le dispositif de mesure, dénoté par M , est décrit par la physique classique. Il affiche une donnée après chaque mesure individuelle (par un voltage dans une mémoire, la position d'une aiguille sur un cadran, une photographie, etc.) Les diverses données possibles sont nettement distinctes, de sorte que les propriétés classiques qui les décrivent s'excluent nettement les unes des autres (au sens de la section 92).

Une hypothèse essentielle est que la décohérence a pleinement agi avant que la donnée soit affichée (ce qui implique évidemment que le fonctionnement de l'appareil soit irréversible). Notons aussi qu'à aucun moment la présence d'un observateur ne va entrer en jeu.

Quand on mentionnera les aspects formels de la théorie, la notation ρ sera réservée à l'état du système complet $Q + M$. On suppose l'absence de corrélations initiales entre Q et M de sorte que $\rho = \rho_Q \otimes \rho_M$. L'appareil est dans une certaine position neutre au début de la mesure (mémoire vide, aiguille à zéro, etc.). Cela est représenté par une certaine propriété classique dont on désigne un projecteur par $E_M^{(0)}$. La position neutre initiale correspond à la condition suivante pour l'opérateur d'état de l'appareil :

$$E_M^{(0)} \rho_M = \rho_M. \quad (21.1)$$

Les diverses données possibles à la fin de la mesure sont également représentées par autant de propriétés classiques (n) associées à des projecteurs $E_M^{(n)}$. Leur exclusion mutuelle s'exprime par l'équation (10.13) où le second membre peut être posé égal à zéro en vertu de l'axiome de Borel pour les probabilités extrêmement petites (cf. section 174) :

$$E_M^{(n)} E_M^{(m)} = \delta_{nm} E_M^{(n)}. \quad (21.2)$$

L'appareil de mesure

182. Une mesure n'est rien d'autre qu'une interaction d'un type particulier entre les deux systèmes Q et M . Sa caractéristique essentielle est que si l'état du système mesuré en entrant dans l'interaction est un état propre $|n\rangle$ de A avec la valeur propre a_n , la donnée n correspondante sera affichée par l'appareil de mesure après l'interaction et un effet total de décohérence. Soulignons qu'il s'agit d'un caractère entièrement attribuable à la dynamique de Schrödinger pour l'interaction entre Q et M . Toute l'habileté des physiciens qui mettent au point des appareils de mesure est de parvenir à réaliser cette condition (éventuellement de manière empirique).

On peut exprimer cette corrélation de la manière suivante : soit $|\psi\rangle$ un état pur initial mathématique du système $Q + M$ tel que, à un instant t_i où la mesure commence, on ait les conditions initiales $A|\psi\rangle = a_n|\psi\rangle$ et $E_M^{(0)}|\psi\rangle = |\psi\rangle$. Si l'on désigne par t_f un instant où la mesure se termine, la condition qui définit un appareil de mesure est :

$$E_M^{(m)} U(t_f, t_i) |\psi\rangle = \delta_{nm} U(t_f, t_i) |\psi\rangle. \quad (21.3)$$

Règles pratiques

183. La description de l'expérience la plus commode consiste à utiliser des histoires. La méthode a déjà été décrite dans le chapitre 19 et l'on se contente donc de souligner les points importants. Les histoires doivent prendre en compte l'état initial (la préparation) ainsi que toutes les données possibles, respectivement aux instants t_i et t_f . Si ces instants ne sont pas bien définis, on les choisit respectivement antérieur et postérieur à la mesure, en faisant appel au bon sens (ce qu'on pourrait contrôler par des conditions de rationalité si l'on voulait être rigoureux, mais aussi pédant).

Rappelons que l'instant t_f est postérieur à l'action de la décohérence, mais celle-ci est si rapide qu'on peut très souvent poser $t_i = t_f$.

On appellera *résultat de la mesure* une propriété quantique du type « la valeur de A à l'instant t_i est égale à a_n ». La différence de nature entre la donnée et le résultat (pour un même indice n) est évidente : la première est une propriété classique qui concerne l'affichage de l'appareil après la mesure alors que le second est une propriété quantique du système mesuré au début de cette mesure (par exemple du genre « la composante z du spin de l'atome Q est $+1/2$ »).

Les histoires mettent en jeu les propriétés initiales $E_Q^{(n)}(t_i)$ et les données $E_M^{(n)}(t_f)$. Chaque histoire est décrite par un opérateur d'histoire C_a et la famille d'histories est complète en ce sens que :

$$\sum_a C_a \rho = \rho, \quad (21.4)$$

(on admet comme évident que cela suffit en l'occurrence, plutôt que la condition plus familière $\sum_a C_a = I$). Les conditions de rationalité (du type de Gell-Mann et Hartle) sont alors :

$$\text{Tr} (C_a \rho C_b^\dagger) = 0, \text{ pour } a \neq b. \quad (21.5)$$

Elles résultent des conditions (21.3) qui caractérisent une mesure, et le calcul est essentiellement le même que dans la section 169. On ne le reprendra pas.

La partie essentielle de l'analyse a déjà été faite au chapitre 19 et l'on se contentera d'énoncer les conclusions. Celles-ci constituent autant de théorèmes qui viennent remplacer les anciens principes de la théorie de la mesure.

Règle 1

Dans une mesure de type général, la donnée est logiquement équivalente au résultat.

Cette équivalence est du type « donnée \Rightarrow résultat » et « résultat \Rightarrow donnée », sous la forme définie par la logique quantique après un calcul des probabilités conditionnelles qui sous-tendent les implications. La règle 1 justifie l'assimilation de la donnée au résultat qui est souvent faite sans excès de réflexion.

La règle 2 ne s'applique qu'à des mesures parfaites (ou encore « sans démolition »).

Règle 2

Si l'on répète immédiatement une mesure parfaite, on obtient le même résultat lors des deux mesures successives.

Le troisième théorème ne fait que répéter la formule de Born pour les probabilités :

Règle 3

La probabilité de la donnée (ou du résultat) n est donnée par :

$$p_n = \text{Tr}_Q(\rho_Q E_Q^{(n)}(t_i)). \quad (21.6)$$

Deux mesures successives

184. La justification de la formule de réduction de la fonction d'onde a déjà été donnée au chapitre 19 à l'occasion d'un cas simple. On a vu qu'elle repose entièrement sur l'effet de décohérence. On se contentera à présent d'indiquer les modifications que le cas général apporte à ce qu'on a constaté dans les sections 167-171.

On considère deux mesures différentes qui sont faites successivement sur le même objet microscopique Q (ce qui suppose que la première mesure conserve cet objet). On reprend les notations déjà employées dans le chapitre 19 : la première mesure, celle d'une observable A de valeurs propres a_n , a lieu entre les instants t_1 et t_1' . La seconde mesure est celle d'une observable B de valeurs propres $b_{m'}$; elle a lieu entre les instants t_2 et t_2' (avec $t_1' < t_2$). On veut calculer la probabilité conditionnelle $p(m'|n)$ pour que la deuxième mesure donne le résultat m' lorsque la première a donné le résultat n .

Le calcul

On peut partir de la formule connue,

$$p(m'|n) = p(n, m')/p(n). \quad (21.7)$$

où $p(n, m')$ est la probabilité conjointe des deux résultats successifs, et $p(n)$ celle du premier résultat. Cela est donné par les probabilités des histoires correspondantes, dont la rationalité se démontre comme dans la section 170, en s'appuyant sur les formules du type (21.3) et sur l'effet de décohérence. La décohérence qui a lieu dans chacun des deux appareils M et M' entraîne aussi que la rationalité reste acquise définitivement, quelles que soient les expériences qui pourraient intervenir par la suite.

L'état total du système $Q + M + M'$ est donné par :

$$\rho = \rho_Q \otimes \rho_M \otimes \rho_{M'},$$

ce qui suppose explicitement l'absence de corrélations initiales entre les états quantiques de M et M' . La probabilité $p(n, m')$ est celle de l'histoire où figurent les deux données considérées, soit :

$$p(n, m') = \text{Tr}(E_{M'}^{(m')}(t_2') E_M^{(n)}(t_1') \rho E_M^{(n)}(t_1) E_{M'}^{(m')}(t_2')).$$

En s'appuyant sur le remplacement des données par les résultats, comme cela été établi dans la section 169, on a également :

$$p(n, m') = \text{Tr}(E_M^{(n)}(t'_1) \rho E_M^{(m')}(t'_1) E_Q^{(m')}(t_2)).$$

Le résultat final est obtenu en explicitant la dépendance des projecteurs dans le temps.

On trouve que la probabilité conditionnelle $p(m'|n)$ peut s'écrire sous la forme :

$$p(m'|n) = \text{Tr}_Q (U(t_2, t'_1) \rho_{\text{red}}(t'_1) U^\dagger(t_2, t'_1) E_Q^{(m')}), \quad (21.8)$$

avec :

$$\rho_{\text{red}}(t'_1) = \frac{\text{Tr}_M(E_M^{(n)}(t'_1) \rho_Q \otimes \rho_M E_M^{(n)}(t'_1))}{\text{Tr}_{M+Q}(E_M^{(n)}(t'_1) \rho_Q \otimes \rho_M E_M^{(n)}(t'_1))}. \quad (21.9)$$

La probabilité conditionnelle (21.8) présente une grande analogie avec la formule de Born (21.6). En effet, le début de la seconde mesure a lieu au temps t_2 , qui joue ainsi le rôle attribué à t_i dans (21.6). En plaçant dans (21.6) l'origine du temps à l'instant t'_1 (alors qu'elle était auparavant posée égale à 0 et non explicitée), le projecteur $E_Q^{(n)}(t_i)$ de (21.6) doit être remplacé par $U^\dagger(t_2, t'_1) E_Q^{(m')} U(t_2, t'_1)$. On reconnaît alors l'identité de (21.8) et (21.6) après une permutation circulaire dans la trace. On peut donc énoncer la

Règle 4

Quand deux mesures ont lieu successivement, la probabilité conditionnelle pour obtenir un résultat m' lors de la deuxième mesure si la première a donné le résultat n est donnée par la formule (21.8). Celle-ci est analogue à la formule de Born, en considérant que l'état du système mesuré est donné par la formule (21.9) à la fin de la première mesure.

La formule (21.9) donnant l'état du système après la première mesure est trop générale pour être vraiment utile. Sa forme compliquée exprime que le premier appareil de mesure a pu profondément perturber l'objet mesuré. On ne proposera qu'un exemple : la première mesure détermine l'impulsion d'une particule chargée Q au moyen d'une chambre à fils M et la particule parvient à sortir de cette chambre avant de subir une deuxième mesure. Les projecteurs $E_M^{(n)}(t'_1)$ traduisent ce qu'est alors devenue la chambre et il est évidemment impossible de les expliciter.

Les résultats se simplifient considérablement si la première mesure est sans destruction, auquel cas l'équation (21.9) se simplifie considérablement. En utilisant le remplacement de $E_M^{(n)}(t'_1)$ par $E_Q^{(n)}(t'_1)$ dont on a vu, à plusieurs reprises, la légitimité au chapitre 19, on voit disparaître toute référence au premier appareil M . La formule (21.9) prend alors une forme qui fut proposée pour la première fois par Lüders :

$$\rho_{\text{red}}(t'_1) = \frac{E_Q^{(n)}(t'_1) \rho_Q E_Q^{(n)}(t'_1)}{\text{Tr}(E_Q^{(n)}(t'_1) \rho_Q E_Q^{(n)}(t'_1))}. \quad (21.10)$$

Enfin, quand la première mesure est sans destruction et que son résultat est une valeur propre non dégénérée a_m , le projecteur $E_Q^{(n)}(t_1')$ projette sur le vecteur à une dimension $|a_m, t_1' \rangle$ et l'on obtient :

$$\rho_{\text{red}}(t_1') = |a_m, t_1' \rangle \langle a_m, t_1'|. \quad (21.11)$$

Le processus soutenu autrefois sous l'égide de l'école de Copenhague avait été très différent car il suivait une voie inductive plutôt que déductive. Von Neumann (1932) avait d'abord obtenu la formule (21.11) pour exprimer l'hypothèse de la réduction postulée par Bohr. Il lui avait suffi pour cela de poser qu'une répétition immédiate de la première mesure devait la confirmer par le même résultat, dans le cas d'une mesure sans démolition et d'une valeur propre non dégénérée. Ce n'est qu'après plus de vingt ans que cela fut généralisé par Lüders avec la formule (21.10). Quant au cas général, personne ne s'était aventuré à l'écrire et l'on se contentait d'invoquer sans cesse les perturbations profondes qu'une mesure impose à un objet quantique.

Probabilités logiques et probabilités statistiques

185. Il faut maintenant revenir sur un point particulièrement important. On se rappelle que les probabilités qu'on a utilisées jusqu'à présent n'avaient été introduites que pour les besoins de la logique. Jamais, à aucun moment avant de parler des mesures, nous n'avons dû encore faire intervenir le fait que les résultats d'une série de mesures se produisent de manière aléatoire. C'est cette question, c'est-à-dire celle de la nature du hasard quantique, qu'on va examiner.

La théorie met en jeu deux types de probabilités, d'une part celles à finalité logique et, d'autre part, celles qui décrivent la distribution aléatoire des résultats de mesures. On va montrer que ces deux notions concordent conceptuellement (elles coïncident évidemment d'un point de vue numérique, d'après le théorème de Gleason de la section 112). En fait, on montrera beaucoup plus en établissant, selon la logique de l'interprétation, le caractère aléatoire des résultats de mesure. Ce caractère apparaît ainsi comme une conséquence des autres principes. Évidemment, on n'ira pas jusqu'à parler de démonstration, car le caractère aléatoire des événements quantiques est premier et irréductible, d'un point de vue empirique. On se contentera de voir là un autre exemple de l'extraordinaire cohésion conceptuelle de la mécanique quantique.

Le hasard peut être combiné de diverses manières avec les principes quantiques. La plus courante est de poser, comme un des principes, que les résultats de mesures sont aléatoires. On a cru devoir l'éviter à cause de l'énorme distance conceptuelle qui sépare les principes de base et la compréhension de ce qu'est un appareil de mesure (il a fallu treize chapitres pour la franchir). Une autre méthode consiste à considérer les histoires d'une famille comme autant d'événements aléatoires (Griffiths, 1984). Le procédé n'est cependant pas sans faille car il revient à traiter les histoires comme autant d'événements *réels*, ce qui est en conflit avec la complémentarité.

Il est heureux qu'on puisse se passer de ces préliminaires en montrant que le caractère aléatoire des mesures est inséparable de la logique. L'idée consiste à considérer un grand nombre de mesures individuelles comme constituant une seule expérience de mesure composite. Au lieu d'un seul système Q interagissant avec un seul appareil de mesure M , on considère un grand nombre N de copies de Q interagissant avec N copies de M . Ou bien encore on considère une série de copies de Q identiquement préparées et interagissant en succession avec le même appareil M . Les calculs sont identiques pour les deux cas. On supposera que les copies de Q sont indépendantes, *au sens de la dynamique*, ce qui signifie qu'elles n'ont aucune interaction entre elles et que leur état global ρ_N est la N -ième puissance tensorielle d'un même opérateur d'état individuel ρ_Q . On désignera par p les probabilités *logiques*, et le problème consiste à étudier les fréquences des données de mesure.

La première propriété importante s'énonce alors ainsi : la fréquence d'observation d'une donnée particulière est donnée par la probabilité de Born (21.6) quand la série de mesures est très longue. Plus exactement, et compte tenu de la vérification des conditions de rationalité qu'on a déjà faite au chapitre 19, on peut dire que le processus de préparation implique logiquement (avec une probabilité logique 1) cette fréquence des données. (On notera que cette affirmation a trait à la réalité empirique puisque aussi bien la préparation que les données sont des phénomènes que la complémentarité n'affecte pas.)

Il est commode de supposer que l'observable A mesurée a des valeurs propres discrètes (a, b, c, \dots). La donnée finale d'une mesure composite consiste en une série de données individuelles $(1, 2, 3, \dots, N)$ où la donnée 1 est celle qui sort en premier et correspond à une des valeurs propres. La série des résultats est représentée par un opérateur de projection $E = E_1 \otimes E_2 \otimes \dots \otimes E_N$, et une légère adaptation du cas individuel montre que la probabilité logique pour obtenir la série en question est donnée par :

$$p(1, 2, \dots, N) = \text{Tr}\{\rho_N E\} = \text{Tr}\{\rho E_1\} \text{Tr}\{\rho E_2\} \dots \text{Tr}\{\rho E_N\}. \quad (21.12)$$

La première égalité résulte de l'équation (21.6) et la seconde est due aux propriétés des produits tensoriels.

La fréquence de la donnée associée à une certaine valeur propre a est le rapport N_a/N , où N_a est le nombre de fois où a apparaît dans la série $\{1, 2, \dots, N\}$. Pour calculer la probabilité logique correspondante $p(N_a)$, on sélectionne les suites $\{1, 2, \dots, N\}$ contenant N_a fois a et l'on somme les probabilités correspondantes (21.12) sur les $N - N_a$ valeurs propres a_i différentes de a . On note que :

$$\sum_{a_i \neq a} E_i = I - E_a,$$

de sorte qu'après cette sommation, on obtient une somme sur des probabilités qui font apparaître N_a facteurs de la forme $\text{Tr}\{\rho E_a\}$ et $N - N_a$ facteurs de la forme $\text{Tr}\{\rho (I - E_a)\}$, lesquels ne diffèrent que par une permutation. La somme sur les permutations fait apparaître un coefficient du binôme et l'on obtient :

$$p(N_a) = \binom{N}{N_a} \text{Tr}\{\rho E_a\}^{N_a} \cdot \text{Tr}\{\rho (I - E_a)\}^{N - N_a},$$

On note que :

$$\text{Tr}\{\rho (I - E_a)\} = 1 - \text{Tr}\{\rho E_a\},$$

de sorte que :

$$p(N_a) = \binom{N}{N_a} p^{N_a} \cdot (1-p)^{N-N_a}, \quad (21.13)$$

la quantité $p = \text{Tr}\{\rho E_a\}$ étant la probabilité de Born pour la valeur propre a .

On introduit la fréquence $\nu = N_a/N$. En utilisant la formule de Stirling pour les factorielles qui entrent dans le coefficient binomial :

$$\binom{N}{N_a} = \frac{N!}{N_a!(N-N_a!)}, N! \sim N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N},$$

on obtient alors :

$$p(N_a) \sim \frac{1}{\sqrt{2N}} \frac{1}{\sqrt{\nu(1-\nu)}} \exp\{-N(\nu \text{Log}(p/\nu) + (1-\nu)\text{Log}((1-p)/(1-\nu))\}.$$

On constate que l'exposant atteint son maximum pour $\nu = p$. Pour mieux comprendre $p(N_a)$, il est commode de poser $\nu = p + x/\sqrt{N}$ et de considérer que x peut varier pratiquement de manière continue avec une distribution de probabilité $p(x) dx$. En développant l'exposant au second ordre en x , on obtient :

$$p(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi p(1-p)}} \exp\{-x^2/[2p(1-p)]\} dx. \quad (21.14)$$

On en déduit immédiatement que la fréquence ne peut s'écarter de la valeur $\nu = p$ avec une probabilité non nulle que par une quantité de l'ordre de $1/\sqrt{N}$. Cela est la forme la plus simple de la loi des grands nombres et montre que $\nu = p$ à la limite $N \rightarrow \infty$.

Il est également facile de montrer que la distribution des événements a tous les caractères d'une distribution aléatoire pour des événements statistiquement indépendants.

Il sera commode de considérer simplement le cas où il n'y a que deux valeurs propres distinctes a et b . Soit alors un certaine suite de données finie, par exemple *aababb*, la fréquence avec laquelle on la verra apparaître dans une très longue suite est la même (avec probabilité logique 1) que la fréquence d'une permutation telle que *abaabb*. Cela résulte des propriétés des produits tensoriels et de la commutativité des projecteurs qui représentent les diverses données dans (21.12). En considérant deux événements successifs (12, 23, 34, etc.) – ou davantage –, on montre aisément de la même manière leur absence de corrélation au sens de la statistique. On peut donc considérer la série de données comme aléatoire.

Ces résultats simples indiquent une forte connexion logique entre le caractère aléatoire des résultats de mesure et les principes fondamentaux de la mécanique quantique. Il serait toutefois déraisonnable d'en conclure imprudemment que le hasard quantique est une conséquence logique inévitable des autres principes. Rien, en effet, ne nous garantit que la construction logique associée aux histoires rationnelles soit la seule concevable. Le résultat n'en est pas moins remarquable, en tant que nouvel exemple de l'étonnante cohérence interne de la mécanique quantique.

Un livre sur l'interprétation ne peut se conclure que par la présentation de quelques expériences. On assiste actuellement à un grand renouveau d'intérêt pour celles qui soumettent les divers aspects de l'interprétation à des vérifications de plus en plus exigeantes et fines. Il est malheureusement impossible d'en décrire plus qu'un très petit nombre car leur subtilité même, mettant en jeu toutes les ressources des méthodes modernes, exige à chaque fois des explications qu'il est difficile de rendre complètes. On a donc pris le parti d'expliquer le principe de certaines expériences sans entrer dans les détails qui ont peu de répercussions sur les idées, même s'ils sont essentiels pour un travail expérimental soigné.

On a retenu trois expériences marquantes pour souligner certains des aspects les plus importants de l'interprétation ou, pourrait-on dire, quelques-unes de celles qui montrent de manière irrécusable ce qu'on est bien forcé d'accepter. Il s'agit d'abord d'une expérience qui permit d'établir pour la première fois l'existence incontestable de l'effet de décohérence, puis d'une expérience montrant l'existence d'états quantiques enchevêtrés à distance et, enfin, de l'observation continue de la fluorescence d'un atome qui montre concrètement l'existence des sauts quantiques et le déroulement réel d'une histoire.

Les références bibliographiques pour les expériences décrites ici, et pour d'autres auxquelles on n'a pu donner place, sont données dans les notes et commentaires en fin de volume.

La décohérence

186. Il fut longtemps impossible d'observer l'effet de décohérence. Trop rapide et trop efficace, il avait toujours terminé son œuvre avant qu'une mesure puisse le saisir en action. Pour qu'une expérience puisse le révéler de manière flagrante, il fallait recourir à un système mésoscopique, se plaçant quelque part entre le microscopique et le macroscopique, entre le quantique et le classique, juste à la

charnière. Un cas très pur de système de ce genre est fourni par certaines ondes électromagnétiques dans une cavité. Encore faut-il pouvoir les mettre dans un état de superposition quantique, constater des interférences et voir celles-ci disparaître en changeant les paramètres. Cela réclame toute une stratégie et une réalisation méticuleuse qu'on va essayer de décrire.

L'expérience qui a montré pour la première fois de manière directe l'effet de décohérence ressemble beaucoup, conceptuellement, à la situation considérée dans le chapitre 19 où le même détecteur montre des comportements totalement différents selon qu'il n'a qu'un seul degré de liberté ou qu'il se couple à un environnement. Dans l'expérience qu'on va décrire, on passe de manière continue d'un cas à l'autre. Un atome est préparé dans un état de superposition quantique de deux de ses niveaux, puis il est « mesuré » par un « appareil » dont la partie collective et l'environnement sont physiquement disjoints. Le rôle qu'avait la position d'une aiguille sur un cadran, dans les exemples académiques du chapitre 19, y est joué par la phase d'une onde électromagnétique quantique, laquelle est placée dans une cavité dont les parois constituent son environnement.

Préparation d'un état superposé de deux niveaux d'un atome

187. L'expérience commence par la préparation d'un atome dans un état de superposition quantique de deux niveaux d'énergie différents. Il s'agit d'un atome hydrogénoïde, le rubidium, dont les états sont caractérisés par les trois nombres quantiques (n, l, m) de l'électron externe. Deux états de ce type vont entrer en jeu que l'on désignera par $|1\rangle$ et $|2\rangle$. La préparation consiste à réaliser une superposition de la forme :

$$|3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle). \quad (22.1)$$

On commence, pour cela, par mettre l'atome dans l'état $|1\rangle$, qui est un état (dit de Rydberg) de nombres quantiques élevés : $n = 50, l = m = 49$. C'est un état presque classique et la fonction d'onde de l'électron est confinée dans un tore très mince de grand rayon (n^2 fois, c'est-à-dire 2 500 fois le rayon d'un atome d'hydrogène normal). Cet état est atteint à partir du fondamental par une série de transitions qu'on ne décrira pas. Le dispositif de préparation exige une chronométrie précise et l'atome en sort avec une vitesse v de 400 ± 6 mètres par seconde et une position bien définie à chaque instant, à 1 mm près.

L'atome ainsi préparé traverse successivement plusieurs sections d'un appareillage que l'on va décrire à mesure que l'atome les rencontre. Le premier dispositif a pour but d'amener l'atome de l'état $|1\rangle$ à l'état de superposition $|3\rangle$. L'état $|2\rangle$ qui figure dans (22.1) est un autre état de Rydberg de nombres quantiques $n = 51, l = m = 50$, la différence d'énergie entre les deux niveaux correspondant ayant une fréquence ν_{12} de 51,099 GHz. On notera que le couplage de l'atome avec une onde électromagnétique résonante est très fort car l'élément de matrice D_{12} du moment dipolaire entre les deux niveaux est proportionnel à n^2 .

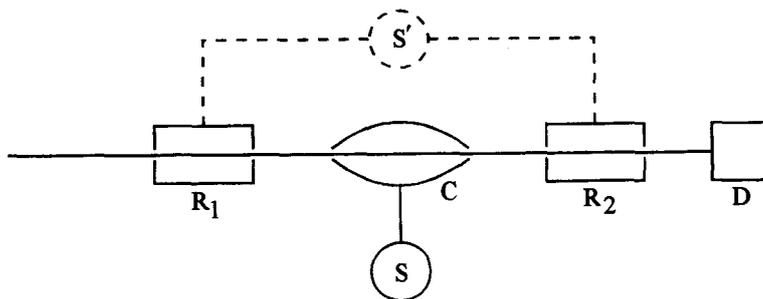


Figure 22.1 Schéma d'une expérience pour l'observation de la décohérence.

Afin de produire l'état 3, on fait passer l'atome au travers d'un champ électromagnétique (polarisé circulairement) qui oscille à la fréquence de résonance ω_{12} . Ce champ ne peut opérer que des transitions entre les états 1 et 2 et occupe une cavité R_1 de longueur L_1 . Cette longueur est choisie pour que la transition désirée $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$ se produise.

La théorie de cette méthode inventée par Ramsey est donnée, par exemple, dans Cohen-Tanoudji (1973), chapitre 13, complément C. L'état de l'atome est à chaque instant une combinaison des deux niveaux 1 et 2. Le champ électrique dans la cavité étant $E = E_0 \cos(\omega_{12}t - \beta)$, l'élément de matrice de l'hamiltonien de couplage entre l'atome et le champ n'a d'éléments de matrice qu'entre les états 1 et 2, de la forme $W_{12} = D_{12}E$, où D_{12} est l'élément de matrice du moment dipolaire entre les états 1 et 2. On peut résoudre explicitement ce problème à deux niveaux avec à cette force périodique et on trouve que l'état de l'atome à un instant t après son entrée dans R_1 est de la forme $c_1(t) |1\rangle + c_2(t) |2\rangle$, avec $c_1(t) = \cos(|W_{12}|t/\hbar)$ et $c_2(t) = \exp(-i\beta) \sin(|W_{12}|t/\hbar)$. On choisit L_1 tel que $|W_{12}|L_1/v\hbar = \pi/4$, de façon que l'atome qui entre dans l'état 1 sorte dans l'état :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + \exp(-i\beta) |2\rangle). \tag{22.2}$$

On peut poser $\beta = 0$ sans inconvénient, mais il sera nécessaire d'y revenir ultérieurement.

Une aiguille idéale

188. L'atome ainsi préparé dans l'état 3 va jouer le rôle d'un système mesuré et on va voir à présent quelle « aiguille » idéale peut servir à cette occasion. Il s'agit en fait d'un champ électromagnétique situé dans une deuxième cavité qu'on désigne par C. L'assimilation théorique entre un champ et une aiguille repose sur la notion d'état quantique « cohérent » d'un mode du champ électromagnétique, qu'il faut maintenant préciser.

En électrodynamique classique, un mode du champ électromagnétique dans une cavité, de fréquence ω , est strictement équivalent du point de vue de la dynamique à un oscillateur harmonique de même fréquence. Le couple de variables conjuguées (q, p) qui décrivent l'oscillateur s'exprime en fonction des champs électrique et magnétique. Ces résultats restent valables en électrodynamique quantique, hormis évidemment que l'oscillateur est quantique. Il est commode d'introduire des observables (q, p) sans dimension telles que $[q, p] = iI$ par un choix judicieux d'unités, ainsi que les opérateurs d'annihilation et de création $a = (1/\sqrt{2}) (q + ip)$ et $a^\dagger = (1/\sqrt{2}) (q - ip)$.

Considérons d'abord le cas d'un champ macroscopique dans ce mode, avec un très grand nombre moyen de photons qu'on désigne par n (ne pas confondre avec le nombre quantique principal de l'atome, dont on ne parlera plus). Le nombre n est la valeur moyenne quantique de l'opérateur $a^\dagger a$. Toutes les quantités physiques qui décrivent le champ sont très grandes dans les unités sans dimension et c'est le cas, en particulier, pour les valeurs moyennes des observables q et p qu'on désignera par (q_o, p_o) . L'opérateur d'annihilation correspond lui aussi à une quantité classique, grande et complexe, d'autant mieux définie que le nombre de photons est plus grand, et égale à $a_o = (1/\sqrt{2})(q_o + ip_o)$. Ce nombre complexe a un module et une phase, le module étant \sqrt{n} et la phase ϕ celle du champ classique ($E \sim \cos(\omega t - \phi)$). Insistons sur le fait qu'il s'agit là de la phase ordinaire, classique et bien définie.

Passons maintenant aux états quantiques cohérents du champ. On peut en préparer un de la manière suivante. On produit un champ macroscopique dans un mode défini à l'intérieur d'une cavité S (S pour « source »), comme précédemment. La cavité C est connectée à S par un atténuateur (par exemple un guide d'onde dont la fréquence de coupure est inférieure à ω : on sait que le champ décroît exponentiellement avec la distance parcourue le long du guide). Classiquement, on dirait qu'en passant d'une cavité à l'autre, le nombre a_o a été réduit par un facteur d'atténuation considérable, sa phase restant inchangée (ou en tout cas bien définie). Les choses sont plus subtiles du point de vue quantique car cette valeur atténuée a cessé d'être grande. Elle peut être de l'ordre de 1, voire petite devant 1, et l'on doit alors tenir compte du fait que a n'est pas un nombre (complexe) mais un opérateur (non autoadjoint).

Les modifications nécessaires sont peu importantes. On montre que l'oscillateur (représentatif du champ quantique dans la cavité C) est dans un état propre de l'opérateur a . En effet, bien que cet opérateur ne soit pas autoadjoint, il n'en admet pas moins des vecteurs propres $|\alpha\rangle$ avec des valeurs propres α qui sont des nombres complexes (en fait n'importe quel nombre complexe) : $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$. Le nombre α est, dans le cas présent, directement proportionnel à a_o et l'atténuation se traduit par $\alpha = Ka_o$, K étant le facteur d'atténuation classique. On dit qu'un tel état est un *état cohérent* du champ, en soulignant par ce mot le fait que la phase, qui est celle du nombre complexe α , continue d'avoir un sens. On continue d'avoir $n = \sqrt{|\alpha|^2}$, pour le nombre moyen de photons dans la cavité C . Les observables quantiques q et p ont des incertitudes de l'ordre de 1 que l'on peut représenter comme l'intérieur d'un cercle de rayon 1 et de centre α dans le plan complexe. On dit que l'état est *mésoscopique* si n est plus grand que 1 sans être très grand : 5 ou 10 par exemple. Il est souvent commode de représenter l'état cohérent par un vecteur de longueur \sqrt{n} faisant un angle ϕ avec l'axe réel et portant en son extrémité un disque de rayon 1 représentant les incertitudes.

Si maintenant on imagine un cadran, en l'occurrence un cercle de rayon \sqrt{n} sur lequel se trouve l'extrémité du vecteur, ce vecteur apparaît comme une aiguille idéale dont la direction indiquerait la phase de l'onde génératrice. Cette position, qu'on prendra comme origine des phases, $\phi = 0$, sera assimilée désormais à la

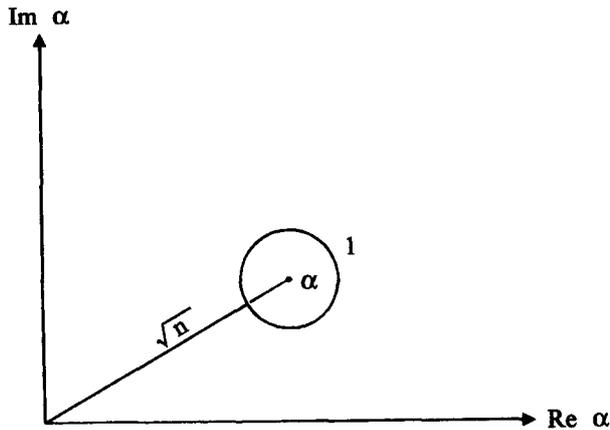


Figure 22.2 Représentation d'un état cohérent.

position neutre indiquée par l'aiguille avant la mesure. Dans l'expérience présente, on prépare ainsi un champ dans un état cohérent pour un mode quantifié de la cavité C , de phase donnée (nulle par convention), avec une valeur mésoscopique de n .

L'expérience idéalisée

189. Voyons ce qui arrive au champ et à l'atome quand celui-ci entre dans la cavité C . On considère d'abord le cas hypothétique où l'atome serait dans l'état 1 à l'entrée de la cavité. Les effets sont très différents de ceux qui se passaient dans la première cavité R_1 car le champ est maintenant quantique et la fréquence n'est plus choisie très proche de la résonance mais seulement voisine. Écrivons-la comme $\omega = \omega_{12} + \Delta\omega$, $\Delta\omega$ étant convenablement choisie.

Pour le lecteur désirant estimer les ordres de grandeur, précisons qu'on appelle fréquence de Rabi celle des oscillations entre les deux états 1 et 2 dans la cavité. Elle est égale dans le cas présent à $|D_{12}| \sqrt{n\omega_{12}} / \hbar \epsilon_0 V$, où V est le volume de la cavité et ϵ_0 la perméabilité du vide (en unités MKSA). Il faut prendre $\Delta\omega$ un peu plus grande que la fréquence de Rabi pour que les résultats suivants s'appliquent.

L'interaction entre l'atome et le champ présente alors trois caractéristiques importantes.

- (1) L'atome reste à tout instant dans l'état 1.
- (2) Le champ reste également dans un état cohérent et conserve le même nombre moyen de photons.
- (3) Après que l'atome soit sorti de la cavité, la phase de l'état électromagnétique cohérent a augmenté d'un angle :

$$\Phi = \frac{1}{\hbar} \frac{L}{v} \frac{\omega}{\Delta\omega} \frac{|D_{12}|^2}{2\epsilon_0 V}, \quad (22.3)$$

où L est la longueur de la trajectoire de l'atome à l'intérieur de la cavité (Haroche, 1994). Cette formule n'est pas en elle-même essentielle, mais elle montre que la phase peut être bien contrôlée par l'expérimentateur.

Un effet analogue se produirait si l'atome était dans l'état 2 en entrant dans la cavité. La seule différence (essentielle pourtant) est que l'état cohérent est alors déphasé de $-\Phi$. Quand l'atome, comme c'est le cas ici, entre dans l'état 3, l'état combiné de l'atome et du champ après la traversée est donné par :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle |\alpha e^{i\Phi}\rangle + |2\rangle |\alpha e^{-i\Phi}\rangle). \quad (22.4)$$

On se retrouve ainsi dans une situation du type « chat de Schrödinger » où l'état de l'aiguille est une superposition quantique de deux indications différentes sur un cadran idéal.

La décohérence

190. Le champ qui demeure dans la cavité C après le départ de l'atome n'est pas un système isolé car il interagit avec les parois de la cavité. Celle-ci est formée de deux miroirs de niobium concaves, refroidis à 0,6 K et supraconducteurs. Les miroirs se font face et constituent l'environnement direct du champ, lequel s'amortit à la fois par interaction directe avec les parois et par des fuites de photons au travers des ouvertures qui permettent le passage des atomes. Le temps d'amortissement du champ est déterminé par le « facteur de qualité » Q de la cavité que l'on sait mesurer, et le coefficient d'amortissement γ est donné par $\gamma = \omega/Q$. L'amortissement s'accompagne inévitablement d'un effet de décohérence dont la mise en évidence constitue le but de l'expérience.

Pour calculer l'effet de décohérence, on ne peut s'appuyer sur l'équation (17.3) car il n'y a pas dans le cas présent de base privilégiée (ce qu'on appelle parfois la *base* des états cohérents n'est pas vraiment une base). Il faut donc recourir à l'équation générale (18.10) qu'il est facile d'exploiter quand l'environnement est assimilable à une collection d'oscillateurs. Or, c'est précisément le cas ici car A.O. Caldeira et A.J. Leggett (1983b, appendice C) ont montré que l'on peut modéliser ainsi un environnement supraconducteur ; il en va de même pour les fuites au travers des ouvertures. L'effet de décohérence n'affecte pas un état pur cohérent de phase donnée mais, dans la superposition (22.4), les termes non diagonaux de l'opérateur densité décroissent au cours du temps d'un facteur $\exp(-2n \sin^2 \Phi \cdot \gamma t)$, l'expression remplaçant dans le cas présent, le facteur exponentiel (17.8).

Si la décohérence était complète et que l'exponentielle puisse être considérée comme nulle, on retrouverait exactement la situation d'une mesure ordinaire telle qu'on l'a discutée au chapitre précédent. Mais n n'est pas grand et il est possible de jouer en plus sur la valeur de Φ pour faire varier l'importance de la décohérence. On est donc dans une situation nouvelle et il convient d'en tirer les conséquences expérimentales.

La réalisation d'interférences

191. Revenons à l'atome, maintenant sorti de la cavité C et laissant derrière lui le champ, qui est en train de subir la décohérence. Cet atome passe ensuite au travers d'une troisième cavité R_2 exactement pareille à R_1 . Il convient, à ce stade,

de tenir compte de tous les termes dans la phase des états de l'atome. La composante $|1\rangle$ est transformée au sortir de R_2 en l'état (22.2) (où β est cette fois la phase du champ dans R_2), alors que la composante $|2\rangle$ devient à la sortie :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(-\exp(i\beta)|1\rangle + |2\rangle). \quad (22.5)$$

On peut remarquer une grande analogie entre le dispositif ainsi réalisé et une expérience d'interférométrie ordinaire. L'effet de la traversée de R_1 ressemble beaucoup à l'action d'un miroir semi-transparent sur un photon. L'atome suit deux « chemins » (dans l'espace de Hilbert...) selon qu'il est dans l'état 1 ou 2. Il est mesuré en chemin par l'aiguille constituée par le champ cohérent et qui peut montrer deux indications différentes : celles-ci équivalent à la présence d'un détecteur qui détecterait par quel bras d'un interféromètre un photon est en train de passer. La seconde cavité R_2 correspond à un second miroir semi-transparent qui rassemblerait les deux chemins en un seul. On s'attend donc à ce qu'il existe des interférences bien marquées quand le détecteur est un système quantique à un seul degré de liberté, comme c'est le cas pour un champ cohérent. (C'est exactement la discussion qui a été faite au chapitre 19.) Si en revanche le détecteur subit une décohérence complète, les interférences doivent disparaître totalement. Or dans le cas présent, la décohérence est incomplète, elle varie selon des conditions contrôlées, et on devrait donc constater que les interférences diminuent et disparaissent graduellement quand on change les paramètres.

Reste à voir se manifester des interférences avec des atomes qui ne suivent des chemins différents que dans l'espace de Hilbert (si on peut s'exprimer ainsi) et non pas dans l'espace du laboratoire. La technique est celle des « franges de Ramsey » consistant à faire varier légèrement la fréquence du champ dans les cavités R_1 et R_2 qui sont toutes deux alimentées par une même source S' , et donc exactement en phase. On a vu comment s'opèrent les transitions des états 1 et 2 vers les états (22.2) et (22.4) quand la fréquence, dans les cavités, est exactement la fréquence de résonance ω_{12} et il faut considérer à présent le cas où cette fréquence est de la forme $\omega_{12} + \Delta\omega'$, avec une fréquence $\Delta\omega'$ petite devant la fréquence de Rabi \hbar/ω_{12} (au contraire de ce qui se passe dans la cavité C). Ce léger déplacement de fréquence n'a aucune répercussion sur le fonctionnement des cellules de Ramsey, qui réalisent toujours aussi efficacement les transitions (22.2), (22.5), mais leur effet sur les phases devient essentiel.

Voyons donc de plus près les facteurs de phase qui figurent dans les vecteurs (22.2) et (22.5). Supposons par exemple qu'on détecte si l'atome est oui ou non dans l'état 1 après la traversée de tout le dispositif. L'atome peut avoir atteint cet état 1 par deux chemins différents, selon qu'il est passé par le « chemin » $1 \rightarrow 1 \rightarrow 1$, ou $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. L'examen des facteurs de phase montre que la seconde amplitude diffère de la première par un facteur $-\exp[i(\beta - \beta')]$ où $(\beta - \beta')$ est la différence de phase entre les ondes dans les cellules R_1 et R_2 , aux deux instants où l'atome entre dans chacune de ces cellules. Comme l'atome se déplace à vitesse constante, la différence de temps T entre ces instants est bien déterminée et l'on a $\beta - \beta' = \Delta\omega' T$. Ainsi, en opérant un balayage étroit en

fréquence dans les deux cavités de Ramsey, on peut effectivement réaliser des interférences. Un détecteur qui détecte l'atome dans l'état 1 en un certain endroit derrière le dispositif, doit révéler des oscillations en fonction de la fréquences $\Delta\omega'$. C'est bien ce qu'on observe quand la cavité intermédiaire C ne contient aucun photon.

L'effet de la décohérence

192. Il est maintenant facile de calculer l'élément de matrice $|1\rangle\langle 1|$ de l'opérateur densité final, en tenant compte de la forme complète (22.4) des états couplés de l'atome et du champ, ainsi que des déphasages introduits par le balayage. L'aiguille idéale n'est pas directement lue (observée), mais on mesure l'état de l'atome, 1 ou 2, à un instant bien déterminé. La probabilité du premier résultat est donnée par :

$$p(1) = \text{Tr}(|1\rangle\langle 1|\rho),$$

où ρ est l'opérateur de tout le système atome + champ cohérent dans C + parois de C , à l'instant où l'atome est finalement mesuré. La trace sur les parois de C fait apparaître un opérateur densité réduit avec sa décohérence. La trace sur l'état de l'atome ne retient que les contributions à l'état du système atome + champ de la forme $|1\rangle\langle\alpha e^{\pm i\Phi} | \langle a e^{\pm i\Phi} | \langle 1|$. En prenant finalement la trace sur les états du champ et en tenant compte des facteurs de décohérence, on obtient :

$$p(1) = \frac{1}{4} [2 - \langle \alpha e^{-i\Phi} | \alpha e^{i\Phi} \rangle e^{-2n \sin^2 \Phi \gamma \tau} \exp(i \Delta\omega' T) - \langle \alpha e^{i\Phi} | \alpha e^{-i\Phi} \rangle e^{-2n \sin^2 \Phi \gamma \tau} \exp(-i \Delta\omega' T)],$$

où τ est le temps qui s'écoule entre l'instant où l'atome quitte la cavité C et l'instant où il est détecté. En écrivant cela, on a tenu compte de l'effet de la décohérence mais non de la dissipation qui se traduirait par le remplacement de α par $\alpha \exp(-\gamma\tau/2)$ dans les états du champ. Tenant compte enfin du produit scalaire entre deux états cohérents,

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \exp[-|\alpha|^2/2 - |\beta|^2/2 + \alpha^* \beta],$$

on obtient une formule explicite pour les interférences attendues. Cette formule n'est pas en elle-même spécialement intéressante, mais elle peut être comparée aux données expérimentales¹. L'expérience montre bien la disparition progressive du contraste des interférences quand on augmente n et $\sin\Phi$, avec un excellent accord entre la théorie et les données.

Le même dispositif peut être amélioré ou adapté pour tester différents aspects de la décohérence, ou encore d'autres problèmes d'interprétation.

1. En fait, on raffine la méthode en envoyant un second atome qui suit le premier après un intervalle de temps τ . Le second atome teste l'état de décohérence de l'onde électromagnétique, ce qui se manifeste par des corrélations entre les deux atomes qu'on observe en fin de parcours.

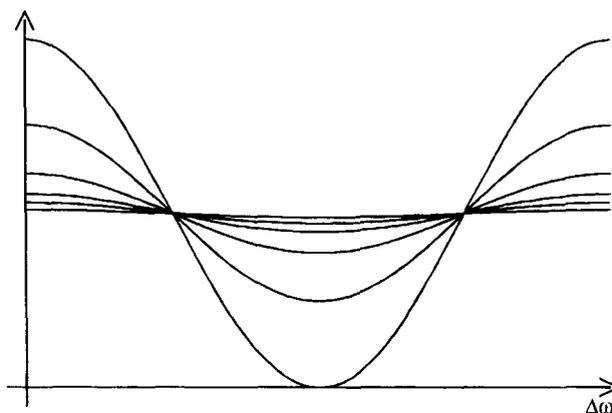


Figure 22.3 L'allure des franges d'interférences observées.

Les états enchevêtrés distants

193. Les états enchevêtrés sont des états de superposition quantique qui mettent en jeu deux systèmes physiques distincts. Leur existence est un de ces aspects spécifiques de la physique quantique devant lesquels l'intuition reste impuissante et dont on ne peut qu'admettre l'existence. Ils sont particulièrement frappants quand il s'agit d'une superposition de deux systèmes séparés par une grande distance, comme on en a vu dans le chapitre 15 avec l'expérience EPR. C'est de cette expérience qu'il va s'agir à présent.

L'article d'Einstein, Podolsky et Rosen exposait une conception de la réalité du monde microscopique que l'on peut traduire, après toutes les discussions qui ont eu lieu à ce sujet, par trois hypothèses.

1. Les prédictions de la mécanique quantique sont correctes.
2. Aucun signal, aucune interaction ne peut se propager plus vite que la lumière.
3. Lorsque deux objets (par exemple deux particules) sont très éloignés l'un de l'autre, on peut parler séparément de certains éléments de réalité physique qui appartiennent à chacun d'eux.

On peut déduire de la conjonction de ces trois hypothèses que la mécanique quantique est incomplète, en ce sens qu'elle ne peut rendre compte des éléments de réalité admis dans l'hypothèse 3. La réponse de Bohr consistait essentiellement à rejeter cette hypothèse, en maintenant que la séparation que cela suppose est exclue : la mécanique quantique n'est pas séparable¹.

Bell relança la question en 1964 en la faisant passer du terrain des idées à celui d'une expérience véritable. Il précisa l'hypothèse de séparabilité en supposant l'existence de « paramètres supplémentaires » locaux (encore appelés *variables*

1. La notion de séparation a malheureusement pris deux significations distinctes dans la littérature sur le sujet. Au sens pris ici, on parle séparément des deux systèmes, on les pense comme étant séparés, individuellement connaissables, sans référence de l'un à l'autre. Dans une autre conception, on suppose qu'une action exercée sur un des systèmes n'influe pas sur l'autre. C'est la différence entre ces deux notions qui explique l'apparente différence entre la discussion présentée ici et celle qui figure dans Omnès (1994a), chapitre 9.

cachées) et en comparant les conséquences de cette hypothèse avec celles de la mécanique quantique.

On prendra pour exemple le cas de deux photons 1 et 2, préparés ensemble avant de se séparer et de partir dans des directions opposées. On effectue sur chacun d'eux une mesure dichotomique oui-non, l'une décidant si le photon 1 est polarisé linéairement dans une direction a et l'autre décidant de même si le photon 2 est polarisé dans une direction b . Les mesures consistent à faire traverser à chaque photon un polariseur (cristal biréfringent) placé devant un détecteur (photomultiplicateur), comme le montre la figure 22. 4.

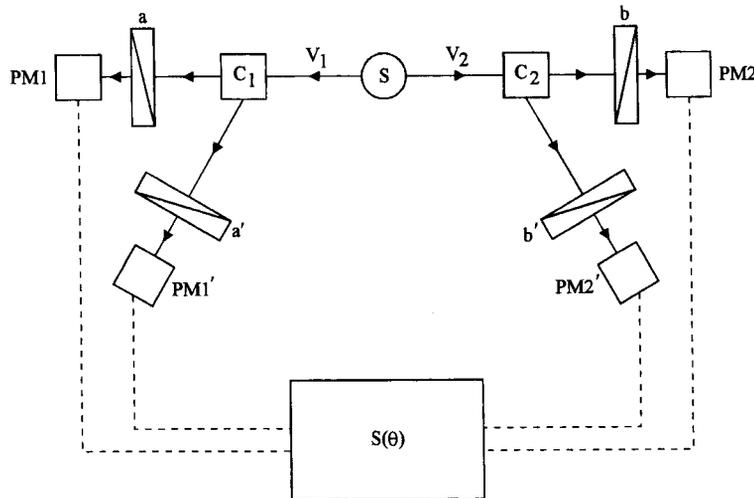


Figure 22.4 Le dispositif expérimental.

Soit alors deux directions perpendiculaires x et y dans le plan normal à la direction de propagation des deux photons (qui vont à l'opposé l'un de l'autre). On désignera par $|x_1\rangle$ l'état du photon 1 polarisé dans la direction x , avec une notation analogue pour la direction y et le photon 2. On supposera que les deux photons sont globalement dans l'état enchevêtré :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|x_1, x_2\rangle + |y_1, y_2\rangle), \quad (22.6)$$

expression qui reste valable quelles que soient les deux directions orthogonales x et y qu'on choisit. (On remarquera une différence de signe sans importance avec l'état (15.1) qui correspondait à deux particules de spin 1/2 au lieu de photons).

Les prédictions de la mécanique quantique sont alors les suivantes.

- Chaque mesure individuelle donne un résultat aléatoire : la réponse est « oui, le photon 1 est polarisé selon la direction a » dans 50 % des cas, et « non » dans 50 % des cas, « oui » pour le photon 2 polarisé dans la direction b dans 50 % des cas, et « non » dans 50 % des cas.

- Mais les mesures conjointes sont fortement corrélées. Si les deux polariseurs sont orientés dans la même direction, les résultats corrélés ne peuvent être que oui-oui et non-non (coïncidences parfaites). Si les deux directions a et b font

un angle α , la fonction de corrélation $C(a, b)$ définie en fonction du nombre N de cas observés par le rapport $[N(\text{oui-oui}) - N(\text{non-non})] / [N(\text{oui-oui}) + N(\text{non-non})]$ est égale à $\cos 2\alpha$.

Pour Einstein, la corrélation totale qui a lieu pour $\alpha = 0$ signifiait qu'il n'existe « réellement » que des paires polarisées dans une même direction, alors que la mécanique quantique ne suppose rien de tel puisqu'elle ne présuppose pas l'existence de propriétés réelles.

Bell introduisit les précisions suivantes.

– Notons λ la propriété réelle qui est commune aux deux photons.

– Alors, le résultat de la mesure faite sur le photon 1 avec un polariseur orienté dans la direction a est donné par une fonction $A(\lambda, a)$ qui ne peut prendre que les valeurs 1 (pour « oui ») et -1 (pour « non »). Cela signifie que le résultat est entièrement déterminé par l'orientation du polariseur et la propriété réelle. De la même manière, le résultat de la mesure sur le photon 2 avec un polariseur dans la direction b est une fonction analogue $B(\lambda, b)$.

– Le (ou les) paramètre(s) λ varie(nt) d'une paire à une autre, ce qui redonne le caractère aléatoire des mesures individuelles, les valeurs de λ ayant une distribution de probabilité $\rho(\lambda)$ positive et normalisée.

L'hypothèse de séparabilité apparaît alors si l'on affirme que $A(\lambda, a)$ et $B(\lambda, b)$ ne dépendent respectivement que de la propriété réelle λ et du polariseur qui intervient localement : un certain polariseur ici pour le photon 1 et un autre là-bas pour le photon 2. Ainsi $A(\lambda, a)$ ne dépend pas de l'orientation b du polariseur situé à une certaine distance.

Bell tira de ces hypothèses les conséquences suivantes. Supposons qu'on fasse l'expérience sur un grand nombre de paires avec deux choix d'orientation distincts (a et a' , b et b') pour chacun des polariseurs. Définissons la combinaison des corrélations observées

$$S = C(a, b) - C(a, b') + C(a', b) + C(a', b'), \quad (22.7)$$

alors on a les inégalités de Bell :

$$-2 \leq S \leq 2. \quad (22.8)$$

On le voit aisément ainsi : soit A une variable aléatoire à laquelle on attribue la valeur 1 si le photon 1 est polarisé dans la direction a , et -1 s'il est polarisé dans la direction orthogonale à a . On définit de même des variables aléatoires B, A' et B' en remplaçant respectivement le photon et la direction $(1, a)$ par $(2, B), (1, A')$ et $(2, B')$. On forme la variable aléatoire $D = A(B - B') + A'(B + B')$. On vérifie immédiatement qu'elle ne peut prendre que les valeurs 2 ou -2 . La quantité (22.7) est la moyenne de D et elle vérifie donc les inégalités (22.8).

Or on a vu qu'en mécanique quantique $C(a, b) = \cos 2\alpha$. Prenons les quatre directions (a, b, a', b') formant un éventail dont les branches font un angle θ , comme dans la figure 22.5. En prenant $\theta = \pi/8$, la mécanique quantique prédit $S = 2\sqrt{2}$, ce qui viole les inégalités de Bell. Elle manifeste ainsi son caractère non séparable.

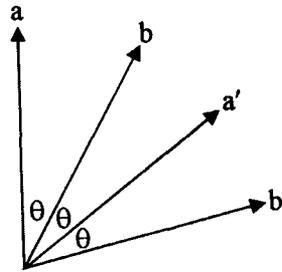


Figure 22.5 Les orientations des polariseurs.

194. L'expérience d'Aspect (1982, a et b) a soumis ces prédictions opposées à la mesure. La principale difficulté était de produire une paire de photons dans l'état enchevêtré (22.6).

On prend pour cela un atome de calcium dans l'état fondamental f . On l'amène à un état excité e par absorption simultanée de deux photons de fréquences différentes produits par deux lasers de fréquences ν' et ν'' . Il s'agit d'un effet non linéaire pour lequel les deux faisceaux lasers doivent être très bien focalisés sur l'atome, leurs fréquences étant telles que la somme $\nu' + \nu''$ soit exactement égale à la fréquence de transition entre les états atomiques f et e avec une précision relative de 10^{-8} . Chaque atome doit aussi être isolé, ce qu'on réalise avec un jet atomique dans une enceinte sous vide. Ces conditions exigeantes constituent évidemment la principale difficulté de l'expérience.

L'atome dans l'état e se désexcite en cascade comme le montre la figure 22.6, produisant un photon 1 de fréquence ν_1 en passant à un état excité intermédiaire r , lequel se désexcite très rapidement en produisant un second photon 2 de fréquence ν_2 .

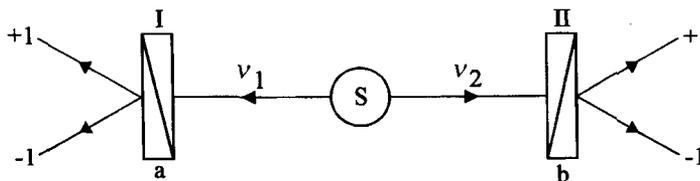


Figure 22.6 La cascade atomique.

Les résultats de l'expérience sont donnés à la figure 22.7 où l'on voit clairement la violation des inégalités de Bell puisque S dépasse nettement les bornes -2 et $+2$ pour certaines plages de valeurs de l'angle θ . Ces résultats s'accordent parfaitement, en revanche, avec les prédictions de la mécanique quantique.

Après la réalisation de cette expérience, on a vu apparaître des spéculations diverses tendant à sauver la séparabilité. Peut-être qu'une information passe d'un détecteur à l'autre ; étant donné que beaucoup de photons se perdent sans être détectés, peut-être que l'efficacité des détecteurs conspire avec les paramètres cachés pour restituer les prédictions quantiques, peut-être...

Mais il ne faut pas oublier que la beauté des hypothèses de Bell tenait à leur lien étroit avec une conception intuitive et limpide de la réalité, et ces tentatives de sauvetage conduisent toutes à une physique qui semblera au moins aussi obscure que la mécanique quantique pour un esprit intuitif et réaliste. Mieux vaut

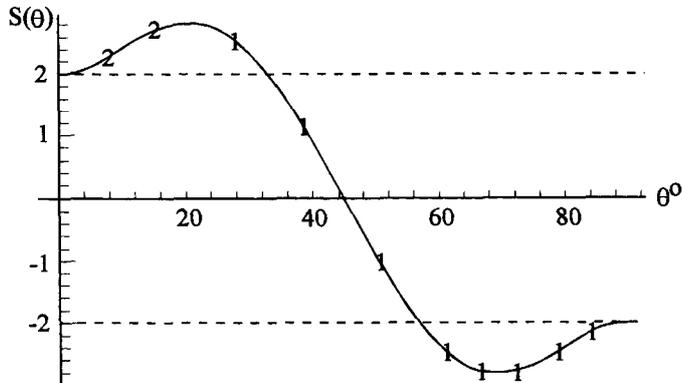


Figure 22.7 Résultats de l'expérience.

donc reconnaître l'évidence : les états enchevêtrés existent et il faut s'accoutumer à l'admettre.

Observation d'un atome unique : histoires et sauts quantiques

195. L'observation continue d'un atome unique est une expérience dont la possibilité n'était même pas envisagée aux débuts de la mécanique quantique. Son intérêt est triple : montrer de manière très concrète une histoire quantique en train de se dérouler ; constater et préciser l'existence des sauts quantiques ; voir se manifester le caractère probabiliste des phénomènes quantiques par un signal aléatoire plutôt que dans une collection statistique de mesures sur des atomes différents.

Les atomes piégés

196. Il est possible de maintenir très longtemps un atome dans un « piège ». Cela a été réalisé aussi bien avec des ions qu'avec des atomes neutres. Un ion peut être enfermé dans une petite enceinte, par exemple un « piège de Paul » représenté à la figure 22.8. Il s'agit d'une boîte métallique dont le fond et le couvercle appartiennent aux deux nappes d'un hyperboloïde de révolution à deux nappes, alors que la paroi a la forme d'une portion d'hyperboloïde à une nappe. Le fond et le couvercle sont soumis à un potentiel électrique $V = U_0 + U_1 \cos(\omega t)$, la paroi étant au potentiel $-V$.

Par un choix judicieux des potentiels statique (U_0) et oscillant (U_1) ainsi que de la fréquence ω , on peut faire en sorte qu'un ion se retrouve soumis à une force électrique qui l'empêche de sortir de la boîte, ou ne lui permet, du moins, de s'échapper qu'après un temps en moyenne très long. Le record en ce domaine atteint une durée de dix mois !

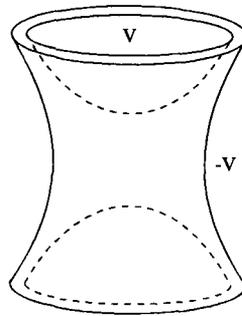


Figure 22.8 Un piège à ions.

On peut également tenir enfermé un atome neutre en le maintenant sous la pression de plusieurs faisceaux laser convergents. Nous ne préciserons pas davantage les techniques utilisées dans ce genre d'expériences, aujourd'hui très développées et raffinées, pour mieux nous concentrer sur ce qu'on peut observer grâce à elles.

Observation d'un seul atome

197. On s'intéressera au cas d'un ion baryum Ba^+ maintenu enfermé dans un piège. On l'éclaire par un laser (de couleur bleue) dont la fréquence est celle de la résonance entre l'état fondamental de l'atome 1 et un état excité 2. Si la lumière du laser est très peu intense, l'atome dans l'état 1 peut passer à l'état 2 par absorption d'un photon. Une fois passé dans l'état 2, l'atome peut se désexciter et retomber dans l'état 1 en émettant un photon. Un atome qui se trouverait dans l'état 2, sans être soumis au laser se désexciterait de manière spontanée en émettant un photon dans une direction quelconque : c'est le phénomène de *fluorescence*. En présence du laser, la probabilité d'émission du photon dans la direction du faisceau laser (et plus précisément dans le même mode que les photons laser) est multipliée par un facteur $(n + 1)$, n étant le nombre de photons dans le laser : c'est le phénomène d'*émission stimulée*.

Quand le rayonnement laser est intense et donc n très grand, la grande majorité des photons est émise de manière stimulée et se perd dans le faisceau laser. Une petite fraction, cependant, peut être émise spontanément dans une autre direction et être éventuellement observée par un détecteur. L'action du laser se traduit d'autre part par une accélération considérable du processus ; en effet, les cascades :

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 + \text{photon dans le mode laser ou un mode fluorescent} \quad (22.9)$$

sont d'autant plus rapides que la lumière laser est plus intense. Ainsi, même si la proportion d'émission spontanée fluorescente est faible devant l'émission stimulée dans le mode laser, beaucoup de photons de fluorescence n'en sont pas moins émis. Dans un cas typique, 1 600 photons de fluorescence peuvent être émis par

seconde, assez pour qu'on puisse prendre une photographie de l'atome et même le voir à l'œil nu comme un point bleu lumineux !

Notons que la cascade (22.9) telle qu'on l'a écrite ne constitue pas une histoire rationnelle de certains événements mais une description intuitive de processus virtuels. On peut le voir en considérant un modèle où il n'y aurait qu'un seul mode, celui du laser, pour le champ électromagnétique. En résolvant l'équation de Schrödinger pour le système atome + champ, on constate que l'état de ce système est une combinaison linéaire d'un vecteur d'état $|1, n\rangle$, où l'atome est dans l'état 1 et la lumière laser contient n photons, et d'un vecteur d'état $|2, n-1\rangle$. C'est ce qu'on appelle un « état habillé » de l'atome, celui-ci étant en quelque sorte vêtu de photons.

Le signal de fluorescence

198. Le signal de fluorescence est constitué par les photons émis en dehors du mode laser et il peut être détecté par des photodétecteurs. La question se pose alors d'interpréter ce signal, c'est-à-dire de l'interpréter grâce au formalisme quantique et voir quelle information on peut en tirer. Les histoires rationnelles constituent le moyen le plus simple pour remplir ce programme.

Mais de quelles histoires s'agit-il ? La manière la plus simple de le voir est sans doute la suivante. Supposons pour simplifier que l'atome soit immobile en un point O . Introduisons une région sphérique S centrée en O , de rayon R et d'épaisseur ΔR , dont les deux calottes traversées par le faisceau laser ont été supprimées comme dans la figure 22.9. Les propriétés dont nos histoires seront constituées sont de la forme « un photon de fluorescence est présent dans la région S à l'instant t_i ».

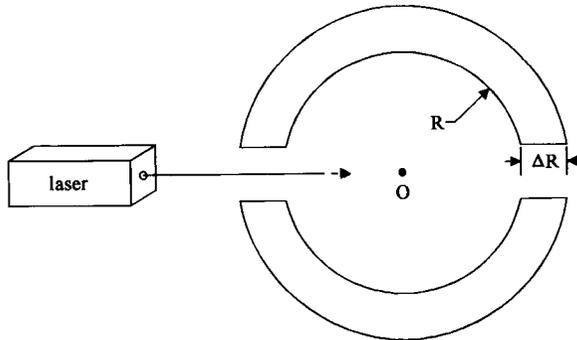


Figure 22.9 La région S permettant de décrire la fluorescence par des histoires.

On a déjà mentionné le fait qu'on sait donner une signification à une telle propriété de localisation d'un photon à l'aide d'un projecteur de l'espace de Hilbert. On notera que cette propriété spécifie bien un événement de fluorescence. En effet, un photon traverse la région S en un temps $\Delta R/c$, ce qui représente la seule latitude dont on dispose quant au choix exact de l'instant t_i caractérisant un événement. Ces propriétés précèdent immédiatement une observation par un détecteur qui les traduit par autant de données. Le langage ainsi introduit, très

proche de celui de l'observation, est préférable à celui qui parlerait plus naïvement de l'instant d'émission du photon en disant que « le photon est émis à l'instant $t_i - R/c$ », pour diverses raisons sur lesquelles on ne s'étendra pas.

Ainsi, les phénomènes d'émission fluorescente, que ce soit en présence ou en l'absence de détecteurs, se ramènent à envisager différentes histoires qui se réfèrent toutes au passage d'une succession de photons dans la région S , à des instants $(t_1, t_2, \dots, t_n, \dots)$. Une famille complète d'histoires s'obtiendrait en faisant varier tous ces instants de manière arbitraire sous la seule condition de respecter un ordre $t_1 < t_2 < \dots < t_n$. On notera qu'il s'agirait alors d'une famille d'histoires, continue, ce qui n'a pas été considéré jusqu'ici. Plutôt que de développer la théorie des histoires, à seule fin d'englober ce cas, il est plus simple de rester dans le cadre déjà connu en sélectionnant les instants parmi un ensemble discret, pareil en quelque sorte à l'ensemble des tic-tac d'une horloge. Il suffit pour cela de prendre tous les instants t_i de la forme $k_i \Delta R/c$, les nombres k_i étant des entiers. On obtient ainsi une famille d'histoires dont la description se réduit à une suite d'indices entiers $(k_1, k_2, \dots, k_n, \dots)$.

Au contraire des cascades (22.9), ces histoires, qui ne font pas intervenir le nombre exact de photons à l'intérieur du rayonnement laser et se réduisent aux seules émissions de fluorescence, constituent une description rationnelle des événements. On le comprend par le fait que deux histoires différentes font nécessairement intervenir un instant t_i parmi tous les tic-tac (ou encore un indice k_i) pour lequel une des histoires signale qu'un photon est présent dans la région S alors que l'autre histoire signale que non. Les projecteurs correspondants sont orthogonaux et on montre que les conditions de rationalité sont satisfaites. En fait, une analyse plus poussée fait apparaître des corrections aux conditions de rationalité qui sont de l'ordre de $\hbar/(E_2 - E_1)T$, T étant le temps moyen qui sépare l'émission de deux photons de fluorescence dans un même mode quantique. Ces corrections sont totalement négligeables et l'on se retrouve ainsi dans une situation déjà fréquemment rencontrée où une description très simple, exprimée en des termes très proches de ceux de l'expérience, est en excellent accord avec les exigences du formalisme quantique.

Probabilités

199. Un signal de fluorescence, détecté par exemple par un photodétecteur, est représenté ainsi de manière commode par une succession de nombres entiers $(k_1, k_2, \dots, k_n, \dots)$, séparés en moyenne par un intervalle $\Delta k = cT/\Delta R$ qui est grand (T désignant à présent l'intervalle de temps qui sépare en moyenne deux détections de photons). Comme chaque histoire a une probabilité bien définie, du fait de la rationalité, la description de toutes ces histoires comme un processus aléatoire parfaitement banal en résulte. Les seules conséquences notables de la mécanique quantique sont la valeur de T , le fait que les divers instants t_i constituent essentiellement un processus aléatoire de Poisson, l'intervalle de temps t entre deux de ces instants successifs ayant la distribution de probabilité $\exp(-t/T)dt/T$, à des corrections près connues pour les très petites valeurs de t .

Ainsi, le caractère probabiliste de la mécanique quantique ne se présente pas dans le cas présent comme une collection statistique d'événements relatifs à de nombreux atomes (puisque'il n'y en a qu'un), mais il se traduit dans la distribution des instants t_i lors d'une longue observation. On a alors affaire à un signal aléatoire, notion qui est bien connue en électronique. En tout état de cause, une observation reste encore décrite directement par une histoire.

Les sauts quantiques

200. Quand Heisenberg avait inventé la mécanique des matrices, il avait également introduit la notion de « saut quantique » en se référant aux idées de Bohr. Un atome peut passer soudainement d'un état 2 à un état 1 (avec émission d'un photon) et il est impossible d'observer une transition continue pendant laquelle l'état initial passe à l'état final. L'observation ne peut constater au mieux que l'existence de ces états extrêmes.

Là où Heisenberg et Bohr affirmaient par principe qu'on ne peut observer que les états initial et final, une construction logique telle que celle des histoires va plus loin, en montrant qu'on ne peut même pas concevoir une transition continue de l'un à l'autre de façon rationnelle. Introduisons pour cela un instant t_1 où l'atome est dans l'état 2 (ou plus exactement : où la propriété $|2\rangle\langle 2|$ a lieu), et un instant t_2 où c'est la propriété $|1\rangle\langle 1|$ qui a lieu ; ajoutons éventuellement un instant t' intermédiaire où on pourrait faire état d'une propriété « transitoire » (à préciser) pour donner un sens à une certaine continuité de la transition.

Lorsqu'on fait cette analyse (Omnès, 1994a, sections 5.8 et 11.1), on obtient les résultats suivants. L'introduction d'une histoire qui inclut ces trois événements ne satisfait aux conditions de rationalité que si l'on a : $t_2 - t_1 \gg \Delta t \equiv \hbar / (E_2 - E_1)$, E_1 et E_2 étant les énergies de l'atome dans les deux états considérés. Quant aux propriétés intermédiaires, elles sont nécessairement banales et ne peuvent se référer qu'à l'atome dans un des deux états 1 ou 2, à condition, de plus, que $t' - t_1 \gg \Delta t$ ou $t_2 - t' \gg \Delta t$. De manière moins formelle, et en reprenant à peu de chose près les mêmes termes que ceux employés par Bohr et Heisenberg, cela signifie qu'on ne peut pas envisager logiquement une transition continue entre l'état initial et l'état final, ni fouiller le processus de désexcitation (ou de désintégration) en deçà d'un intervalle de temps ΔT . Les sauts quantiques sont logiquement inévitables et donc incontournables par l'observation.

On peut effectivement observer les sauts quantiques de l'ion baryum dans l'expérience déjà décrite. On note pour cela l'existence d'un niveau 3 d'énergie intermédiaire entre les états précédents avec $E_1 < E_3 < E_2$. Les nombres quantiques des trois états sont tels que les deux transitions $2 \rightarrow 3$ et $3 \rightarrow 1$ sont interdites ; ce qui signifie que les éléments de matrice correspondants sont très petits et que ces événements ne peuvent être en pratique que très rares. En fait, les transitions $2 \rightarrow 3$ sont si rares dans des conditions normales qu'elles sont totalement négligeables, surtout en présence des transitions induites imposées par le laser bleu.

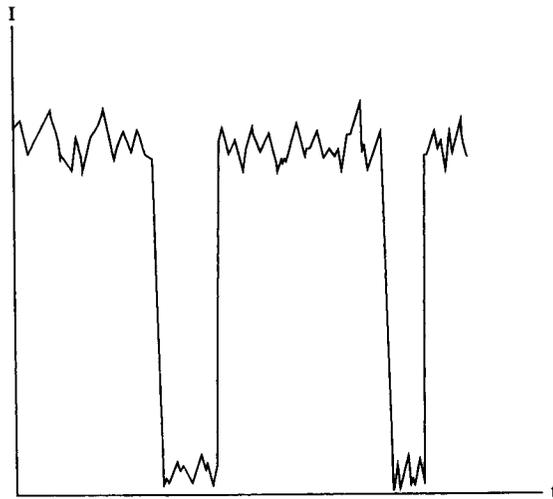


Figure 22.10 – Le signal de fluorescence d'un atome piégé.

La situation devient différente quand un laser rouge, à la fréquence de résonance entre les états 2-3, intervient. De temps en temps, une désexcitation stimulée par ce laser fait passer l'atome de l'état 2 à l'état 3. Il reste longtemps dans cet état intermédiaire puisque la transition $3 \rightarrow 1$ est interdite. Tant que l'atome est dans l'état 3, il n'émet plus de photons de fluorescence et le signal de fluorescence bleu cesse. Les choses en restent là jusqu'au moment où l'atome dans l'état 3 se désexcite et se retrouve dans l'état 1. Le manège bleu peut alors repartir.

Or, ce qu'on vient de décrire à l'instant n'est rien d'autre qu'une histoire, ou du moins un fragment d'histoire. Cette description est parfaitement rationnelle comme on peut le vérifier avec les conditions de Griffiths correspondantes. Cela se traduit expérimentalement par une interruption soudaine du signal de fluorescence comme le montre la figure 22.10, suivie d'une période d'absence de signal. La théorie rend aussi très bien compte, des propriétés statistiques d'occurrence des instants de cessation de la fluorescence et de la durée des périodes sans signal. On ne voit, en fin de compte, et on ne peut logiquement parler que de ces phénomènes qui sont autant de signatures d'un saut quantique.

Notes et commentaires

Première partie

Chapitres 1 à 4

Pour la rédaction de ces chapitres à caractère historique, on s'est appuyé principalement sur Darrigol (1992), Jammer (1964) et Mehra (1973).

Deuxième partie (chapitres 5 à 7)

Nombreux sont les ouvrages auxquels on a pu faire appel. Le plus utile dans la pratique est l'anthologie de Wheeler et Zurek (1983). Voir aussi Bohr (1991), Chevalley (1997), Murdoch (1987), d'Espagnat (1976), Jammer (1966, 1974).

Chapitre 5

Le travail le mieux documenté sur les aspects philosophiques de l'interprétation de Copenhague n'est malheureusement pas encore publié sous forme de livre (Chevalley, 1997). Voir, cependant, Murdoch (1987) et Jammer (1974).

35. L'exemple cité a été suggéré par Serge Caser.

39. Pour la relation d'incertitude entre l'énergie et le temps, d'un caractère assez différent des relations position-moment, voir Aharonov et Bohm (1961) ; Thirring (1979) p. 209 (volume 3) ; Pfeifer et Fröhlich (1996).

40. La réévaluation récente de l'importance des travaux philosophiques de Pauli est due à Catherine Chevalley (1997). Voir Pauli (1936, 1950, 1979).

41. Le principe de complémentarité se trouve dans Bohr (1928a et b).

43. Voir Heisenberg (1930, 1958).

Chapitre 6

Pour la question du réalisme, voir Bell (1987) ; Bitbol (1996) ; d'Espagnat (1976, 1994) ; Jammer (1974) ; Omnès (1994b).

49. Le modèle de von Neumann apparaît dans les dernière pages du livre de von Neumann (1932). Voir sa reproduction dans Wheeler (1983) et une autre présentation dans Omnès (1994a).

53. Pour la théorie de l'onde pilote, voir aussi Bohm (1966, 1993).

55. Voir Bell (1964, 1966, 1987) ; Clauser, Horne, Shimony et Holt (1969) ; d'Espagnat (1976).

Chapitre 7

63. Pour le comportement quantique de systèmes macroscopiques, voir Leggett (1980, 1984, 1987) et Clarke, Cleland, Devoret, Estève et Martinis (1988) pour les expériences correspondantes.

67. Voir aussi Omnès (1994b).

Troisième partie

Chapitre 8

L'exposé des principes de la mécanique quantique est donné, sous diverses formes, dans tous les ouvrages de base. Voir Basdevant (1986, 1996) ; Cohen-Tannoudji, Diu et Laloë (1973) ; Feynman, Leighton et Sands (1965a) ; Landau et Lifschitz (1967) ; Messiah (1995), Merzbacher (1970).

Pour une présentation mathématique de l'espace de Hilbert, voir Reed et Simon (1972).

La méthode des C^* -algèbres a été développée par Haag et Kastler (1964), celle des intégrales sur les chemins est donnée dans Feynman et Hibbs (1965b). On n'a pas tenu compte, dans la présentation des principes, des restrictions apportées par les règles de supersélection de Wick, Wightman et Wigner (1952). On peut également mentionner que le Principe 1 est valable en présence de corrélations d'Einstein, Podolsky et Rosen.

77. La meilleure présentation aux questions de logique (à ma connaissance) se trouve dans l'anthologie commentée de van Heijenoort (1967).

Chapitre 9

On s'appuie dans ce chapitre sur von Neumann (1932). Voir aussi Mittlestaedt (1978) ; Omnès (1994a), chapitre 3.

82. La question de l'existence d'un opérateur de position pour le photon et plus généralement une particule relativiste a été soulevée par Pryce (1948) ; Newton et Wigner (1949) ; Foldy et Wouthuysen (1950). L'un des résultats les

plus remarquables est l'impossibilité de définir un opérateur de position pour les particules de masse nulle et de spin supérieur à $1/2$ (qui incluent le photon et les neutrinos d'hélicité donnée). La question fut analysée de manière définitive par Wightman (1962). Les besoins spécifiques de l'interprétation ont amené l'auteur (Omnès, 1997b) à montrer qu'un projecteur (ou plutôt un ensemble de projecteurs équivalents, comme ils sont définis au chapitre 10) permet cependant de donner un sens à la propriété « le photon est dans un volume V de l'espace à un instant t donné, dans un référentiel donné ». Il est nécessaire d'imposer pour cela que la longueur d'onde du photon soit bornée supérieurement, ce qui est naturel d'un point de vue empirique et passe par l'emploi de quasi-projecteurs.

Chapitre 10

La relation entre la physique quantique et la physique classique n'a cessé d'être approfondie depuis les travaux initiaux de Brillouin, Wentzel et Kramers dans les années trente (voir par exemple Messiah, 1995, chapitre 6). Pour les développements continus en fonctions gaussiennes (états cohérents), voir Hepp (1974a) ; Ginibre et Velo (1979) ; Hagedorn (1980a et b, 1981).

Les méthodes mathématiques les plus puissantes ont été développées dans le cadre de l'analyse microlocale, une théorie mathématique malheureusement encore considérée comme d'accès difficile par beaucoup de physiciens. Voir le livre de Hörmander (1985). Un exposé simplifié et utilitaire est donné dans Omnès (1994a) chapitre 6, appendice A.

88. L'introduction d'une distribution de probabilité de type classique $W(x, p)$ à partir de l'opérateur densité est due à Wigner (1932) et elle fut étendue à la relation entre une observable et une fonction de (x, p) par Weyl (1950). Ce « calcul de Weyl » a été intégré dans l'analyse microlocale par Hörmander (1979). Voir aussi Hörmander (1985), chapitre 18.5. Pour des exposés différents de l'analyse microlocale (souvent aussi appelée calcul pseudo-différentiel), voir Stein (1993) ou Grigis et Sjöstrand (1994).

89 et sq. Les projecteurs introduits ici sont utilisés abondamment dans les livres de Hörmander, Stein, Grigis et Sjöstrand. Certaines de leurs propriétés utiles en physique sont données par Hörmander (1979). L'adaptation aux besoins spécifiques de l'interprétation est due à l'auteur, (Omnès, 1989, 1994a, chapitre 6, 1997a et b). Voir aussi Voros (1978) pour une application des méthodes de Hörmander à d'autres problèmes de physique semi-classique.

Chapitre 11

Les références bibliographiques sont les mêmes qu'au chapitre précédent, auxquelles il convient d'ajouter l'article original d'Egorov (1969) et l'exposé qui en est donné par Grigis et Sjöstrand (1994). Une autre méthode de dérivation de la dynamique classique, fondée sur la décohérence et l'agrainissement (*coarse graining*), est donnée par Gell-Mann et Hartle (1993). Dans la même perspective, le livre de Giulini, Joos, Kiefer, Kupsch, Stamatescu et Zeh (1996), apporte de nombreux développements intéressants et utiles.

98. Pour une description particulièrement lucide de l'expérience de Stern et Gerlach, voir Feynman (1965b).

Chapitre 12

Le langage fondé sur des histoires n'a jamais cessé d'être largement employé par les physiciens pour décrire les expériences. La notion d'histoire n'apparaît cependant clairement que dans un article de Aharonov, Bergman et Lebowitz (1964), où chacune des propriétés introduites est supposée assurée par une mesure, dans l'optique de l'interprétation de Copenhague. La notion d'histoire, telle qu'elle est employée dans le présent livre, a été introduite par Griffiths (1984), voir aussi Griffiths (1987) pour un exposé élémentaire. La structure logique associée a été notée par l'auteur (Omnès, 1988) qui a étendu la méthode à la physique classique. Une reformulation fondée sur le phénomène de décohérence a été introduite par Gell-Mann et Hartle (1991).

La question de la relation des histoires avec des événements réels a été soulevée par une critique de d'Espagnat (1989) rapportée plus en détail dans les commentaires au chapitre 20. Elle a permis (du moins en ce qui concerne les idées du présent auteur) de clarifier le statut des histoires qui apparaissent à présent dans une position médiane. Elles ne décrivent pas des événements réels dans le monde microscopique (ce que personne n'a jamais prétendu) mais elles se révèlent très précieuses pour bien organiser les problèmes complexes posés par l'interprétation. Les histoires n'appartiennent donc pas à la catégorie fondamentale des lois, ni à celle (empirique) des effets, mais à deux autres catégories toutes deux indispensables à la physique, celle des *méthodes* et celle du *langage*.

104. Une construction géométrique des opérations *et*, *ou*, *non*, est donnée dans Omnès (1992, 1994a). Voir aussi Griffiths (1996, 1998) pour une autre approche.

105. La définition de l'implication en physique quantique au moyen des probabilités a été proposée par l'auteur (Omnès, 1988). La vérification, dans ce cas des axiomes de la logique, est donnée dans Omnès (1994a), chapitre 5, appendice B.

Chapitre 13

112. Le théorème de Gleason apparaît chez Gleason (1953). Une démonstration plus claire, mais encore très technique, est fournie par Jost (1976). Des généralisations ont été données par Maeda (1990).

Chapitre 14

Les conditions de rationalité (consistency conditions) ont été introduites par Griffiths (1984). Une autre forme de ces conditions est donnée par Omnès (1990, 1994a, chapitre 4, appendice A). Divers exemples ont été donnés par Griffiths (1984, 1987) et Omnès (1994a), chapitres 5, 6 et 11. Voir aussi Dowker et Kent (1996). Les conditions de rationalité fortes ont été proposées par Gell-Mann

et Hartle (1991) en s'appuyant sur l'effet de décohérence. On a parlé pendant quelque temps de *consistent histories* (à la Griffiths) et de *decohering histories* (à la Gell-Mann et Hartle). Le temps a tranché en faveur de ces dernières pour des raisons d'économie et de commodité. Voir par exemple Griffiths (1996). Une méthode algébrique systématique de reformulation des histoires a été proposée par Isham (1994) ; voir aussi Isham et Linden (1994a) ; Isham, Linden et Schrekenberg (1994b).

120. On peut montrer que les conditions GMH de l'équation (14.4) impliquent l'additivité des probabilités en utilisant par exemple les conditions explicites de Griffiths (1984) et en vérifiant que celles-ci sont vérifiées comme conséquence de (14.4).

122. On trouve une discussion claire des problèmes posés par les interférences dans Feynman (1965a), chapitre 1. Le traitement habituel des interférences par réduction à des « différences de marche » peut être justifié à partir de l'équation de Schrödinger par la méthode d'approximation semi-classique BKW (voir Messiah, 1995, chapitre 6, ou Landau et Lifschitz, 1968, chapitre 7). Pour le photon, il n'existe pas, à notre connaissance, de dérivation directe à partir de l'électrodynamique quantique, bien qu'il s'agisse d'un exercice relativement facile. Une dérivation à partir des équations de Maxwell classiques, qui peut en tenir lieu, est donnée dans le livre de Born et Wolf (1959), chapitre 7.

123. La discussion des logiques « approximatives » est davantage détaillée dans Omnès (1994a), chapitres 5 (section 9) et 8 (sections 10 et 11).

126. La règle d'interprétation a été proposée par l'auteur (Omnès, 1988).

Chapitre 15

Le principe de complémentarité a été présenté par Niels Bohr dans un congrès à Côme en 1927, publié dans Bohr (1928, a et b). Ces articles sont reproduits dans Wheeler et Zurek (1983) ; voir aussi dans ce livre les intéressants commentaires par Rosenfeld et par Heisenberg qui précèdent cette réédition, ainsi que ceux de Jammer (1966), chapitre 7. Le point de vue présenté ici apparaît dans Omnès (1992). Voir également Griffiths (1996, 1998) pour un point de vue légèrement différent.

126. Le théorème de non-contradiction a été annoncé dans Omnès (1992) et sa démonstration donnée dans Omnès (1994a), chapitre 5, appendice C.

127. L'exemple du spin 1/2 est donné par Griffiths (1984).

128. L'exemple du mouvement d'une particule en ligne droite a été traité par N. Mott (1929a) dont l'article reproduit dans Wheeler et Zurek (1983) p. 129.

130. L'exemple du spin 1 est adapté de Aharonov et Vaidman (1991), sous la forme donnée par Kent (1997).

132. La relation proposée ici entre les histoires et une systématisation de la méthode de Heisenberg est adaptée de Griffiths (1984).

133. L'expérience « EPR » a été publiée par Einstein, Podolsky et Rosen (1935), (article reproduit dans Wheeler et Zurek, 1983, p. 138). La réponse de Bohr fut d'abord immédiate (Bohr, 1935a) puis davantage développée (Bohr, 1935b) ;

ces deux références étant également reproduites par Wheeler et Zurek. Une version plus commode de cette expérience, utilisant des spins, fut proposée dans le livre de Bohm (1951), chapitre 22 (reproduit dans Wheeler et Zurek, p. 356). La littérature sur le sujet est considérable (voir, pour une introduction, Selleri, 1994). Le calcul des conditions de rationalité et des implications sur lequel on s'appuie ici est donné explicitement dans Omnès (1994a), chapitre 9. L'utilisation des conditions de cette expérience pour l'étude des « inégalités de Bell » et la mise en évidence des états enchevêtrés distants est indiquée au chapitre 22.

Chapitre 16

La conception du déterminisme présentée ici n'est probablement pas originale. Elle a été donnée sous la forme indiquée ici par Omnès (1990, 1992, 1994a).

137. Pour les prédictions statistiques dans le cas d'un système chaotique, voir Omnès (1994a), chapitre 10.

140. Le point de vue du « renversement des prémisses » est discuté sous un angle de philosophie générale dans Omnès (1994b).

Chapitre 17

L'idée d'une destruction des interférences macroscopiques par l'environnement a été suggérée à plusieurs reprises (voir, par exemple, Heisenberg, 1930, 1962) et elle est envisagée comme un phénomène de bruit par Daneri, Loinger et Prosperi. L'idée de décohérence, telle qu'on la conçoit à présent, apparaît déjà chez van Kampen (1954) et elle est clarifiée de manière définitive par Zeh (1970) (reproduit dans Wheeler et Zurek, p. 342). L'impossibilité de « défaire une mesure » est montrée par Peres (1980) (reproduit dans Wheeler et Zurek, p. 692).

L'effet est ensuite étudié à l'aide de modèles. Le plus utilisé est celui qui représente l'environnement par une collection d'oscillateurs : Hepp et Lieb (1974b) ; Leggett (1987) p. 395 ; Caldeira et Leggett (1983a, 1983b, erratum *Ann. Phys. (NY)*, 153, 445 (1983)) ; Unruh et Zurek (1989) ; Hu, Paz et Zhang (1992) ; Paz, Habib et Zurek (1993) ; Paz (1994). Plusieurs de ces calculs s'appuient sur une méthode explicite de sommation sur les chemins de Feynman donnée par Feynman et Vernon (1963). Un exposé simple des résultats est donné par Zurek (1991). Le rôle des idées et des mises au point de Zurek (1981, 1982) dans les recherches sur la décohérence est important. Voir aussi Emch (1965), Lindblad (1979).

Il faut signaler aussi un modèle stochastique de « diffusion quantique » étudié par Gisin et Percival (1992, 1993) ; Halliwell et Zoupas (1995) ; Scheck, Brun et Percival (1995). Un autre modèle important fut proposé par Joos et Zeh (1985). La décohérence y est due à l'accumulation des déphasages lors des chocs d'un objet macroscopique avec les particules d'un environnement externe. Pour une revue des conséquences de tous ces modèles, on peut consulter le livre de Giulini, Joos, Kiefer, Kupsch, Stamatescu et Zeh (1996).

Une discussion pénétrante de la physique de la décohérence est donnée par Gell-Mann (1996). Pour la mise en évidence expérimentale de l'effet de décohérence, voir le chapitre 22.

Chapitre 18

153. Outre les références aux travaux originaux sur la méthode des projecteurs en théorie des processus irréversibles qu'on donne dans le texte, on peut consulter Balian, Alhassid et Reinhardt (1986).

154. La théorie présentée dans le texte a été proposée par l'auteur (Omnès, 1997c). Sa relation avec la théorie des processus irréversibles a été signalée par Roger Balian, que je tiens à remercier.

156. L'importance de la base de diagonalisation qui est sélectionnée par l'effet de décohérence a été soulignée par Zurek (1981, 1982). Les arguments présentés ici en faveur de l'espace à trois dimensions rejoignent ceux de Zurek (1994), p. 175 et de Gell-Mann et Hartle (1993).

Chapitre 20

Pour mieux évaluer l'intérêt des questions « de fond » esquissée dans ce chapitre, on peut consulter, pour des points de vue divers, Bell (1987) ; Bitbol (1996) ; d'Espagnat (1976, 1994) ; Wigner (1976). L'importance de l'axiome de Borel a été soulignée par Cartier (1995).

Certains lecteurs avertis auront remarqué que les questions relatives à la notion de vérité en physique quantique n'apparaissent pas dans ce livre. Elles ont pourtant fait l'objet d'une intéressante controverse. Ce thème est apparu dans un article de d'Espagnat (1989) qui critiquait l'emploi du mot « vrai » chez Griffiths, tout en reprochant au présent auteur une prudence retorse vis-à-vis de cet emploi. Une réponse, essayant de circonscrire la notion de vrai, fut proposée dans Omnès (1991). Elle distinguait des propositions « vraies » et d'autres simplement « crédibles », en accord avec d'Espagnat (1990). La question fut reprise en profondeur par Dowker et Kent qui détectèrent des erreurs dans mon analyse. Je me rallie entièrement à la critique de Dowker et Kent, et pense à présent qu'on doit réserver la notion de « vrai » aux seules données expérimentales : aux faits. La notion de vérité n'est d'ailleurs pas nécessaire en dehors de ce cas d'application à la fois essentiel, unique et banal. On notera que ceci n'a rien à voir avec une autre critique des histoires qui fut avancée par Kent (1997) et qui est présentée dans le chapitre 15 comme un exemple intéressant pour la théorie, au contraire des prétentions de Kent à y voir une objection dirimante : on a vu qu'elle se ramène à un exemple de complémentarité. On pourra également consulter, sur ces questions, d'Espagnat (1994) et Griffiths (1993).

Chapitre 21

Les règles 1 à 4 ont été données dans Omnès (1992), voir aussi Omnès (1994a), chapitre 8, où des démonstrations plus générales mais moins simples que celles du chapitre 19 sont données.

189. La « formule de Lüders » pour la réduction de l'opérateur d'état dans le cas d'une mesure sans destruction apparaît dans Lüders (1951).

190. Le résultat reliant les probabilités logiques et statistiques est nouveau. On en a donné ici une démonstration très simple. Développée sous une forme plus technique, elle est très proche des méthodes exposées dans un article de Mittlestaedt (1997).

Chapitre 22

Décohérence. L'expérience décrite est celle de Brune, Hagley, Dreyer, Maître, Maali, Wunderlich, Raimond et Haroche (1996).

Je remercie Jean-Michel Raimond et Serge Haroche pour les éclaircissements qu'ils m'ont aimablement apportés.

Les états enchevêtrés distants. Les inégalités de Bell furent proposées par Bell (1964) (reproduit dans Wheeler et Zurek, p. 403) ; voir aussi Bell (1966) (Wheeler et Zurk, p. 397), Clauser, Horne, Shimony et Holt (1969) (*idem*, p. 409). Plusieurs expériences furent réalisées pour mettre ces inégalités à l'épreuve et celle qui est rapportée dans cette section est due à Aspect, Grangier et Roger (1981) ; Aspect, Dalibart et Roger (1982). L'expérience a tranché en faveur de la mécanique quantique, bien que certains considèrent encore des échappatoires que laisserait possibles l'efficacité imparfaite des détecteurs de l'expérience d'Aspect. D'autres tests de même nature ont été envisagés par Horne, Shimony et Zeilinger (1990), par Mermin (1990) et de nombreux autres. L'exposé présenté dans le texte suit de près un article de Aspect et Grangier paru dans Le courrier du CNRS 1984, Images de la physique, supplément n° 55.

L'observation continue d'un atome. L'expérience décrite ici est celle de Dehmelt ; voir Nagourney, Dandberg et Dehmelt (1986). Voir aussi Slauter, Neuhauser, Blatt et Toschek (1986) ; Bergquist, Hulet, Itano et Wineland (1986). Un système de piégeage pour ions est décrit par Paul (1990). Pour le piégeage d'atomes neutres, voir Cohen-Tannoudji et Dalibard (1986) ; King, Knight et Wodkiewicz (1987) ; Zeller, Marte, Walls (1987) ; Reynaud, Dalibard, et Cohen-Tannoudji (1988). La méthode des histoires a été appliquée à ce type d'expériences par Reynaud (1982), sous la forme initiale de Aharonov, Bergman et Lebowitz (1964). La localisation des photons qui est utilisée implicitement dans notre discussion s'appuie sur Omnès (1997b).

Addendum

Tant d'expériences magnifiques ont été réalisées depuis quelques années qu'on aurait voulu les inclure toutes dans ce chapitre. La limitation principale n'était pas tant la place nécessaire que le manque de compétence de l'auteur devant les subtilités et les connaissances que les techniques expérimentales mettent en jeu. Toutes ensemble, elles pourraient constituer un magnifique traité de physique. On se contentera donc d'indications très succinctes et, sans aucun doute, très incomplètes.

Alors que les traités anciens insistaient beaucoup sur le fait qu'une mesure doit nécessairement perturber, et souvent très fortement, l'objet mesuré, il n'en est

rien. S'il est vrai que c'est le cas la plupart du temps, des mesures quantiques sans démolition sont possibles, comme l'ont montré Braginski, Vorontov, et Khalili (1977) ; Braginski, Vorontov et Thorne (1980) ainsi que Unruh (1978).

On a eu également tendance à identifier dans le passé les deux notions de macroscopique et de classique. Cela a été contesté pour la première fois par Leggett (1980, 1984). Les dispositifs proposés par Leggett ont pu être réalisés grâce à une spire supraconductrice portant une jonction Josephson. L'hamiltonien de ce système est équivalent à celui d'une particule dans un potentiel dont le rôle de la position serait joué par le flux magnétique au travers de la spire, et la variable d'impulsion conjuguée serait la différence de potentiel aux bornes de cette spire. (Le fait que la bonne variable soit le flux magnétique tient au fait que c'est une observable microstable, du fait des équations de Maxwell). On peut ainsi réaliser un système présentant une barrière de potentiel étroite, laquelle peut être traversée quantiquement, bien que le dispositif soit de la taille d'un doigt. Le phénomène se manifeste par l'apparition soudaine et aléatoire d'une différence de potentiel aux bornes de la spire.

L'expérience est décrite très clairement dans la revue qu'en donnent Clarke, Cleland, Devoret, Estève et Martinis (1988).

On signalera également :

– Les interférences faites avec des photons différents : Gosh et Mandel (1987) ; Mandel (1983) ; Zou, Wang et Mandel (1991) ; Wang, Zou et Mandel (1991).

– La « gomme quantique » dont les données distinguent essentiellement si un effet de décohérence a eu lieu ou non, sans qu'il y ait de manifestation visible directe, et dont la théorie a été proposée par Scully, Shea et Mc Cullen (1978) ; Scully, Englert et Walther (1981) ; Greenberger et Sin (1989). La réalisation expérimentale est décrite par Shih et Alley (1988) ; Kwiat, Steinberg et Chiao (1992) ; Summhammer, Badurek et Rauch (1992).

– Les mesures avec choix différé où, par exemple, on tire au sort si un détecteur sera actif ou non, alors que la fonction d'onde d'un photon est déjà tout entière à l'intérieur d'un interféromètre. La question qui semblait se poser (s'il eût existé un effet réel de réduction de la fonction d'onde) était de savoir quand celui-ci a lieu. Elle n'est plus de mise à présent et la théorie conclut évidemment que seule compte la situation objective de chacune des parties de l'appareillage au moment où elle agit.

Pour une indication sur cette théorie, la présentation et les analyses pertinentes de Wheeler, voir Omnès (1994a), chapitre 11. Les données sont celles de Helmuth, Zajonc et Walther (1986) ; Alley, Jakubowicz et Wikes (1987).

Ainsi se termine cette brève revue qui ne donne qu'une idée fragmentaire d'un domaine expérimental en pleine activité. L'auteur présente ses excuses aux auteurs trop nombreux qui auraient également pu (ou dû) être cités.

Références

L'abréviation WZ figurant dans certaines références signalent un article reproduit dans le livre de Wheeler et Zurek (1983).

- Aharonov Y., Bergman P.G., Lebowitz J.L. (1964) *Phys. Rev.* **134**, 1410B (cf. [WZ] p. 680).
- Aharonov Y., Bohm D. (1961) *Phys. Rev.* **122**, 1649.
- Aharonov Y., Vaidman L. (1991) *J. Phys. A* **24**, 2315.
- Alley C.O., Jakubowicz O.G., Wikes W.C. (1987) in Proc. 2nd Int. Symp. on the Foundations of Quantum Mechanics, M. Namiki, ed., Physical Society of Japan, Tokyo, p. 36.
- Anderson P.W. (1972) *Science* **177**, 393.
- Araki H., Yanabe M. (1960) *Phys. Rev.* **120**, 622.
- Aspect A., Grangier P., Roger G. (1981) *Phys. Rev. Lett.* **47**, 460.
- Aspect A., Dalibard J., Roger G. (1982) *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1804.
- Balian R., Alhassid Y., Reinhardt H. (1986) *Phys. Reports* **131**, 1.
- Bargmann V. (1954) *Ann. Math.* **59**, 1.
- Bargmann V., Wigner E.P. (1948) *Proc. Nat. Acad. Sc.* **34**, 211.
- Basdevant J.L. (1986) *Mécanique quantique*, Ellipses, Paris.
- Basdevant J.L. (1996) *Problèmes de mécanique quantique*, Ellipses, Paris.
- Bell J.S. (1964) *Physics* **1**, 195 (cf. WZ, p. 403).
- Bell J.S. (1966) *Rev. Mod. Phys.* **38**, 447 (cf. WZ, p. 397).
- Bell J.S. (1975) *Helv. Phys. Acta* **48**, 93.
- Bell J.S. (1987) *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*, Cambridge University Press.
- Bergquist J.C., Hulet R.B., Itano W.M., Wineland D.J. (1986) *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1699.
- Bitbol M. (1994) *Mécanique quantique, une introduction philosophique*, Flammarion.
- Birkhoff G., von Neumann J. (1936) *Ann. Math.* **37**, 818.

- Bohm D. (1951) *Quantum Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Bohm D. (1952) *Phys. Rev.* **85**, 166.
- Bohm D., Bub J. (1966) *Rev. Mod. Phys.* **38**, 453.
- Bohm D., Hiley B.J. (1993) *The undivided universe*, Routledge.
- Bohr N. (1928a) in *Atti del Congresso Internazionale dei Fisici, Como, 1927*, N. Zachinelli, Bologne.
- Bohr N. (1928b) *Nature*, **121**, 580.
- Bohr N. (1935a) *Nature* **136**, 65.
- Bohr N. (1935b) *Phys. Rev.* **48**, 696.
- Bohr N. (1991) *Physique atomique et connaissance humaine*, traduit par E. Bauer et R. Omnès, introduction et notes de C. Chevalley, Gallimard, Folio essais.
- Borel E. (1937) *Valeur pratique et philosophie des probabilités*, Gauthier-Villars, Paris.
- Borel E. (1941) *Le jeu, la chance et les théories scientifiques modernes*, Paris, Gallimard.
- Born M. (1926) *Z. Phys.* **37**, 863 (WZ, p. 52).
- Born M., Wolf E. (1959) *Principles of Optics*, Pergamon, London.
- Braginski V.B., Vorontsov Y.I., Khalili F.I. (1977) *Zh. Eksp. Teor. Fiz* **73**, 1340, (Sov. Phys. JETP **46**, 705 (1977)).
- Braginsky V.B., Vorontsov Y.I., Thorne K.P. (1980) *Science* **209**, 547.
- Brune M., Hagley E., Dreyer J., Maître X., Maali A., Wunderlich C., Raimond J.M., Haroche S. (1996) *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4887.
- Caldeira A.O., Leggett A.J. (1983a) *Physica A* **121**, 587.
- Caldeira A.O. (1983b) *Ann. Phys. (NY)* **149**, 374 & **153**, 445 (Erratum).
- Caroli C., Nozières P. (1995) in *The Physics of sliding Friction*, Persson B.N.J. et Tosatti E.J., édés., Dordrecht, Klüwer.
- Cartier P. (1995) *Pour la Science*, N° 216 (octobre), Rubrique : revue de livres.
- Chevalley C. (1997) *Ontologie et méthode dans la physique contemporaine ; la physique quantique et la fin de la philosophie classique de la nature*. Thèse, Université de Paris X (Nanterre).
- Clarke J., Cleland A.N., Devoret M.H., Estève D., Martinis J.M. (1988) *Science* **239**, 992.
- Clauser J.F., Horne M.A., Shimony A., Holt R.A. (1969) *Phys. Rev. Lett.* **23**, 880 (1969) (cf. WZ, p. 409).
- Cohen-Tannoudji C., Diu B., Laloë F. (1973) *Mécanique quantique*, Hermann, Paris.
- Cohen-Tannoudji C., Dalibard J. (1986) *Europhys. News* **1**, 441.
- Cohen-Tannoudji C., Phillips W.D. (1990) *Phys. Today* **43**, octobre 90.
- Daneri A., Loinger A., Prosperi G.M. (1966) *Nuovo Cimento* **44B**, 119.
- Darrigol O. (1992) *From c-numbers to q-numbers: The classical analogy in the history of quantum mechanics*, Berkeley, University of California Press.
- Davies E.B. (1974) *Comm. Math. Phys.* **39**, 91.

- De Witt B.S., Graham N. (1973) (eds) *The many-worlds interpretation of quantum mechanics*, Princeton U. Press.
- Dirac P.A.M. (1930) *Quantum mechanics*, Oxford U. Press.
- Dowker F., Kent A. (1996) *J. Stat. Phys.* **82**, 1575.
- Dürr D., Goldstein S., Zanghi N. (1992a) *Phys. Lett. A* **172**, 6.
- Dürr D., Goldstein S., Zanghi N. (1992b) *J. Stat. Phys.* **67**, 843.
- Egorov Yu.V. (1969) *Uspehi Mat. Nauk.* **24** : 5, 235.
- Ehrenfest P., Ehrenfest T. (1959) *The conceptual foundations of the statistical approach in mechanics*, Cornell University Press, Ithaca, New York.
- Einstein A., Podolsky B., Rosen N. (1935) *Phys. Rev.* **47**, 777.
- Emch G. (1965) *Helv. Phys. Acta* **38**, 164.
- Emch G. (1972) *G. Helv. Phys. Acta* **45**, 1049.
- d'Espagnat B. (1976) *Conceptual Foundations of Quantum Mechanics*, W.A. Benjamin, Reading (Mass.).
- d'Espagnat B. (1979) *À la recherche du réel, le regard d'un physicien*, Gauthier-Villars.
- d'Espagnat B. (1989) *J. Stat. Phys.* **56**, 747.
- d'Espagnat B. (1990) *Found. Phys.* **20**, 1147.
- d'Espagnat B. (1994) *Le Réel voilé, analyse des concepts quantiques*, Fayard.
- Everett H. (1957) *Rev. Mod. Phys.* **29**, 454.
- Feffermann C. (1983) *Bull. Amer. Math. Soc.* **9**, 129.
- Feynman R.P., Vernon F.L. Jr. (1963) *Ann. Phys. (NY)* **24**, 118.
- Feynman R.P., Leighton R.B., Sands M. (1965a) *The Feynman lectures on physics*, Addison-Wesley, Reading (Mass.) (1965), Volume III.
- Feynman R.P., Hibbs A.R. (1965b) *Quantum mechanics and path integrals*, McGraw-Hill, New York.
- Foldy L.L., Wouthuysen S.A. (1950) *Phys. Rev.* **78**, 29.
- Gell-Mann M. (1996) in *Proceedings of the 4th Drexel Symposium on Quantum Non-Integrability – The Quantum-Classical Correspondence*, Drexel University, 8-11 septembre 1994, D.H. Feng, éd., Philadelphia, International Press.
- Gell-Mann M., Hartle J.B. (1991) in *Complexity, Entropy, and the Physics of Information*, W.H. Zurek, ed., Addison-Wesley, Redwood City, CA .
- Gell-Mann M., Hartle J.B. (1993) *Phys. Rev. D* **47**, 3345.
- Ghirardi G.C., Rimini A., Weber T. (1986) *Phys. Rev. D* **34**, 470.
- Ginibre G., Velo G. (1979) *Comm. Math. Phys.* **66**, 37.
- Gisin N., Percival I.C. (1992) *J. Phys. A* **25**, 5677.
- Gisin N., Percival I.C. (1993) *J. Phys. A* **26**, 2245.
- Giulini D., Joos E., Kiefer C., Kupsch J., Stamatescu O., Zeh H.D. (1996) *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory*, Springer, Berlin.
- Gleason A.M. (1953) *J. Math. Mech.* **6**, 895.
- Gosh R., Mandel L. (1987) *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1903.
- Greenberger D.M., Ya Sin A. (1989) *Found. Phys.* **19**, 679.
- Griffiths R.G. (1984) *J. Stat. Phys.* **36**, 219.

- Griffiths R.G. (1987) *Am. J. Phys.* 55, 11.
- Griffiths R.G. (1993) *Found. Phys.* 23, 1601.
- Griffiths R.G. (1996) *Phys. Rev. A* 54, 2759.
- Griffiths R.G. (1998) *Phys. Rev. A* 57, 1604.
- Grigis A., Sjöstrand J. (1994) *Microlocal Analysis for Differential Operators*, London Mathematical Society Lecture Note Series 196, Cambridge University Press.
- Haag R., Kastler D. (1964) *J. Math. Phys.* 77, 1.
- Haake F. (1973) *Springer Tracts in Modern Physics* 66, 98.
- Hagedorn G. (1980a) *Comm. Math. Phys.* 71, 77.
- Hagedorn G. (1980b) *Comm. Math. Phys.* 77, 1.
- Hagedorn G. (1981) *Ann. Phys. (NY)* 135, 58.
- Halliwell J.J., Zoupas A. (1995) *Phys. Rev. D* 52, 7294.
- Haroche S., Raimond J.M. (1994) in *Advances in atomic, molecular and optical physics. Supplement I*, P. Berman, ed. Academic Press, New York, p. 123.
- Heisenberg W. (1930) *Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie*, Springer. Traduction anglaise : *The physical principles of the quantum theory*, University of Chicago Press, réédité par Dover, New York (1949, 1967).
- Heisenberg W. (1958), *Physics and philosophy, The revolution in modern science*, New York, Harper & Row (Gifford lectures, 1955-56). Trad. française par J. Hadamard, Physique et philosophie, Paris, Albin Michel, 1961.
- Hellmuth T., Zajong A.G., Walther H. (1986) in *New Techniques and Ideas in Quantum Measurement Theory*, D.M. Greenberger, ed. Proc. New York Acad. Sc. 480, 108.
- Hepp K. (1972) *Helv. Phys. Acta* 45, 237.
- Hepp K. (1974a) *Comm. Math. Phys.* 35, 265.
- Hepp K., Lieb E.H. (1974b) *Helv. Phys. Acta* 46, 573 (1974).
- Hörmander L. (1979a) *Comm. Pure Appl. Math.* 32, 359
- Hörmander L. (1979b) *Ark. Mat. (Sweden)* 17, 297. (1979).
- Hörmander L. (1985) *The analysis of partial differential operators*, Springer, Berlin.
- Horne M.A., Shimony A., Zeilinger A. (1990a) *Phys. Rev. Lett.* 62, 2209.
- Horne (1990b) *Nature* 347, 429.
- Hu B.L., Paz J.P., Zhang Y. (1992) *Phys. Rev. D* 45, 2843.
- Isham C.J., Linden N. (1994a) *J. Math. Phys.* 35, 5452.
- Isham C.J. (1995) *J. Math. Phys.* 36, 5392.
- Isham C.J., Linden N., Schreckenberg S. (1994b) *J. Math. Phys.* 35, 6360.
- Jaklevic R.C., Lambe J., Silver A.H., Mercereau J.E. (1964) *Phys. Rev. Lett.* 12, 159.
- Jammer M. (1966) *The conceptual development of quantum mechanics*, McGraw-Hill, New York.
- Jammer M. (1974) *The philosophy of quantum mechanics*, Wiley.
- Jauch J.M. (1964) *Helv. Phys. Acta* 37, 293.
- Joos E., Zeh H.D. (1985) *Z. Phys. B* 59, 229.

- Jost R. (1976) *Studies in Mathematical Physics, Essays in Honor of Valentine Bargmann*, E.H. Lieb, B. Simon et A.S. Wightman, eds., Princeton Series in Physics, Princeton University Press.
- Károlyhazy F. (1966) *Nuovo Cimento A* **42**, 390.
- Károlyhazy F. (1974) *Magyar Fizikai Polyoir Mat.* **12**, 24.
- Károlyhazy F., Frenkel A., Lukacs B. (1986) in *Quantim Concepts in Space and Time*, R. Penrose et C.J. Isham, eds., Oxford, Oxford University Press, pp. 109-28.
- Kent A. (1997) *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2874.
- King M.S., Knight P.L., Wodkiewicz K. (1987) *Opt. Comm.* **62**, 385.
- Kwiat P.G., Steinberg A.M., Chiao R.Y. (1992) *Phys. Rev. A* **45**, 7729.
- Landau L.D., Lifschitz E.M. (1967) *Mécanique statistique*, MIR, Moscou.
- Landau L.D. (1968) *Quantum Mechanics*, Pergamon, Oxford.
- Leggett A.J. (1980) *Progr. Theor. Phys. Supplement* **69**, 1.
- Leggett A.J. (1984) *Phys. Rev. B* **30**, 1208.
- Leggett A.J. (1987) in *Chance and Matter*, Les Houches Session XLVI, 1986, J. Souletie, J. Vannimenus, Stora R. eds. North-Holland, Amsterdam.
- Lévy-Leblond J.M. (1968) *J. Math. Phys.* **4**, 726.
- Lindblad G. (1979) *Comm. Math. Phys.* **65**, 281.
- London F., Bauer E. (1939) *la théorie de l'observation en mécanique quantique*, Hermann, Paris.
- Lüders G. (1951) *Ann. Phys.* **8**, 322.
- Maeda S. (1990) *Rev. Math. Phys.* **1**, 235.
- Mandel L. (1983) *Phys. Rev. A* **28**, 929.
- Mehra J. (1973) *The physicist's conception of nature*, Reidel, Dordrech.
- Mermin N.D. (1990) *Am. J. Phys.* **58**, 731.
- Merzbacher E. (1970) *Quantum Mechanics*, New York, Wiley.
- Messiah A. (1995) *Mécanique quantique*, Paris, réédition Dunod.
- Mittlestaedt P. (1978) *Quantum Logic*, Reidel, Dordrecht.
- Mittlestaedt P. (1997) in *New develoments on fundamental problems in quantum physics*, M. Ferrero and A. van der Merwe eds., Kluwer, Dordrecht, p. 265.
- Mott N. (1929a) *Proc. Roy. Soc. A* **126**, 79.
- Mott N. (1929b) *Proc. Roy. Soc. A* **124**, 440.
- Nagourney W., Dandberg J., Dehmelt A. (1986) *Phys. Rev. Lett.* **57**, 384.
- Naimark M. (1959) *Normed rings*, Norhoff P. Gröningen.
- Nakajima S. (1958) *Progr. Theor. Phys.* **20**, 948.
- Newton T. D., Wigner E.P. (1949) *Rev. Mod. Phys.* **21**, 400.
- Nistico G. (1998) *Assigning probabilities to quantum histories*, preprint 10/98, Dipartimento di Matematica, Universita de Calabria, Arca Vacata di Rende, Italie.
- Omnès R. (1988) *J. Stat. Phys.* **53**, 893.
- Omnès R. (1989) *J. Stat. Phys.* **57**, 357.
- Omnès R. (1990) *Ann. Phys. (NY)* **201**, 354
- Omnès R. (1991) *J. Stat. Phys.* **62**, 841.
- Omnès R. (1992) *Rev. Mod. Phys.* **64**, 339.

- Omnès R. (1994a) *The interpretation of quantum mechanics*, Princeton, Princeton University Press.
- Omnès R. (1994b) *Philosophie de la science contemporaine*, Paris, Gallimard, Folio essais, traduction par A. Sangalli augmentée par l'auteur : *Quantum Philosophy*, Princeton University Press (1999).
- Omnès R. (1997a) *J. Math. Phys.* **38**, 697.
- Omnès R. (1997b) *J. Math. Phys.* **38**, 708.
- Omnès R. (1997c) *Phys. Rev. A* **56**, 3383.
- Paul W. (1990) *Rev. Mod. Phys.* **62**, 531.
- Pauli W. (1933) *Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik, in Handbuch der Physik*, H. Geiger, K. Scheel, eds., Springer, Berlin, vol. 24. Réédité dans *Handbuch der Physik (Encyclopaedia of Physics)*, Springer (1958), vol. 5.
- Pauli W. (1936) *Scientia* **59**, 65.
- Pauli W. (1950) *Experientia* **6**, 72.
- Pauli W. (1979) in *Wissenschaftlicher Briefwechsel mit Bohr, Einstein, Heisenberg u.a.*, K. von Meggen, A. Hermann, V. Weisskopf, eds., Springer, Berlin, I (1979), II (1985), III (1993).
- Paz J.P. (1994) in *Physical Origins of Time Asymmetry*; J.J. Halliwell, J. Pérez-Mercader, W.H. Zurek, eds., Cambridge University Press.
- Paz J.P., Habib S., Zurek W.H. (1993) *Phys. Rev. D* **47**, 488.
- Pearle P. (1976) *Phys. Rev. D* **13**, 857.
- Pearle P. (1984) *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1775.
- Pearle P. (1989) *Phys. Rev. A* **39**, 2277.
- Penrose R. (1996) *Gen. Rel. Grav.* **28**, 581.
- Penrose R., (1997) *The Large, the Small and the Human Mind*, Cambridge, Cambridge University Press.
- Peres A. (1980) *Phys. Rev. D* **22**, 879.
- Peres A. (1995) *Quantum theory : concepts and methods*, Kluwer, Dordrecht.
- Pfeifer P.J., Fröhlich (1996) *Rev. Mod. Phys.* **67**, 759.
- Primas H. (1981) *Chemistry, quantum mechanics and reductionism*, Berlin, Springer-Verlag.
- Pryce M.H.L. (1948) *Proc. Roy. Soc. (London) A* **195**, 62.
- Reed M., Simon B. (1972) *Methods of modern mathematical physics*, Academic Press, New York.
- Reynaud S. (1982) *Ann. Phys. (Paris)* **8**, 315.
- Reynaud S., Dalibard J., Cohen-Tannoudji C. (1988) *IEEE J. Quant. Electr.* **24**, 1395.
- Rosenthal S. (1967) (ed.), *Niels Bohr : His life and work as seen by his friends and colleagues*, Amsterdam, North-Holland.
- Scheck R., Brun T., Percival I.C. (1995) *J. Phys. A* **28**, 5041.
- Schilpp (1949) (édit.) *Albert Einstein, philosopher-scientist*, Library of living philosophers, Evanston, Illinois.
- Schrödinger E. (1935) *Naturwissenschaften*, 807, 823, 844.
- Schwartz L. (1950) *Théorie des distributions*, Hermann, Paris.

- Scully R.O., Shea R., Mc Cullen J.D. (1978) *Phys. Rev.* **43**, 485.
- Scully R.O., Englert B.-G., Walther H. (1981) *Nature* **351**, 111 (1981).
- Selleri M. (1994) *Quantum Paradoxes and Physical Reality*, Dordrecht, Kluwer.
- Sewell G.L. (1967) *Physica* **34**, 493.
- Shih Y.H., Alley C.O. (1988) *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2921.
- Slauter T., Neuhauser W., Blatt R., Toschek E. (1986) *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1696.
- Stein E.M. (1993) *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals*, Princeton University Press.
- Summhammer J., Badurek G., Rauch H., Kischic U. (1992) *Phys. Lett. A* **90**, 110.
- Tanguy A., Nozières P. (1996) *J. Phys. I France* **6**, 1251.
- Thirring W. (1979) *Quantum Mechanics of Atoms and Molecules*, p. 209 (Volume 3 de A Course in Theoretical physics) Springer, Berlin.
- Unruh W.G. (1978) *Phys. Rev. D* **18**, 1764 .
- Unruh W.G., Zurek W.H. (1989) *Phys. Rev. D* **40**, 1071.
- van Kampen N.G. (1954) *Physica* **20**, 603.
- van Heijenoort J. (1967) *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic*, Harvard University Press.
- Vigier J.P. (1956) *Structure des microobjets dans l'interprétation causale de la mécanique des quanta*, Paris, Gauthier-Villars.
- von Neumann J. (1927) *Math. Zeitschr.* **26**, 1.
- von Neumann J. (1932) *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin. Traduction anglaise de R. T. Beyer, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press (1955).
- von Neumann J. (1940) *Ann. of Math.* **41** (2), 94.
- Voros A. (1978) *J. Func. Analysis* **29**, 104.
- Wang L.J., Zou X.Y., Mandel L. (1991) *Phys. Rev. A* **44**, 4614.
- Weinberg S. (1995) *The quantum theory of fields*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K.
- Weyl H. (1950) *Bull. Amer. Math. Soc.* **56**, 115.
- Wheeler J.A., Zurek W.H. (1983) *Quantum theory and measurement*, Princeton University Press (1983).
- Whitten-Wolfe B., Emch G. (1976) *Helv. Phys. Acta* **49**, 45.
- Wick G.C., Wightman A.S., Wigner E.P. (1952) *Phys. Rev.* **88**, 101.
- Wightman A.S. (1962) *Rev. Mod. Phys.* **34**, 845.
- Wigner E.P. (1932) *Phys. Rev.* **40**, 749.
- Wigner E.P. (1939) *Ann. Math.* **40**, 149.
- Wigner E.P. (1952) *Z. Phys.* **131**, 101.
- Wigner E.P. (1959) *Group theory and its application to atomic spectra*, Academic Press, New York.
- Wigner E.P. (1967) *Symmetries and Reflections*, Indiana U. Press, Bloomington.
- Wigner E.P. (1976) *Interpretation of quantum mechanics*, in Wheeler (1983), p. 260.
- Zeh H.D. (1970) *Found. Phys.* **1**, 69 (1970) (cf. WZ, p. 342).
- Zeller, P. Marte M., Walls D.F. (1987) *Phys. Rev. A* **35**, 198.

- Zou X.Y., Wang L.J., Mandel L. (1991) *Phys. Rev. Lett.* **67**, 318.
- Zurek W.H. (1981) *Phys. Rev. D* **24**, 1516.
- Zurek W.H. (1982) *Phys. Rev. D* **26**, 1862.
- Zurek W.H. (1991) *Phys. Today* **44** (10), 36.
- Zurek W.H. (1994) in *Physical Origins of Time Asymmetry*, J.J. Halliwell, J. Pérez-Mercader, W.H. Zurek, eds., Cambridge University Press.
- Zwanzig R. (1960) *Lect. Theor. Phys. (Boulder)* **3**, 106.
- Zwanzig R. (1964) *Physica* **30**, 1109.

Index

Analyse microlocale : 112, 116, 255

Bohr, atome de – : 21
de Broglie : 39

Calcul pseudo-différentiel :
voir « analyse microlocale »
causalité : 56
cellules classiques : 122 ;
régulières : 123
chat de Schrödinger : 66
choix différé : 261
coarse graining : 255
complémentarité : 57, 159, 257
et non-contradiction : 160, 257
conditions de Griffiths : voir
« conditions de rationalité »
conditions de rationalité : 83, 149,
150, 153, 256 ; et décohérence :
154 ; forme de Griffiths : 152 ;
forme de Gell-Mann et Hartle :
152 ; Vérification : 154

Décohérence : 78, 179, 185, 258 ;
son action continue : 206 ; et les
bases privilégiées : 186, 195, 259 ;
coefficient de – : 184 ; et équation
maîtresse : 182, 183, 197 ;
cas d'exception : 80 ; expériences :
235, 260 ; effet dans les histoires,
210 ; limites d'applicabilité : 185 ;
rôle dans les mesures : 201, 204 ;
modèles : 190 ; théories : 189
densité : 192

déterminisme : 52, 169, 170, 258 ;
justification : 171 ; limites de
validité : 174
dynamique : 94 ; classique : 121

Effet Aharonov-Bohm : 72
élément de réalité : 69
émergence : 175
enchevêtrement : 243, 260
environnement : 76
équation de Schrödinger : 40, 95
espace de Hilbert : 62, 90
état cohérent : 113, 238, 255
état d'un système : 137 ; état pur, 142
expérience d'Aspect : 246, 260
expérience d'Einstein, Podolsky et
Rosen : 68, 166, 243, 257
expérience de Leggett : 261
expérience de Stern et Gerlach : 127

Gomme quantique : 261

Hamilton, équations de – : 124 ;
fonction de – : 124
Hamiltonien : 95
histoires : 81, 129, 256 ;
définition : 132 ; familles : 132,
133 ; de Griffiths : 132 ; insensées :
155 ; et logique : 134 ; et mesures
idéales : 165 ; rationnelles : 149.

Implication bayésienne : 136
indiscernabilité : 96
inégalités de Bell : 69, 245, 258, 260

interprétation de Copenhague : 49
 interprétation d'Everett : 72, 223
 invariance relativiste : 93

Logique : 97

Matrices de Heisenberg : 31
 Mott, Trajectoires de – : 71

Nombres complexes : 50

Objectification : 85, 220, 222
 observables : 94, 106 ; collectives : 74 ;
 microstables : 197
 onde pilote : 67, 223, 254
 opérateur densité : voir « opérateur
 d'état »
 opérateur d'état : 137 ;
 et préparation : 140

Paramètre de classicité : 124
 photon : 16 ; sa position : 254
 Planck, constante de – : 12 ;
 distribution de – : 15
 prédicats de von Neumann : 63
 principe d'exclusion : 29
 principe de correspondance : 52, 80,
 124
 probabilités et implication : 135 ;
 d'histoires : 138, 139, 144 ;
 quantiques : 42, 51 ; logiques ou
 statistiques : 231 ; théorie des – :
 99 ; – très petites : 216 ;
 leur unicité : 144
 processus irréversibles : 191, 259
 projecteurs : 102, 113 ;
 équivalents : 118 ;

propriétés, classiques : 109, 113 ;
 exclusives : 118 ; quantiques : 101

Quasi-projecteur : 115

Rayonnement du corps noir : 14
 règles de commutation canoniques :
 35
 réalité : 56, 162, 219, 254 ; son unicity
 classique : 175
 redressement d'un spectre : 115
 réduction (de la fonction d'onde) :
 59, 207, 211, 259 ; cas général :
 229
 relations d'incertitude : 53 ; énergie-
 temps : 253
 Rutherford, son modèle atomique :
 21

Sautes quantiques : 247, 251, 260
 sens du temps : 218
 spin : 29, 94
 superopérateur : 192
 symbole d'un opérateur : 112

Théorème d'Egorov : 122, 125
 théorème de Gleason : 143, 256
 théorie de Bohr-Sommerfeld : 24
 théorie de la mesure : 84, 201, 225 ;
 de Copenhague : 59 ; et décohé-
 rence : 204 ; et modèle de von
 Neumann : 64 ; ses règles : 228

Variables classiques : 110

Wien, loi du déplacement de – : 15